

REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE SAAD DAHLEB BLIDA  
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT D'AERONAUTIQUE



MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES  
Pour L'obtention Du Diplôme D'ingénieur  
D'état en Aéronautique

050/2011  
EX2

Spécialité : Navigation Aérienne  
Option : Installation

## Thème

Algorithmes adaptatifs d'approximation  
des Puissances Itérées basés sur les  
méthodes HR ESPRIT et TLS-ESPRIT  
avec des réseaux ULA et en L

Réalisé par :

GHALEB RAMI

GOURI SID AHMED

Encadré par :

Mlle. DOUDOU.F

PROMOTION 2010-2011

## ملخص

في معالجة الإشارة تلعب إشكالية تقييم المتابعات الفضائية دورا هاما في عدة مجالات حديثة كالرادارات أجهزة البحث البحرية علم الفلك و الاتصالات اللاسلكية... للوصول إلى مصادر ذات شريط ضيق متحرك. العمل المقدم في هذه المذكرة يتمحور حول متابعة اتجاهات الوصول لعدة أهداف ذوي تحرك بطيء سريع وعنيف و التي تتحرك في مدة زمنية معينة و في هذا المجال نقترح تقنيات الخوارزمية للمتابعة " API, FAPI " التي تعتمد على تقنيات ذات التصميم العالي " TLS-ESPRIT, ESPRIT " لعدة أنواع من شبكات الهوائيات لتقييم اتجاهات الوصول في بعد واحد ULA, و لتقييم اتجاهات الوصول في بعدين. التحليل و النتائج التجريبية تحقق تعامل التقنيات الخوارزمية بطريقة صحيحة رقميا. في الحسابات ذات البعدين « FAPI » هي الطريقة المميزة لدقتها وسرعة حسابها.

## Résumé

Dans le traitement du signal le problème d'estimation et de poursuite de sous-espaces joue un rôle très important dans une variété d'applications modernes tel que les radars, les sonars, l'astronomie, la communication mobile... Et cela pour permettre la localisation des sources à bande étroite mobiles.

Le travail présenté dans ce mémoire, se rapporte à la poursuite des directions d'arrivée (DOAs) de plusieurs cibles à mouvement lent, rapide et très rapide qui se déplacent au cours du temps. Dans cette optique, nous proposons des algorithmes adaptatifs de poursuite « FAPI, API » basés sur les méthodes Haute Résolution « ESPRIT et TLS-ESPRIT » pour deux géométries de réseau d'antennes : ULA pour l'estimation des DOAs en une dimension, et en L pour l'estimation des DOAs en élévation et en azimut (2D).

Les analyses et les simulations vérifient que les algorithmes se comportent de façon robuste numériquement.

En deux dimensions, FAPI est la plus intéressante pour sa rapidité et sa précision.

**Abstract**

In Signal processing Subspace estimation and tracking play an important role in a variety of modern applications like radar, sonar, astronomy, wireless communication... end that is for localization of narrow band mobiles sources.

The work presented in this memory refers to the problem of tracking the direction-of arrival (DOA) of multiple moving targets. To this end, we propose an adaptive DOA tracking algorithm « API and FAPI » based on high resolution methods « ESPRIT and TLS-ESPRIT » for three kind of array antennas: ULA for estimation of 1D DOAs, and two-L-shape uniform linear array for estimation of an elevation and azimuth DOAs (2D).

Analyses and simulations verify that the algorithms behave in a numerically robust fashion. In two dimensions, FAPI is the most interesting for its speed and precision.

## إهداء

إلى أمي الحنونة وأبي الغالي وجميع أهلي  
إلى الذين سالت دمائهم الزكية الطاهرة  
من أجل حرية وكرامة الشعب اليمني  
أهدي هذا العمل المتواضع  
سائلاً من المولى عز وجل أن يتقبلهم في عداد  
الشهداء.

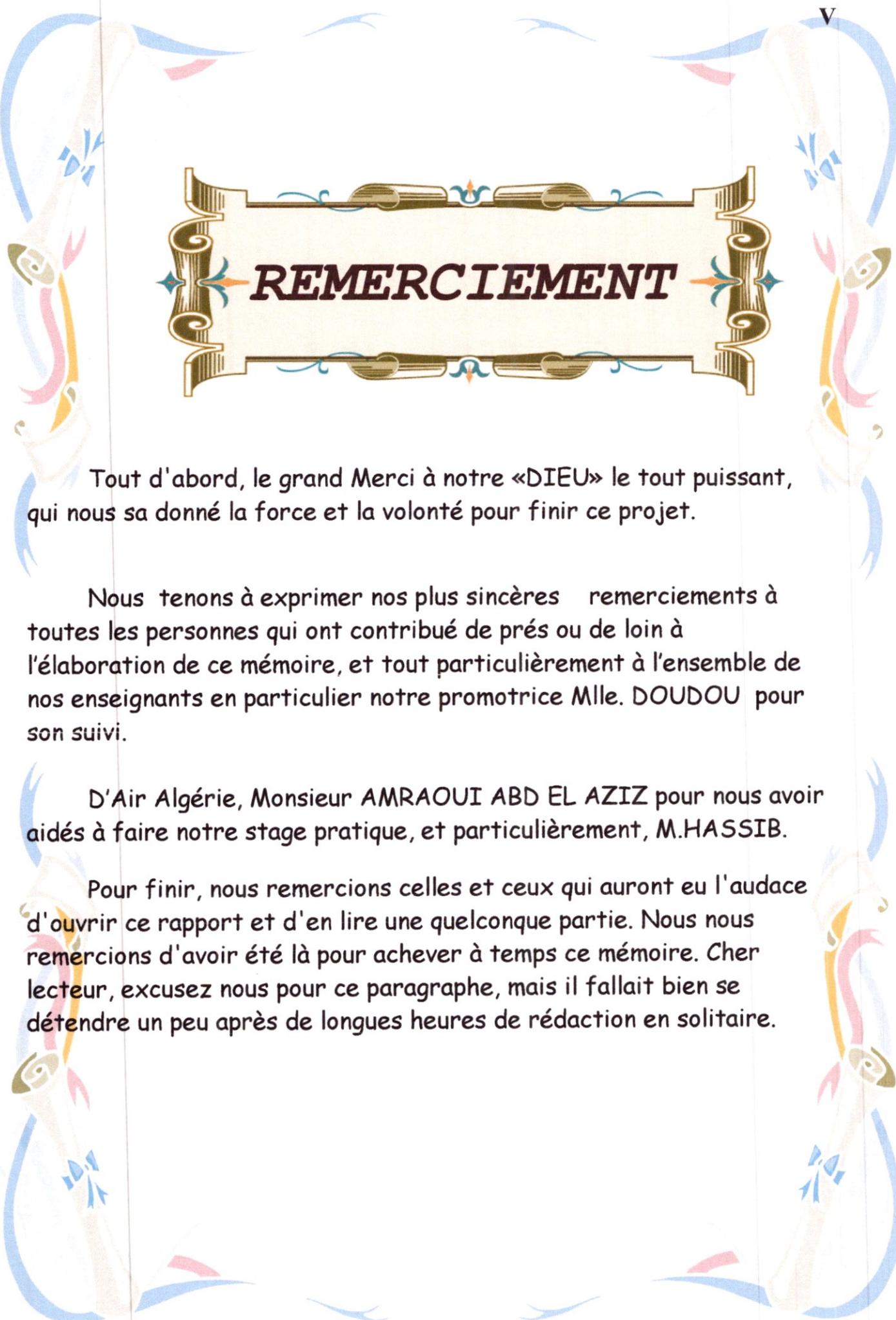
غالب رامي

# DÉIDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

- mon Père et ma Mère qui ont beaucoup souffert pour mes études, pour leurs sacrifices, leur soutien moral et leur encouragement.
- mes frères et mes sœurs, et à toute la famille Gouri.
- Atout mes enseignants,
- A tout mes collègues en commençant par mon binôme RAMI, SOHEIB et tous les autres.
- A tout mes copains de chambre, avec qui j'ai passé un long séjour HAMZA, YOUNES, MUSTAPHA, AEK, BELAID, NASRO, SBAA ET MOUNIR.
- A mes amis, HAMZA, KRIMOU, ZOREIR, SAID...
- Il y a bien d'autres personnes à qui j'ai pensé en écrivant ces lignes, mais je n'ai malheureusement pas pu citer tout le monde..... Pardonnez-moi, et merci tout de même.

*Gouri Sid ahmed*



# REMERCIEMENT

Tout d'abord, le grand Merci à notre «DIEU» le tout puissant, qui nous sa donné la force et la volonté pour finir ce projet.

Nous tenons à exprimer nos plus sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire, et tout particulièrement à l'ensemble de nos enseignants en particulier notre promotrice Mlle. DOUDOU pour son suivi.

D'Air Algérie, Monsieur AMRAOUI ABD EL AZIZ pour nous avoir aidés à faire notre stage pratique, et particulièrement, M.HASSIB.

Pour finir, nous remercions celles et ceux qui auront eu l'audace d'ouvrir ce rapport et d'en lire une quelconque partie. Nous nous remercions d'avoir été là pour achever à temps ce mémoire. Cher lecteur, excusez nous pour ce paragraphe, mais il fallait bien se détendre un peu après de longues heures de rédaction en solitaire.

Liste des figures	1
Liste des tableaux	2
Acronymes	3
Introduction générale	4
<b>Chapitre 1 : Généralité sur les antennes et les réseaux d'antennes</b>	<b>5</b>
1.1.Introduction	5
1.2.Onde électromagnétique	5
1.2.1.Équations de Maxwell	6
1.2.2.Propriétés des ondes Électromagnétique	7
a. vitesse de déplacement	7
b. fréquence et longueur d'onde	7
c. polarisation d'une onde électromagnétique	7
1.2.4.Le spectre électromagnétique	8
1.3.Antenne	9
1.3.1.Définition	9
1.3.2.Le rayonnement de l'antenne	10
1.3.3.Caractéristiques des antennes	10
1.3.3.1.Diagramme de rayonnement d'une antenne	11
1.3.3.2.Directivité d'une antenne	12
1.3.3.3.Gain en puissance d'une antenne	12
1.3.3.4.Surface équivalente d'une antenne de réception	12
1.3.3.5.Impédance d'antenne	13
1.3.3.6.Fréquence d'utilisation	13
1.3.3.7.Ouverture à Mi-Puissance	13
1.3.4.Les différentes catégories d'Antenne	14
1.3.4.1.Les antennes filaires	14
1.3.4.1.1.Le dipôle demi-onde	15
1.3.4.1.2.Antenne cadre	16
1.3.4.2.Les antennes à ondes de fuite ou de surface	16
1.3.4.3.Antenne planaire ou antenne patch	16
1.3.4.4.Les antennes à ouverture rayonnante	17
1.3.4.5.Cornet	17
1.3.4.6.Les projecteurs d'ondes	18
1.3.4.7.Antennes quasi indépendantes de la fréquence	18
1.4.Réseau d'antenne	18
1.4.1.Motivation d'utilisation des réseaux d'antennes	19
1.4.2.Les éléments principaux d'un réseau d'antenne	19
1.4.3.Facteur de réseau	20
1.4.4.Géométries des réseaux d'antennes	21
1.4.4.1.Réseaux linéaires	21
1.4.4.1.1.Effet de la distance $d$	21

1.4.4.1.2.Effet du déphasage $\varphi$ .....	22
a.Principe de réseaux dispersifs .....	22
b. Principe de réseaux linéaires non dispersifs .....	23
1.4.4.2.Réseaux circulaires .....	23
1.4.4.3.Intérêt du réseau circulaire .....	24
1.4.5.Réseau cylindrique .....	24
1.4.6.Réseau plan.....	25
1.4.6.1.Réseau plan régulier .....	25
1.4.6.2.Réseau plan rectangulaire .....	25
1.4.6.3.Réseau plan en L uniforme .....	25
1.4.6.4.Réseau plan raréfié .....	26
1.4.6.5.Formation de faisceaux .....	26
1.4.6.6.Application multifaisceaux .....	27
1.4.6.7.Applications des réseaux d'antennes.....	28
1.5.Conclusion .....	30
<b>Chapitre 2 : Modèle du signal et méthodes d'estimation</b> .....	31
2.1.Introduction.....	31
2.2.Signaux et bruit .....	31
2.4.Modèle de signal .....	38
2.4.1Modèle du signal à une dimension .....	38
2.4.2.Modèle du signal à deux dimensions.....	40
2.4.3.Modèle du signal d'un réseau d'antenne linéaire uniforme en forme de L.....	40
a.Le vecteur de direction du sous réseau selon l'axe Z.....	41
b.Le vecteur de direction du sous réseau selon l'axe X.....	41
2.5.Méthodes des sous espaces. ....	42
2.5.1.Méthode haute résolution ESPRIT .....	42
2.5.1.1.Principe d'estimation pour une antenne double (ESPRIT) dans un ULA.....	43
· Résumé de l'algorithme ESPRIT 1D.....	45
2.5.1.2.Principe d'estimation pour une antenne double (ESPRIT) dans un réseau en L .....	45
2.5.2.Méthode haute résolution TLS-ESPRIT.....	48
2.5.2.1.Principe d'estimation pour une antenne double (TLS-ESPRIT) dans un ULA.....	48
2.5.2.2.Principe d'estimation pour une antenne double (TLS-ESPRIT) dans un réseau en L.....	50
2.6Conclusion .....	54
<b>Chapitre 3 : Approximation de la méthode des puissances itérées</b> .....	55
3.1.Introduction.....	55
3.2.Estimation de l'espace signal.....	55
3.2.1.Algorithme d'itération orthogonale .....	56
3.3.Poursuite de l'espace signal.....	57
3.3.1.Méthode des puissances itérées .....	57
3.3.2.Algorithmes adaptatifs de poursuite de l'espace signal.....	58
3.3.3.Critères de comparaison des algorithmes de poursuite.....	59

3.4.Approximation de la méthode des puissances itérées .....	59
3.4.1.L'approximation par projection.....	60
3.4.2.Approximation des Puissances Itérées .....	61
3.4.2.1.Récurrance pour la matrice $C_{xy}(t)$ .....	61
3.4.2.2.Récurrance pour la matrice $Z(t)$ .....	62
3.4.2.3.Récurrance pour la matrice $W(t)$ .....	62
3.5.Méthode API rapide.....	65
3.5.1.Une solution particulière à l'équation (3.26).....	65
3.5.2.Implémentation rapide de la solution particulière.....	66
3.6.Lien avec les algorithmes PAST et OPAST .....	68
3.7.Conclusion .....	69
<b>Chapitre 4 : Simulations et interprétations des résultats</b> .....	<b>70</b>
4.1.Introduction.....	70
4.2.Présentation des interfaces.....	70
4.2.1.L'interface du réseau linéaire (DOA en 1D) .....	70
4.2.2.L'interface du réseau en L (DOA en 2D) .....	71
4.3.Les organigrammes .....	72
4.3.1.Organigramme de l'interface de 1D .....	73
4.3.2.Organigramme de l'interface de 2D .....	74
4.4.Poursuite des angles d'arrivée en une dimension .....	75
4.4.1.L'algorithme API en réseau linéaire .....	75
a. ESPRIT.....	75
b.TLS-ESPRIT.....	76
4.4.2.L'algorithme FAPI en réseau linéaire .....	78
4.5.Réseau en L.....	81
4.5.1.L'algorithme API en réseau en L.....	81
4.5.2.L'algorithme FAPI réseau en L .....	94
4.6.Comportement de la méthode API vis-à-vis du SNR.....	107
Conclusion générale .....	110
Perspectives .....	111
ANNEXES .....	112
A.1.Théorème central limite .....	112
A.2.Lemmes d'inversion matricielle .....	112
A.3.Orthogonalisation de Gram- Schmidt .....	112
A.4.Approximation de la méthode des puissances itérées .....	113
BIBLIOGRAPHIE .....	116

Figure 1.1 onde électromagnétique .....	5
Figure 1. 2 schéma de la polarisation rectiligne .....	7
Figure 1.3 schéma de la polarisation circulaire .....	7
Figure 1.4 schéma de la polarisation elliptique .....	8
Figure 1.5 Les différents types d'ondes électromagnétiques .....	8
Figure 1.6 Le spectre électromagnétique .....	8
Figure 1.7 Antennes en émission et en réception .....	9
Figure 1.8 Mécanisme de rayonnement .....	10
Figure 1.9 Diagramme en trois dimensions .....	11
Figure 1.10 Diagramme en coordonnées polaires .....	11
Figure 1.11 Diagramme en coordonnées cartésiennes (échelle logarithmique) .....	12
Figure 1.12 Ouverture à mi-puissance .....	14
Figure 1.13 Le dipôle demi-onde .....	15
Figure 1.14 Diagramme de l'antenne demi-onde .....	15
Figure 1.15 Antenne cadre .....	16
Figure 1.16 Antenne Patch .....	16
Figure 1.17 Cornet pyramidal.....	17
Figure 1.18 Cornet conique .....	17
Figure 1.19 Réflecteur parabolique (Réception) .....	18
Figure 1.20 parabolique à lentille (transmission) .....	18
Figure 1.21 Champ lointain de deux dipôles.....	20
Figure 1.22 Effet du nombre de sources .....	22
Figure 1.23 Effet de la phase .....	22
Figure 1.24 Réseau linéaire dispersif .....	23
Figure 1.25 Réseau circulaire de N éléments .....	24
Figure 1.26 Réseau cylindrique .....	24
Figure 1.27 réseau plan rectangulaire régulier .....	25
Figure 1.28 Réseau d'antennes uniforme en L sur 2 axes .....	25
Figure 1.29 Réseau d'antennes uniforme en L sur 3 axes .....	26
Figure 1.30 Réseau plan raréfié .....	26
Figure 1.31 Principe de la formation de faisceaux .....	27
Figure 1.32 Circuit formateur de faisceaux passif associé à un réseau de 4 éléments .....	28
Figure 1.33 schéma synoptique du radar .....	29
Figure 2.1 paire d'éléments de senseurs identiques .....	34
Figure 2.2 Modèle directionnel de gain pour réseau uniforme de 10 éléments .....	36
Figure 2.3 Réseau d'antenne linéaire uniforme (ULA) .....	39
Figure 2.4 Réseau linéaire uniforme sous forme de L .....	40
Figure 2.5 Réseau de M éléments, et deux sous réseaux .....	43
Figure 4.1 l'interface en 1-D .....	71
Figure 4.2 l'interface en 2-D .....	72
Figure 4.3 Organigramme de l'interface de 1-D .....	73
Figure 4.4 Organigramme de l'interface de 2-D .....	74

---

Tableau 1.1 les équations de Maxwell .....	6
Tableau 1.2 bande d'onde électromagnétique.....	9
Tableau 1.3 Types d'antennes .....	14
Tableau 3.1 Algorithme API à fenêtre exponentielle .....	64
Tableau 3.2 Algorithme API rapide à fenêtre exponentielle(FAPI).....	68
Tableau 4.1 Comportement d'API basé sur ESPRIT vis-à-vis du SNR .....	107
Tableau 4.2 Comportement d'API basé sur TLS-ESPRIT vis-à-vis du SNR.....	107
Tableau 4.3 Comportement de FAPI basé sur ESPRIT vis-à-vis du SNR .....	108
Tableau 4.4 Comportement de FAPI basé sur TLS-ESPRIT vis-à-vis du SNR.....	108

---

## Notations

---

Nous avons regroupé ci-dessous les principales notations employées dans les différents chapitres du document. Dans la mesure du possible, nous avons tenté de conserver les mêmes notations d'un chapitre à l'autre.

Dans cette thèse, les lettres minuscules désignent des vecteurs, les lettres majuscules désignent des matrices.

$(.)^T$	Transposé
$(.)^H$	Conjugué hermitien
$(.)^*$	Conjugué de complexe
$\text{Re}(\cdot)$	Partie réelle
$\text{Im}(\cdot)$	Partie imaginaire
$\text{arg}(\cdot)$	Argument de complexe
$\text{diag}(\cdot)$	Matrice diagonale construite à partir d'un vecteur
$\text{dim}(\cdot)$	Dimension d'un espace vectoriel
$\text{det}(\cdot)$	Déterminant d'une matrice carrée
$\hat{\cdot}$	Estimateur d'un paramètre
$E[\cdot]$	Espérance mathématique
$\text{var}(\cdot)$	Variance d'une variable aléatoire
$\text{cov}(\cdot)$	Matrice de covariance d'un vecteur aléatoire
$\lambda_i$	Valeurs propres
$e_i$	vecteurs propres
$\rho_{ij}$	Coefficient de corrélation
$\sigma^2$	Variance du bruit
$\delta_{ij}$	Symbole de kroneiker
$\phi$	Angle d'azimut
$\theta$	Angle d'élévation
$u(t)$	signal utile
$n(t)$	Bruit blanc Gaussien
$x(t)$	Signal d'observation
$a(t)$	Vecteur directionnel
$C$	Matrice de covariance
$\beta$	Facteur d'oubli

---

Pour des raisons de lisibilité, la signification d'une abréviation ou d'un acronyme n'est souvent rappelée qu'à sa première apparition dans le texte d'un chapitre. Par ailleurs, puisque nous utilisons toujours l'abréviation la plus usuelle, il est fréquent que ce soit le terme anglais qui soit employé.

<b>TEM</b>	Transverse Électrique Magnétique
<b>HPBW</b>	Half Power Beam Wide (ouverture mi-puissance)
<b>RF</b>	Radio Fréquence
<b>DOA</b>	Direction Of Arrival (Direction d'arrivée)
<b>SNR</b>	Signal –to-Noise Ratio (Rapport Signal sur Bruit)
<b>ESPRIT</b>	Estimation of Signal Parameter Rotation Invariance Techniques (Estimation des paramètres du signal par les techniques d'invariance rotationnelle)
<b>TLS</b>	Total Least Squares (moindres carrés totaux)
<b>HR</b>	Haute Résolution
<b>ULA</b>	Uniform Linear Array (Réseau linéaire uniforme)
<b>UCA</b>	Uniform Circular Array (Réseau circulaire uniforme)
<b>1D</b>	Une Dimension
<b>2D</b>	Deux Dimensions
<b>PAST</b>	Projection Approximation Subspace Tracking (poursuite de sous-espace d'approximation de projection)
<b>API</b>	Approximated Power Iteration (Approximation de la méthode des Puissances Itérées)
<b>EVD</b>	Eigenvalues Decomposition (Décomposition en Valeurs propres)
<b>SVD</b>	Singular Value Decomposition (Décomposition en Valeurs Singulières)
<b>FAPI</b>	Fast Approximated Power Iteration (API rapide)
<b>NIC</b>	Novel Information Criterion (nouveau critère de l'information)
<b>OPAST</b>	PAST orthonormé
<b>QR</b>	orthogonale-triangulaire
<b>NP3</b>	fast Natural Power (puissance naturelle rapide)
<b>RSB</b>	Rapport Signal à Bruit
<b>YAST</b>	Yet Another Subspace Tracker (autre traqueur de sous-espace)
<b>OEM</b>	Onde Électromagnétique

Poursuivre des cibles mobiles revient à suivre les signaux qu'elles émettent à chaque instant et d'en extraire l'information de directions d'arrivée DOAs. Dans ce travail, nous nous intéressons aux algorithmes utilisés dans ce contexte, dit adaptatif, qui permettent l'estimation et la poursuite de l'espace signal continuellement, et par conséquent, la poursuite des cibles mobiles en une et deux dimensions.

La poursuite de plusieurs cibles, qui se déplacent au cours du temps est un problème qui a été largement étudié ces derniers temps dans le cadre de nombreuses applications civiles et militaires. Parmi les principales applications de ces méthodes de détection des angles d'arrivée (DOA), on peut citer le Radar, téléphonie mobile, l'astronomie, le Sonar, les télécommunications, la navigation par satellite, l'acoustique sous-marine, la séismologie. Dans tous ces domaines, l'utilisateur cherche à détecter la présence d'un signal particulier et à estimer un certain nombre d'informations caractéristiques, en particulier leur direction d'arrivée à l'aide de réseau d'antennes.

Un grand nombre d'algorithmes a été proposé dans la littérature scientifique. Dans le cadre de cette thèse, nous avons étudié les méthodes dites d'approximation des puissances itérées API et sa version rapide FAPI pour l'estimation adaptative du sous-espace signal à travers quatre chapitres répartis comme suit :

Le premier chapitre abordera des généralités sur les antennes, telles que les caractéristiques et les différents types avec en particulier les réseaux d'antennes.

Le second porte sur le modèle du signal et les méthodes de haute résolution ESPRIT et TLS-ESPRIT qui reposent sur les propriétés particulières de la matrice de covariance du signal. Ces méthodes permettent de séparer l'espace des données en deux sous-espaces, l'espace signal engendré par les sinusoides, et l'espace bruit qui est son complémentaire orthogonal. Elles d'estimation seront appliquées à la suite des algorithmes API et FAPI pour l'estimation de l'élévation en 1D, dans un premier lieu, puis l'élévation et l'azimut dans un second lieu.

Le chapitre 3 introduit ensuite un nouvel algorithme rapide de poursuite de l'espace signal dérivé de la méthode des puissances itérées, baptisé Approximation de la méthode des Puissances Itérées (API). Cet algorithme permet l'estimation des signaux dont les paramètres ne sont plus constants, mais varient au cours du temps, représenté par les vecteurs propres, correspondant aux  $r$  valeurs propres les plus dominantes. Une fois ces dernières estimées, elles seront utilisé par les algorithmes d'estimation de la DOA ESPRIT et TLS-ESPRIT.

Les performances des différents algorithmes abordés dans ce travail sont étudiées à l'aide de simulations présentées dans le dernier chapitre.

# **Chapitre 1**

**Généralités sur les**

**antennes et les réseaux**

**d'antennes**

# Chapitre 1

## Généralité sur les antennes et les réseaux d'antennes

### 1.1. Introduction

Dans l'espace La détection ou La poursuite des objets s'effectue à partir des signaux émis par ces objets. Ces signaux sont sous une forme d'onde électromagnétique, et la propagation de ces ondes d'une zone de l'espace à une autre et d'un instant à l'autre est décrite par les équations de Maxwell. De plus la liaison entre deux points de l'espace nécessite un dispositif qui jouera le rôle d'émetteur et de récepteur de ces signaux. Ce dispositif est l'antenne.

Dans ce premier chapitre, on rappellera quelques notions de base sur la propagation des ondes électromagnétiques, puis on décrira en détail les caractéristiques des antennes et on fera une présentation des différents types d'antennes. Finalement, on abordera les réseaux d'antennes, éléments indispensables pour le traitement d'antennes, leurs importances dans le domaine aéronautique, les différents types rencontrés en pratique et leurs caractéristiques.

### 1.2. Onde électromagnétique

Une onde est une vibration qui se propage dans l'espace. Le courant électrique alternatif produit un champ électrique et un champ magnétique également alternatifs : la succession des cycles " aller-retour " constitue l'onde.

Le champ électrique et le champ magnétique se propagent perpendiculairement entre eux et à la direction de propagation. Aux fréquences très basses, le champ électrique et le champ magnétique sont considérés séparément. Aux fréquences élevées, le champ électrique et le champ magnétique sont indissociables et sont repris soit sous le terme global "onde électromagnétique" soit sous l'appellation "champs électromagnétiques". Toute onde électromagnétique est caractérisée par deux paramètres : sa fréquence et sa longueur d'onde.

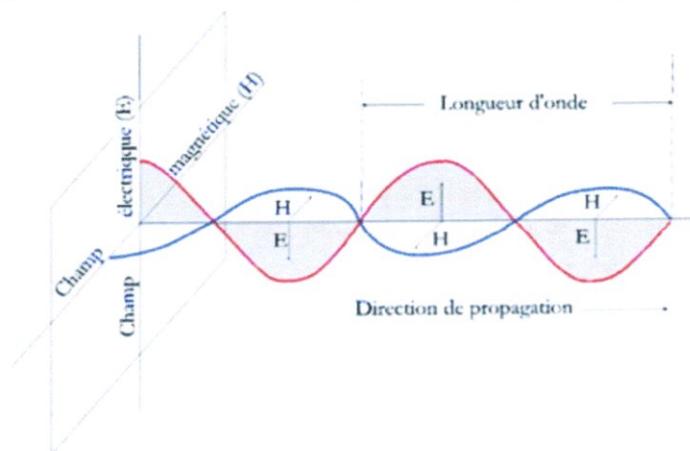


Figure 1.1. onde électromagnétique

### 1.2.1. Équations de Maxwell

La théorie classique du champ électromagnétique s'est fixée dans les années 1860, lorsque James Clerk Maxwell compléta les travaux d'Ampère et de Faraday et obtint un ensemble cohérent d'équations différentielles pour les champs électrique (E) et magnétique (B). Dans le système d'unité gaussien, ces équations sont

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (1)$	<b>Équation de Maxwell-Gauss :</b> $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho d\tau$
$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2)$	<b>Équation de conservation du flux de <math>\vec{B}</math> :</b> $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$	<b>Équation de Maxwell-Faraday (phénomène d'induction)</b>
$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4)$	<b>Équation de Maxwell-Ampère</b>

Tableau 1.1 : les équations de Maxwell

Où  $\vec{E}$  est le champ électrique,  $\vec{D}$  le déplacement électrique,  $\vec{B}$  le flux magnétique,  $\vec{H}$  champ magnétique,  $\rho$  la densité volumique de charges réelles,  $\vec{j}$  la densité de courants de charges réels.

Les équations de Maxwell tiennent une grande importance dans les antennes, étant donné que d'elles dérivent leurs propriétés. Dans le vide  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F/m}$  est la permittivité électrique et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$  est la perméabilité magnétique. On a  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , la vitesse de la lumière dans le vide. Dans le vide, en l'absence de courant et de charge on a

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j \omega \epsilon \vec{E}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j \omega \mu \vec{H}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

avec

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

## 1.2.2. Propriétés des ondes Électromagnétique

### a. vitesse de déplacement

L'onde électromagnétique se propage en ligne droite dans un milieu homogène; sa vitesse est  $c = 3.10^8 \text{ m/s}$  dans l'espace et  $\frac{c}{n}$  dans un milieu autre que l'espace et dont l'indice de réfraction est  $n$ .

### b. fréquence et longueur d'onde

La fréquence d'une onde électromagnétique est la fréquence des champs électriques et magnétiques qui la composent. La longueur d'onde  $\lambda$  est définie comme le trajet parcouru par une onde après une période d'oscillation  $T$ , avec  $\lambda = cT = c/f$

### c. polarisation d'une onde électromagnétique

La polarisation d'une onde électromagnétique est déterminée par la direction de son champ électrique  $\mathbf{E}$ . Si  $\mathbf{E}$  garde une direction constante en un certain point quel que soit le temps, on dit que la polarisation est rectiligne, le plus souvent elle est contenue soit dans un plan horizontal (polarisation horizontale) soit dans un plan vertical (polarisation verticale). [1]

Dans tous les cas, à grande distance d'une antenne, la direction du champ rayonné  $\mathbf{E}$  est toujours perpendiculaire à la direction de propagation. On peut également faire tourner le champ électrique de l'onde rayonnée d'une façon continue, soit en lui conservant la même amplitude, la polarisation est dite circulaire, soit en faisant varier l'amplitude, généralement suivant une ellipse, la polarisation est dite elliptique.

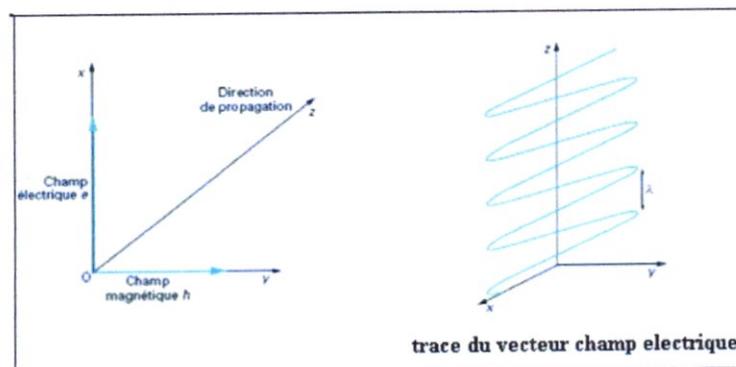


Figure1. 2. schéma de la polarisation rectiligne

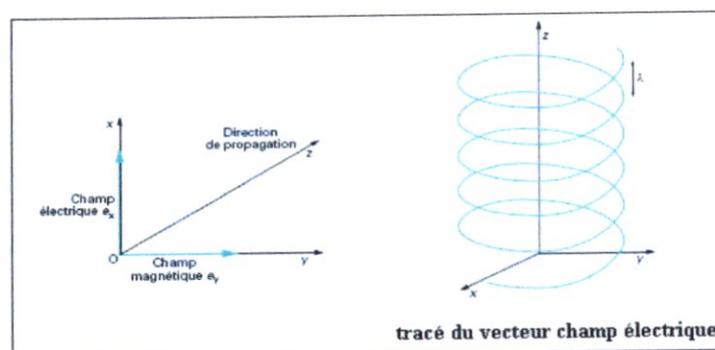


Figure 1.3. schéma de la polarisation circulaire

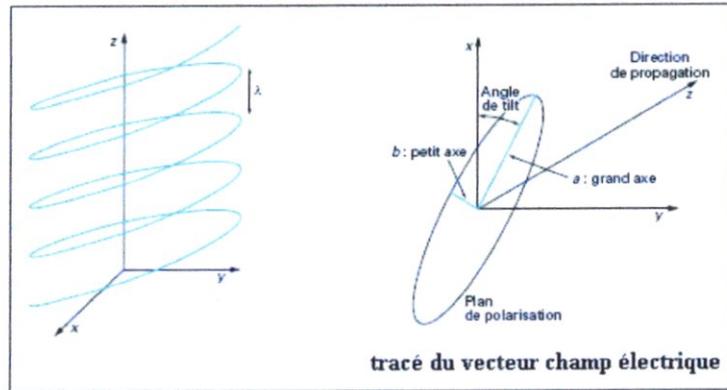


Figure 1.4. schéma de la polarisation elliptique

1.2.3. Les différents types d'ondes électromagnétiques

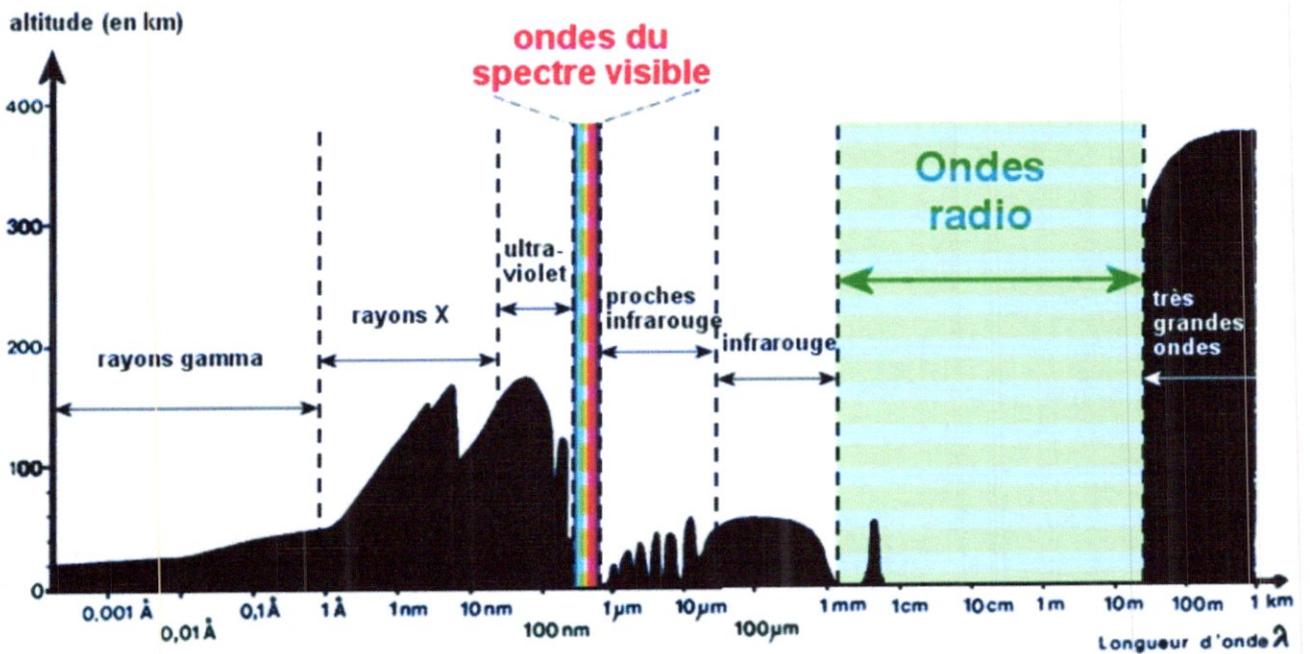


Figure 1.5. Les différents types d'ondes électromagnétiques

1.2.4. Le spectre électromagnétique [22]

Les ondes électromagnétiques se caractérisent par leur fréquence et leur longueur d'onde (avec  $\lambda=c/f$ ). L'ensemble de toutes les fréquences s'appelle spectre.

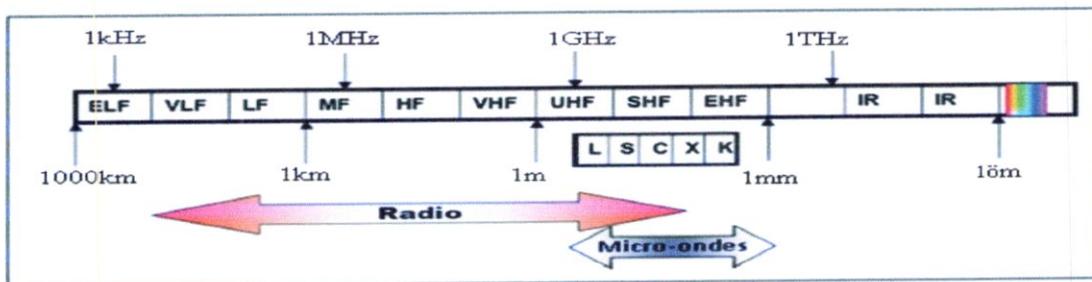


Figure 1.6. Le spectre électromagnétique

Bande	Dénomination	Fréqmin	Fréqmax	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$
ELF	Extremely Low frequency	-----	3kHz	-----	100km
VLF	Very Low frequency	3kHz	30kHz	100km	10km
LF	Low frequency	30kHz	300kHz	10km	1km
MF	Medium frequency	300kHz	3MHz	1km	100m
HF	Hight frequency	3MHz	30MHz	100m	10m
VHF	Very Hight frequency	30MHz	300MHz	10m	1m
UHF	Ultra Hight frequency	300MHz	3GHz	1m	10cm
SHF	Super Hight frequency	3GHz	30GHz	10cm	1cm
EHF	Extremely Hight frequency	30GHz	300GHz	1cm	1mm

Tableau 1.2. bandes d'onde électromagnétique

### 1.3. Antenne [22]

#### 1.3.1. Définition

Une antenne est un fil conducteur parcouru par un courant électrique, par un mouvement de charges électriques rayonnant dans l'espace sous forme d'ondes électromagnétiques : une piste de circuit imprimé, un cordon d'alimentation, etc... peuvent jouer le rôle d'antennes. On distingue l'antenne d'émission et l'antenne de réception.

- + Emission : génération d'OEM (ondes électromagnétiques) provoquée par le courant dans l'antenne
- + Réception : une OEM provoque l'apparition de courant dans l'antenne

Aussi, une antenne est un dispositif de transition pour l'énergie électromagnétique, entre les guides d'ondes (coaxial, filaire) et les milieux libres (hertzien, intérieur d'un guide ...). Pour la réception, cette antenne peut être qualifiée de capteur électromagnétique.

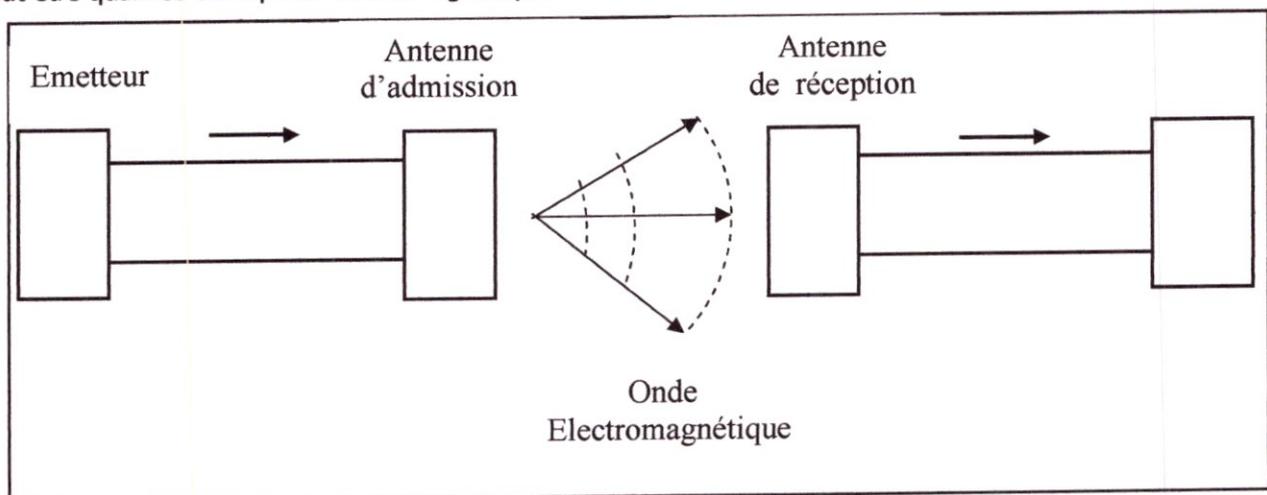


Figure 1.7. Antennes en émission et en réception

### 1.3.2. Le rayonnement de l'antenne [22]

Un conducteur dans lequel passe un courant  $I$  produit dans son entourage un champ magnétique  $H$ .

D'autre part, un courant circulant dans un conducteur correspond à un déplacement de charges dans le conducteur : accumulation de charges positives et négatives aux extrémités, celles-ci donnent lieu à des lignes de champs électriques.

Il existe donc des champs  $E$  et  $H$  perpendiculaires l'un de l'autre. Si les champs sont variables (courant variable), ceci donne naissance à une onde électromagnétique qui se propage perpendiculairement aux deux champs.

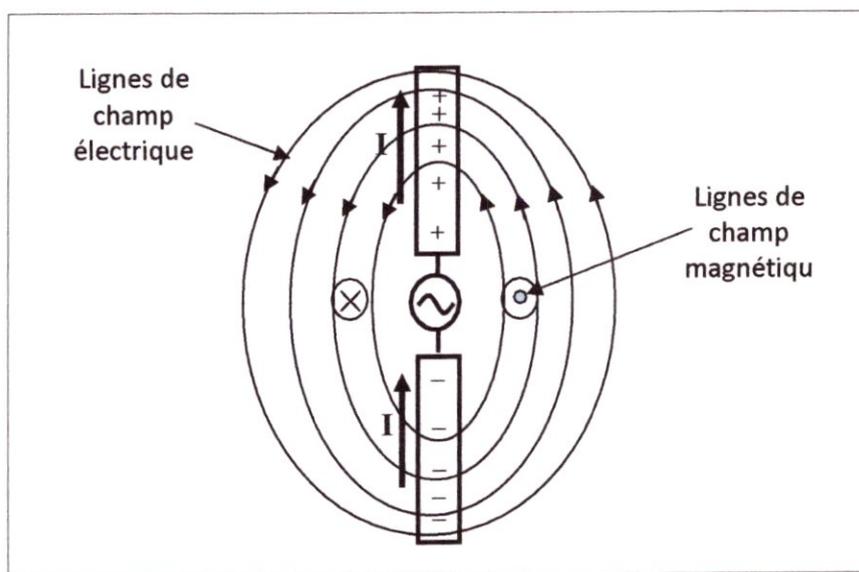


Figure.1.8. Mécanisme de rayonnement

### 1.3.3. Caractéristiques des antennes [1][3]

On sait que la théorie des antennes est basée sur le rayonnement produit par des sources (charges, courants) à la surface d'un conducteur.

Pour rendre compte des performances de l'antenne d'un point de vue des champs rayonnés on utilise,

- ✚ le diagramme de rayonnement
- ✚ la directivité
- ✚ le gain
- ✚ la surface équivalente
- ✚ l'ouverture
- ✚ la polarisation

### 1.3.3.1. Diagramme de rayonnement d'une antenne

Le diagramme de rayonnement en puissance (ou intensité) est la représentation du gain normalisé

$$r(\theta, \varphi) = \frac{G(\theta, \varphi)}{G_{\max}} \quad 1.1$$

ou simplement du gain  $G(\theta, \varphi)$  en fonction de la direction  $(\theta, \varphi)$  sur un repère polaire ou cartésien. On

utilise aussi le diagramme champ : 
$$F(\theta, \varphi) = \frac{|E(\theta, \varphi)|}{E_{\max}} = \sqrt{r(\theta, \varphi)}. \quad 1.2$$

Généralement dans un plan donné, le diagramme de rayonnement d'une antenne directive comprend un lobe principal et des lobes secondaires qui sont indésirables.

La plus grande partie de la puissance rayonnée est contenue dans un cône d'ouverture  $\theta$  défini à mi-puissance, ce qui correspond à une chute de 3 dB par rapport à la puissance maximale.

ouverture  $\theta$  tel que 
$$\frac{G(\theta/2)}{G_{\max}} = \frac{1}{2} \text{ soit } G_{\max} \text{ (dB)} - G(\theta/2)_{\text{dB}} = 3\text{dB}$$

Il existe une multitude de façons de représenter le rayonnement d'une antenne : diagramme en champ, en puissance, gain, directivité, en polaire ou cartésien, en linéaire ou en décibels, en 2D ou 3D.

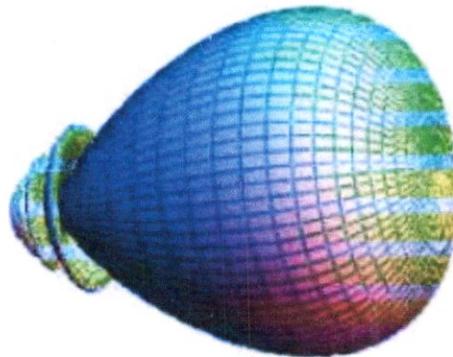


Figure 1.9. Diagramme en trois dimensions

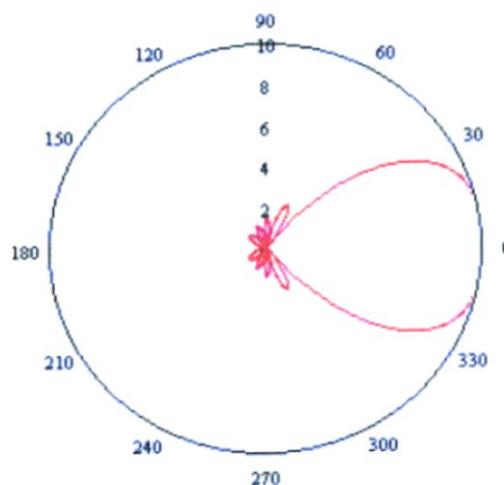


Figure 1.10. Diagramme en coordonnées polaires

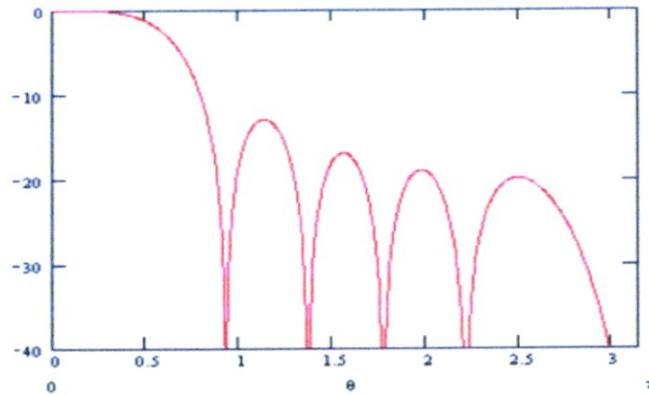


Figure 1.11 Diagramme en coordonnées cartésiennes (échelle logarithmique)

### 1.3.3.2. Directivité d'une antenne

La puissance rayonnée par une antenne n'est pas uniforme dans l'espace. Pour mesurer cette capacité de concentrer la puissance, on compare la puissance rayonnée par l'antenne dans une direction donnée par rapport à la puissance rayonnée par une antenne isotrope fictive rayonnant la même puissance dans toutes les directions et alimentée avec le même courant : on parle alors de directivité **D**.

✚ Densité de puissance de l'antenne isotrope indépendante de la direction :

$$✚ p_{iso} = \frac{P_E}{4\pi r^2} \text{ (W/m}^2\text{)} \quad \text{où } P_E \text{ est la puissance totale rayonnée par l'antenne}$$

✚ Densité de puissance rayonnée par l'antenne dans la direction  $(\theta, \varphi)$  :  $p(r, \theta, \varphi) = p$

$$\text{On définit la directivité par le rapport : } D(\theta, \varphi) = \frac{p}{p_{iso}} = \frac{4\pi r^2 p}{P_E} \tag{1.3}$$

### 1.3.3.3. Gain en puissance d'une antenne

Le gain est défini de la même manière que la directivité en tenant compte des pertes, c'est-à-dire en remplaçant la puissance rayonnée  $P_E$  par la puissance  $P_F$  fournie à l'antenne ( $P_E \leq P_F$ )

$$G(\theta, \varphi) = \frac{p}{\frac{P_F}{4\pi r^2}} = \frac{4\pi r^2 p}{P_F} = \frac{P_E}{P_F} \frac{4\pi r^2 p}{P_E} = \eta D(\theta, \varphi) \tag{1.4}$$

Le paramètre  $\eta = \frac{P_E}{P_F} \leq 1$  est appelé rendement de l'antenne.

### 1.3.3.4. Surface équivalente d'une antenne de réception

La surface équivalente  $A_e$  d'une antenne est définie comme le rapport de la puissance totale  $P_r$  captée par l'antenne à la densité de puissance incidente  $p$  :

$$A_e = \frac{P_r}{p} \quad (m^2) \quad 1.5$$

$$\text{d'où } P_r = p \cdot A_e$$

Cette notion de surface équivalente est surtout utilisée dans les antennes à deux dimensions. Le théorème de réciprocité appliqué aux antennes permet de démontrer la relation reliant gain et surface

$$\text{équivalente,} \quad G_{\max} = \frac{4 \pi A_e}{\lambda^2} \quad 1.6$$

Les antennes sont des éléments réciproques qui peuvent être utilisés en émission ou en réception (les propriétés directives d'une antenne sont les mêmes à l'émission et à la réception)

$$r(\theta, \varphi) = \frac{G(\theta, \varphi)}{G_{\max}} = \frac{A_e(\theta, \varphi)}{A_{e(\max)}} \quad 1.7$$

### 1.3.3.5. Impédance d'antenne

L'impédance d'antenne est la généralisation de la notion d'impédance utilisée pour les autres composants passifs (résistances, condensateurs, selfs...) aux antennes. Il s'agit donc du rapport complexe observé entre la tension et le courant à l'entrée d'une antenne en émission. L'utilité de cette notion est importante pour assurer les meilleurs transferts d'énergie entre les antennes et les dispositifs qui y sont connectés grâce aux techniques d'adaptation.

### 1.3.3.6. Fréquence d'utilisation

Une antenne s'utilise en général avec des signaux autour d'une fréquence donnée pour laquelle l'antenne possède des capacités optimales pour émettre ou recevoir l'énergie électromagnétique correspondante dans l'espace environnant. La fréquence de résonance d'une antenne dépend d'abord de ses dimensions propres, mais aussi des éléments qui lui sont ajoutés. Par rapport à la fréquence de résonance centrale de l'antenne, un affaiblissement de 3 dB détermine les fréquences minimum et maximum d'utilisation ; la différence entre ces deux fréquences correspond à la bande passante.

### 1.3.3.7. Ouverture à Mi-Puissance

Généralement dans un plan donné, le diagramme de rayonnement d'une antenne directive comprend un lobe principal et des lobes secondaires qui sont indésirables.

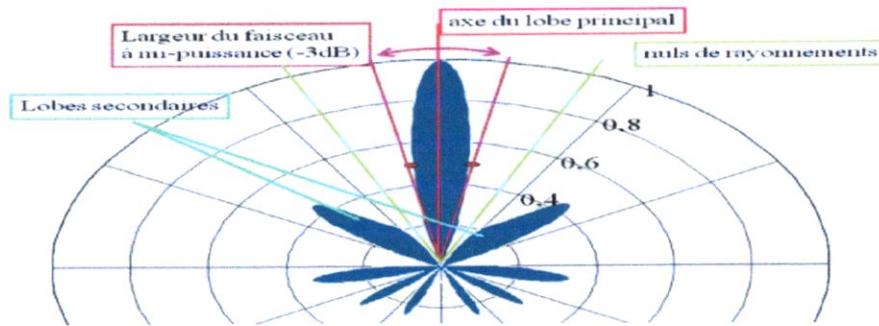


Figure 1.12 Ouverture à mi-puissance

La plus grande partie de la puissance rayonnée est contenue dans un cône d'ouverture HPBW (Half Power Beam Wide) défini à mi-puissance, ce qui correspond à une chute de 3 dB par rapport à la puissance maximale ou à un champ max est divisé par  $\sqrt{2}$ .

**1.3.4. Les différentes catégories d'Antenne**

Il existe des dizaines de types d'antennes, différents par leur fonctionnement, leur géométrie, leur technologie... On citera, dans ce qui suit, quelques types d'antenne utilisée pour les hautes fréquences (hyperfréquence) :

- ✚ les antennes filaires (dipôle, monopôle, Yagi)
- ✚ les antennes à onde de fuite ou de surface
- ✚ les antennes planaires (patches)
- ✚ les antennes à ouverture (cornet, projecteurs d'onde)

Type d'antenne (Directivité)	Caractéristiques	Usage	Exemples
Antennes directives	- Gain élevé - Angle d'ouverture faible	-Faisceaux hertziens - Satellites	-Antennes paraboliques - Antennes réseaux
Antennes omnidirectionnelles	- Gain plus ou moins constant dans le plan horizontal ou dans un secteur donné	- Radio / TV - Communications mobiles	- Brin vertical

Tableau 1.3 : Types d'antennes

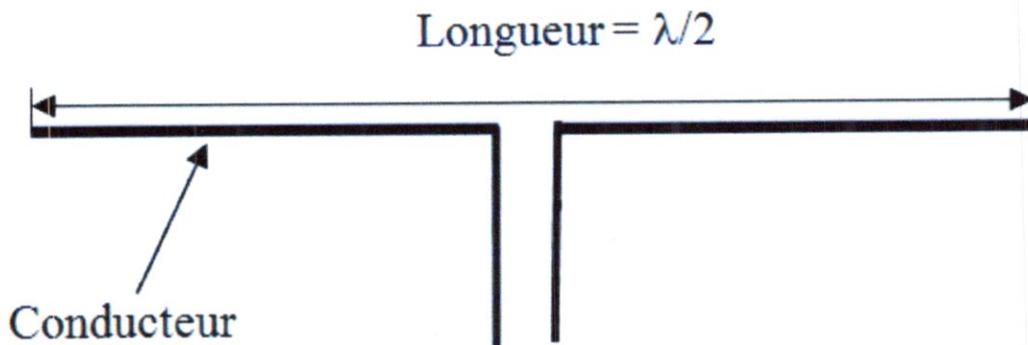
**1.3.4.1. Les antennes filaires**

On désigne sous le nom d'antennes filaires, les antennes minces constituées par des conducteurs métalliques cylindriques dont la longueur est de l'ordre de la longueur d'onde  $\lambda$  et dont le diamètre est très petit devant  $\lambda$ . Les antennes de base sont : *les dipôles, les monopôles, les boucles*. Des structures plus évoluées sont: *les hélices, les Yaguis...*[2]

**1.3.4.1.1. Le dipôle demi-onde [22]**

C'est un conducteur électrique de longueur  $\lambda/2$ . Il est alimenté en son centre (figure 1.13)

Le dipôle demi-onde a une propriété extrêmement utile : taillé mécaniquement en demi-onde pour une fréquence donnée (à la bande passante près), son impédance est de  $73 \Omega$  et cette impédance est purement résistive ce qui permet son alimentation par un câble coaxial  $75 \Omega$  sans difficultés.

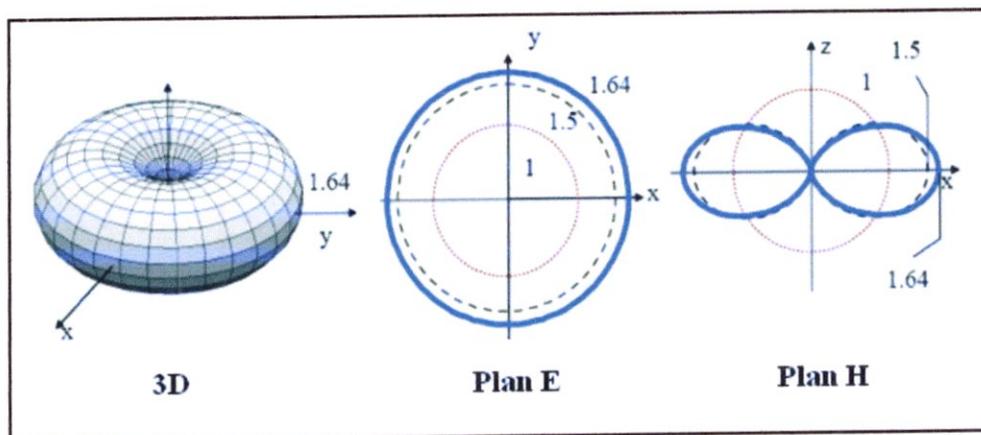


**Figure.1.13. Le dipôle demi-onde**

C'est une antenne très utilisée dans le domaine des fréquences VHF et UHF. Son diagramme de rayonnement est donnée par :

$$G(\theta, \varphi) = 1.64 \left[ \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos(\theta))}{\sin(\theta)} \right] \tag{1.8}$$

Il est omnidirectionnel dans le plan perpendiculaire au dipôle (plan E) et directif dans le plan contenant le dipôle (plan H) comme le montre la figure 1.14.



**Figure. 1.14. Diagramme de l'antenne demi-onde**

### 1.3.4.1.2. Antenne cadre

Pour les ondes longues et moyennes, les antennes filaires sont difficiles d'emploi. On leur préfère souvent les antennes cadres. Comme son nom l'indique, l'antenne cadre est constituée d'une ou plusieurs spires enroulées sur un cadre de dimensions relativement grandes (quelques cm à quelques dizaines de cm) (figure 1.15).

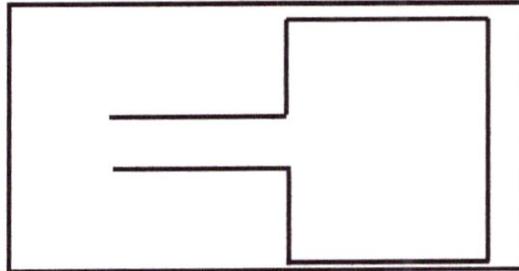


Figure.1.15. Antenne cadre

L'antenne ferrite, version moderne de l'antenne cadre, possède un noyau en ferrite qui augmente le flux magnétique. Cette antenne est intéressante lorsqu'on doit réaliser un récepteur de petite taille.

### 1.3.4.2. Les antennes à ondes de fuite ou de surface [2]

Les antennes à ondes de fuite ou de surface sont des structures rayonnantes plaquée (donc sans trainée aérodynamique, d'où leur intérêt) basées sur les propriétés des structures périodiques. Certains guides à fentes sont des antennes en diélectrique « naturel » ou « artificiel ».

### 1.3.4.3. Antenne plane ou antenne patch [1]

Les antennes planaires, (figure 1.16) sont également connues sous le nom d'antennes patch sont des Pastille métallique à la surface d'un substrat diélectrique dont la face inférieure est métallisée. De formes typiques : rectangulaire, carrée, circulaire. Simple et bon marché, pour les fabriquer on utilise la technologie des circuits imprimé. En outre, elles sont très souples en termes de fréquence de résonance, impédance de puissance d'entrée, diagramme de rayonnement et polarisation.

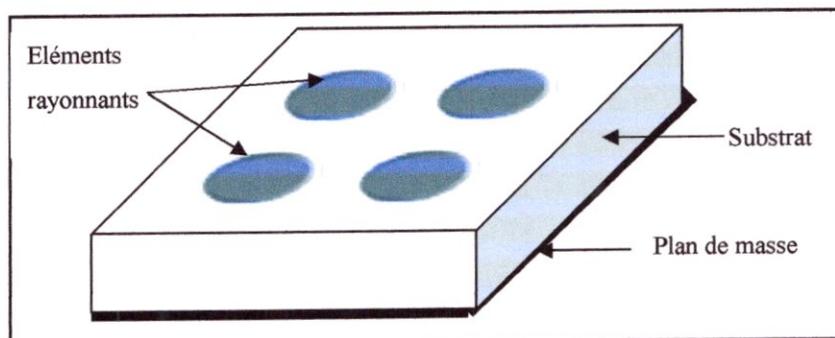


Figure 1.16. Antenne Patch

Ces antennes sont très utiles dans le domaine aéronautique car ces dernières sont bien pour équiper des avions ou des missiles car elles occupent une très faible épaisseur et ne présentent pas de traînée aérodynamique. La surface sur laquelle l'antenne est plaquée, n'est pas nécessairement plane, elle peut être aussi cylindrique ou sphérique, soit que l'antenne n'occupe qu'une partie de la surface, soit qu'elle soit annulaire. Par ailleurs il est possible d'intégrer à l'antenne les circuits d'alimentation, ainsi que les déphaseurs ou les commutateurs.

La réalisation de tels aériens de quelques dizaines de MHz jusque vers 30GHz, mais on va rencontrer évidemment les défauts présenter par les antennes sur microbandes. Notamment les problèmes de rendement et pertes. Il faudra donc accepter un compromis entre les avantages mécaniques et les inconvénients radioélectriques.

#### 1.3.4.4. Les antennes à ouverture rayonnante[2]

Lorsque les antennes mesurent plusieurs longueurs d'onde, et s'il existe des surfaces métalliques de formes courbes, il est difficile de calculer le vecteur de rayonnement. Ceci se produit dans le domaine des micro-ondes (longueur d'onde du cm). On utilise alors les concepts généraux de l'optique géométrique.

On peut citer deux types d'antenne à ouverture rayonnante :

- ✚ Cornet
- ✚ Projecteurs d'onde

#### 1.3.4.5. Cornet

Le cornet est une antenne à ouverture rayonnante qui s'utilise dans le domaine des micro-ondes pour sa large bande, ce dernier est un dispositif de guide à section progressivement croissante qui aboutit à une ouverture rayonnante. Un cornet s'alimente à partir d'un guide d'onde. Les cornets sont utilisés comme sources primaires pour éclairer des réflecteurs et sont, surtout, employée par les radioamateurs et dans les applications professionnelles.

La limite d'utilisation inférieure se situe vers 2.3 GHz englobant l'ISM et le Wifi, mais est particulièrement efficace et intéressante dès 10 GHz.

Il existe de nombreux types : pyramidal, conique, rainuré,...

Les deux figures ci-dessous illustrent un cornet pyramidal et un cornet conique

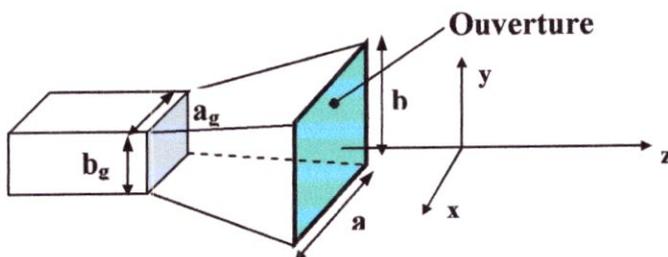


Figure 1.17. Cornet pyramidalfigure

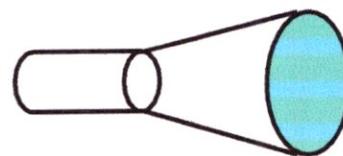


figure1.18. Cornet conique

### 1.3.4.6. Les projecteurs d'ondes [2]

Les projecteurs d'ondes sont des antennes à ouverture rayonnante. la réalisation la plus courante de ce type d'antenne est le réflecteur parabolique (Figure 1.19) éclairé par un dipôle (ou un groupement de dipôles) ou même par un cornet électromagnétique. Cette source d'éclairage, dite source primaire rayonne une onde sphérique qui se réfléchit sur le paraboloïde suivant un faisceau de rayons parallèles dans l'approximation de l'optique géométrique.

A ce type d'antennes il convient d'ajouter les lentilles (figure 1.20) qui peuvent être en diélectrique, ou présenter une structure métallique plus ou moins complexe ou composite, telle qu'un **diélectrique artificiel**. Dans la figure (1.20), on a supposé que la lentille était en diélectrique. La source primaire rayonne, ici aussi une onde sphérique est transformée en une onde plane (rayons parallèles) par la lentille.

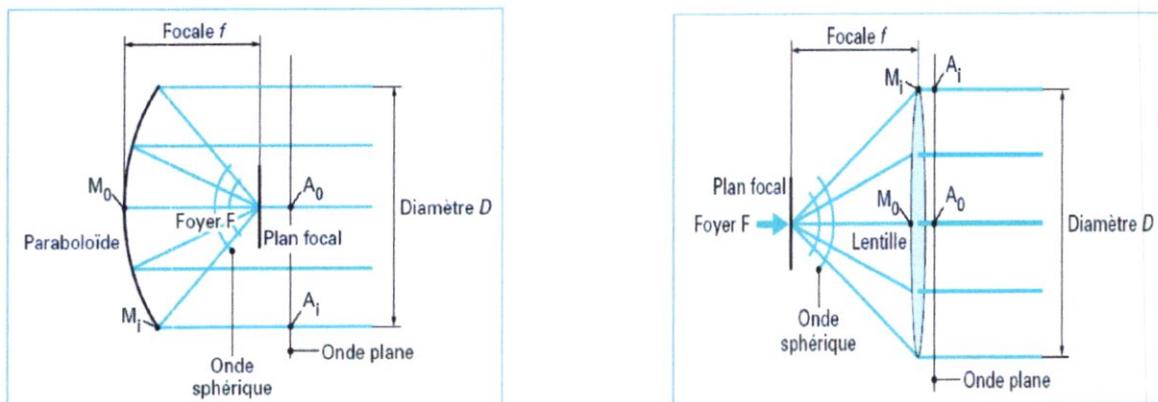


Figure 1.19-1.20. Réflecteur parabolique (Réception) - parabolique à lentille (transmission)

### 1.3.4.7. Antennes quasi indépendantes de la fréquence [2]

Jusqu'à présent, on a considéré l'antenne comme un circuit plus ou moins accordé, et dans la technique des aériens à large bande, une gamme de fonctionnement variant dans le rapport de 1 à 3 était considérée comme très honorable. On peut arriver à ces performances en utilisant les antennes citées précédemment. Cependant il est possible d'imaginer des antennes indépendantes de la fréquence ou dont les caractéristiques varient très peu avec celle-ci.

## 1.4. Réseau d'antenne

Aux fréquences très élevées, il devient possible de grouper plusieurs antennes afin que les interférences entre les champs rayonnés par chacune d'elles concentrent l'énergie dans une direction choisie, donc ce groupement peut avoir différentes configurations géométriques, pour obtenir des diagrammes très directifs. Ces configurations d'antennes s'appellent des réseaux. Dans un réseau d'antennes, les champs des différents éléments s'ajoutent de manière constructive dans certaines directions et de manière destructive (annulation) dans d'autres.

L'avantage principal des réseaux d'antennes par rapport à une antenne simple est leurs capacités de balayage électronique, c'est-à-dire, que le lobe principal peut être orienté vers n'importe quelle direction en

changeant la phase du courant d'excitation de chaque élément du réseau (antennes à réseaux déphasés). En outre, en agissant également sur les amplitudes des courants d'excitation, une grande variété de diagrammes de rayonnement et des caractéristiques de niveau des lobes secondaires peuvent être produites.

Il y a cinq paramètres principaux qui affectent les performances globales d'un réseau d'antennes :

- ✚ la géométrie du réseau (par exemple, linéaire, circulaire, ou planaire des éléments rayonnants),
- ✚ distances de séparation entre les éléments adjacents,
- ✚ amplitudes des courants d'excitation de chaque élément,
- ✚ phase de chaque élément rayonnant,
- ✚ diagramme de rayonnement de chaque élément.

#### 1.4.1. Motivation d'utilisation des réseaux d'antennes [4]

Les performances des systèmes de réception en terme rapport signal sur bruit plus interférence peuvent subir des dégradations énormes dues à l'existence simultanée des signaux indésirables à côté du signal qu'on désire capter. Les signaux indésirables peuvent accéder au système à travers les lobes secondaires de l'antenne de réception ou à travers le lobe principal. Ces signaux peuvent être générés par plusieurs sources. En pratique, les sources plus rencontrées sont : les systèmes de brouillage en contre mesure électronique dans le cas des radars, les interférences RF ; les clusters, les sources de bruit naturelles et les réflexions sur divers obstacles. La dégradation des performances due à la présence de signaux non désirés peut être aggravée par d'autres facteurs tels que : le mouvement de l'antenne de réception, les mauvaises conditions d'emplacement de l'antenne de réception, l'effet de l'atténuation, l'effet des trajets multiple, interférences, brouilleurs, le changement des caractéristiques de l'environnement,...

#### 1.4.2. Les éléments principaux d'un réseau d'antenne[4]

Le réseau de capteur est constitué du groupage de  $N$  éléments capteur conçus pour recevoir (transmettre) les signaux dans le milieu de propagation. Les capteurs sont arrangés selon une structure géographique bien précise (linéaire, circulaire, rectangulaire...) afin de couvrir les directions des signaux utiles. La sortie de chacun des éléments est acheminée vers le système de formation du diagramme de rayonnement, où la sortie de chaque capteur est d'abord multipliée par un coefficient de pondération complexe (amplitude et phase) avant d'être sommée avec toutes les sorties des capteurs, en combinaison avec les positions physiques des capteurs, permet de déterminer la forme du diagramme de rayonnement à partir duquel il est possible de connaître la réaction du réseau adaptatif vis-à-vis aux différents signaux.

Dans le cas où les paramètres de l'environnement sont connus avec précision, le processeur se limite à un simple calcul pour déterminer le vecteur de pondération. Cependant, la connaissance de tous les paramètres de l'environnement reste très rarement réaliste, ce qui amène à dire que le processeur de traitement adaptatif est indispensable pour un réseau adaptatif sauf indication particulière.

### 1.4.3. Facteur de réseau

Supposons d'abord le scénario simple d'un alignement de deux dipôles élémentaires horizontaux d'antenne isolés dans l'espace, placé comme représenté sur la figure 1.21. Le dipôle 1 est excité par un courant  $I_1 \angle \phi/2$ , le dipôle par le courant  $I_2 \angle \phi/2$ .  $\phi$  et  $d$  représentent respectivement le déphasage entre les courants et la distance entre les deux sources.

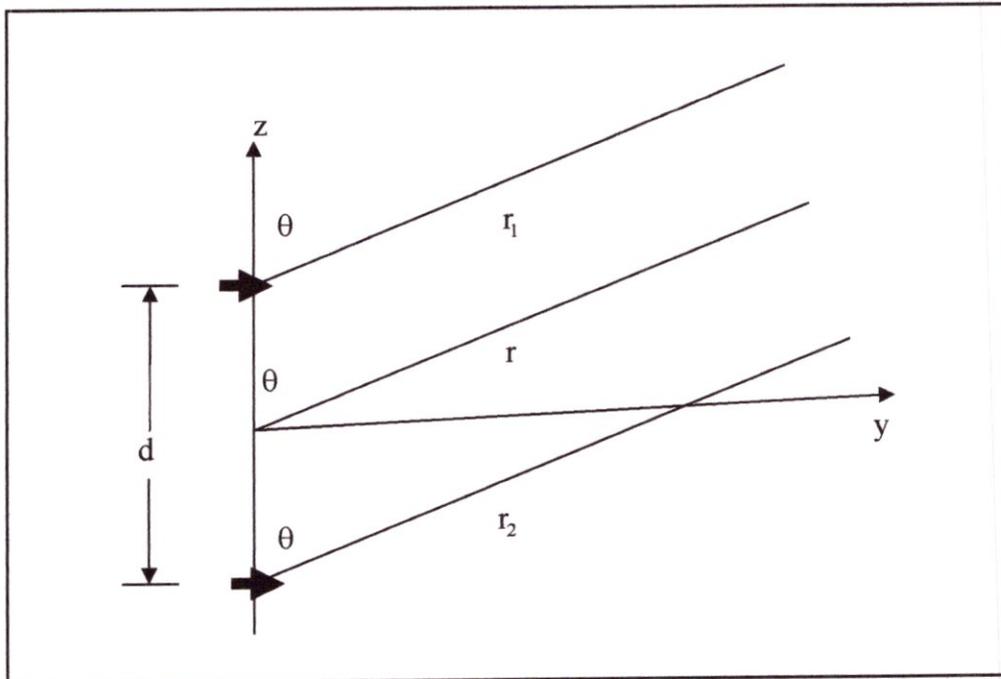


Figure 1.21. Champ lointain de deux dipôles

Le champ électrique au point M d'observation supposé très éloigné, est l'addition vectorielle des champs dus aux deux antennes (en négligeant les effets de couplage mutuels) :

$$E_{\text{total}} = E_1 + E_2 = \vec{a}_\theta \left[ j \frac{\eta k I_0}{4\pi r} \cos \theta \right] 2 \cos(kd \cos(\theta + \phi)) \quad 1.9$$

On observe que le champ total est égal au champ de l'élément simple situé à l'origine, multiplié par un facteur de réseau F.

D'une façon générale, le diagramme de champ lointain d'un réseau est donné par le diagramme de rayonnement de l'élément simple multiplié par le facteur de réseau :

Diagramme du réseau = Diagramme de l'élément simple  $\times$  facteur de réseau.

Le facteur de réseau est une fonction des paramètres suivants :

- ✚ l'arrangement géométrique des éléments rayonnants du réseau
- ✚ les courants d'excitation des éléments
- ✚ le nombre d'éléments
- ✚ la distance de la séparation  $d$  des éléments adjacents
- ✚ fréquences (ou longueur d'onde) d'opérat

### 1.4.4. Géométries des réseaux d'antennes

Il existe plusieurs géométries de réseau d'antennes. Les réseaux linéaires ont leurs éléments disposés selon une ligne. Les réseaux plans sont des groupements bidimensionnels dont les éléments sont disposés sur un plan. Les réseaux conformes ont leurs éléments sur une surface de forme imposée telle qu'un fuselage ou l'avant d'un avion ou d'un missile, ou encore une surface cylindrique, conique ou hémisphérique dans le cas d'un radar installé au sol. Les réseaux sphériques peuvent être intéressants quand on désire balayer une demi-sphère avec un faisceau uniforme, présentant le même gain dans toutes les directions (radar au sol). On cite dans ce qui suit, quelques géométries intéressant notre étude.

#### 1.4.4.1. Réseaux linéaires [5]

Les réseaux linéaires sont utilisés principalement en radar. Soit directement pour certaines applications telles que radars secondaires, radars de trafic maritime. Soit, plus généralement, comme composant d'une structure plus complexe. On peut, par exemple, les empiler pour former un réseau plan. On peut classer les réseaux linéaires en deux types:

- ✚ les réseaux dispersifs, qui ont une direction de rayonnement maximal qui varie avec la longueur d'onde.
- ✚ les réseaux non dispersifs, c'est-à-dire ceux dont la direction de rayonnement maximal ne dépend pas de la longueur d'onde.

##### 1.4.4.1.1. Effet de la distance d [22]

En général, on ne doit pas avoir un dédoublement du lobe principal dans la zone balayée. Le nombre de lobes principaux dans l'espace réel dépend de la distance  $d$  entre les sources :

Si  $d \leq \frac{\lambda}{2}$ , il y a un seul lobe principal

Si  $d \geq \lambda$ , il y a plus d'un lobe principal. Les lobes en plus s'appellent lobes de réseau.

Lorsque  $\frac{\pi}{2} \leq d\lambda \leq \pi$ , l'apparition de lobes de réseau dépend du déphasage  $\theta$ . Pour l'éviter

On doit avoir :

$$d < \frac{\lambda}{1 + |\cos \theta_{\max}|}$$

##### Effet du nombre N de sources [22]

Pour une distance  $d$  constante, l'augmentation de  $N$  augmente la directivité et le nombre de lobes secondaires et diminue donc l'ouverture du lobe principal comme le montre la figure 1.22.

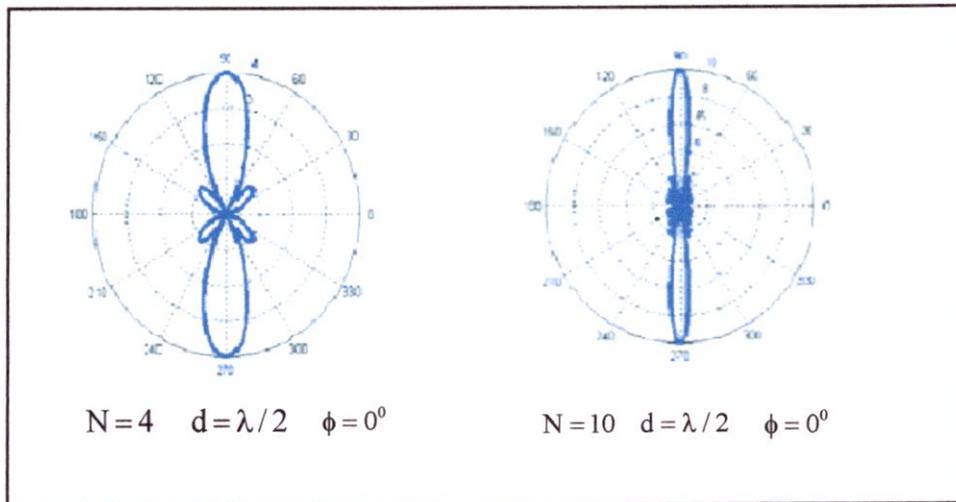


Figure. 1.22. Effet du nombre de sources

**1.4.4.1.2. Effet du déphasage φ[22]**

Une phase variable permet d’orienter le lobe de broadside  $\theta_{max} = \pm 90^0$  à endfire  $\theta_{max} = 180^0$  (figure 1.23). A partir d’un réseau donné, on peut donc faire varier, dynamiquement ou non, l’orientation privilégiée du gain en jouant sur les alimentations des divers éléments :

C’est le principe des antennes à balayage électronique.

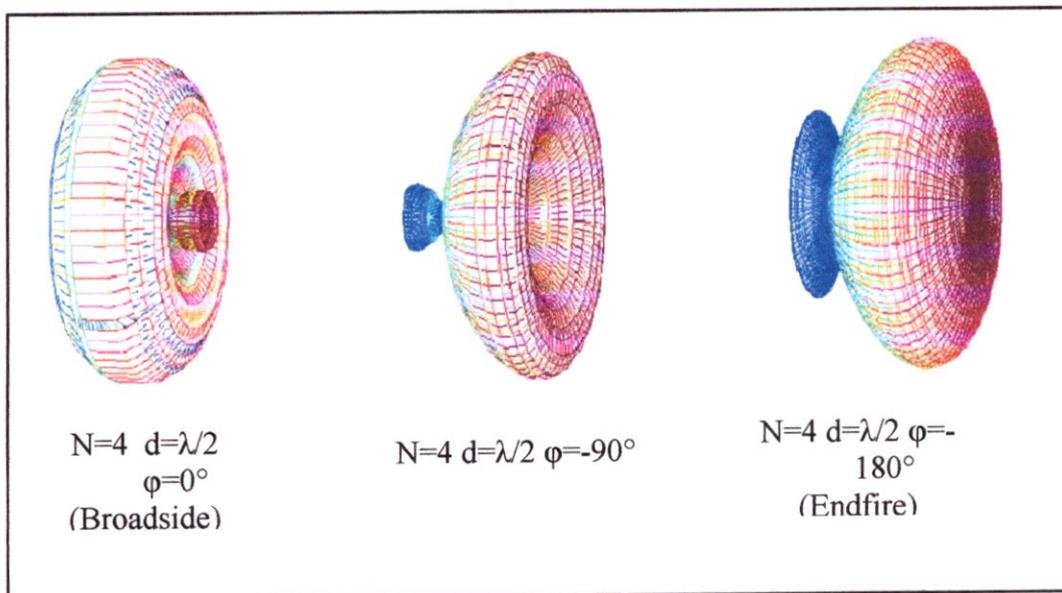


Figure 1.23. Effet de la phase

**a. Principe de réseaux dispersifs [5]**

Ces réseaux sont aussi appelés réseaux à alimentation série, parce que les différentes sources rayonnantes sont alimentées successivement à partir d’une seule ligne d’alimentation.

On demande généralement à ces réseaux d’avoir les trois propriétés suivantes :

- ✚ absence de lobe de réseau.

- ✦ TOS (taux d'ondes stationnaire) faible.
- ✦ direction du rayonnement maximal voisin de la normale au réseau.

La structure générale représentée par la figure (1.24) permet de satisfaire ces trois exigences.

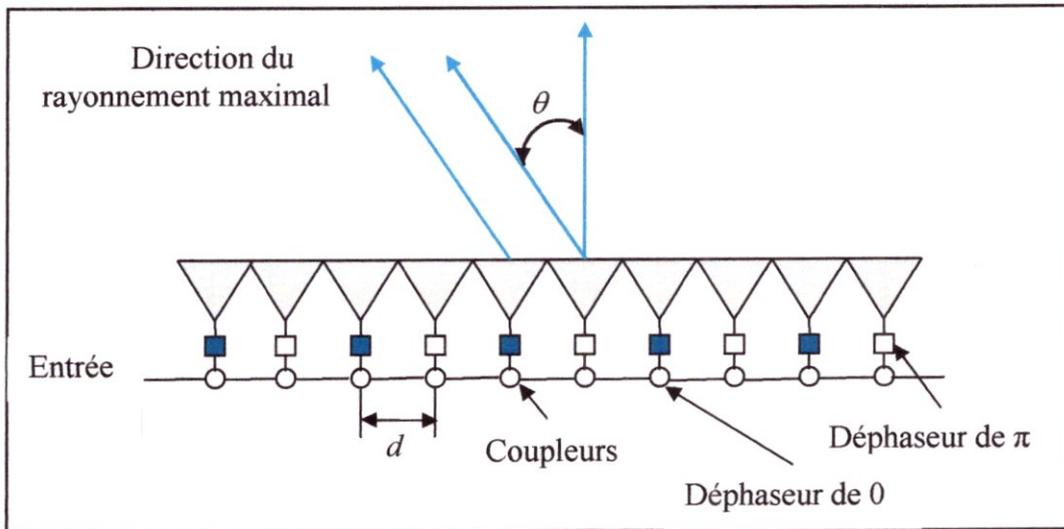


Figure 1.24. Réseau linéaire dispersif

### b. Principe de réseaux linéaires non dispersifs [5]

Le gros inconvénient des réseaux dispersifs est la variation de leur direction de rayonnement maximal avec la fréquence. Si parfois cette propriété est un avantage (balayage électronique par la fréquence), généralement c'est un handicap qui oblige à réaliser des réseaux non dispersifs ou encore aperiodiques, ceux-ci ont la propriété d'avoir un faisceau fixe quelle que soit la fréquence et la plupart du temps dans la direction normale au réseau.

Dans un tel réseau, l'alimentation des éléments rayonnants est faite en parallèle, c'est-à-dire que tous les chemins électriques entre chacun et l'entrée de l'antenne sont égaux.

Les réseaux linéaires non dispersifs peuvent être caractérisés par :

- ✦ la nature du distributeur.
- ✦ le type de ligne.
- ✦ l'antenne élémentaire.
- ✦ le type de coupleur.

#### 1.4.4.2. Réseaux circulaires [5]

Les réseaux circulaires sont des réseaux dont les antennes élémentaires sont situées sur un cercle. C'est l'antenne fixe la plus simple qui permette de rayonner (ou de recevoir) sur un angle de  $360^\circ$ .

Si chaque source est munie d'un déphaseur, on peut pointer dans n'importe quelle direction du plan horizontal un faisceau qui garde les mêmes caractéristiques (contrairement à un réseau linéaire dont le diagramme

s'élargit d'autant plus que l'on pointe le faisceau loin de la normale). On va considérer uniquement le cas d'un réseau régulier c'est-à-dire un réseau dont le pas est constant. La figure (1.25) illustre ce type de réseau.

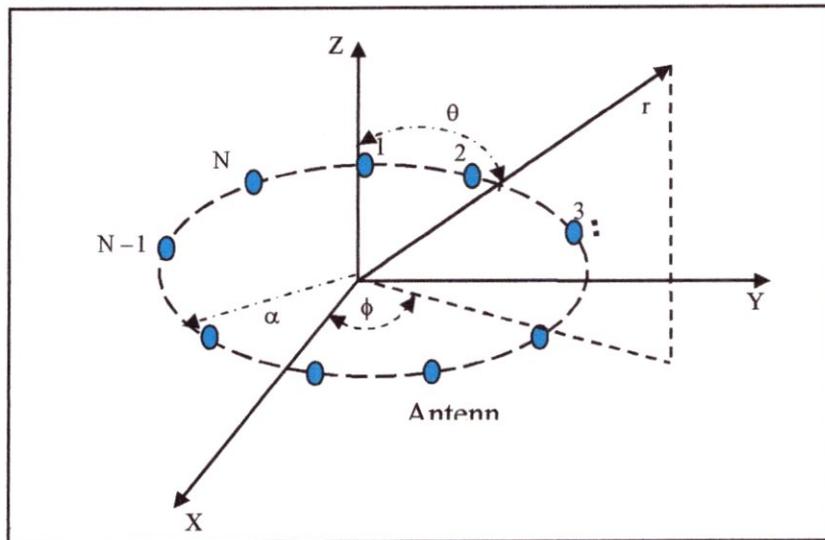


Figure 1.25. Réseau circulaire de N éléments

#### 1.4.4.3. Intérêt du réseau circulaire [5]

C'est l'antenne fixe la plus simple qui permette de rayonner (ou de recevoir) sur un angle de  $360^\circ$ . Si chaque source est munie d'un déphaseur, on peut pointer, dans n'importe quelle direction du plan horizontal, un faisceau qui garde les mêmes caractéristiques (contrairement, par exemple, à un réseau linéaire dont le diagramme s'élargit d'autant plus que l'on pointe le faisceau loin de la normale).

#### 1.4.5. Réseau cylindrique [5]

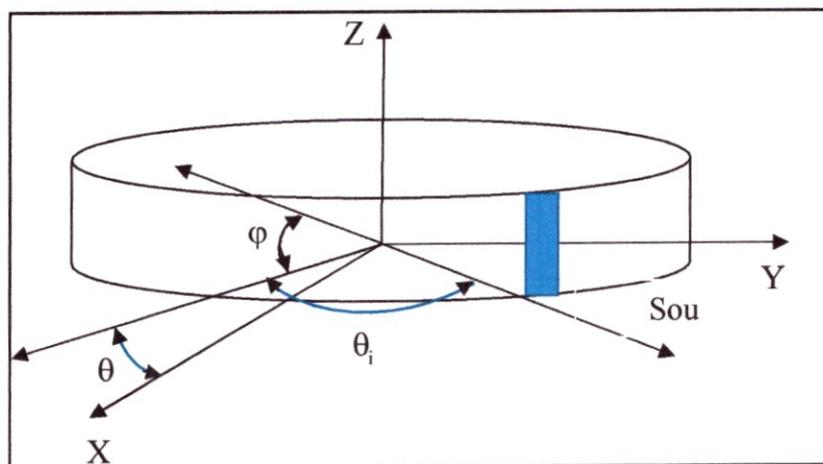


Figure 1.26. Réseau cylindrique

Le réseau cylindrique est bien adapté pour balayer un faisceau sur  $360^\circ$  en gisement, sans déformation, en raison de son axe de symétrie circulaire. Un quadruple réseau plan remplit la même fonction, mais le faisceau ne demeure pas constant ; il s'élargit entre la position normale et la position à  $45^\circ$  suivant la loi  $1/\cos \theta$ . Le réseau cylindrique est généralement constitué de sources régulièrement réparties sur un cylindre, comme sur la figure (1.26).

**1.4.6. Réseau plan**

Un réseau d'antenne plan est un groupement de sources rayonnantes suivant des alignements qui sont souvent orthogonaux bien que ceci ne soit indispensable. Les réseaux plans sont très utilisés, notamment dans les antennes à balayage électronique qui ont tendance à devenir la norme dans les radars. Dans la suite, on supposera que le réseau est à balayage.

**1.4.6.1. Réseau plan régulier**

Les réseaux plans réguliers sont généralement constitués par un grand nombre d'antennes élémentaires. Toutes les antennes simples peuvent être utilisées. Il existe plusieurs géométries de réseau d'antenne plan, on cite quelques unes.

**1.4.6.2. Réseau plan rectangulaire [3]**

On trouve principalement deux types de mailles, la maille rectangulaire et la maille triangulaire.

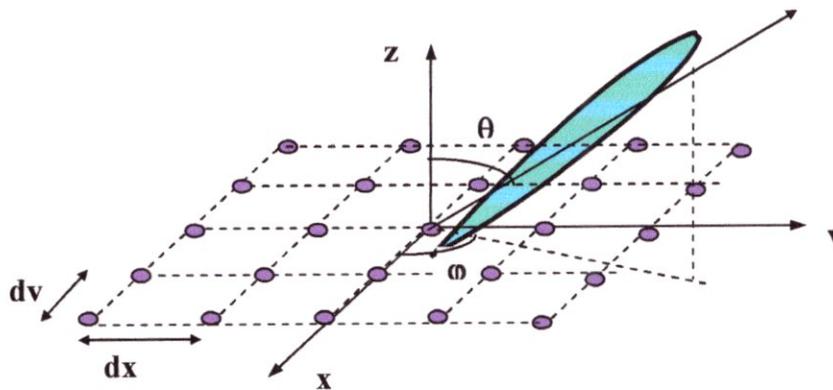


Figure 1.27. réseau plan rectangulaire régulier

La maille rectangulaire est constituée de  $(\pm n)$  sources isotropes suivant Ox et  $(\pm m)$  antennes suivant Oy.

**1.4.6.3. Réseau plan en L uniforme**

C'est un réseau d'antenne en L constitué de deux ou trois brins de M antennes isotropes disposés sur les deux axes x-y (figure 1.28) ou sur trois axes x-y-z (figure 1.29)

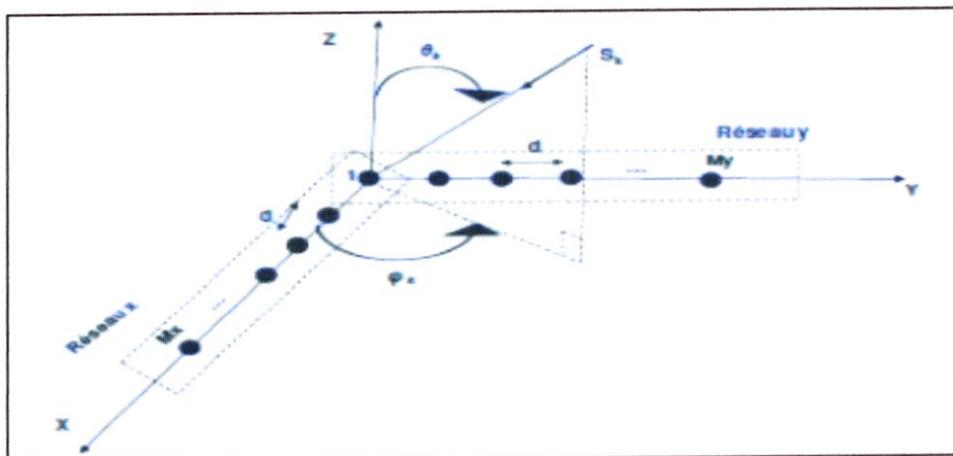


Figure 1.28. Réseau d'antennes uniforme en L sur 2 axes

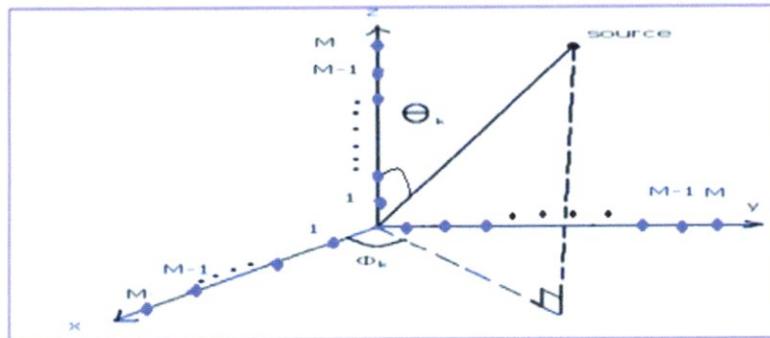


Figure 1.29. Réseau d'antennes uniforme en L sur 3 axes

#### 1.4.6.4. Réseau plan raréfié [3]

On peut raréfier un réseau plan en enlevant par exemple au hasard, des sources d'un réseau régulier. L'intérêt d'un réseau raréfié est d'obtenir un faisceau fin avec peu de sources. La forme du lobe principal (sa largeur) qui dépend de la dimension est la même que celle du réseau plein. Par contre le gain qui est proportionnel au nombre de sources diminue et le niveau moyen des lobes secondaires devient élevé.

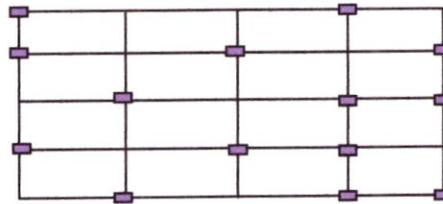


Figure 1.30 Réseau plan raréfié

#### 1.4.6.5. Formation de faisceaux [22]

Au vu de la modélisation des signaux incidents sur le réseau, il apparaît que l'on peut influencer sur ceux-ci en ajustant les coefficients de la matrice du réseau : en présence et, en l'absence de tout réglage, le réseau est focalisé selon sa normale, c'est à dire que les signaux arrivant avec une direction de  $\theta_0$  sont tous en phase en arrivant sur le réseau, mais seront déphasés s'ils arrivent avec une incidence différente. On voit ici l'opportunité qu'offre un tel réseau : le réglage du déphasage sur chaque capteur permettant de faire tourner virtuellement le diagramme d'antenne du réseau, et de le focaliser dans une autre direction que sa normale. Il s'agit de la formation de faisceau, qui remplaçant les antennes tournantes, rend possible un pointage mathématique.

La figure 1.31 illustre le principe de la formation de voies pour la sélection de sources à partir d'une antenne par une méthode de filtrage spatial. Cette méthode consiste en la sommation des retards (ou déphasages) déterminés par la différence de marche en fonction de la direction et de la position de chaque microphone.

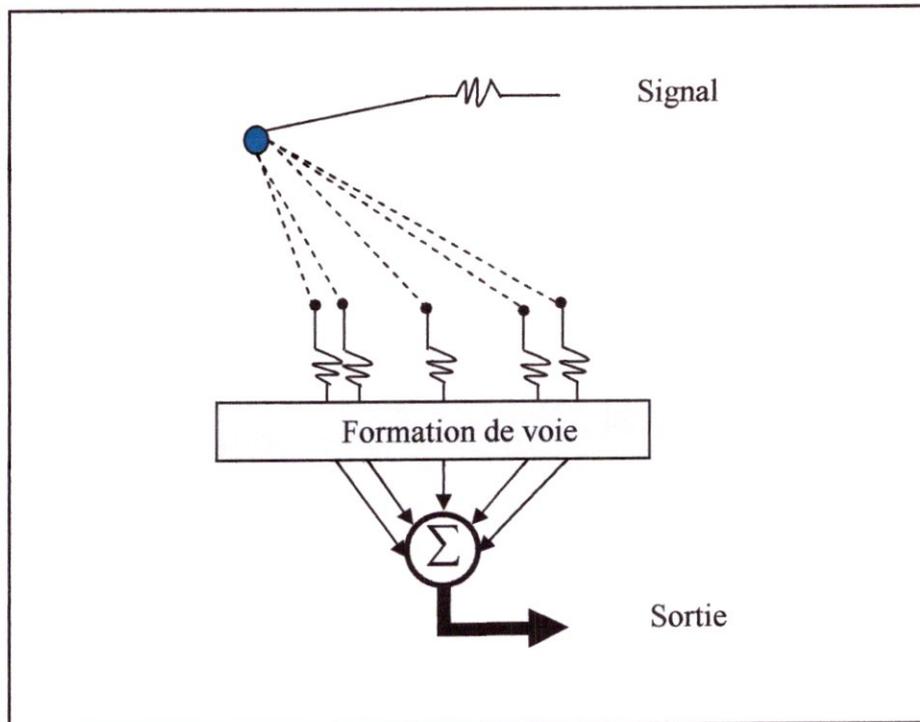


Figure. 1.31. Principe de la formation de faisceaux

L'intérêt de cette méthode est de sélectionner certaines portions de l'espace et de rejeter celles qui ne nous intéressent pas. Pour cela, on modifiera la pondération par les déphasages des voies du réseau afin de sélectionner une direction privilégiée. Il s'agit d'une approche électronique de la directivité d'une antenne : plutôt que de faire tourner une antenne à faisceau fixe, on fait tourner par des méthodes calculatoires le faisceau autour de l'antenne réseau qui reste fixe.

#### 1.4.6.6. Application multifaisceaux [22]

Avec un même réseau d'antenne, il est possible de générer une multitude de faisceaux en associant au système un circuit de formation de faisceaux (BFN : BeamForming Network). Ce système peut être passif ou actif pour pouvoir reconfigurer les faisceaux. Les BFN sont très souvent réalisés avec des composants analogiques (coupleur, déphaseur, diviseur) mais des versions numériques plus performantes et plus coûteuses existent. Ces dispositifs possèdent un nombre de ports d'entrée correspondant au nombre de faisceaux et le nombre de sortie correspond au nombre d'éléments rayonnants. Sur chacun des ports d'entrée est appliquée une loi en phase et en amplitude spécifique au faisceau considéré.

Afin de simplifier le dispositif de formation de faisceaux, de limiter la complexité de l'électronique et donc réduire les coûts, les sources et leur module peuvent être groupés en sous réseau où il est appliqué la même phase. Un exemple simple de circuit formateur de faisceaux analogique passif est donné ( Figure 1.32). Il permet de distribuer les signaux issus de deux faisceaux sur 4 sources rayonnantes avec les amplitudes et

phases désirées afin de pouvoir former deux zones de couvertures. Ce dispositif constitue la forme la plus simple de circuit formateur de faisceaux car il est essentiellement constitué de diviseur de puissance.

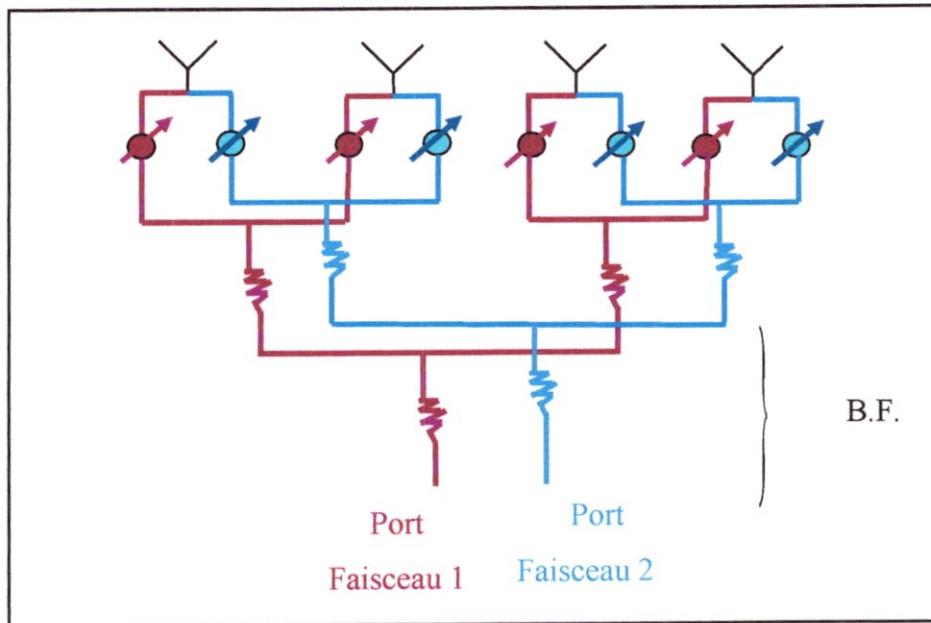


Figure. 1.32. Circuit formateur de faisceaux passif associé à un réseau de 4 éléments

#### 1.4.6.7. Applications des réseaux d'antennes

Il existe plusieurs domaines d'application des réseaux d'antennes, parmi ces applications ce trouve le radar. Dans le cas du radar, les capteurs consistent en plusieurs éléments d'antennes (dipôle, guide d'onde, etc) qui répondent aux ondes électromagnétiques incidentes. Alors que dans le cas du sonar, les capteurs consistent en des hydrophones, conçus pour répondre aux ondes acoustiques.

La vaste majorité des solutions de réseau adaptative, est conçue pour des applications dans le domaine de la communication, les systèmes radar, sonar, mais dans le concept de base aussi commun à la radio astronomie et à la sismologie etc. Dans le cas du radar et du sonar l'impulsion de durée courte, est transmise et la cible est alors déterminée par l'écho qui est réfléchi.

- Une période minimum entre des impulsions successives, est déterminée par

$$T_{\min} = \frac{2P_{\max}}{c} \quad 1.10$$

Où  $P_{\max}$  désigne la gamme de détection maximale

- La largeur maximale de l'impulsion est limitée maximale ment par

$$t_{\max} = \frac{2r_d}{c} \quad 1.11$$

Où  $r_d$  est la rangée de capacité de discriminer entre deux cibles.

Les fréquences de coupures

- Sonar : 100 Hz – 100 KHz
- Radar : 1 GHz-100GHz

Soit la conception technologique d'un radar

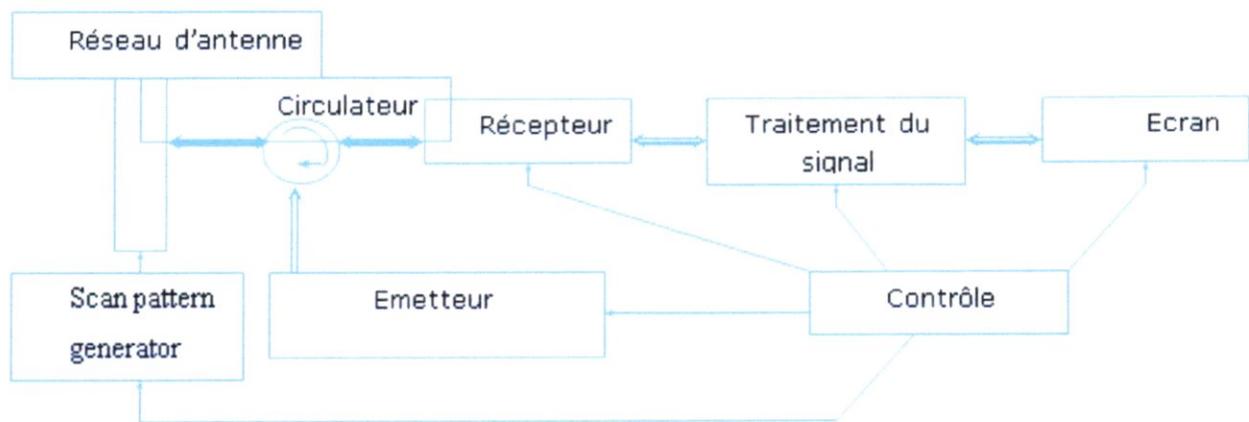


Figure1.33. schéma synoptique du radar

- ▶ L'émetteur : génère des formes d'onde à haute puissance
- ▶ L'antenne : détermine la direction et la forme du faisceau transmis et reçu.
- ▶ Le récepteur : fournit la conversion des fréquences et atténue le bruit.
- ▶ Le traitement du signal : fournit la détection de cibles, poursuite de cible et de clutter, et estime la trajectoire de la cible.
- ▶ L'écran : fait la conversion du signal traité sous forme d'information codée par des points brillants représentant les différentes cibles détectées.

Un nombre de capteurs indépendants, est placé aux différents points dans l'espace, pour écouter le signal reçu. Les sorties des capteurs sont pesées en se basant sur un critère qui permet de distinguer entre les propriétés spatiales du signal désiré et du bruit, pour produire le signal désiré estimé. Ce filtrage spatial est connu sous le nom de beamforming.

# **Chapitre 2**

## **Modèle du signal**

**et**

## **méthodes d'estimation**

eux même devront changer leur position avec le temps dans l'espace. Ces perturbations provoquent un signal de retour de nature aléatoire.

Dans un contexte passif, le signal reçu au niveau du réseau est auto-généré par la cible, tel que les propulseurs ou le bruit d'engin de sous-marins dans le cas de sonar. Encore une fois, les signaux sont aléatoires dans la nature. De plus de ces signaux directs que les cibles génèrent, il existe d'autres sources de perturbations telles que les nuages dans le cas du radar et les réverbérations de la surface océanique dans le cas du sonar. De plus, les signaux des cibles peuvent subir des réflexions créant des retours de multi sources qui sont retardés, modifiés en amplitude, des répliques à partir du signal direct qui arrive aux capteurs. Dans tous ces cas, les signaux arrivant au réseau peuvent être vus comme affectés par l'aléa, et le phénomène physique responsable de cet aléa dans le signal peut être supposé comme un processus aléatoire Gaussien (loi normal).

De même que le bruit thermique du capteur et le bruit ambiant, sont aussi aléatoires dans la nature. Ces composantes additives aux sorties du capteur, représentent habituellement la totalité de plusieurs petites sources indépendantes et identiques, et l'application du théorème de la limite centrale, permet de modéliser le bruit résultant comme un processus Gaussien et habituellement stationnaire. Nous avons besoin de dire, que dans telles situations, la totalité du signal et du processus de bruit peuvent être complètement spécifiés par leurs moments de premier et second ordre.

À n'importe quel moment, chaque signal a une composante d'amplitude et de phase (respectivement à une référence). En plus de cette composante, il est nécessaire de générer sa partie en quadrature pour un traitement optimum. Au lieu de porter tout le calcul séparément en terme de leur partie en phase et en quadrature, il est plus avantageux de les représenter sous forme de partie réelle et imaginaire d'un signal complexe. Les signaux actuels qui apparaissent dans n'importe quel système physique, sont réels et dans cette représentation il apparaît comme une partie réelle de signal complexe équivalent. Ainsi, le signal porteur de l'information est modulé en phase avec un facteur de phase  $\theta$ .

$$u_r(t) = \sqrt{P} \cos(\omega_0 t + \phi(t) + \theta) \quad (2.1)$$

Sa représentation complexe est,

$$\tilde{u}(t) = \sqrt{P} e^{j(\omega_0 t + \phi(t) + \theta)} \quad (2.2)$$

Il est clair que :

$$u_r(t) = \text{Re}[\tilde{u}(t)]$$

Et

$$u(t) = \sqrt{P} e^{j(\phi(t) + \theta)} \quad (2.3)$$

est connue comme étant la bande de base de l'enveloppe complexe réduite du signal réel  $u_r(t)$ .

Ainsi, seule la composante porteuse de l'information, apparaît dans cette description. En terme physique, si les signaux sont originaires de très loin du réseau alors ils peuvent être modélisés comme des ondes planes uniformes porteuses d'information. Si ces ondes planes avancent à travers un milieu non dispersif et qui introduit seulement des retards de propagation, la sortie de n'importe quel autre élément du réseau peut être présenté par une avance de temps ou un retard de temps de la version de l'enveloppe complexe à l'élément de référence, et ceci évite la description de la fréquence porteuse.

Des signaux tels que ci-dessus qui peut être caractérisé par une seule fréquence porteuse sont connus en tant que sources à bande étroite. . Par contre à ceci, les signaux occupant une bande spectrale significative constitue des sources à larges bandes. De plus, tous ces signaux peuvent être incorrélés, corrélés ou cohérents avec n'importe quel autre.

En particulier, pour deux signaux stationnaires  $u_i(t)$ ,  $u_j(t)$ , soit  $\rho_{ij}$  représentant leur coefficient de corrélation. Par définition :

$$\rho_{ij} = \frac{E [u_i(t)u_j^*(t)]}{\sqrt{E [ |u_i(t)|^2 ] E [ |u_j(t)|^2 ]}} \quad (2.4)$$

Avec  $|\rho_{ij}| \leq 1$

Ainsi,

- ▣  $\rho_{ij}=0 \rightarrow u_i(t), u_j(t)$  sont incorrélés
- ▣  $0 < |\rho_{ij}| < 1 \rightarrow u_i(t), u_j(t)$  sont corrélés
- ▣  $|\rho_{ij}|=1 \rightarrow u_i(t), u_j(t)$  sont cohérents

Alors, sous des conditions de cohérence,  $u_j(t) = \alpha u_i(t)$  où  $\alpha$  est une constante complexe non aléatoire.

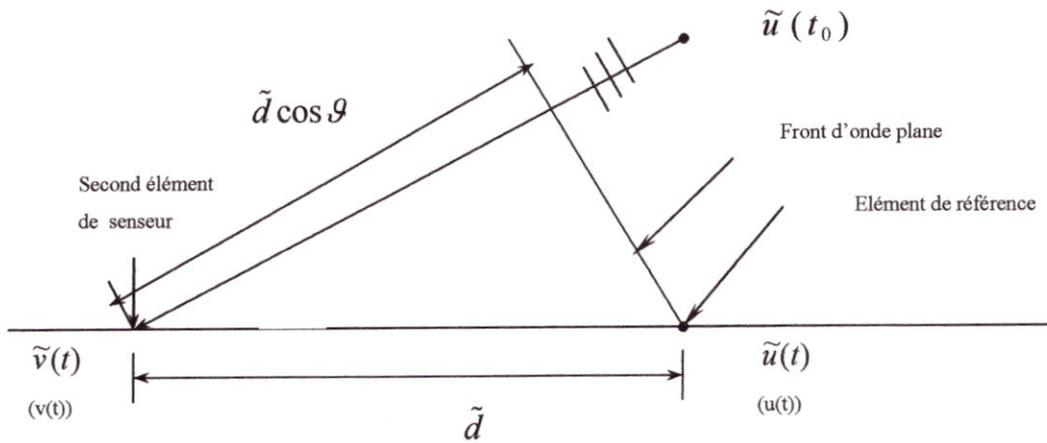
En pratique les composantes de bruit additif sont incorrélées avec la partie du signal. Cependant, parmi eux les bruits d'inter-élément peuvent être corrélés ou incorrélés avec d'autres. Une supposition standard est de les considérer incorrélés (indépendant dans le cas Gaussien) et des processus identiques, i.e, si  $n_i(t)$  et  $n_j(t)$  représentent le  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  bruit du capteur alors,

$$E[n_i(t)n_j^*(t)] = \sigma^2 \delta_{ij} \quad (2.5)$$

Où  $\sigma^2$  représentent la puissance de bruit commune à tous les capteurs.

On a déjà remarquer que pour une onde plane progressif, passant à travers un milieu non dispersif, le signal de sortie à n'importe quel élément du capteur immergé dans ce milieu peut être représenté comme une

version retardée ou avancée de son enveloppe complexe par rapport à l'élément de référence. Pour voir ceci, soit  $\tilde{u}(t)$  dans (2.2) dénote le signal complexe représentant l'onde plane modulée à l'élément de référence dans la figure (2.1).



**Figure 2.1** paire d'éléments de capteurs identiques.  $u(t), v(t)$  représentant l'enveloppe des signaux complexes correspondants associées avec  $\tilde{u}(t)$  et  $\tilde{v}(t)$ .

La normale au front d'onde plane fait un angle  $\theta$  avec la ligne joignant les capteurs dans le réseau linéaire. Soit d'autre part  $\tilde{d}(t)$  dénotant la distance du second capteur par rapport au point de référence en unité absolue. La sortie  $\tilde{v}(t)$  au second capteur est retardée par le temps requis pour la propagation de l'onde plane à travers  $\tilde{d}(t) \cos \theta$  et, alors ce temps de retard  $\tau$  est donné par :

$$\tau = \frac{\tilde{d} \cos \theta}{c} \tag{2.6}$$

$c$  : La vitesse de propagation de la lumière

Ainsi,

$$\tilde{v}(t) = \tilde{u}(t - \tau) \tag{2.7}$$

Si la fréquence porteuse est assez large comparée à la largeur de bande du signal modulé, alors le signal modulé peut être traité comme quasi-statique durant les intervalles de temps de l'ordre de  $\tau$  et dans ce cas (2.7) est réduite à :

$$\tilde{v}(t) = \tilde{u}(t) e^{-j\omega_0 \frac{\tilde{d} \cos \theta}{c}} = \tilde{u}(t) e^{-j2\pi \frac{\tilde{d} \cos \theta}{\lambda}} \tag{2.8}$$

Où  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'onde porteuse. En termes de représentation d'enveloppe complexe réduite de la bande de base, le signal de référence  $u(t)$  est donné par (2.2) et à partir de (2.8) la sortie du second capteur est :

$$v(t) = u(t)e^{-j2\pi\tilde{d}\cos\theta/\lambda} \quad (2.9)$$

Souvent il est plus avantageux d'exprimer l'espacement des interéléments en termes d'unités de dimensionnement normalisé. Il est plus intéressant de normaliser toutes les distances respectivement à la moitié de la longueur d'onde. Soit  $d$  représentant la distance normalisée entre l'élément de référence et le

second capteur. Alors  $d = \tilde{d}/(\lambda/2)$  et (2.9) devienne,

$$v(t) = u(t)e^{-j\pi d\cos\theta} \quad (2.10)$$

Pour les signaux à bande étroite, le temps de retard apparaît comme un retard de phase pur du signal de référence. De plus, ce retard de phase dépend uniquement de l'espacement entre les capteurs et de l'angle d'arrivée de l'onde plane, et est indépendant de la variable temporelle. Cependant ceci n'est pas le cas dans une situation en large bande et si l'enveloppe complexe  $u(t)$  à l'élément de référence représente un signal à large bande, alors la sortie correspondante  $v(t)$  au second capteur dans la figure (2.1) peut être écrite comme,

$$v(t) = u(t - \tau) \quad (2.11)$$

Avec  $\tau$  comme dans (2.6), et  $U(f)$  et  $V(f)$  représentent la transformée de Fourier de  $u(t)$  et  $v(t)$  respectivement, (2.11) se réduit à,

$$V(f) = U(f)e^{-j2\pi f\tau} = U(f)e^{-j\pi f d\cos\theta/f_0} \quad (2.12)$$

Noter que (2.12) est structurellement identique à une situation de bande étroite représentée dans (2.10) et par conséquent, au moins, les techniques conçues pour les cas de bande étroite peuvent être appliquées pour les signaux à large bande dans le domaine fréquentiel. [6]

### 2.3.L'avantage de l'utilisation du réseau d'antennes

L'objectif principal d'un réseau d'antenne est d'améliorer la réception de certains signaux appelés signaux désirés (utiles) tout en empêchant au maximum tous les autres signaux indésirables, souvent appelés interférences. Par exemple si la direction d'arrivée du signal utile est connue, il est possible d'assurer une meilleure réception en annulant tous les signaux arrivant d'autres directions considérées comme interférences.

Cependant, la possibilité de modifier la sortie du réseau pour augmenter le signal de réception désiré et simultanément de supprimer les signaux indésirés, peut être illustrée en considérant une situation de source unique comme dans la figure (2.1), en présence de  $M$  capteurs identiques.

Soit  $d_1, d_2, \dots, d_M$  représentant les distances normalisées de ces capteurs respectivement au point de référence et  $u(t)$  l'enveloppe complexe du signal à ce point. D'autre part, soit  $n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)$

représentants respectivement les composantes de bruit qui sont supposées indépendantes et identiques comme dans (2.5). Avec  $x_i(t)$  représentant l'enveloppe complexe du signal total reçu au  $i^{\text{ème}}$  capteur, et en utilisant (2.10) il est très facile de voir que,

$$x_i(t) = u(t).e^{-j\pi d_i \cos\theta} + n_i(t) \tag{2.13}$$

et le rapport signal à bruit (SNR) de l'entrée est,

$$(SNR)_i = \frac{E[|u(t)|^2]}{E[|n_i(t)|^2]} = \frac{P}{\sigma^2}$$

Où  $P = E[|u(t)|^2]$  par définition, représente la puissance du signal.

À partir de (2.13) les composantes du signal peuvent être combinées de façon cohérente si les sorties du réseau sont déplacés en phase par  $e^{j\pi d_i \cos\theta}$  ;  $i = 1, 2, \dots, M$  et les signaux résultants sont sommés. Ceci donne le signal de sortie  $y(t)$  qui est de la forme,

$$y(t) = \sum_{i=1}^M x_i(t)e^{j\pi d_i \cos\theta} = M u(t) + \sum_{i=1}^M n_i(t)e^{j\pi d_i \cos\theta} = M u(t) + n(t)$$

Le  $SNR$  en sortie dans ce cas est donné par,

$$\begin{aligned} (SNR)_0 &= \frac{E[|Mu(t)|^2]}{E[|n(t)|^2]} = \frac{M^2 P}{\left[ \sum_i \sum_j E[n_i(t)n_j^*(t)] \right]} \\ &= \frac{M^2 P}{M \sigma^2} = M (SNR)_i \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ainsi un simple déplacement de phase et une opération d'addition parmi les sorties des capteurs produit une amélioration dans le rapport signal à bruit par un facteur égale au nombre de capteurs. Physiquement, à travers des retards de phase appropriés, le signal désiré a été combiné de façon cohérente (en puissance). Ceci résulte en un facteur de gain pour la combinaison signal de sortie comparé au bruit.

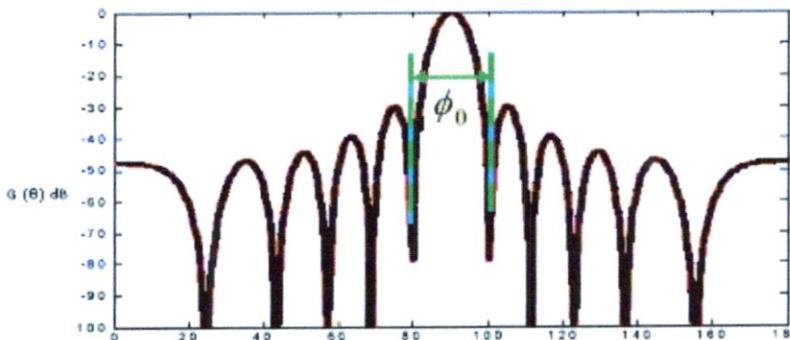


Figure.2.2 Modèle directionnel de gain pour réseau uniforme de 10 éléments ( $\theta$  : degré)

Avec  $\phi_0 = 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{M} \right) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$  (2.15)

Alternativement, le réseau a été « dirigé » pour voir selon le long de la direction  $\theta$ . Le modèle directionnel dans le plan contenant la rangée peut pour cela être trouvée à partir du facteur de la rangée

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^M e^{j\pi d_i \cos \theta} \quad (2.16)$$

et le modèle du gain directionnel normalisé

$$G(\theta) = \left| \frac{1}{M} F(\theta) \right|^2 \quad (2.17)$$

Pour un emplacement d'élément de rangée uniforme ( $d_i = (i-1)$  ;  $i=1,2,\dots, M$ ), le modèle directionnel ci-dessus a une forme explicite

$$G(\theta) = \left( \frac{\sin(\pi M \cos \theta / 2)}{M \sin(\pi \cos \theta / 2)} \right)^2 \quad (\text{en dB}) \quad (2.18)$$

et ceci est dessiné dans la figure (fig. 2.2) pour une rangée de 10 éléments dirigés le long de  $\theta$ . La largeur du lobe principal est  $2\cos^{-1}(2/M)$  et décroît avec l'augmentation du nombre des éléments de sonde. Les lobes secondaires représentent le modèle du gain pour les signaux présents le long de directions autres que la direction de regard tant que la rangée est dirigé le long de  $\theta$ , et une question importante dans la conception de réseaux ou de rangée est où placer les éléments de rangée pour avoir des lobes secondaires uniformément bas. De plus, dans cette installation, il existe toujours  $M-1$  points nuls ( $G(\theta)=0$ ) dans le champ de vision (voir fig.2.2), et dans une situation statique, les poids de la rangée de sortie ou la distance des inter-éléments peuvent être sélectionnés pour créer des nuls le long des directions d'arrivée des sources indésirées.

Si pour cette rangée linéaire un facteur de phase constant de  $(i-1) \Delta_0$  est insérée dans le  $i^{\text{ème}}$  élément de la rangée pour  $i=1,2,\dots,M$ . L'insertion de cette séquence de déplacement de phase a pour effet de déplacer le lobe centrale par

$$\theta_0 = \cos^{-1}(\Delta_0/\pi) \quad (2.19)$$

Et le modèle directionnel total a été dirigé vers cette nouvelle direction. Cet effet peut facilement être incorporé dans (2.18) en remplaçant  $\cos\theta$  par  $(\cos\theta - \cos\theta_0)$ .

Pas loin nous avons considéré seulement le cas d'une seule source et la situation est considérablement plus compliquée dans une scène de multiples sources. Dans ce cas les paramètres d'intérêts incluent le nombre total de signaux, respectivement leur directions d'arrivée, les niveaux de puissance associée, ainsi de variables techniques ont été développées pour évaluer ces paramètres sont discutées dans de nombreuses littératures.[6]

## 2.4. Modèle de signal

L'objectif du traitement d'antenne est de déterminer à partir des signaux reçus pendant un intervalle de temps de durée finie, sur un ensemble de capteur constituant une antenne, des paramètres caractérisant les sources rayonnantes situées dans un milieu de propagation donné.

Le développement du Modèle du signal est basé sur plusieurs suppositions. Premièrement, les sources multiples incidentes, sont supposées être des sources à bande étroite et détectées dans le champ lointain du réseau d'antenne. Deuxièmement, le plan de propagation est homogène, et l'onde arrivant sur le réseau est considérée comme plane.

Dans cette partie, on décrira le Modèle de traitement du signal à,

- Une Dimension (1D) en utilisant un réseau d'antenne linéaire uniforme
- Deux Dimensions (2D) en utilisant un réseau d'antenne uniforme sous forme de L.

### 2.4.1 Modèle du signal à une dimension [7]

Ces dernières années, le problème d'estimation de la direction d'arrivée des signaux multiples à bande étroite a suscité une attention considérable. Cependant, jusqu'ici, la plupart des algorithmes rapportés sont basés sur les rangées linéaires uniformes (ULA) utilisés pour l'estimation de DOAs à une dimension.

Considérons un réseau d'antenne linéaire uniforme (ULA) composé de M capteurs identiques, comme le montre la figure (2.3), recevant K signaux de K sources:  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_K(t)$ .

La direction d'arrivée de l'onde issue de chaque source est notée respectivement par :  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$  par rapport à un repère fixe de l'antenne

▣  $P_i$  :  $i=1,2,\dots,K$ , représente la puissance du  $i^{\text{ème}}$  signal.

▣  $\rho_{ij}$  :  $i, j= 1,2,\dots,K$ , leurs coefficients de corrélations.

$$P_k = E[|u_k(t)|^2], \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\rho_{ij} = \frac{E[u_i(t)u_j^*(t)]}{\sqrt{P_i P_j}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, K; \quad |\rho_{ij}| \leq 1 \quad (2.20)$$

▣  $\rho_{ij}=0 \rightarrow u_i(t), u_j(t)$  sont incorrélés.

▣  $0 < |\rho_{ij}| < 1 \rightarrow u_i(t), u_j(t)$  sont corrélés.

▣  $|\rho_{ij}|=1 \rightarrow u_i(t), u_j(t)$  sont cohérents.

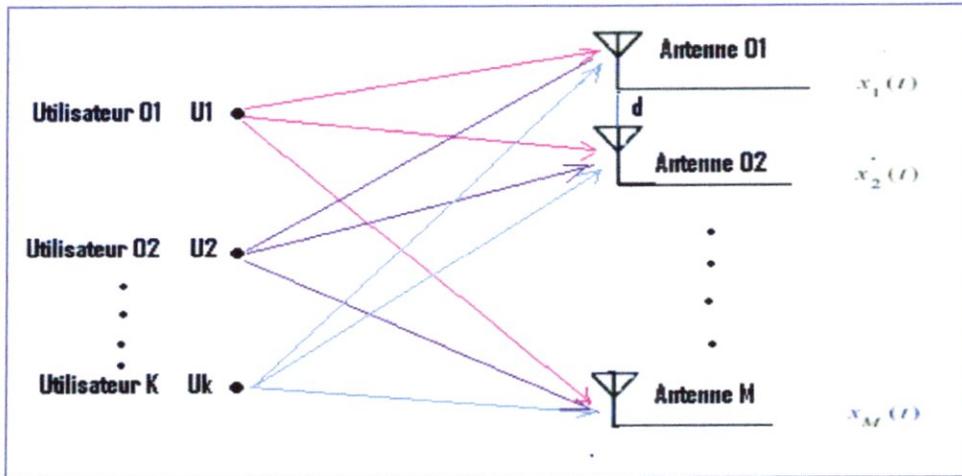


Figure2. 3. Réseau d'antenne linéaire uniforme (ULA)

Supposons que la mesure du vecteur de donnée  $x(t)$ , observé au  $t^{eme}$  échantillons est composé de K signaux de sources à bande étroite incorrélés immergeant le réseau d'antenne. Ainsi, le vecteur de donnée reçu peut être exprimé par,

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^K u_k(t) e^{-j\pi d M_i \sin\theta_k} + n_i(t). \tag{2.21}$$

- d : la distance entre les éléments.
- $M_i$  : représente la distance normalisée du capteur à demi longueur d'onde commune par rapport au point de référence.
- $n_i(t)$  : bruit additif au  $i^{eme}$  capteur supposé Gaussien avec une densité de puissance  $\sigma_n^2$ .

On peut récrire (2.21) sous forme commune vectorielle  $\omega = \pi \sin\theta$ , on a

$$x(t) = \sum_{k=1}^K u_k(t) a(\omega_k) + n(t) \tag{2.22}$$

Où  $x(t)$  est un vecteur de dimension (Mx1)

$a(\omega_k)$  est le vecteur de la direction normalisé associé avec l'angle d'arrivée  $\theta_k$ .

$$a(\omega_k) = \left[ 1, e^{-jd\omega_k}, e^{-jd2\omega_k}, \dots, e^{-jd(M-1)\omega_k} \right]^T \tag{2.23}$$

Finalement, on peut écrire le vecteur de sortie du réseau à l'instant t comme suit,

$$x(t) = Au(t) + n(t) \tag{2.24}$$

Où

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T \tag{2.25}$$

$$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_M(t)]^T \tag{2.26}$$

$$n(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T \tag{2.27}$$

$$\text{et } A = [a(\omega_1), a(\omega_2), \dots, a(\omega_K)] \tag{2.28}$$

### 2.4.2 Modèle du signal à deux dimensions

Le problème d'estimation de la DOA à deux dimensions (azimut, élévation) de sources multiples, fait l'objet de plusieurs recherches. Dans ce qui suit, on présentera un Modèle du signal pour une géométrie de réseau d'antenne linéaire uniforme sous forme de L.

### 2.4.3 Modèle du signal d'un réseau d'antenne linéaire uniforme en forme de L

Considérons un réseau d'antenne en forme de L sur le plan x-z comme le montre la figure (2.4), de M antennes isotropes espacés entre elles d'une distance d. Les deux brins du réseau sont identiques, linéaires, uniformes avec une antenne commune à l'origine.

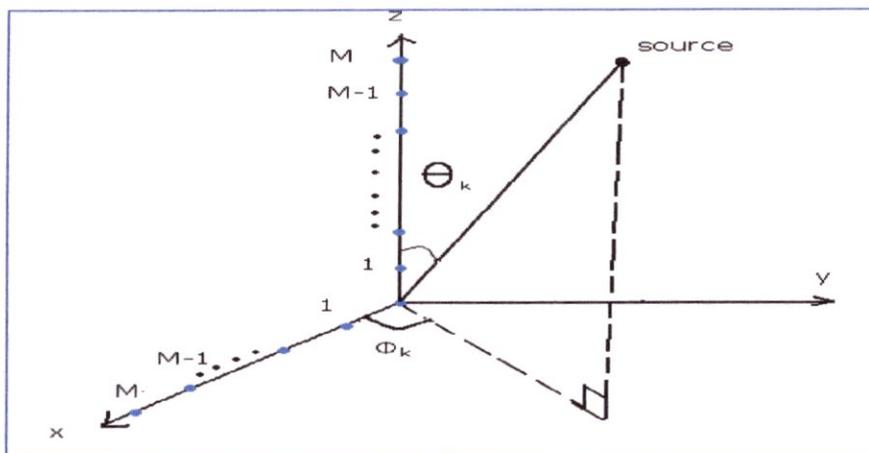


Figure 2.4. Réseau linéaire uniforme sous forme de L

On considère K signaux à bande étroite incohérents, arrivant sur le réseau d'antenne une longueur d'onde  $\lambda$ , dans les directions d'arrivée  $(\theta_k, \phi_k)$  avec  $k=1, \dots, K$ .

Les paramètres  $(\theta_k, \phi_k)$  sont respectivement, l'angle d'observation en élévation et l'angle d'observation en azimut de la  $K^{\text{eme}}$  source.

Le vecteur d'observation à la sortie du réseau au  $t^{\text{eme}}$  échantillons est donné par,

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T \quad (2.29)$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^K s(t) a(\underline{\theta}_k, \phi_k) + n(t) \quad (2.30)$$

Où  $n(t)$  est le vecteur de bruit blanc Gaussien additif de dimension  $(M \times 1)$ .

$$n(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T \quad (2.31)$$

Et  $s(t)$  est le vecteur  $(K \times 1)$  source de signal

$$s(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T \quad (2.32)$$

Enfin le vecteur de direction définie par,

$$a(\theta_k, \phi_k) = \left[ 1, e^{-j\varphi_{k,2}}, \dots, e^{-j\varphi_{k,M}} \right]^T \quad (2.33)$$

Avec  $\varphi_{km}$  dépend de la position et de la géométrie du réseau du sous réseau. Selon l'axe Z, seul l'élévation est considérée et dans ce cas  $\varphi_{km}$  se réduit à  $\theta_k$ , alors que selon l'axe X,  $\varphi_{km}$  est composé des deux angles  $(\theta_k, \phi_k)$ . [8]

#### a. Le vecteur de direction du sous réseau selon l'axe Z

Soit  $x_z(t)$  le vecteur du signal observé au  $t^{\text{eme}}$  échantillons, sur le sous réseau disposé sur l'axe Z.

$$x_z(t) = [x_{1z}(t), x_{2z}(t), \dots, x_{Mz}(t)]^T \quad (2.34)$$

$$x_z(t) = \sum_{k=1}^K s(t) a_z(\theta_k) + n_z(t) \quad (2.35)$$

Où  $n_z(t)$  est le vecteur de bruit blanc Gaussien additif de dimension  $(M \times 1)$  selon l'axe Z . Et

$$a(\theta_k) = \left[ 1, e^{-j\varphi_{z,k,2}}, \dots, e^{-j\varphi_{z,k,M}} \right]^T \quad (2.36)$$

Avec

$$\varphi_{z,k,m} = 2\pi(m-1)d \sin \theta_k / \lambda \quad (2.37)$$

$\theta_k$  angle d'observation en élévation du  $K^{\text{eme}}$  signal de la  $K^{\text{eme}}$  source.[9]

#### b. Le vecteur de direction du sous réseau selon l'axe X

Soit  $x_x(t)$  le vecteur du signal observé au  $t^{\text{eme}}$  échantillons, sur le sous réseau disposé sur l'axe X.

$$x_x(t) = [x_{1x}(t), x_{2x}(t), \dots, x_{Mx}(t)]^T \quad (2.38)$$

$$x_x(t) = \sum_{k=1}^K s(t) a_x(\theta_k, \phi_k) + n_x(t) \quad (2.39)$$

Où  $n_x(t)$  est le vecteur de bruit blanc Gaussien additif de dimension  $M \times 1$  selon l'axe X. Et le vecteur de directivité est,

$$a_x(\theta_k, \phi_{xk}) = \left[ e^{-j\varphi_{x \cdot k, 2}}, \dots, e^{-j\varphi_{x \cdot k, M}} \right]^T \quad (2.40)$$

avec

$$\varphi_{x,k,m} = 2\pi(m-1)d \cos(\theta_k) \cos(\phi_{z,k}) / \lambda \quad (2.41)$$

Où  $\phi_{z,k}$  angle d'observation en azimut du  $k^{\text{eme}}$  signal de la  $K^{\text{eme}}$  source. [9]

## 2.5.Méthodes des sous espaces.

Les méthodes des sous espaces, ou encore plus connues par les méthodes haute résolution (HR), s'appuient sur une décomposition de l'espace en un espace bruit et un espace signal par recherche des valeurs propres.

C'est Pisarenko qui a eu l'idée en 1973 de faire une décomposition en valeurs propres et vecteurs propres sur la matrice d'auto-corrélation du signal, et d'exploiter les données, en montrant que la plus petite valeur propre correspondait au bruit, ce qui permettait de faire une décomposition de l'espace et de déduire les angles.

### 2.5.1 Méthode haute résolution ESPRIT

La méthode ESPRIT, pour '*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*', est une méthode de localisation de sources, pouvant s'appliquer pour des signaux à bande étroite, d'un réseau de capteurs constitué de deux sous réseaux identiques, déduites l'une de l'autre par une translation dont le vecteur d'observation est supposé connu. Cet algorithme a été étendu par une version efficace, TLS-ESPRIT '*Total Least Square*', mise en œuvre par [ROY 89], et [OTT 91]. TLS-ESPRIT constitue la version de référence de l'algorithme, que nous présenterons plus tard, pour l'instant on évoquera un certain nombre de variantes et d'extensions.

La méthode ESPRIT réalise une estimation directe des directions d'arrivée, à partir des propriétés de l'espace signal. Cette méthode, lorsqu'elle est applicable, permet d'éviter la recherche numériquement lourde des maxima d'une puissance de sortie tel que la méthode MUSIC. Initialement, c'est vis-à-vis de ce gain de calcul, et de la simplicité d'implémentation qui en résulte, que l'intérêt d'ESPRIT a été formulé. Le succès ultérieur de la méthode et son développement, sont toutefois également liés à sa capacité à réaliser la localisation dans des contextes de géométries quelconques, avec de bonnes caractéristiques de robustesse et de performances.

**2.5.1.1 Principe d'estimation pour une antenne double (ESPRIT) dans un ULA**

Soit un réseau d'antennes linéaire uniforme (ULA) constituée de deux sous réseaux de  $M - 1$  capteurs, décalés l'un de l'autre d'un vecteur de déplacement  $d$  comme le montre la figure (2.5) :

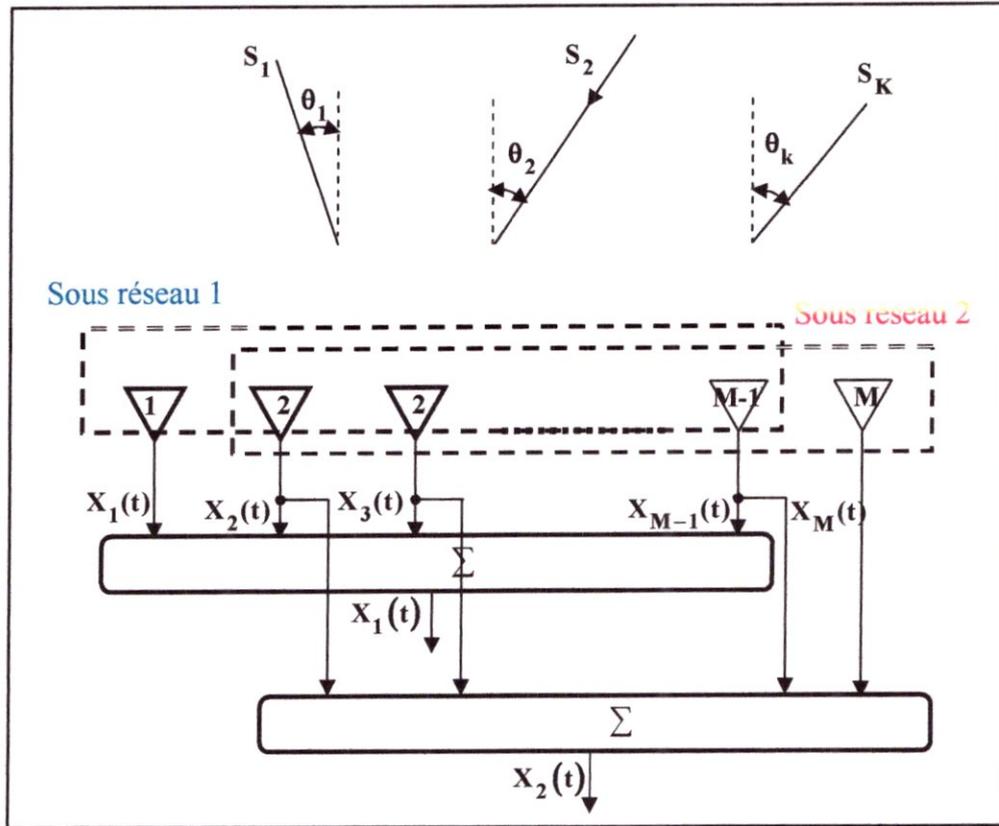


Figure 2.5: Réseau de M éléments, et deux sous réseaux.

On vérifie facilement que, par rapport à l'écriture générale, le vecteur observation s'écrit,

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A \cdot \Phi \end{bmatrix} \cdot u(t) + n(t) \tag{2.42}$$

Avec

$$\Phi = \text{diag} \{ e^{j\pi \sin(\theta_1)}, e^{j\pi \sin(\theta_2)}, \dots, e^{j\pi \sin(\theta_k)} \} \tag{2.43}$$

À partir du modèle (2.42) plusieurs méthodes sont proposées, le but étant de retrouver les informations sur le signal contenues dans  $\Phi$ .

En l'absence du bruit, les vecteurs d'observations correspondant à chacune des demi-antennes prennent la forme :

$$\begin{cases} X_1 = AU \\ X_2 = A \cdot \Phi U = X_1 \Phi \end{cases} \quad (2.44)$$

La matrice  $A$  est une matrice ( $M \times K$ ) de rang  $K$ , en introduisant la pseudo-inverse de  $A$ , on déduit de (2.44) la relation suivante,

$$\begin{cases} A^{psi} A = I_K \\ X_2 = A \cdot \Phi U = A \Phi (A^{psi} A) U = (A \Phi A^{psi}) X_1 \end{cases} \quad (2.45)$$

On a donc la relation suivante entre les deux sous vecteurs,

$$\begin{cases} X_2 = T X_1 \\ \text{avec } T = A \Phi A^{psi} \end{cases} \quad (2.46)$$

On constate que  $T$  est une matrice ( $M \times M$ ) semblable à  $\Phi$ , ce qui entraîne qu'elle a les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$  plus  $M - K$  valeurs propres nulles, tel que,

$$\lambda_1 = e^{j\pi \sin(\theta_1)}, \lambda_2 = e^{j\pi \sin(\theta_2)}, \dots, \lambda_K = e^{j\pi \sin(\theta_K)} \quad (2.47)$$

On peut obtenir l'expression de  $\Phi$  en fonction de l'observation non bruitée en multipliant les deux membres de (2.46) par la pseudo inverse de  $X_1 X_1^H$ ,

$$T = X_2 X_1^{psi} \quad (2.48)$$

En présence de bruit, la solution exacte ci-dessus pour  $T$  par la pseudo-inverse s'interprète comme une solution au sens des moindres carrés entre  $X_2$  et  $\hat{T} \cdot X_1$ .

La matrice  $X_1$  étant alors de rang  $M$ , sa pseudo inverse peut s'écrire  $X_1^{psi} = X_1^H \cdot (X_1 X_1^H)^{-1}$ , d'où l'expression de la matrice  $T$  estimée,

$$\hat{T} = X_2 X_1^H \cdot (X_1 X_1^H)^{-1} \quad (2.49)$$

La relation (2.49) peut se récrire en fonction des covariances entre les deux sous-antennes,

$$R_{11} = \frac{1}{N} X_1 X_1^H, \text{ et } R_{21} = \frac{1}{N} X_2 X_1^H$$

Alors,

$$\hat{T} = R_{21} \cdot R_{11}^{-1} \quad (2.50)$$

$$[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k] = \Gamma \text{ plus grandes valeurs propres de } [R_{21} \cdot R_{11}^{-1}] .$$

Le calcul des valeurs propres généralisées du faisceau  $[R_{11}, R_{21}]$  étant numériquement plus efficace, du point de vue précision. On ne garde que  $K$  valeurs propres, les autres se réduisant au bruit. [11]

D'après, l'équation (2.43) l'estimation de l'angle d'arrivée  $\theta_k$  pour chaque source est donnée par,

$$\theta_k = \arcsin\left(\frac{\arg(\Gamma)}{2\pi d / \lambda}\right) \tag{2.51}$$

• **Résumé de l'algorithme ESPRIT 1D**

L'algorithme ESPRIT est basé sur les étapes suivantes :

- Récupérer les signaux de sorties de chaque capteur pour le réseau complet.
- Calculer la matrice de covariance
- Calculer la moyenne R de la matrice de covariance
- Déterminer les vecteurs propres de R
- Constituer le sous-espace signal  $X(t)$  et les sous espaces  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$
- Calculer la matrice  $T = \frac{X_2}{X_1}$
- Calculer les valeurs propres de T
- Calculer les DOA à l'aide de la relation (2.51)

**2.5.1.2 Principe d'estimation pour une antenne double (ESPRIT) dans un réseau en L**

Soit un réseau d'antennes en L constituée de deux sous réseaux de M capteurs. Considérons le sous réseau d'antenne linéaire uniforme placé sur l'axe Z, constituée de deux sous réseaux de M - 1 capteurs, décalés l'un de l'autre d'un vecteur de déplacement d.

Le vecteur d'observation décrit dans la section Modèle du signal dans un réseau en L sur l'axe Z est donné par les équations (2.34 à 2.37)

On vérifie que, par rapport à l'écriture générale, le vecteur d'observation est augmenté,

$$X_z(t) = \begin{bmatrix} X_{z1}(t) \\ X_{z2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z \\ A_z \cdot \Psi_z \end{bmatrix} \cdot s(t) + n(t) \tag{2.52}$$

Avec

$$\Psi_z = \text{diag}\{e^{j\pi \sin(\theta_1)}, e^{j\pi \sin(\theta_2)}, \dots, e^{j\pi \sin(\theta_k)}\} \tag{2.53}$$

A partir du modèle (2.52) plusieurs méthodes sont proposées, le but étant de retrouver les informations sur le signal contenues dans  $\Psi_z$ . En l'absence du bruit, les vecteurs d'observations correspondant à chacune des demi-antennes prennent la forme,

$$\begin{cases} X_{z1} = A_z \cdot S \\ X_{z2} = A_z \cdot \Psi_z \cdot S \end{cases} \quad (2.54)$$

La matrice  $A_z$  est une matrice  $(M \times K)$  de rang  $K$ , en introduisant la pseudo-inverse de  $A_z$ , on déduit de (2.54) la relation suivante,

$$\begin{cases} A_z^{psi} \cdot A_z = I_K \\ X_{z2} = A_z \cdot \Psi_z \cdot S = A_z \cdot \Psi_z \cdot (A_z^{psi} \cdot A_z) \cdot S = (A_z \cdot \Psi_z \cdot A_z^{psi}) \cdot X_{z1} \end{cases} \quad (2.55)$$

On a donc la relation suivante entre les deux sous vecteurs,

$$\begin{cases} X_{z2} = T_z \cdot X_{z1} \\ \text{avec } T_z = A_z \cdot \Psi_z \cdot A_z^{psi} \end{cases} \quad (2.56)$$

On constate que  $T_z$  est une matrice  $(M \times M)$  semblable à  $\Psi_z$ , ce qui entraîne qu'elle a les valeurs propres  $\lambda_{z1}, \lambda_{z2}, \dots, \lambda_{zK}$  plus  $M - K$  valeurs propres nulles, tel que,

$$\lambda_{z1} = e^{j\pi \sin(\theta_1)}, \lambda_{z2} = e^{j\pi \sin(\theta_2)}, \dots, \lambda_{zK} = e^{j\pi \sin(\theta_K)} \quad (2.57)$$

On peut obtenir l'expression de  $\Psi_z$  en fonction de l'observation non bruitée en multipliant les deux membres de (2.56) par la pseudo inverse de  $X_{z1} X_{z1}^H$ .

$$T_z = X_{z2} X_{z1}^{psi} \quad (2.58)$$

En présence de bruit, la solution exacte ci-dessus pour  $T$  par la pseudo-inverse s'interprète comme une solution au sens des moindres carrés entre  $X_{z2}$  et  $\hat{T}_z \cdot X_{z1}$ .

La matrice  $X_{z1}$  étant alors de rang  $M$ , sa pseudo inverse peut s'écrire  $X_{z1}^{psi} = X_{z1}^H \cdot (X_{z1} \cdot X_{z1}^H)^{-1}$ , d'où l'expression de la matrice  $T$  estimée.

$$\hat{T}_z = X_{z2} X_{z1}^H \cdot (X_{z1} \cdot X_{z1}^H)^{-1} \quad (2.59)$$

La relation (2.59) peut se récrire en fonction des covariances entre les deux sous réseaux,

$$R_{11z} = \frac{1}{N} X_{z1} X_{z1}^H, \text{ et } R_{21z} = \frac{1}{N} X_{z2} X_{z1}^H \quad (2.60)$$

Alors,

$$\hat{T}_z = R_{21z} \cdot R_{11z}^{-1} \quad (2.61)$$

$$[\hat{\lambda}_{z1}, \hat{\lambda}_{z2}, \dots, \hat{\lambda}_{zk}] = \Gamma_z \text{ plus grandes valeurs propres de } [R_{21z} \cdot R_{11z}^{-1}] .$$

D'après, l'équation (2.53) l'estimation de l'angle d'arrivée en élévation  $\theta_k$  pour chacune des sources est donnée par (2.51).

Reste à estimer l'angle d'arrivée en azimut selon l'axe X qui est  $\Psi_x$ , le vecteur d'observation du signal de sortie est collecté de l'axe X, comme il a été décrit dans la section du Modèle du signal d'un réseau en L. voir les équations de(2.38 - 2.41).[10] [11]

Avec la même procédure et en suivant les mêmes étapes pour l'estimation de l'angle d'arrivé en élévation sur l'axe Z, on estime l'angle d'arrivé en azimut  $\Phi_k$  dela K<sup>eme</sup> source sur l'axe X, sachant que,

$$\Psi_x = \text{diag} \left\{ e^{j\pi \cos(\theta_1) \cos(\phi_1)}, e^{j\pi \cos(\theta_2) \cos(\phi_2)}, \dots, e^{j\pi \cos(\theta_k) \cos(\phi_k)} \right\} \quad (2.62)$$

On estime alors  $R_{11x}$  et  $R_{21x}$ ,

$$R_{11x} = \frac{1}{N} Xx_1 Xx_1^H, \text{ et } R_{21x} = \frac{1}{N} Xx_2 Xx_1^H$$

Ainsi,

$$\hat{T}_x = R_{21x} R_{11x}^{-1} \quad (2.63)$$

$$[\hat{\lambda}_{x1}, \hat{\lambda}_{x2}, \dots, \hat{\lambda}_{xk}] = \Gamma_x \text{ plus grandes valeurs propres de } [R_{21x} \cdot R_{11x}^{-1}] .$$

Et finalement, l'estimation de l'angle d'arrivé en azimut  $\Phi_k$  pour chaque source est donnée par,

$$\phi_k = \ar \cos \left( \frac{\arg(\Gamma_x)}{2\pi d \cos(\theta_k) / \lambda} \right) \quad (2.64)$$

**Remarque**

On peut remarquer qu'à faible rapport signal sur bruit, l'inversion de  $R_{11}$  risque d'entraîner des problèmes de dégradation de l'estimation.

D'autre part, cette matrice se trouve biaisée en présence du bruit. L'idée est donc de garder un pseudo-inverse, ne portant que sur la partie signal, estimée par décomposition en éléments propres, c'est cette évaluation qui fait l'objet de l'algorithme **TLS-ESPRIT** qui cherche une solution des moindres carrés consistant à rendre l'erreur qui est dans notre cas le bruit, orthogonal avec le sous espace signal.

## 2.5.2 Méthode haute résolution TLS-ESPRIT

### 2.5.2.1 Principe d'estimation pour une antenne double (TLS-ESPRIT) dans un ULA [11]

On considère un réseau d'antenne linéaire uniforme de  $2M$  capteurs constitué de deux sous antennes déduites l'une de l'autre par une translation de vecteur  $d$ . On suppose qu'au  $i^{\text{ème}}$  capteur de la première sous antenne correspond par cette translation le  $i^{\text{ème}}$  capteur de la seconde sous antenne.

Soit  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  les vecteurs d'observation en sortie des deux sous réseaux d'antennes, comme dans (2.52).

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A\Phi \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{bmatrix} = \tilde{A}u(t) + \tilde{n}(t). \quad (2.65)$$

Alors la matrice de covariance du réseau complet sera,

$$R_{XX} = E[X(t)X^H(t)] = \tilde{A}R_u\tilde{A}^H + \sigma^2 \Sigma_{\tilde{n}} \quad (2.66)$$

Où

$$\Sigma_{\tilde{n}} = \begin{bmatrix} I_M & \tilde{J}_1 \\ \tilde{J}_1^H & I_M \end{bmatrix}$$

Puisque  $\tilde{A}R_u\tilde{A}^H$  est de rang  $K$ , les valeurs propres de  $R_{XX}$  peuvent être représentées comme  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_K > \lambda_{K+1} = \dots = \lambda_{2M} = \sigma^2$ .

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres de  $R_{XX}$  obéissent à la relation suivante,

$$R_{XX} e_i = \lambda_i \Sigma_{\tilde{n}} e_i$$

Où

$$\tilde{a}^H(\omega_k) e_i = 0, k = 1, 2, \dots, K, i = K + 1, K + 2, \dots, 2M$$

Où  $\tilde{a}(\omega_k), k = 1, 2, \dots, K$ , sont les  $K$  vecteurs de colonne de  $\tilde{A}$ .

D'une manière équivalente,  $e_1, e_2, \dots, e_K$  sont orthogonaux au même sous espace orthogonal au vecteurs de colonne de  $\tilde{A}$  signifiant,

$$[e_1, e_2, \dots, e_K] = \tilde{A}C \quad (2.67)$$

Où  $C$  est une certaine matrice non singulière de  $K \times K$ .

Définissons deux matrices de  $(M \times K)$  et par la décomposition de (2.67),

Ainsi,

$$[e_1, e_2, \dots, e_K] = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Puis

$$E_x = AC, \quad E_y = ABC \quad (2.69)$$

et

$$[E_x \ E_y] = A[C \ BC] \quad (2.70)$$

Ce qui donne,

$$E_{xy} \equiv \begin{bmatrix} E_x^H \\ E_y^H \end{bmatrix} [E_x \ E_y] = \begin{bmatrix} C^H \\ C^H B^H \end{bmatrix} A^H A [C \ BC] \quad (2.71)$$

$E_{xy}$  est hermitienne et non négatif et est de rang  $K$ . Ainsi  $E_{xy}$  à la représentation suivante,

$$E_{xy} = V \begin{bmatrix} l_1 & & & & 0 \\ & l_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & l_K & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} V^H \quad (2.72)$$

Où  $l_i > 0$  et  $VV^H = I_M$ .

Dans la formulation de TLS- ESPRIT, la prochaine étape consiste à trouver une matrice  $w(2K \times K)$  tel que,

$$[E_x \ E_y] W = 0. \quad (2.73)$$

Dans ce cas nous avons,

$$A[C \ BC] W = 0. \quad (2.74)$$

Puisque la dimension de  $A$  est  $(M \times K)$  et de rang  $K$ , (2.74) est équivalent à,

$$[C \ BC] W = 0. \quad (2.75)$$

De nouveau, partitionnons  $W$  comme,

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

Où  $W_1$  et  $W_2$  sont deux matrices de  $(K \times K)$  et donc (2.75) s'écrit,

$$\begin{bmatrix} C & BC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = CW_1 + BCW_2 = 0$$

Où  $-W_1W_2^{-1} = C^{-1}BC$

Ainsi, n'importe quelle matrice  $W$  satisfaisant (2.73) à la propriété intéressante, est que les valeurs propres de la matrice  $-W_1W_2^{-1}$  générées par la partition de (2.76), sont données par  $e^{-j\omega_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , alors les angles d'arrivées sont obtenues directement.

Pour compléter cette analyse, il faut trouver la matrice  $W$  tel que,

$$E_{xy} v_i = l_i v_i = 0, \quad K + 1 < i \leq 2K \tag{2.77}$$

où  $v_i$  représente le  $i^{eme}$  vecteur colonne de  $V$ . Puisque  $\begin{bmatrix} E_x & E_y \end{bmatrix}$  est également de rang  $K$  (2.72), (2.77) se réduit à,

$$\begin{bmatrix} E_x & E_y \end{bmatrix} v_i = 0, \quad K + 1 < i \leq 2K \tag{2.78}$$

Ainsi la matrice  $W$  désiré est donné par,

$$W = [v_{K+1}, v_{K+2}, \dots, v_{2K}] \equiv \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

Et les valeurs propres  $\Gamma = [\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k]$  de  $-V_{12} V_{22}^{-1}$  donne l'estimation de l'angle d'arrivé  $\theta_k$  pour chaque source et elle est donnée par,

$$\theta_k = \arcsin \left( \frac{\arg(\Gamma)}{2\pi d / \lambda} \right) \tag{2.80}$$

### 2.5.2.2 Principe d'estimation pour une antenne double (TLS-ESPRIT) dans un réseau en L

On considère un réseau d'antenne linéaire uniforme de  $2M$  capteurs constitué de deux sous antennes déduites l'une de l'autre par une translation de vecteur  $d$ . On suppose qu'au  $i^{eme}$  capteur de la première sous antenne correspond par cette translation le  $i^{eme}$  capteur de la seconde sous antenne.

Soit  $X_{z_1}(t)$  et le  $X_{z_2}(t)$  les vecteurs d'observation en sortie de es deux sous réseaux d'antennes comme dans (2.52) :

$$X_z(t) = \begin{bmatrix} X_{z_1}(t) \\ X_{z_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z \\ A_z \Psi_z \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} n_{z_1}(t) \\ n_{z_2}(t) \end{bmatrix} = \tilde{A}_z u_z(t) + \tilde{n}_z(t).$$

Alors la matrice de covariance du réseau complet sera,

$$R_{zz} = E [X_z(t) X_z^H(t)] = \tilde{A} R_u \tilde{A}^H + \sigma^2 \Sigma_{\tilde{n}_z} \quad (2.81)$$

Où 
$$\Sigma_{\tilde{n}_z} = \begin{bmatrix} I_M & \tilde{J}_1 \\ \tilde{J}_1^H & I_M \end{bmatrix}$$

Puisque  $\tilde{A} R_u \tilde{A}^H$  est de rang  $K$ , les valeurs propres généralisées de  $R_{zz}$  peuvent être représentées comme  $\lambda_{z1} \geq \lambda_{z2} \geq \dots \geq \lambda_{zK} > \lambda_{zK+1} = \dots = \lambda_{z2M} = \sigma^2$ .

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres de  $R_{zz}$  obéissent a la relation suivante,

$$R_{zz} e_i = \lambda_{z_i} \Sigma_{\tilde{n}_z} e_i$$

où

$$\tilde{a}_z^H(\theta_k, \phi_k) e_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad i = K + 1, K + 2, \dots, 2M$$

Où  $\tilde{a}_k(\theta_k, \phi_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , sont les  $K$  vecteurs de colonne de  $\tilde{A}_z$ .

D'une manière équivalente,  $e_1, e_2, \dots, e_K$  sont orthogonaux au même sous espace orthogonal au vecteurs de colonne de  $\tilde{A}_z$  signifiant,

$$[e_1, e_2, \dots, e_K] = \tilde{A}_z C_z \quad (2.82)$$

où  $C_z$  est une certaine matrice non singulière de  $K \times K$ .

Définissons deux matrices de  $(M \times K)$  et par la décomposition de (2.82)

Ainsi, 
$$[e_1, e_2, \dots, e_K] = \begin{bmatrix} E z_x \\ E z_y \end{bmatrix}$$

Aussi,

$$E z_x = A_z C_z, \quad E z_y = A_z B_z C_z \quad (2.83)$$

Et

$$\begin{bmatrix} E z_x & E z_y \end{bmatrix} = A_z [C_z \quad B_z C_z] \quad (2.84)$$

Ce qui donne,

$$Ez_{xy} \equiv \begin{bmatrix} Ez_x^H \\ Ez_y^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ez_x & Ez_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cz^H \\ Cz^H Bz^H \end{bmatrix} A_z^H A_z \begin{bmatrix} Cz & BzCz \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$Ez_{xy}$  est hermitienne et non négatif et est de rang  $K$ . Ainsi  $Ez_{xy}$  à la représentation suivante,

$$Ez_{xy} = V_z \begin{bmatrix} l_1 & & & & 0 \\ & l_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & l_K & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} V_z^H \quad (2.86)$$

Où  $l_i > 0$  et  $V_z V_z^H = I_M$ .

Dans la formulation de TLS- ESPRIT, l'étape suivante consiste de trouver une matrice  $W_z (2K \times K)$  telle que,

$$\begin{bmatrix} Ez_x & Ez_y \end{bmatrix} W_z = 0. \quad (2.87)$$

Dans ce cas nous avons,

$$A_z \begin{bmatrix} Cz & BzCz \end{bmatrix} W_z = 0. \quad (2.88)$$

Puisque la dimension de  $A_z$  est  $(M \times K)$  et de rang  $K$ , (2.88) est équivalent à,

$$\begin{bmatrix} Cz & BzCz \end{bmatrix} W_z = 0. \quad (2.89)$$

de nouveau, partitionnons  $W_z$  comme,

$$W_z = \begin{bmatrix} W_{z1} \\ W_{z2} \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Où  $W_{z1}$  et  $W_{z2}$  sont deux matrices de  $(K \times K)$ . Alors (2.89) s'écrit,

$$\begin{bmatrix} Cz & BzCz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{z1} \\ W_{z2} \end{bmatrix} = CzW_{z1} + BzCzW_{z2} = 0$$

Où

$$-W_{z1} W_{z2}^{-1} = Cz^{-1} BzCz \quad (2.91)$$

Ainsi, n'importe quelle matrice  $W_z$  satisfaisant (2.87) à la propriété intéressante, est que les valeurs propres de la matrice  $-W_{z1} W_{z2}^{-1}$  générées par la partition en (2.90), sont données par  $e^{-j\omega_k}$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ . alors les angles d'arrivée en élévation des différentes sources sont obtenues directement.

Pour compléter cette analyse, il faut trouver la matrice  $W_z$  telle que,

$$Ez_{xy} \ vz_i = l_i \ vz_i = 0, \quad K+1 < i \leq 2K \quad (2.92)$$

Où  $vz_i$  représente le  $i^{eme}$  vecteur de colonne de  $V_z$ . Puisque  $[Ez_x \ Ez_y]$  est également de rang  $K$  (2.85), (2.92) se réduit à,

$$[Ez_x \ Ez_y] \ vz_i = 0, \quad K+1 < i \leq 2K \quad (2.93)$$

Ainsi la matrice  $W_z$  désiré est donné par,

$$W_z = [vz_{K+1}, vz_{K+2}, \dots, vz_{2K}] \equiv \begin{bmatrix} V_{z12} \\ V_{z22} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

Et les valeurs propres  $\Gamma_z = [\hat{\lambda}_{z1}, \hat{\lambda}_{z2}, \dots, \hat{\lambda}_{zk}]$  de  $-V_{z12} V_{z22}^{-1}$  donne l'estimation de l'angle d'arrivé en élévation  $\theta_k$  pour chaque source est donnée par,

$$\theta_k = \arcsin \left( \frac{\arg(\Gamma_z)}{2\pi d / \lambda} \right) \quad (2.95)$$

Avec la même procédure et en suivant les mêmes étapes pour l'estimation de l'angle d'arrivée en élévation sur l'axe Z, on estime l'angle d'arrivée en azimut  $\Phi_k$  de la  $K^{eme}$  source sur l'axe X, à partir de la matrice  $W_x$  telle que,

$$W_x = [vx_{K+1}, vx_{K+2}, \dots, vx_{2K}] \equiv \begin{bmatrix} V_{x12} \\ V_{x22} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Et les valeurs propres  $\Gamma_x = [\hat{\lambda}_{x1}, \hat{\lambda}_{x2}, \dots, \hat{\lambda}_{xk}]$  de  $-V_{x12} V_{x22}^{-1}$  donne l'estimation de l'angle d'arrivée en azimut  $\Phi_k$  pour chaque source est donné par,

$$\Phi_k = \arccos \left( \frac{\arg(\Gamma_x)}{2\pi d \cos(\theta_k) / \lambda} \right) \quad (2.97)$$

Bien que TLS-esprit soit supérieur dans son exécution comparée à ESPRIT, mais beaucoup plus complexe que ce dernier. [11] [10]

## 2.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, le Modèle du signal reçu par le réseau d'antenne à travers une introduction au traitement d'antenne pour la détection de signaux multiples, et ceci pour deux géométries de réseaux : linéaire uniforme ULA, et uniforme sous forme de L, ainsi que les méthodes hautes résolution basées sur la décomposition en sous espaces pour l'estimation de la DOA en 1D et en 2D: ESPRIT et TLS-ESPRIT.

Les méthodes HR modernes reposent sur les propriétés particulières de la matrice de covariance du signal. Ainsi, elles permettent de séparer l'espace des données en deux sous-espaces, l'espace signal engendré par les sinusoides, et l'espace bruit qui est son complémentaire orthogonal. Les méthodes HR issues de cette décomposition en sous-espaces sont plus robustes que les techniques de prédiction linéaire (voir [15]). Ces méthodes peuvent être couplées avec d'autres méthodes dites méthode d'approximation des puissances itérées pour assurer la poursuite des cibles mobiles, ce qui constitue l'objet du chapitre suivant.

# **Chapitre 3**

**Approximation de la**

**méthode**

**des puissances itérées**

## Chapitre 3

# Approximation de la méthode des puissances itérées

### 3.1 Introduction

Après avoir traité le cas de signaux à paramètres constants, nous nous intéressons à l'analyse de signaux dont les paramètres varient au cours du temps (sous l'hypothèse de bruit blanc additif). L'objectif de cette étude est de suivre les trajectoires temporelles des sinusoides. La première étape de l'estimation consiste à poursuivre l'espace signal. La seconde porte sur la poursuite des pôles du signal.

Nous proposons aussi dans ce chapitre une implémentation rapide de la méthode des puissances itérées, basée sur une approximation moins restrictive que celle connue sous le nom de projection approximation. Cet algorithme, baptisé méthode API rapide, garantit l'orthonormalité de la base de l'espace signal à chaque itération. Il peut être appliqué à la fois en analyse spectrale et en traitement d'antenne.

### 3.2 Estimation de l'espace signal

Tout d'abord, l'estimation de l'espace signal peut être faite de deux manières différentes : via la SVD de la matrice de données  $X(t)$ , ou via l'EVD de la matrice de corrélation empirique  $C_{xx}(t)$ .

Cette dernière solution comprend deux étapes :

– le calcul de la matrice de corrélation  $C_{xx}(t)$  comme suit :

$$C_{xx}(t) = x(t)x(t)^H \quad (3.1)$$

– ensuite, la diagonalisation de  $C_{xx}(t)$

Tout d'abord, la diagonalisation complète de la matrice  $C_{xx}(t)$  entraîne des calculs superflus, puisque en réalité seuls les  $r$  principaux vecteurs propres sont requis. Il est préférable d'utiliser l'algorithme d'itération orthogonale présenté ci-dessous, qui ne calcule justement que les  $r$  principaux vecteurs propres. (voir [13] pour plus de détails).

### 3.2.1 Algorithme d'itération orthogonale

L'algorithme d'itération orthogonale est une méthode itérative qui est initialisée avec une matrice orthonormée  $W(t, 0)$  de dimension  $n \times r$ , tirée aléatoirement. Théoriquement, cette matrice doit vérifier certaines conditions pour que l'algorithme converge, mais dans la pratique, ces conditions sont vérifiées presque sûrement (i.e. avec probabilité 1). A chaque itération, l'algorithme calcule une matrice de covariance «compressée»  $C_{xy}(t)$ , de dimension  $n \times r$  :

$$C_{xy}(t, i) \square C_{xx}(t) W(t, i - 1) \quad (3.2)$$

Cette matrice est ensuite orthonormalisée à l'aide d'une factorisation orthogonale-triangulaire (QR) :

$$W(t, i) R(t, i) = C_{xy}(t, i) \quad (3.3)$$

Où  $W(t, i)$  est une matrice orthonormée de même dimension  $n \times r$ , et  $R(t, i)$  est une matrice carrée de dimension  $r \times r$ , triangulaire supérieure. L'algorithme d'itération orthogonale est résumé ci-dessous :

---

Tirage aléatoire de  $W(t, 0)$

Itération sur  $i > 1$  jusqu'à convergence

$$\left[ \begin{array}{l} C_{xy}(t, i) = C_{xx}(t) W(t, i - 1) \text{ produit matriciel} \\ W(t, i) R(t, i) = C_{xy}(t, i) \text{ factorisation QR} \end{array} \right.$$

Fin itération

---

Il est démontré que si les  $r$  plus grandes valeurs propres de  $C_{xx}(t)$  sont strictement supérieures aux  $n-r$  autres valeurs propres, la matrice  $W(t, i)$  converge vers  $W(t)$ , et la vitesse de convergence est exponentielle quand  $i \rightarrow +\infty$ . Nous écrivons ce résultat sous la forme :

$$W(t, \infty) = W(t)$$

De même,  $R(t, i)$  converge vers une matrice diagonale contenant les  $r$  valeurs propres principales de  $C_{xx}(t)$ .

Pour éviter le calcul superflu, posons

$$Y(t, i) \square W(t, i - 1)^H X(t) \quad (3.4)$$

Alors on vérifie que

$$C_{xy}(t, i) = X(t)Y(t, i)^H \quad (3.5)$$

On obtient ainsi l'algorithme suivant :

---

Tirage aléatoire de  $W(t, 0)$

Itération sur  $i > 1$  jusqu'à convergence

$$\left[ \begin{array}{l} Y(t, i) = W(t, i-1)^H X(t) \text{ produit matriciel} \\ C_{xy}(t, i) = X(t)Y(t, i)^H \text{ produit matriciel} \\ W(t, i)R(t, i) = C_{xy}(t, i) \text{ factorisation QR} \end{array} \right.$$

Fin itération

---

La complexité globale de l'algorithme d'estimation des paramètres est alors réduite, mais l'étape limitante reste le calcul de l'espace signal. [13]

### 3.3 Poursuite de l'espace signal

#### 3.3.1 Méthode des puissances itérées

La méthode des puissances itérées est une technique de poursuite de l'espace signal dérivée de l'algorithme d'itération orthogonale présenté dans la section 3.2.1. Rappelons que la deuxième étape de cet algorithme consiste à orthonormaliser la matrice  $C_{xy}(t)$ . Dans la section 3.2.1, cette opération était réalisée par le biais d'une factorisation QR (voir A.3), en fait, il est possible d'utiliser n'importe quelle méthode d'orthonormalisation. L'intérêt de la factorisation QR est qu'elle garantit la convergence vers la base des vecteurs propres de la matrice de covariance, alors que toute autre méthode garantit seulement la convergence vers une base orthonormée de l'espace signal.

Par ailleurs, dans la section 3.2.1 l'algorithme d'itération orthogonale [13] était initialisé par un tirage aléatoire de la matrice  $W(t, 0)$ . Dans un contexte adaptatif, il paraît naturel d'initialiser cet algorithme avec la base de l'espace signal calculée sur la fenêtre précédente. Cette matrice ayant toutes les chances d'engendrer un espace plus proche de l'espace signal à l'instant  $t$  qu'une matrice tirée aléatoirement, l'algorithme converge ainsi plus rapidement. En fait, une seule itération suffit dans les cas usuels pour obtenir une estimation assez précise de l'espace signal. Afin de réduire la charge de calcul, nous n'effectuerons donc

---

dans la suite qu'une seule itération par fenêtre d'analyse. Pour simplifier les notations, l'indice d'itération  $i$  ne sera donc plus indiqué dans les développements ci-dessous, une unique itération étant effectuée à chaque instant  $t$ . L'algorithme ainsi obtenu porte le nom de méthode des puissances itérées. Il est résumé par les deux équations suivantes :

$$C_{xy}(t) = C_{xx}(t)W(t-1) \quad (3.6)$$

$$W(t)R(t) = C_{xy}(t) \quad (3.7)$$

### 3.3.2 Algorithmes adaptatifs de poursuite de l'espace signal

Concernant les techniques de poursuite de l'espace signal, la littérature est particulièrement abondante. En effet, ces méthodes peuvent être appliquées dans plusieurs domaines de traitement du signal, parmi lesquels l'analyse spectrale, ou encore la localisation de sources. Ainsi, toutes les publications portant sur ce thème s'appuient sur un même formalisme général: on considère une séquence de vecteurs  $\{x(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  de dimension  $n$ , et on souhaite suivre l'espace engendré par les  $r$  principaux vecteurs propres de la matrice de corrélation  $C_{xx}(t)$ , susceptible de varier au cours du temps. En localisation de sources, les  $n$  éléments du vecteur  $x(t)$  sont les échantillons des  $n$  signaux arrivant simultanément sur une antenne de capteurs à l'instant  $t$ . En analyse spectrale, les  $n$  éléments du vecteur  $x(t)$  sont extraits d'un même signal  $x(t)$ :  $x(t) = [x(t), x(t+1), \dots, x(t+n-1)]^T$ . Il apparaît donc que la matrice de corrélation introduite dans l'équation (3.1) (et sur laquelle repose la méthode des puissances itérées présentée dans la section (3.3.1)), si on considère une Fenêtre exponentielle, la matrice de corrélation est égale à :

$$C_{xx}(t) = \sum_{u=-\infty}^t \beta^{t-u} x(u)x(u)^H \quad (3.8)$$

Où,  $0 < \beta < 1$  est le facteur d'oubli.

Elle peut être mise à jour selon la récurrence :

$$C_{xx}(t) = \beta C_{xx}(t-1) + x(t)x(t)^H \quad (3.9)$$

Les algorithmes de poursuite de l'espace signal peuvent être classés selon leur complexité. On distingue deux grandes classes : les algorithmes de complexité sur-linéaire en  $n$ , et ceux de complexité linéaire en  $n$ . Ainsi les algorithmes appartenant à la deuxième classe sont plus rapides que la méthode des puissances itérées. Ce faible coût est en général obtenu au prix d'une approximation qui engendre une dégradation des performances du suivi.

### 3.3.3 Critères de comparaison des algorithmes de poursuite

Afin de comparer les nombreux algorithmes de poursuite, plusieurs critères permettant de les caractériser sont listés ci-dessous :

**Complexité algorithmique :** La complexité d'un algorithme de poursuite de sous-espace correspond au coût d'une itération (pour chaque instant  $t$ ). La complexité d'un algorithme dépend (entre autres) de la complexité de la tâche qu'il accomplit : poursuite du sous-espace principal ou mineur, poursuite des vecteurs propres/singuliers ou d'une base quelconque, orthonormalisation de  $W(t)$ , utilisation d'une fenêtre exponentielle ou rectangulaire/hybride. (voir [13] et [16] pour plus de détails).

**Orthonormalité de la matrice  $W(t)$  :** Dans le cas où  $W(t)$  n'est pas une base de vecteurs propres ou singuliers, certains algorithmes garantissent son orthonormalité, d'autres non. En effet, la propriété d'orthonormalité n'est pas non plus requise par les méthodes MUSIC [15] et ESPRIT (même si leurs performances peuvent être affectées par l'utilisation d'une matrice non orthonormée). En pratique, l'orthonormalisation de  $W(t)$  est préférable, car elle a tendance à renforcer la stabilité numérique des algorithmes de poursuite de sous-espace.

**Poursuite des vecteurs propres :** Certains algorithmes suivent les vecteurs propres de la matrice  $C_{xx}(t)$ , alors que d'autres se contentent de suivre une base quelconque du sous-espace que ces vecteurs engendrent. En effet, la méthode ESPRIT peut être utilisée indifféremment dans les deux cas.

**Stabilité numérique :** Dans le sens le plus large, un algorithme de poursuite de sous-espace est numériquement stable si la matrice  $W(t)$  reste bornée quand les données en entrée sont bornées. Dans le cas particulier de la poursuite d'une base orthonormée du sous-espace, une mesure courante de la stabilité numérique est la variation temporelle de l'erreur d'orthonormalité [13]:  $\eta(t) = \|I_r - W_r(t)^H W_r(t)\|^2$ . Si l'algorithme est initialisé aléatoirement avec une matrice non orthonormée, cette erreur doit tendre vers 0 (ou du moins converger en moyenne vers une valeur strictement positive qui dépend du bruit de quantification). Dans ce sens, la plupart des algorithmes de poursuite du sous-espace mineur (voir [13]) existant se sont avérés numériquement instables.

### 3.4 Approximation de la méthode des puissances itérées

Cette partie présente plusieurs implémentations rapides de la méthode API. Ces algorithmes présentent plusieurs avantages :

- ils peuvent être appliqués soit sur une fenêtre exponentielle infinie ou sur une fenêtre tronquée,

- une base orthonormée de l'espace signal est calculée à chaque itération, ce qui est nécessaire pour certaines méthodes d'estimation paramétrique de type sous-espace,
- ils reposent sur une nouvelle approximation, moins restrictive que celle connue sous le nom de projection approximation, ce qui permet d'atteindre de meilleurs résultats de poursuite. En particulier, il est montré que les algorithmes PAST [17] et OPAST [19] peuvent être vus comme des approximations de la méthode API rapide.

### 3.4.1 L'approximation par projection

Nous recherchons maintenant une approximation qui nous permettra de réduire la complexité de la méthode des puissances itérées introduite dans la section 3.2.1. Supposons que  $W(t-1)$  engendre exactement le sous-espace propre principal de la matrice  $C_{xx}(t)$ . L'équation (3.2) implique alors

$$C_{xy}(t) = W(t-1)C_{yy}(t) \quad (3.10)$$

où la matrice  $C_{yy}(t) \square W(t-1)^H C_{xx}(t) W(t-1)$  peut être vue comme la matrice de corrélation des vecteurs de données compressés. Dans ce cas,  $W(t)$  et  $W(t-1)$  sont deux matrices orthonormées qui engendrent l'espace image de  $C_{xy}(t)$ , donc

$$W(t) = W(t-1)\Theta(t) \quad (3.11)$$

où  $\Theta(t) \square W(t-1)^H W(t)$  est une matrice orthonormée de dimension  $r \times r$ . En substituant l'équation (3.10) dans l'équation (3.7) et en multipliant à gauche par  $W(t)^H$ , on obtient la décomposition polaire de  $R(t)^H$  :

$$R^H(t) = C_{yy}(t)\Theta(t) \quad (3.12)$$

Où  $C_{yy}(t)$  est le facteur défini positif et  $\Theta(t)$  est le facteur orthonormé. A présent supposons que  $W(t-1)$  engendre approximativement le sous-espace propre principal de  $C_{xx}(t)$ . Les équations (3.11) et (3.12) deviennent alors des approximations :

$$W(t) \square W(t-1)\Theta(t) \quad (3.13)$$

$$R^H(t) \square C_{yy}(t)\Theta(t) \quad (3.14)$$

où la matrice  $\Theta(t)$ , de dimension  $r \times r$ , est presque orthonormée.

Par rapport à l'équation (3.13), l'hypothèse connue sous le nom de projection approximation [17] est équivalente à  $W(t) \square W(t-1)$  à chaque itération. En fait, la projection approximation dans [17] est définie comme  $W(t')^H W(t) \square W(t-1)^H x(t) \square y(t)$

$\forall t' \geq t$ . Il a été démontré dans [17] que cette approximation est équivalente à  $W(t) \square W(t-1)$  à chaque itération. La validité de cette approximation requiert additionnellement que  $\Theta(t)$  soit proche de la matrice identité de dimension  $r \times r$  (notée ici  $I_r$ ). Dans ce cas, l'équation (3.14) montre que  $R^H(t)$  doit être presque définie positive (Inversement, si  $R^H(t)$  est choisie proche de la seule racine carrée définie positive de  $\Phi(t)$ , la décomposition polaire approchée (3.14) montre que  $\Theta(t) \square I_r$ , si bien que l'équation (3.13) implique  $W(t) \square W(t-1)$ . Par conséquent, le choix d'une racine carrée  $R^H(t)$  de  $\Phi(t)$  est restreint (par exemple  $R(t)$  ne peut plus être triangulaire supérieure, comme c'était le cas dans [21]).

### 3.4.2 Approximation des Puissances Itérées

Il est possible de réduire la complexité de la méthode des puissances itérées en introduisant l'approximation (3.13) au temps  $t-1$  dans l'étape (3.2). Alors la matrice  $C_{xy}(t)$ , de dimensions  $n \times r$ , se calcule récursivement, comme cela est montré dans la section 3.4.2.1, et la factorisation (3.3) peut être mise à jour, comme cela est montré dans la section 3.4.2.3. Cette mise à jour rapide nécessite l'introduction d'une matrice auxiliaire  $Z(t)$ , de dimension  $r \times r$ , présentée dans la section 3.4.2.2.

#### 3.4.2.1 Récurrence pour la matrice $C_{xy}(t)$

Il est démontré dans cette section que la matrice  $C_{xy}(t)$  (de dimensions  $n \times r$ ) peut être mise à jour de la même façon que la matrice  $C_{xx}(t)$  (de dimension  $n \times n$ ) dans l'équation (3.9) :

$$C_{xy}(t) = \beta C_{xy}(t-1) \Theta(t-1) + \underline{x}(t) \underline{J} \underline{y}(t)^H \quad (3.15)$$

Dans le cas de la fenêtre exponentielle, l'équation (3.15) fait apparaître une modification de rang un (1),  $\underline{x}(t)$  et  $\underline{y}(t)$  sont des vecteurs et  $\underline{J}$  est un scalaire ( $\underline{J} = 1$  pour fenêtre exponentielle).

En substituant l'équation (3.5) dans l'équation (3.2), on obtient

$$C_{xy}(t) = \beta C_{xx}(t-1) W(t-1) + \underline{x}(t) \underline{y}(t)^H \quad (3.16)$$

En appliquant l'approximation (3.13) à l'instant  $t-1$ , l'équation (3.16) peut être remplacée par la récurrence suivante :

$$C_{xy}(t) = \beta C_{xx}(t-1)\Theta(t-1) + x(t)y(t)^H \quad (3.17)$$

Cette récurrence est un cas particulier de l'équation (3.15), et la matrice de dimensions  $r \times q$  (avec  $q = 1$ )

$$\underline{y}(t) \square y(t) \text{ est maintenant égale au vecteur } \underline{y}(t) \square W(t-1)^H \underline{x}(t) = y(t).$$

### 3.4.2.2 Récurrence pour la matrice $Z(t)$

Grâce à l'équation (3.15), la factorisation (3.3) peut être mise à jour. Ce calcul nécessite l'introduction d'une matrice auxiliaire, notée  $Z(t)$ . Soit  $S(t-1) \square (R(t-1)\Theta(t-1))^H$ . Supposons que la matrice  $S(t-1)$ , de dimension  $r \times r$ , est inversible. Alors posons

$$Z(t-1) \square S(t-1)^{-1}. \quad (3.18)$$

**Proposition 3.4.2.1.** La matrice de dimension  $r \times r$

$$S(t) \square (R(t)\Theta(t))^H \quad (3.19)$$

est inversible si et seulement si la matrice  $\beta \underline{J}^{-1} + \underline{y}(t)^H \underline{h}(t)$ , de dimension  $q \times q$ , est inversible, où

$$\underline{h}(t) \square Z(t-1)\underline{y}(t) \quad (3.20)$$

est de dimension  $r \times q$ . Dans ce cas, la matrice de dimension  $r \times r$

$$Z(t) \square S(t)^{-1} \quad (3.21)$$

satisfait la récurrence

$$Z(t) = \frac{1}{\beta} \Theta(t)^H \left( I_r - \underline{g}(t)\underline{y}(t)^H \right) Z(t-1)\Theta(t)^{-H} \quad (3.22)$$

où  $\underline{g}(t)$  est la matrice de dimensions  $r \times q$

$$\underline{g}(t) \square \underline{h}(t) \left( \beta \underline{J}^{-1} + \underline{y}(t)^H \underline{h}(t) \right)^{-1}. \quad (3.23)$$

La démonstration de la proposition 3.4.2.1 figure dans la section A.4 des annexes, page 114.

### 3.4.2.3 Récurrence pour la matrice $W(t)$

Ensuite, la proposition 3.4.4.2 introduit une mise à jour rapide de la base de l'espace signal. Sa démonstration figure également dans la section A.4 des annexes, page 114.

**Proposition 3.4.2.2.** Si la matrice  $\beta \underline{J}^{-1} + \underline{y}(t)^H \underline{h}(t)$ , de dimension  $q \times q$ , est inversible,  $W(t)$  satisfait la récurrence

$$W(t) = \left( W(t-1) + \underline{e}(t) \underline{g}(t)^H \right) \Theta(t) \quad (3.24)$$

où  $\underline{e}(t)$  est la matrice de dimensions  $n \times q$

$$\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - W(t-1) \underline{y}(t). \quad (3.25)$$

Si  $\beta \underline{J}^{-1} + \underline{y}(t)^H \underline{h}(t)$  est singulière, les matrices  $Z(t)$  et  $W(t)$  ne peuvent plus être mises à jour avec les équations (3.22) et (3.24). Une solution consiste à calculer  $W(t)$  et  $R(t)$  en utilisant la SVD ou la factorisation QR de  $C_{xx}(t)$ . Alors on en déduit  $\Theta(t) = W(t-1)^H W(t)$ . Cette technique doit être utilisée tant que  $R(t)$  ou  $\Theta(t)$  reste singulière. Quand les deux matrices  $R(t)$  et  $\Theta(t)$  redeviennent inversibles, alors on calcule  $Z(t)$ , et l'algorithme peut poursuivre le traitement adaptatif.

Puisque  $W(t-1)$  est orthonormée,  $\underline{e}(t)$  est orthogonal à  $W(t-1)$ . De plus, l'orthonormalité de  $W(t)$ , associée à l'équation (3.24), implique

$$\Theta(t) \Theta(t)^H = \left( I_r + \underline{g}(t) \left( \underline{e}(t)^H \underline{e}(t) \right) \underline{g}(t)^H \right)^{-1} \quad (3.26)$$

Par conséquent,  $\Theta(t)$  est une racine carrée inverse de la matrice définie positive de dimension  $r \times r$  :

$$I_r + \underline{g}(t) \left( \underline{e}(t)^H \underline{e}(t) \right) \underline{g}(t)^H$$

Le choix de cette racine carrée inverse n'affecte pas la performance de la poursuite : Soit  $\Theta^P(t)$  la seule racine carrée définie positive. Alors  $\Theta(t)$  s'écrit sous la forme

$$\Theta(t) = \Theta^P(t) U(t) \quad (3.27)$$

où  $U(t)$  est une matrice orthonormée de dimension  $r \times r$ . En substituant l'équation (3.27) dans l'équation (3.24), on obtient

$$W(t) = \left\{ \left( W(t-1) + \underline{e}(t) \underline{g}(t)^H \right) \Theta^P(t) \right\} U(t)$$

Cette dernière équation montre que  $U(t)$  n'affecte pas le sous-espace engendré par  $W(t)$ ; elle affecte seulement la base orthonormée particulière  $W(t)$  de ce sous-espace. Par conséquent, le choix d'une racine carrée inverse  $\Theta(t)$  particulière n'a pas d'impact sur la performance de la poursuite du sous-espace.

Le pseudo-code de l'algorithme API à fenêtre exponentielle est présenté dans le tableau 3.1.

Les valeurs initiales  $W(0)$  et  $Z(0)$  doivent être choisies de manière adéquate :

- $W(0)$  devrait être une matrice orthonormée de dimensions  $n \times r$ ,
- $Z(0)$  devrait être une matrice définie positive de dimension  $r \times r$ .

Les deux matrices peuvent être déterminées à partir d'un bloc initial de données ou de façon arbitraire. Le moyen le plus simple, cependant, est de poser  $W(0) = \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{(n-r) \times r} \end{pmatrix}$  et  $Z(0) = I_r$ . Le choix de ces valeurs initiales affecte le comportement transitoire mais non les performances en régime stable de l'algorithme.

Les implémentations directes de API sont d'un intérêt limité, puisque un certain nombre d'algorithmes plus rapides ont déjà été proposés dans la littérature. Une implémentation plus rapide de API est proposée dans la section 3.4.5.

#### **Initialisation :**

$$W(0) = \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{(n-r) \times r} \end{pmatrix}$$

A chaque itération faire

Vecteur d'entrée :  $x(t)$

#### **Section principale de PAST**

$$y(t) = W(t-1)^H x(t)$$

$$h(t) = Z(t-1)y(t)$$

$$g(t) = \frac{h(t)}{\beta + y(t)^H h(t)}$$

#### **Section principale de API**

$$e(t) = x(t) - W(t-1)y(t)$$

$$\Theta(t) = \left( I_r + \|e(t)\|^2 g(t)g(t)^H \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Z(t) = \frac{1}{\beta} \Theta(t)^H \left( I_r - g(t)y(t)^H \right) Z(t-1) \Theta(t)^{-H}$$

$$W(t) = \left( W(t-1) + e(t)g(t)^H \right) \Theta(t)$$

**Tableau 3.1. Algorithme API à fenêtre exponentielle**

### 3.5 Méthode API rapide

Dans cette section, une implémentation rapide de la méthode API est proposée, reposant sur un choix particulier de la matrice  $\Theta(t)$ . Supposons que  $\beta \underline{J}^{-1} + \underline{y}(t)^H \underline{h}(t)$  est inversible, de sorte que  $\Theta(t)$  est également inversible. Ci-dessous, la matrice identité de dimension  $q \times q$  est notée  $\underline{I}_p$ .

#### 3.5.1 Une solution particulière à l'équation (3.26)

Soit  $\underline{\varepsilon}(t)$  une racine carrée de la matrice  $\underline{e}(t)^H \underline{e}(t) = \underline{x}(t)^H \underline{x}(t) - \underline{y}(t)^H \underline{y}(t)$  de dimension  $q \times q$  :

$$\underline{\varepsilon}(t) \underline{\varepsilon}(t)^H = \underline{x}(t)^H \underline{x}(t) - \underline{y}(t)^H \underline{y}(t) \quad (3.28)$$

En substituant l'équation (3.28) dans l'équation (3.26) et en appliquant le lemme d'inversion matricielle A.2 (dans les annexes), on montre que :

$$\Theta(t) \Theta(t)^H = \underline{I}_r - \underline{g}(t) \underline{\varepsilon}(t) \underline{\rho}(t)^{-1} \underline{\varepsilon}(t)^H \underline{g}(t)^H \quad (3.29)$$

où  $\underline{\rho}(t)$  est la matrice définie positive de dimension  $q \times q$

$$\underline{\rho}(t) = \underline{I}_p + \underline{\varepsilon}(t)^H \left( \underline{g}(t)^H \underline{g}(t) \right) \underline{\varepsilon}(t) \quad (3.30)$$

**Remarque.** Le lemme A.2 est appliqué avec  $C = \underline{I}_r$ ,  $A = \underline{g}(t) \underline{\varepsilon}(t)$ ,  $D = \underline{I}_p$  et  $B = \underline{\varepsilon}(t)^H \underline{g}(t)^H$ . En particulier, l'invisibilité de  $\Theta(t)$  est équivalente à celle de  $\underline{\rho}(t)$ . En considérant l'équation (3.29), on recherche une solution particulière de la forme

$$\Theta(t) = \underline{I}_r - \underline{g}(t) \underline{\varepsilon}(t) \underline{\sigma}(t)^{-1} \underline{\varepsilon}(t)^H \underline{g}(t)^H \quad (3.31)$$

où  $\underline{\sigma}(t)$  est une matrice inversible de dimension  $q \times q$ . L'intérêt de cette approche est que le problème d'extraction d'une matrice carrée de dimension  $r \times r$  dans l'équation (3.29) est remplacé par l'extraction d'une racine carrée de dimension  $q \times q$ . En effet, en substituant l'équation (3.31) dans l'équation (3.29) on obtient une condition suffisante :

$$\underline{\sigma}(t)^{-1} + \underline{\sigma}(t)^{-H} + \underline{\sigma}(t)^{-1} (\underline{I}_p - \underline{\rho}(t)) \underline{\sigma}(t)^{-H} = \underline{\rho}(t)^{-1}$$

En multipliant les deux membres de cette dernière équation à gauche par  $\underline{\sigma}(t)$  et en les multipliant à droite par  $\underline{\sigma}(t)^H$ , on obtient l'équation (Rappelons que  $\underline{\rho}(t)$  est une matrice hermitienne) :

$$(\underline{\sigma}(t) - \underline{\rho}(t)) \underline{\rho}(t)^{-1} (\underline{\sigma}(t) - \underline{\rho}(t))^H = \underline{I}_p$$

dont la solution est :

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{\rho}(t) + \underline{\rho}(t)^{\frac{1}{2^H}} \quad (3.32)$$

Même si d'autres choix seraient possibles, à partir de maintenant nous supposons que la racine carrée de  $\underline{\rho}(t)$  qui est impliquée dans l'équation ci-dessus est la seule racine carrée définie positive. Cette condition garantit que  $\underline{\sigma}(t)$  est définie positive, si bien que  $\Theta(t)$  est hermitienne (Plus précisément,  $\Theta(t)$  est définie positive. En effet, l'équation (3.32) montre que  $\underline{\sigma}(t)$  et  $\underline{\rho}(t)$  sont conjointement diagonalisables, et les valeurs propres de  $\underline{\sigma}(t)$  sont strictement supérieures à celles de  $\underline{\rho}(t)$ . Par conséquent,  $\underline{\rho}(t)^{-1} - \underline{\sigma}(t)^{-1}$  est une matrice définie positive. Alors en soustrayant l'équation (3.29) à l'équation (3.31), on montre que  $\Theta(t)$  est définie positive). On définit alors la matrice définie positive de dimension  $q \times q$

$$\underline{\tau}(t) = \underline{\varepsilon}(t) \underline{\sigma}(t)^{-1} \underline{\varepsilon}(t)^H \quad (3.33)$$

En substituant l'équation (3.33) dans l'équation (3.31), on obtient

$$\Theta(t) = I_r - \underline{g}(t) \underline{\tau}(t) \underline{g}(t)^H \quad (3.34)$$

### 3.5.2 Implémentation rapide de la solution particulière

A partir de la mise à jour de rang faible de la matrice  $\Theta(t)$  dans l'équation (3.34), on montre ci-dessous que les matrices  $Z(t)$  et  $W(t)$  peuvent également être mises à jour efficacement.

Considérons la matrice de dimension  $q \times q$

$$\underline{\eta}(t) = \underline{I}_p - \left( \underline{g}(t)^H \underline{g}(t) \right) \underline{\tau}(t) \quad (3.35)$$

Puisque  $\Theta(t)$  est inversible, le lemme d'inversion matricielle A.2 montre que  $\underline{\eta}(t)$  l'est également. Alors en substituant l'équation (3.34) dans l'équation (3.22), on obtient

$$Z(t) = \frac{1}{\beta} \left( Z(t-1) - \underline{g}(t) \underline{h}'(t)^H + \underline{\varepsilon}(t) \underline{g}(t)^H \right) \quad (3.36)$$

où les matrices  $\underline{h}'(t)$  et  $\underline{\varepsilon}(t)$ , de dimensions  $r \times q$ , sont définies par

$$\underline{y}'(t) = \underline{y}(t) \underline{\eta}(t) + \underline{g}(t) \underline{\tau}(t) \quad (3.37)$$

$$\underline{h}'(t) = Z(t-1)^H \underline{y}'(t) \quad (3.38)$$

$$\underline{\varepsilon}(t) = \left( Z(t-1) \underline{g}(t) - \underline{g}(t) \left( \underline{h}'(t)^H \underline{g}(t) \right) \right) \left( \underline{\tau}(t) \underline{\eta}(t)^{-1} \right)^H \quad (3.39)$$

**Remarque.** Le lemme A.2 est appliqué avec  $C = I_r$ ,  $A = \underline{g}(t)\underline{\tau}(t)$ ,  $D = \underline{L}_p$  et  $B = \underline{g}(t)^H$ . En particulier, l'inversibilité de  $\Theta(t)$  est équivalente à celle de  $\underline{\rho}(t)$ .

Ensuite, en substituant l'équation (3.34) dans l'équation (3.24), on montre que

$$W(t) = W(t-1) + \underline{e}'(t)\underline{g}(t)^H \quad (3.40)$$

où  $\underline{e}'(t)$  est la matrice de dimensions  $n \times q$

$$\underline{e}'(t) = \underline{e}(t)\underline{\eta}(t) - W(t-1)\underline{g}(t)\underline{\tau}(t) \quad (3.41)$$

Par ailleurs, en substituant les équations (3.25) et (3.37) dans l'équation (3.40), on obtient

$$\underline{e}'(t) = \underline{x}(t)\underline{\eta}(t) - W(t-1)\underline{y}'(t) \quad (3.42)$$

### **Initialisation :**

$$W(0) = \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{(n-r) \times r} \end{pmatrix}$$

A chaque itération faire

Vecteur d'entrée :  $x(t)$

### **Section principale de PAST**

$$y(t) = W(t-1)^H x(t)$$

$$h(t) = Z(t-1)y(t)$$

$$g(t) = \frac{h(t)}{\beta + y(t)^H h(t)}$$

### **Section principale de FAPI**

$$\varepsilon^2(t) = \|x(t)\|^2 - \|y(t)\|^2$$

$$\tau(t) = \frac{\varepsilon^2(t)}{1 + \varepsilon^2(t)\|g(t)\|^2 + \sqrt{1 + \varepsilon^2(t)\|g(t)\|^2}}$$

$$\eta(t) = 1 - \tau(t)\|g(t)\|^2$$

$$y'(t) = \eta(t)y(t) + \tau(t)g(t)$$

$$\underline{h}'(t) = Z(t-1)^H y'(t)$$

$$\underline{\epsilon}(t) = \frac{\tau(t)}{\eta(t)} \left( Z(t-1)g(t) - \left( h'(t)^H g(t) \right) g(t) \right)$$

$$Z(t) = \frac{1}{\beta} \left( Z(t-1) - g(t)h'(t)^H + \epsilon(t)g(t)^H \right)$$

$$\underline{e}'(t) = \eta(t)x(t) - W(t-1)y'(t)$$

$$W(t) = W(t-1) + e'(t)g(t)^H$$

---

**Tableau.3.2. Algorithme API rapide à fenêtre exponentielle(FAPI)**

### 3.6 Lien avec les algorithmes PAST et OPAST

Dans cette section, nous montrons que l'algorithme PAST [17] à fenêtre exponentielle peut être vu comme une approximation au premier ordre de l'algorithme FAPI. En effet, l'erreur  $e(t)$  est la composante de  $x(t)$  qui n'appartient pas au sous-espace engendré par  $W(t-1)$ . Ainsi, si ce sous-espace varie lentement, et si le RSB est élevé,  $e(t) \square 0$ . Si le terme du deuxième ordre  $\|e(t)\|^2$  est négligé dans la table 3.2,  $\tau(t) = 0$ ,  $\eta(t) = 0$  et  $\Theta(t)$  devient la matrice identité de dimension  $r \times r$ . Alors les équations (3.40) et (3.36) deviennent

$$W(t) = W(t-1) + e(t)g(t)^H \tag{3.43}$$

$$Z(t) = \frac{1}{\beta} \left( Z(t-1) - g(t)h(t)^H \right) \tag{3.44}$$

En particulier, on montre par récurrence que  $Z(t)$  est toujours hermitienne). Par conséquent, cette approximation au premier ordre de la méthode FAPI est une implémentation exacte de l'algorithme PAST [17], qui fournit seulement une base presque orthonormée de l'espace signal. Par ailleurs, un examen approfondi de l'algorithme OPAST présenté dans [19] montre que  $W(t)$  est mise à jour comme dans l'équation (3.40) (ce qui garantit l'orthonormalité, contrairement à l'équation (3.43)). Cependant,  $Z(t)$  est mise à jour comme dans l'équation (3.44). Par conséquent, OPAST [19] peut être vu comme un intermédiaire entre PAST [17] et FAPI.

---

### 3.7 Conclusion

Plusieurs implémentations de l'algorithme API, reposant sur une fenêtre exponentielle ont été présentées dans ce chapitre. Ces algorithmes atteignent une complexité linéaire et garantissent l'orthonormalité de la base de l'espace signal à chaque itération. Dans le contexte de l'analyse spectrale, la méthode s'avère robuste à de brusques variations de fréquences, et atteint de meilleures performances que de nombreux algorithmes de poursuite de sous-espace liés à la méthode des puissances itérées, tels que les algorithmes Projection Approximation Subspace Tracking (PAST [17]), Novel Information Criterion (NIC [20]), fast Natural Power (NP3 [18]) et OPAST[19]. Par ailleurs, il est plus rapide que NIC, NP3 et OPAST, et aussi rapide que PAST, à la fois en terme d'estimation de l'espace signal et de complexité algorithmique.

**Chapitre 4**  
**simulations et**  
**interprétations des**  
**résultats**

- ✎ X\_0 : valeurs initiales des trajectoires en pied
- ✎ Cliquer sur le bouton OK pour pouvoir sélectionner les trajectoires
- ✎ Trajectoires : formes des trajectoires suivies par les sources, choisir :
  - SIN : Sinusoïdale
  - RECT : Rectangulaire
  - LIN : Linéaire

#### ▪ Affichage des résultats

Les résultats sont affichés sur la figure de la partie droite comme suit :

- ✎ DOA : les directions d'arrivée réelles et estimées
- ✎ BIAIS : le biais entre les directions d'arrivée réelles et estimées
- ✎ ERREUR : l'erreur d'orthonormalité moyenne

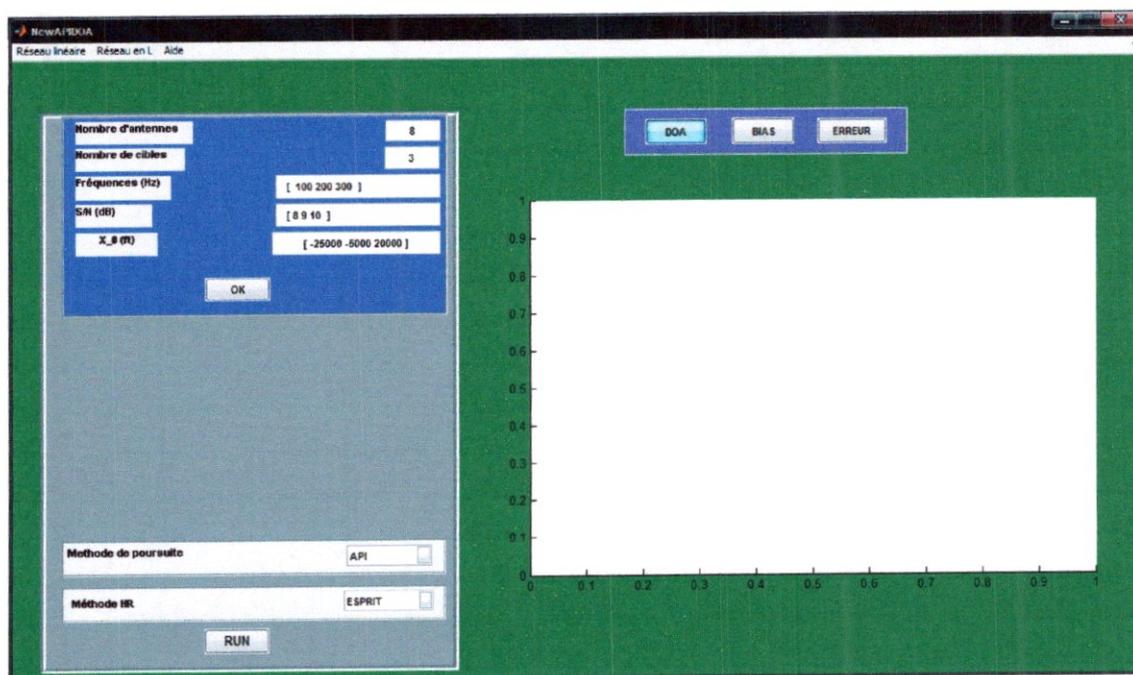


Figure. 4.1: l'interface en 1-D.

#### 4.2.2 L'interface du réseau en L (DOA en 2D)

##### ▪ Lecture des données

- ✎ Nombre d'antennes : nombre d'éléments d'antenne dans chaque brin du réseau en L
- ✎ Nombre de cibles : cibles à poursuivre par l'algorithme

- ▣ Fréquences des signaux : chaque signal correspond à une cible
- ▣ S/N : Rapports signal / bruit des signaux
- ▣ X\_0\_A : valeurs initiales des trajectoires en pied en azimut
- ▣ X\_0\_E : valeurs initiales des trajectoires en pied élévation
- ▣ Cliquer sur le bouton OK pour pouvoir sélectionner les trajectoires
- ▣ Trajectoires : formes des trajectoires suivies par les sources, choisir :
  - SIN : Sinusoïdales
  - RECT : Rectangulaire
  - LIN : Linéaire

#### ▪ Affichage des résultats

- ▣ DOA ELEVATION : les directions d'arrivée réelles et estimées en élévation
- ▣ DOA AZIMUT : les directions d'arrivée réelles et estimées en azimut
- ▣ BIAS ELEVATION : le biais entre les directions d'arrivée réelles et estimées en élévation
- ▣ BIAS AZIMUT : le biais entre les directions d'arrivée réelles et estimées en azimut
- ▣ ERREUR\_E : l'erreur d'orthonormalité moyenne en élévation
- ▣ ERREUR\_A : l'erreur d'orthonormalité moyenne en azimut

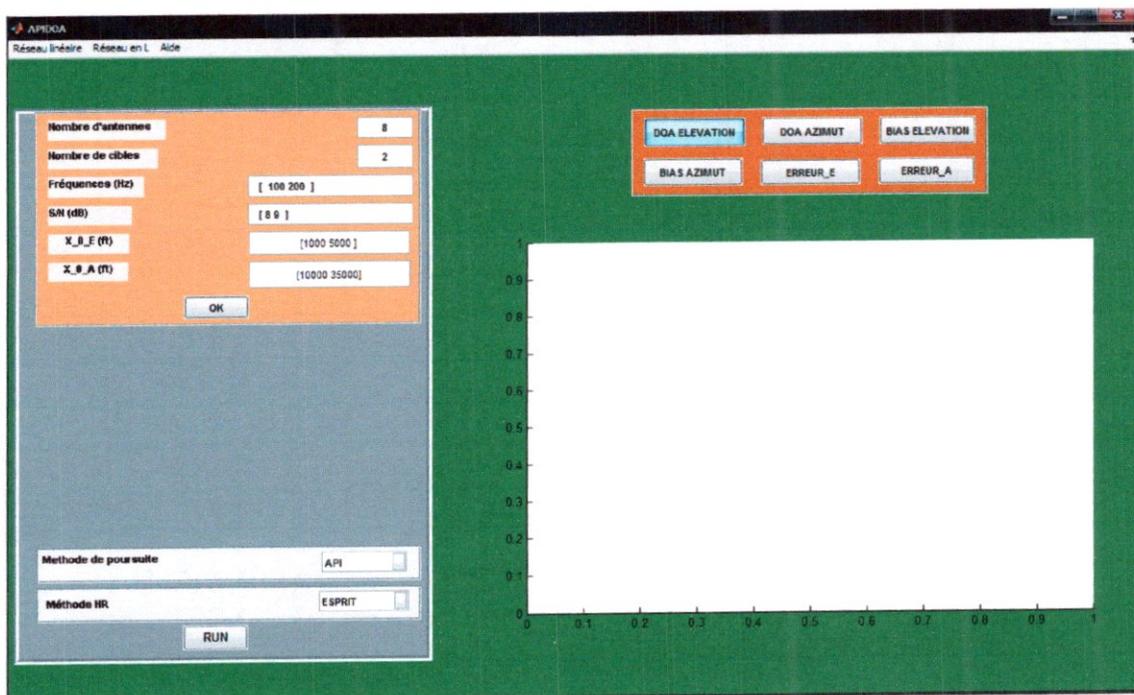


Figure. 4.2: l'interface en 2-D.

### 4.3 Les organigrammes

Les organigrammes ci-dessous illustrent le fonctionnement de l'interface du réseau linéaire (1D) et celle du réseau en L (2D):

4.3.2 Organigramme de l'interface de 2D

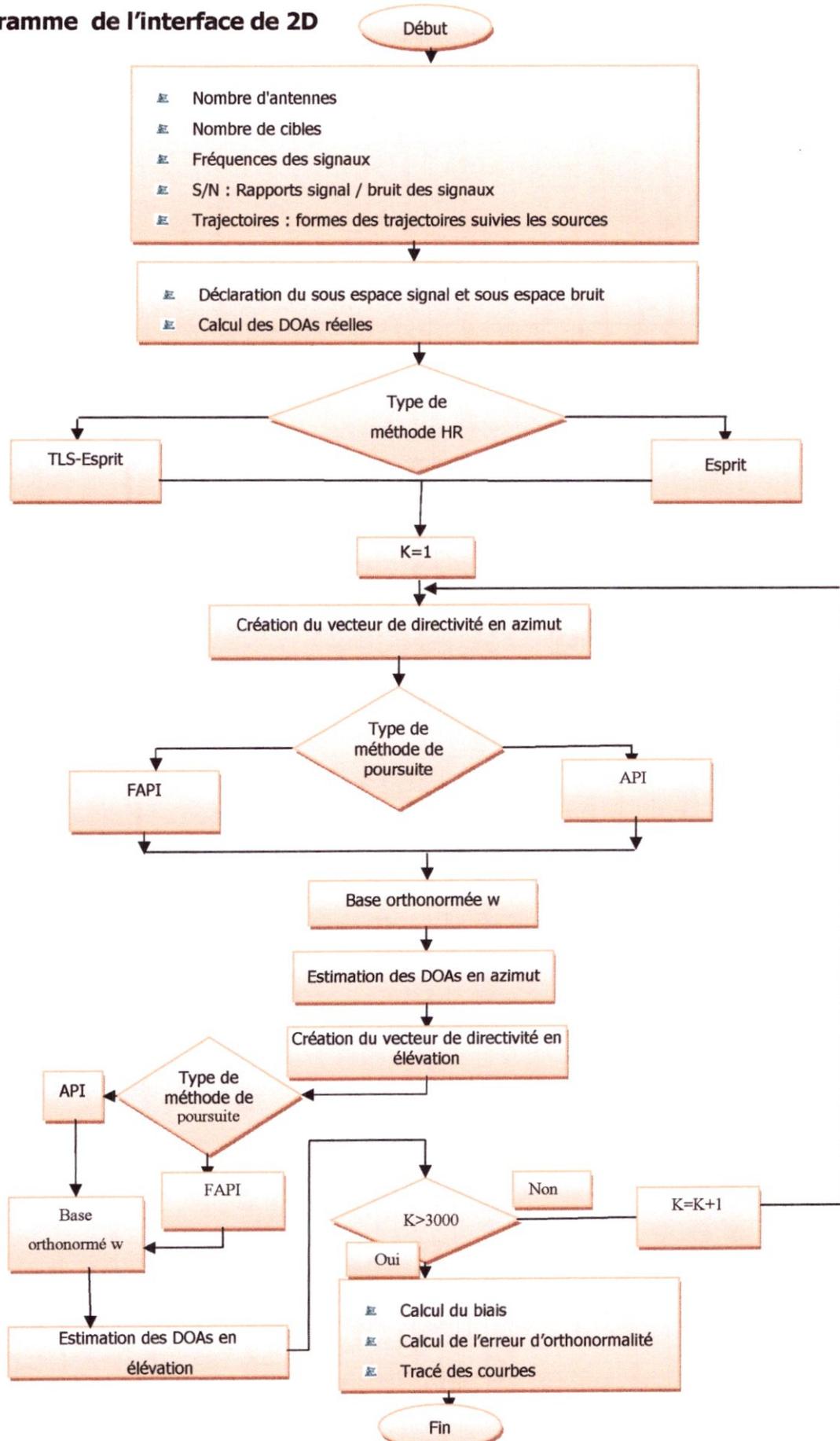


Figure. 4.4. Organigramme de l'interface de 2-D

#### 4.4 Poursuite des angles d'arrivée en une dimension

Nous allons illustrer dans ce paragraphe les méthodes de poursuite API et FAPI proposées à travers quelques exemples en prenant (3000) échantillons des signaux sources sur une période de 30s pour avoir des réalisations des modèles des signaux utilisés par les deux algorithmes d'estimation du sous espace signal : ESPRIT et TLS-ESPRIT. Cela nous permettra à la fois de voir l'avantage de l'utilisation de ces méthodes et de comparer leurs performances en termes de convergence, précision et robustesse au bruit.

en se basant sur le calcul du biais et l'erreur d'orthonormalité, nous allons regarder l'influence du nombre d'antennes et du mouvement des cibles sur la précision, la convergence et la robustesse de chacune des méthodes.

Dans les simulations en une dimension, Nous avons choisi les paramètres et les initialisations comme :

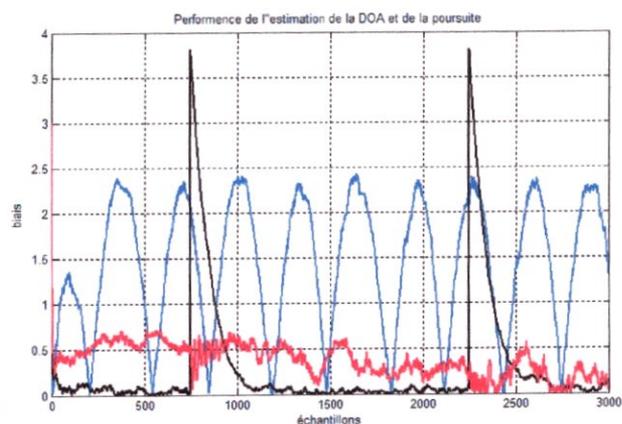
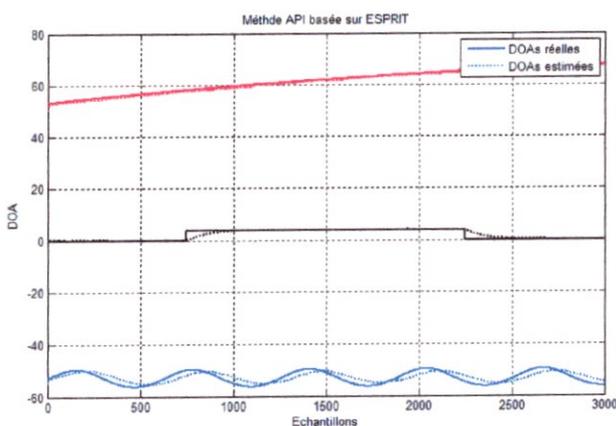
- ☒ Nombre d'antennes :  $N= 6$  puis  $N= 15$
- ☒ Nombre de cibles : 3
- ☒ Fréquences des signaux (Hz) : 1000(pour la cible 1), 2000(pour la cible 2) 3000(pour la cible 3)
- ☒ S/N : 10 pour chaque cible
- ☒  $X_0$  (ft): -40000 (pour la cible 1), 0 (pour la cible 2) 40000(pour la cible 3)
- ☒ Trajectoires : Sinusoïdale (mouvement rapide), rectangulaire (très rapide) et linéaire (lent)

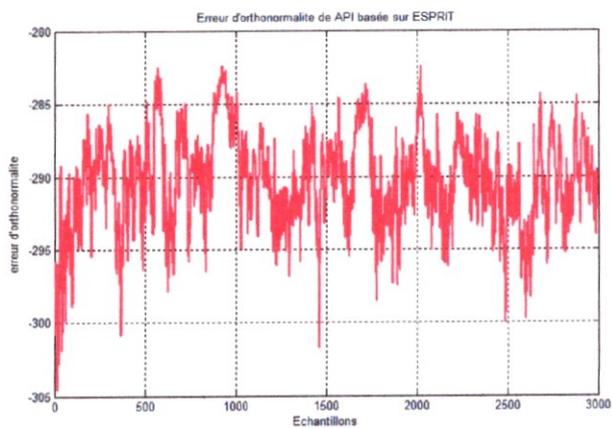
##### 4.4.1 L'algorithme API en réseau linéaire

Dans cette partie, nous simulons l'algorithme de poursuite API avec les deux algorithmes d'estimation du sous espace signal : Min ESPRIT et TLS-ESPRIT.

###### a. ESPRIT

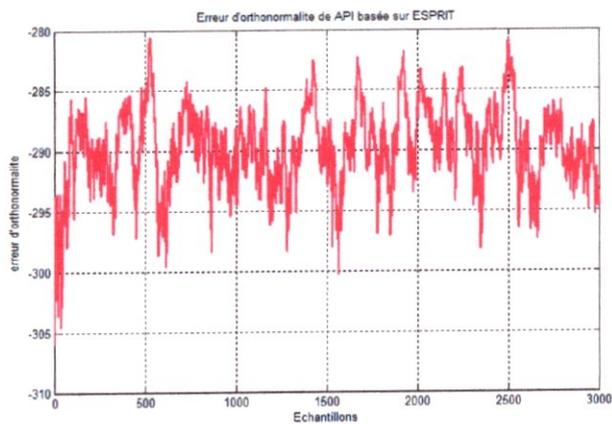
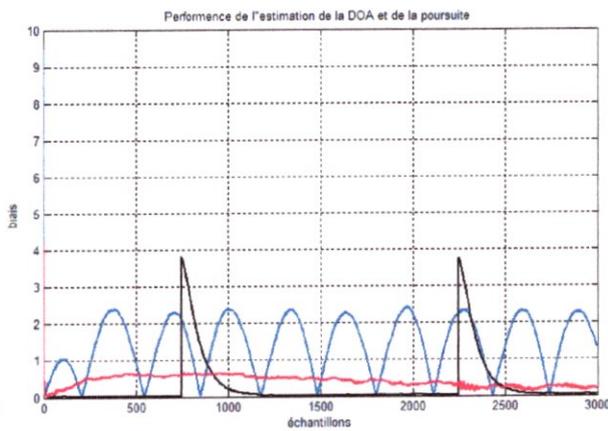
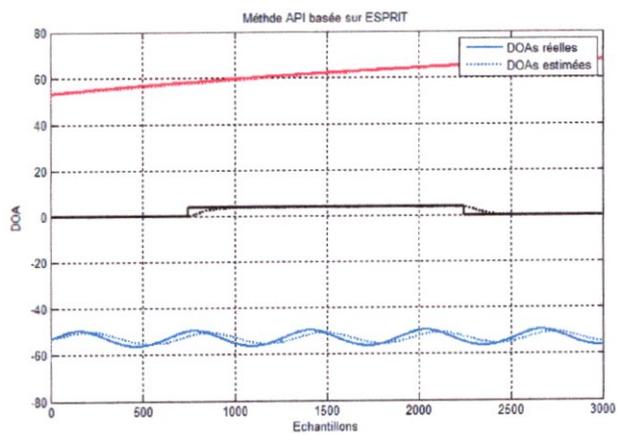
###### Nombres d'antennes $N=6$





L'erreur d'orthogonalité moyenne : -290.9835 dB

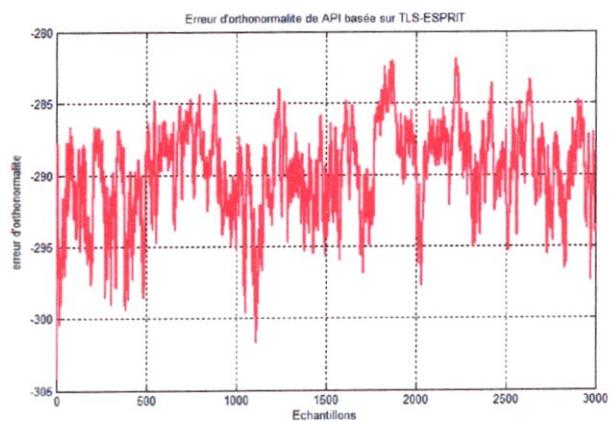
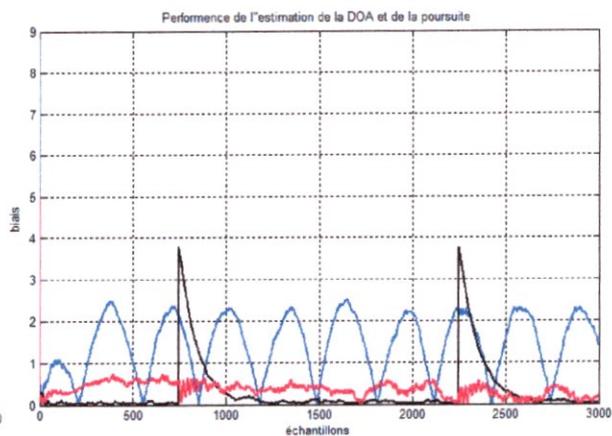
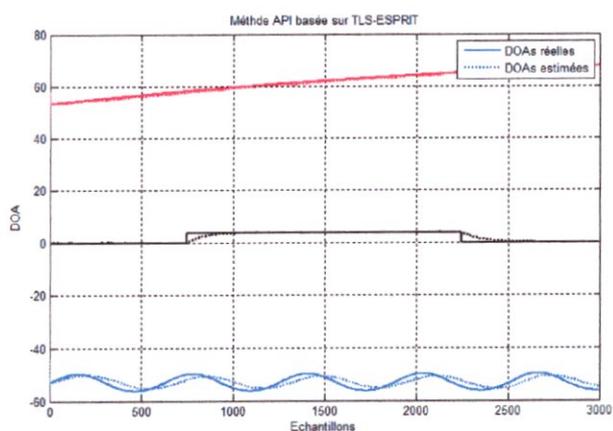
**Nombres d'antennes N=15**



L'erreur d'orthogonalité moyenne : -290.0395 dB

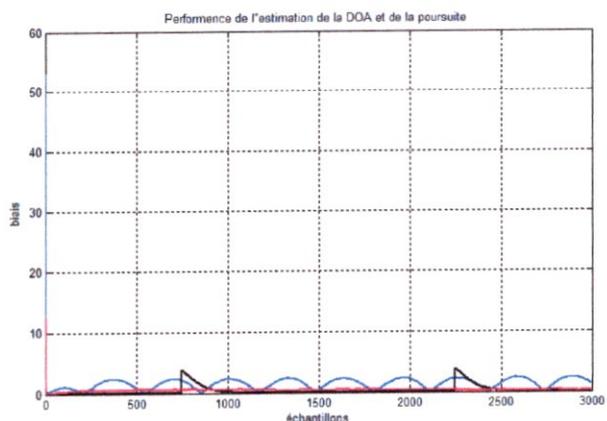
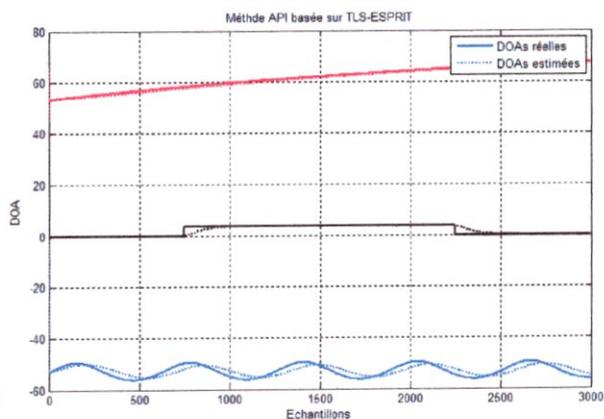
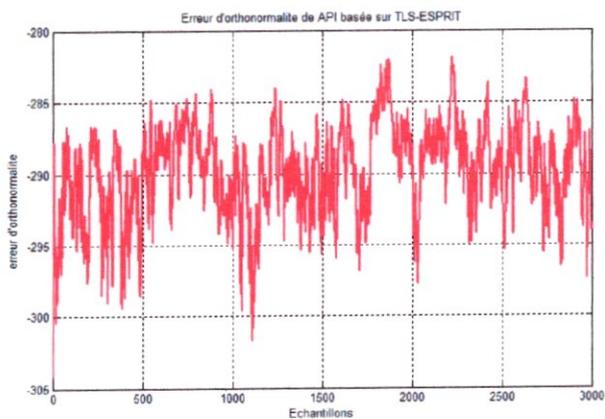
**b. TLS-ESPRIT**

**Nombres d'antennes N=6**



L'erreur d'orthonormalité moyenne : -290.5506 dB

**Nombres d'antennes N=15**



L'erreur d'orthonormalité moyenne : -290.3549 dB

### Interprétation de l'algorithme API :

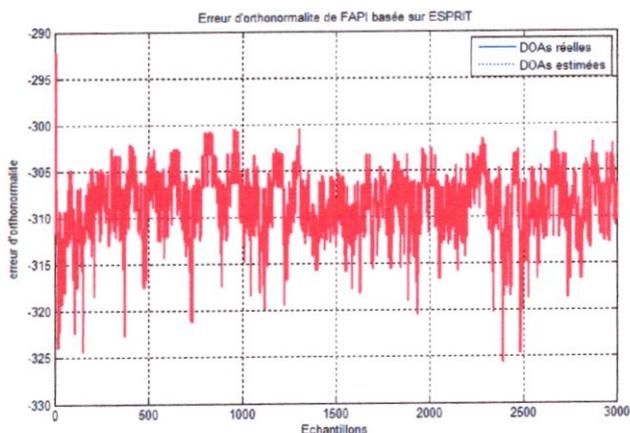
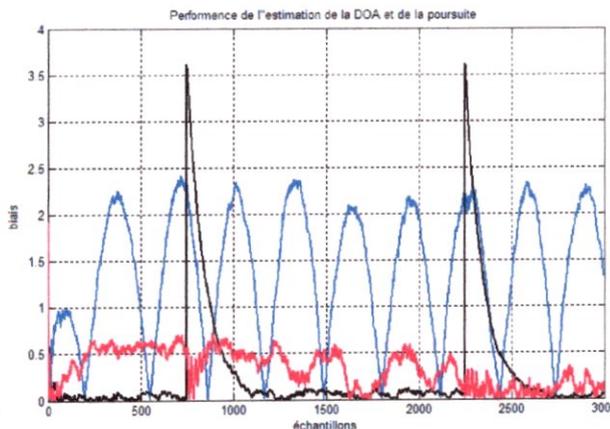
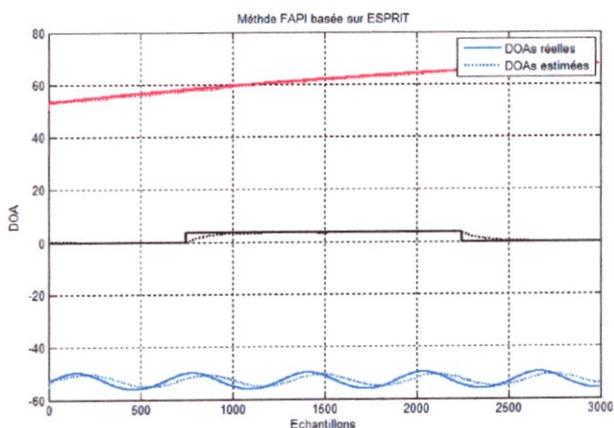
Les résultats de la simulation ont montré que l'algorithme API basé sur ESPRET fournit une très bonne poursuite des cibles à mouvement lent (biais < 1) et une bonne robustesse dans le cas des cibles à mouvement rapide et très rapide lorsque leur mouvement devient brusque, notamment lors de l'augmentation du nombre d'antenne de 6 à 15. Les figure ci-dessus montre que l'utilisation de l'algorithme TLS-ESPRET apporte une meilleure précision (diminution du biais) et robustesse (moins de perturbation de la poursuite).

Le calcul de l'erreur d'orthogonalité moyenne étant relativement faible, montre que l'algorithme API assure une bonne convergence vers une base orthonormée et cela aussi bien avec ESPRIT qu'avec TLS-ESPRIT, l'augmentation de nombre d'antenne de 6 à 15 n'a pas apporté une amélioration remarquable sur la convergence en gardant toujours des valeurs très proche (environ -290 dB), et cela par-ce-que la poursuite de 3 cibles est bonne avec seulement 6 antennes.

#### 4.4.2 L'algorithme FAPI en réseau linéaire

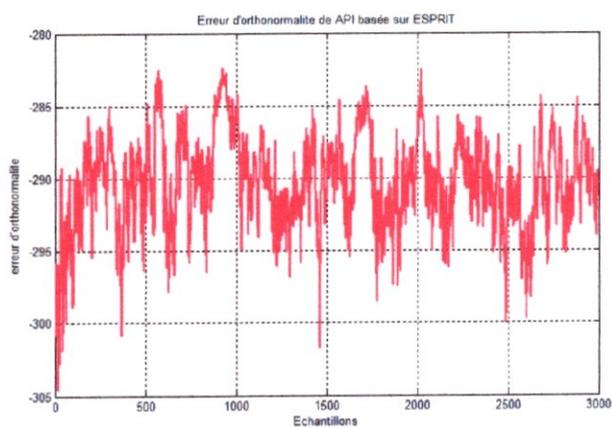
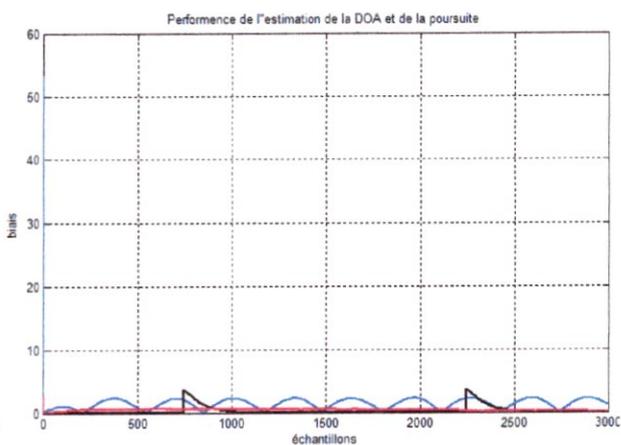
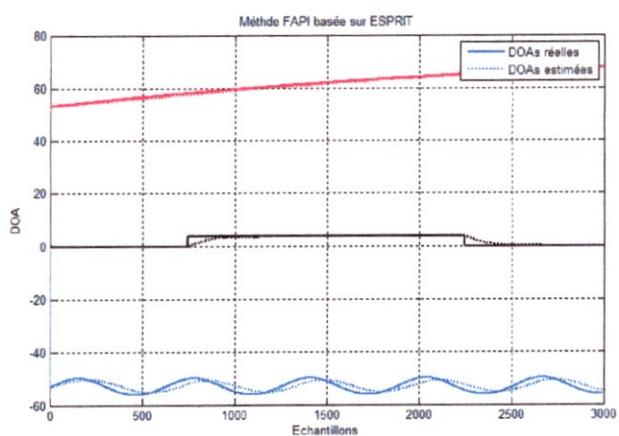
##### a. ESPRIT

##### Nombres d'antennes N=6



L'erreur d'orthogonalité moyenne : -308.3275 dB

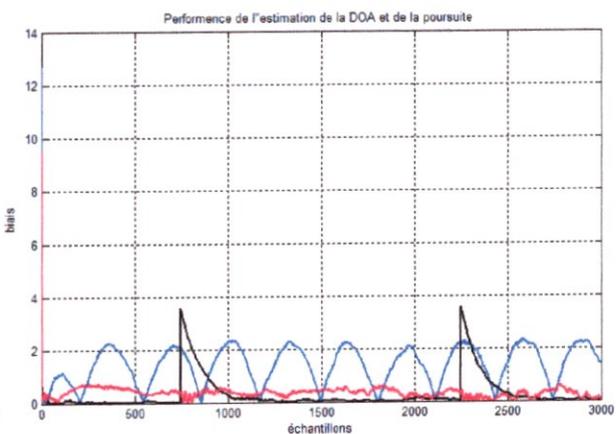
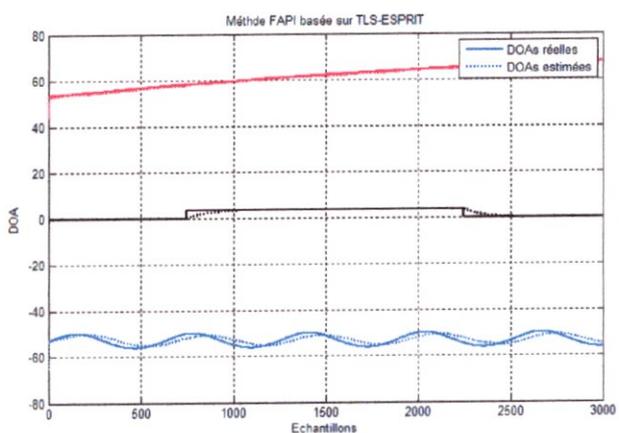
**Nombres d'antennes N=15**

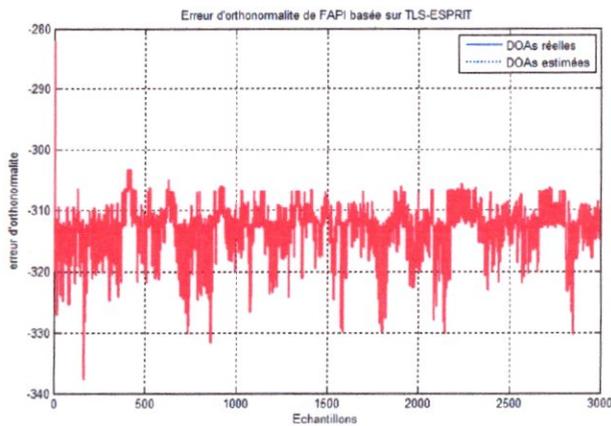


L'erreur d'orthogonalité moyenne : -312.2583 dB

**b. TLS-ESPRIT**

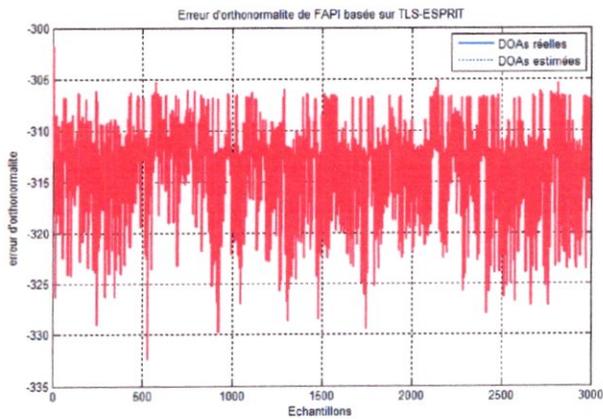
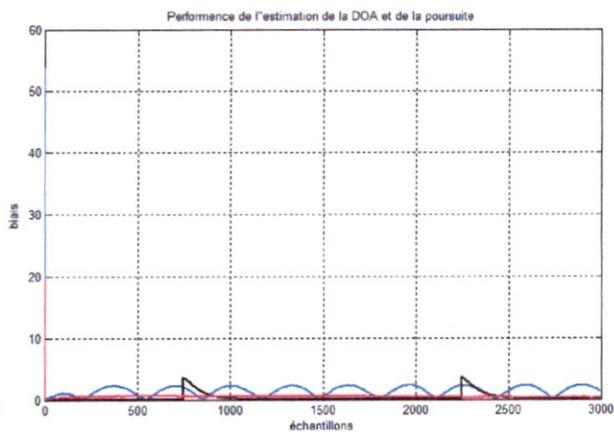
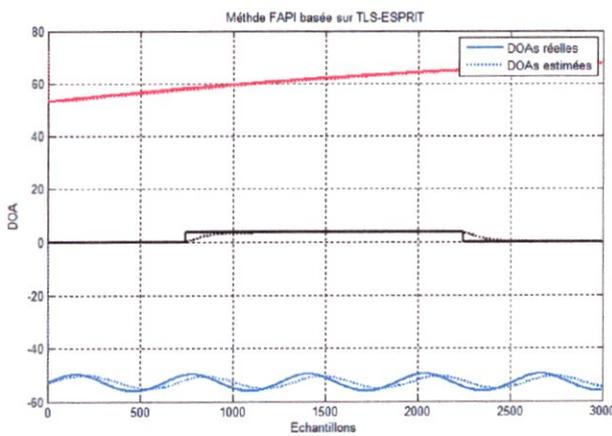
**Nombres d'antennes N=6**





L'erreur d'orthonormalité moyenne : -310.5495 dB

**Nombres d'antennes N=15**



L'erreur d'orthonormalité moyenne : -313.6897 dB

**Interprétation de l'algorithme FAPI :**

Les résultats de la simulation ont montré que l'algorithme FAPI (API rapide) présente de meilleures performances de poursuite des cibles en terme de précision et robustesse pour tous les cas de mouvement (lent, rapide et très rapide), notamment lors de l'augmentation du nombre d'antenne de 6 à 15. Méthodes et TLS-ESPRET. Comme est-il le cas de l'algorithme API, l'utilisation de l'algorithme TLS-ESPRET apporte une meilleure précision (diminution du biais) et robustesse ( moins de perturbation de la poursuite).

D'après la représentation de l'erreur d'orthonormalité et le calcul de sa valeur moyenne, nous pouvons constater que la convergence de l'algorithme FAPI est meilleure que celle de API (une erreur plus faible), et que l'utilisation de TLS-ESPRIT et l'augmentation du nombre d'antenne améliore cette dernière.

## 4.5 Réseau en L

Dans cette partie, des simulations seront analysées par les algorithmes ESPRIT et TLS ESPRIT avec un réseau en L selon le chapitre 3. Afin de tester les performances de ces estimateurs dans le cas de la poursuite en deux dimensions. En considérant un réseau en forme de L, tel que chacun de ses axes X et Z contient  $N=8$  et d'autre cas  $N=12$  antennes avec un espace  $d$  égale à  $\lambda/2$  représentant la distance inter-éléments des deux axes.

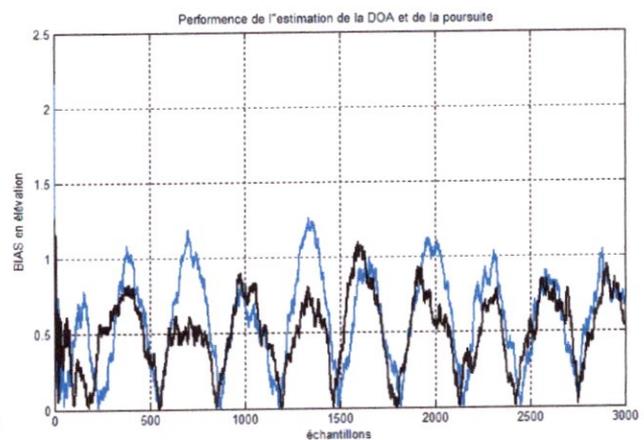
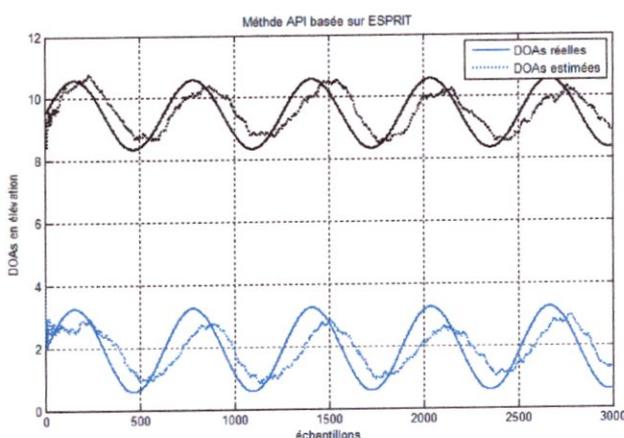
### 4.5.1 L'algorithme API en réseau en L

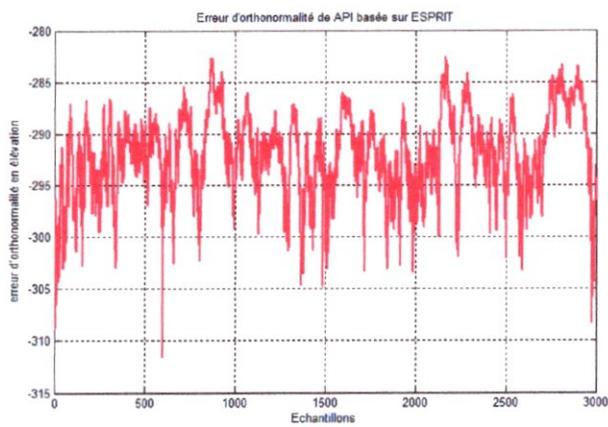
Dans les simulations en une dimension, Nous avons choisi les paramètres et les initialisations comme :

- ✎ Nombre d'antennes :  $N=6$  puis  $N=12$
- ✎ Nombre de cibles : 2
- ✎ Fréquences des signaux (Hz) : 1000(pour la cible 1), 2000(pour la cible 2)
- ✎ S/N : 10 pour chaque cible
- ✎  $X_{0,E}$  (ft): 1000 (pour la cible 1), 5000 (pour la cible 2)
- ✎  $X_{0,A}$  (ft): 10000 (pour la cible 1), 30000 (pour la cible 2)
- ✎ Trajectoires : Sinusoïdale (mouvement rapide) puis rectangulaire (mouvement très rapide) puis linéaire (mouvement lent)

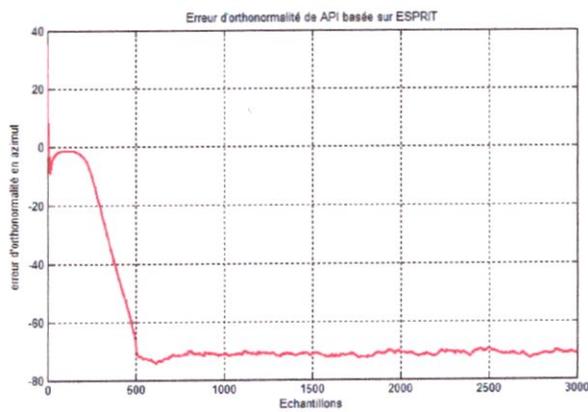
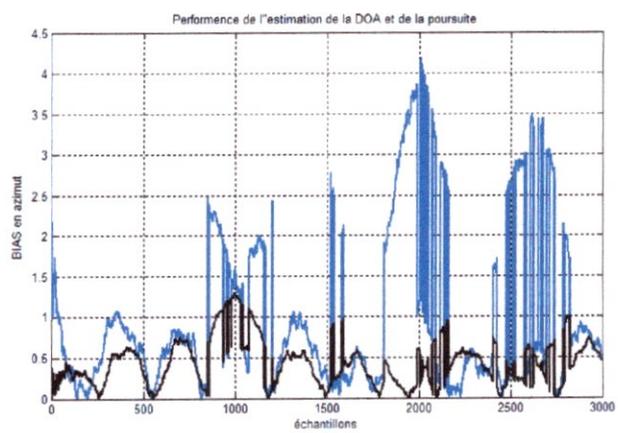
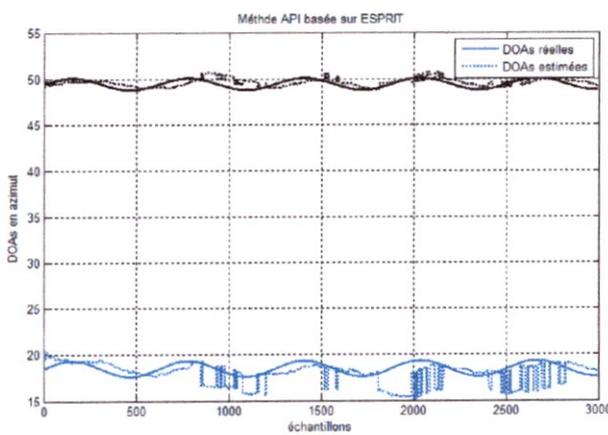
#### a. ESPRIT

##### Nombres d'antennes $N=6$

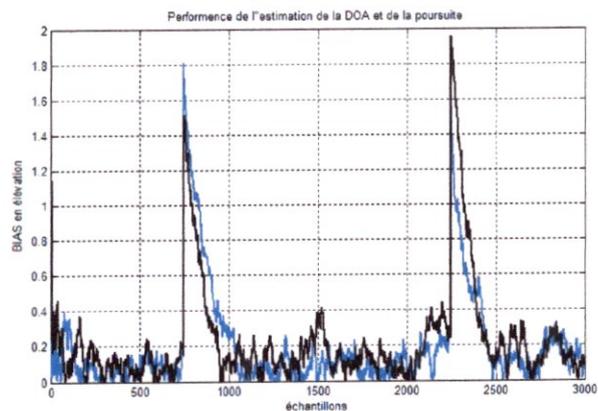
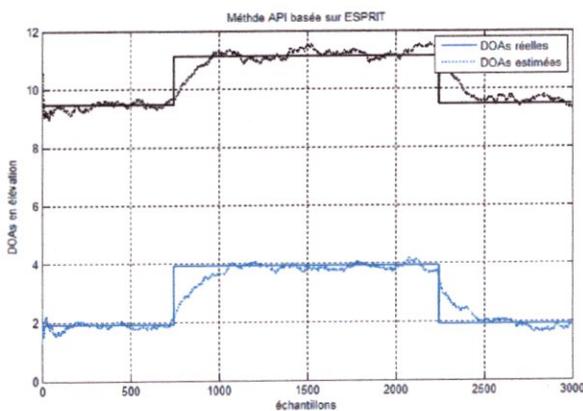


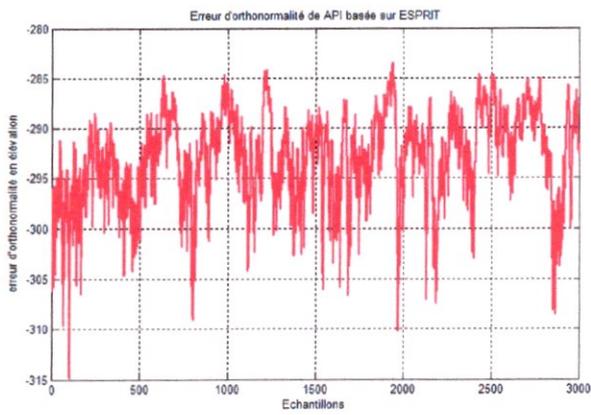


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -292.05585 dB

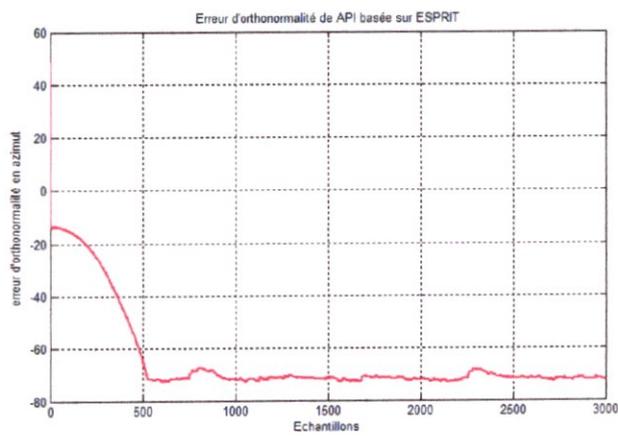
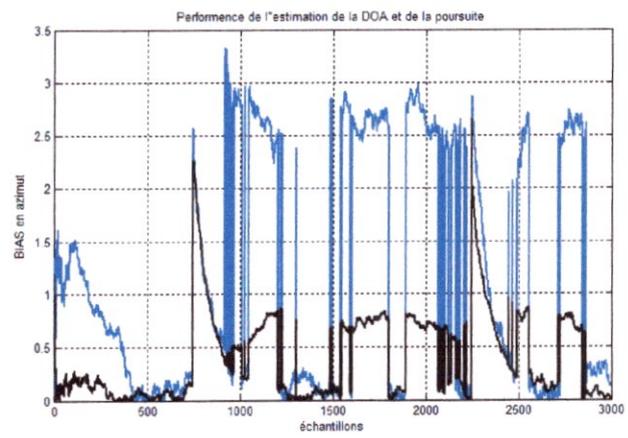
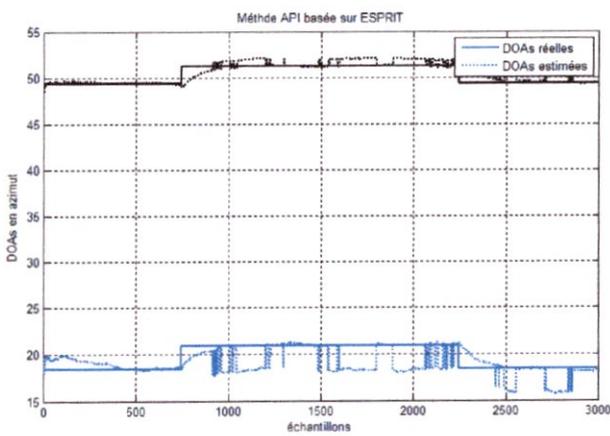


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -62.7991 dB

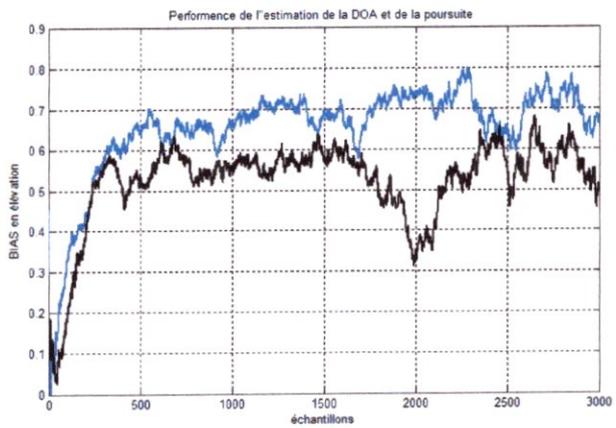
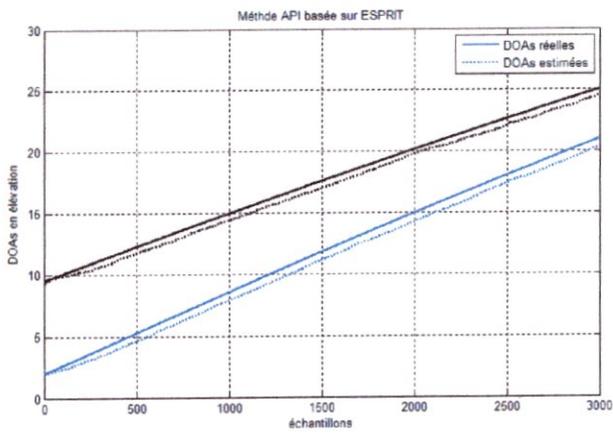


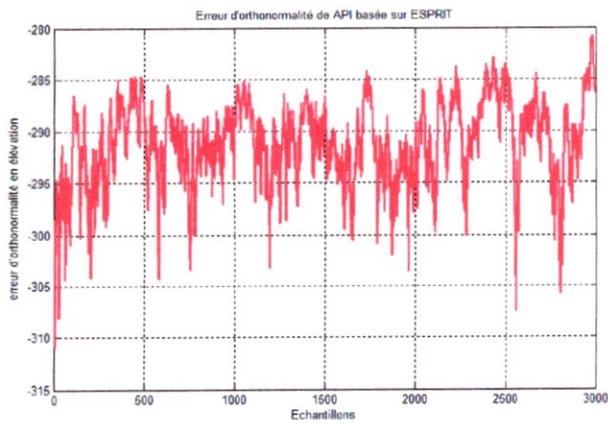


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -293.0671 dB

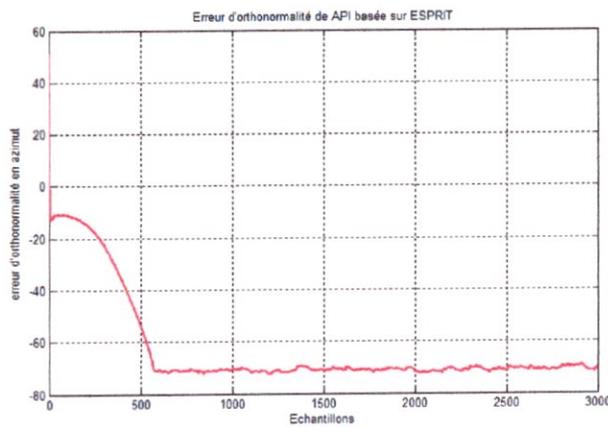
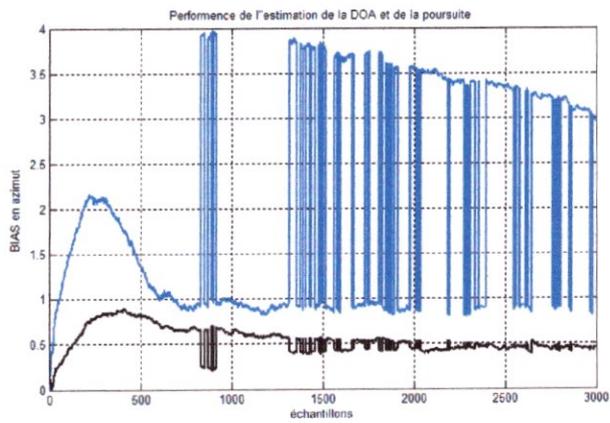
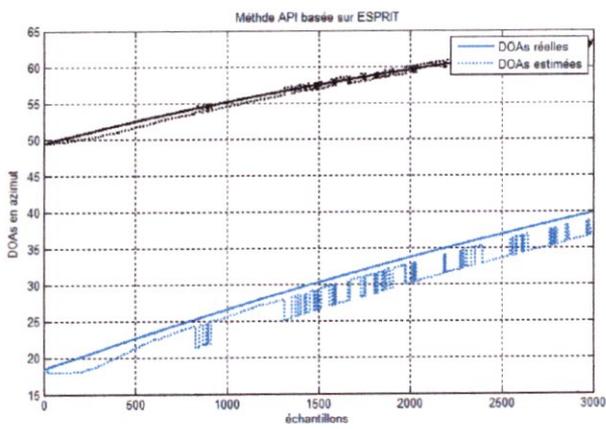


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -64.437 dB



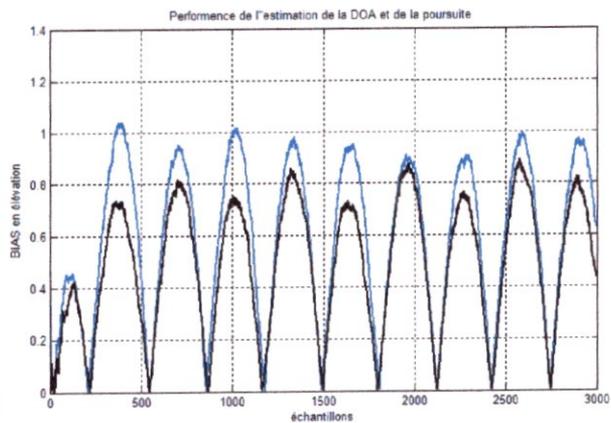
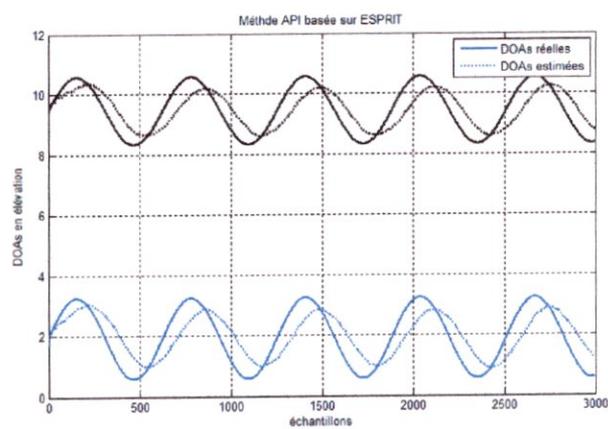


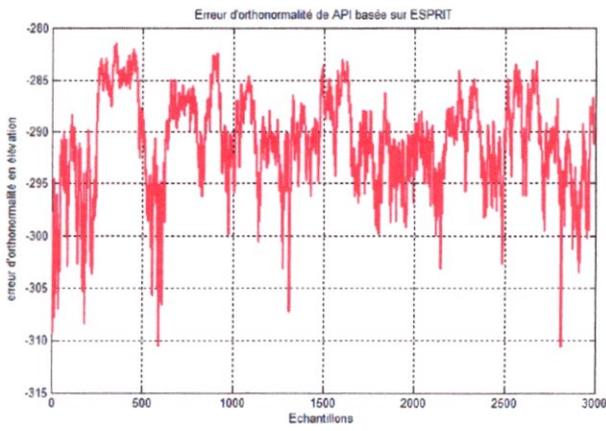
L'erreur d'orthonormalité moyenne : -291.2048 dB



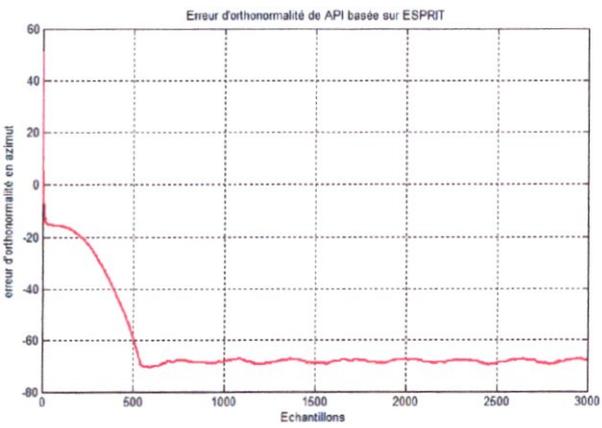
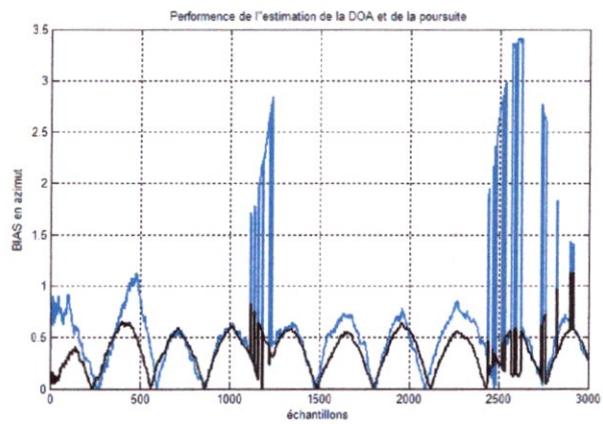
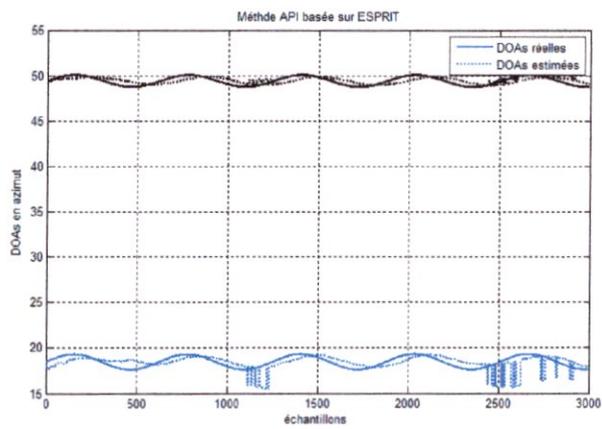
L'erreur d'orthonormalité moyenne : -62.6219 dB

**Nombres d'antennes N=12**

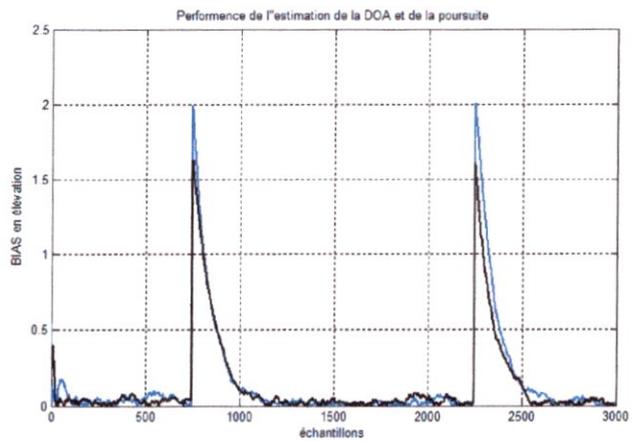
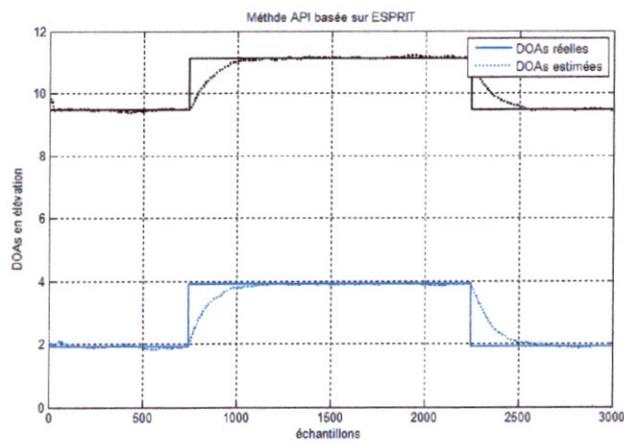


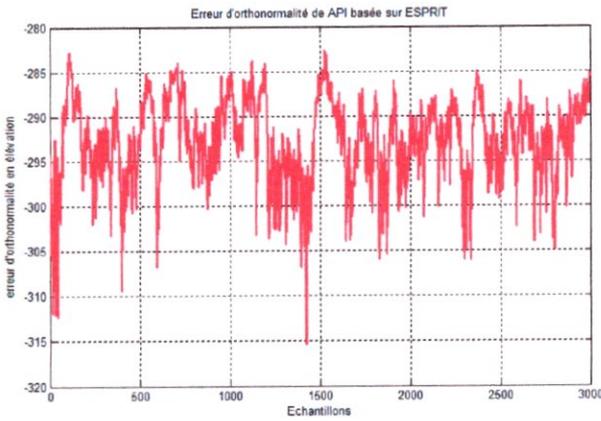


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -291.0524 dB

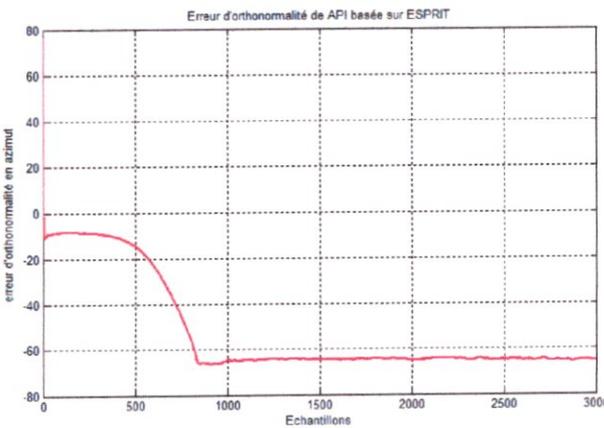
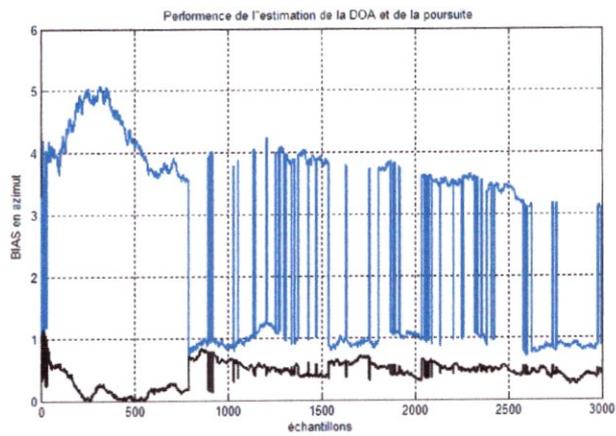
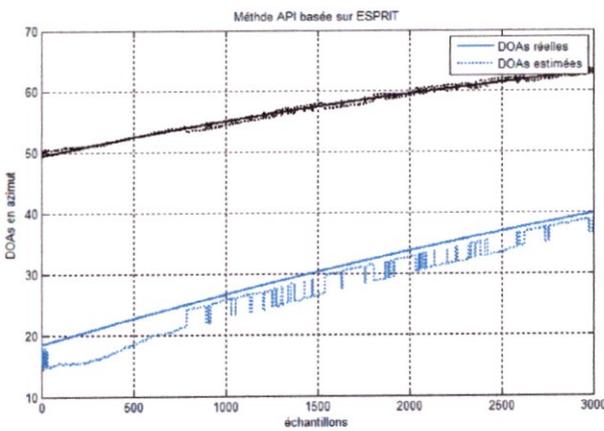


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -61.4593 dB





L'erreur d'orthonormalité moyenne : -291.3684 dB



L'erreur d'orthonormalité moyenne : -52.0703 dB

### Interprétation de l'algorithme API avec ESPRIT en 2D

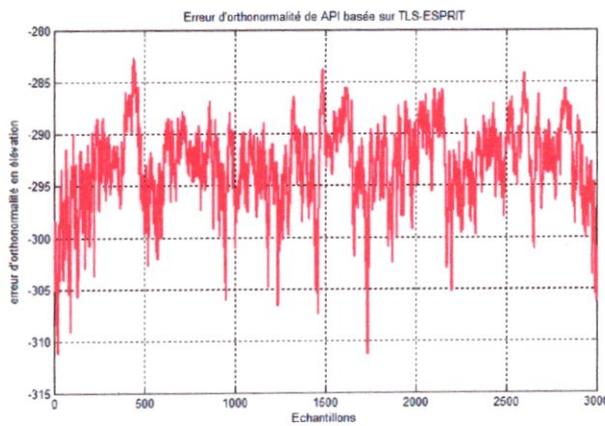
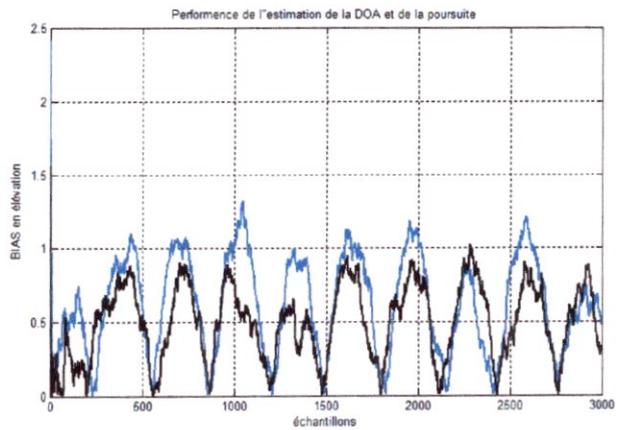
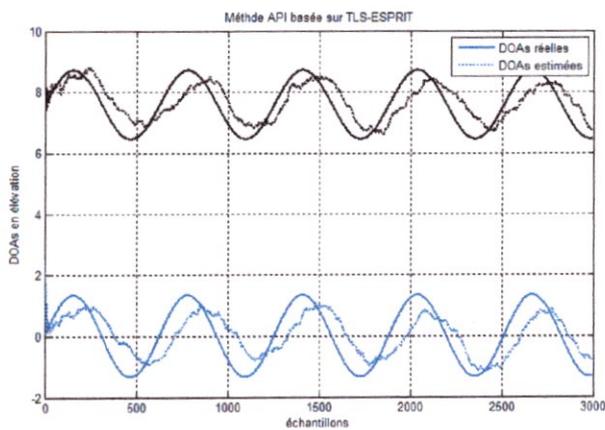
L'algorithme de poursuite API avec ESPRIT assure un bon résultat d'estimation et de poursuite des DOAs en élévation. Les résultats de poursuite en azimut sont moins satisfaisants à cause du terme de couplage entre les deux angles présent dans le vecteur de directivité. La simulation montre une marge d'erreur, mais l'algorithme retrouve à chaque fois sa stabilité, et la poursuite est maintenue.

En outre, d'après la représentation de l'erreur d'orthonormalité et sa valeur moyenne, nous pouvons constater que la convergence de l'algorithme API est satisfaisante en élévation, mais elle est mauvaise en azimut et cela dû à l'accumulation d'erreur commise en élévation puisque les DOAs élévation s'introduisent

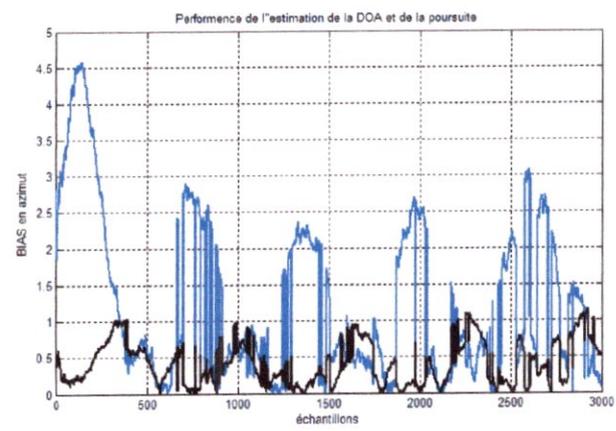
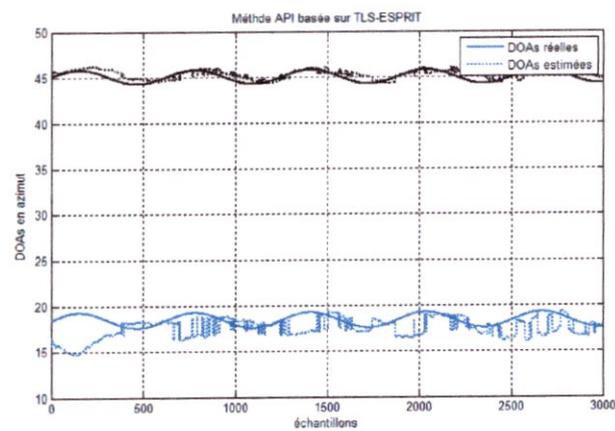
dans le modèle du signal en azimut et aussi dans la formule de calcul de cette dernière, ce qui explique la diminution de la qualité de poursuite en azimut.

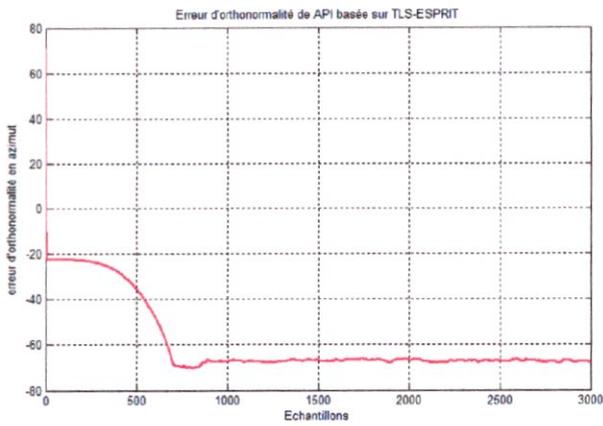
**b. TLS-ESPRIT**

**Nombres d'antennes N=6**

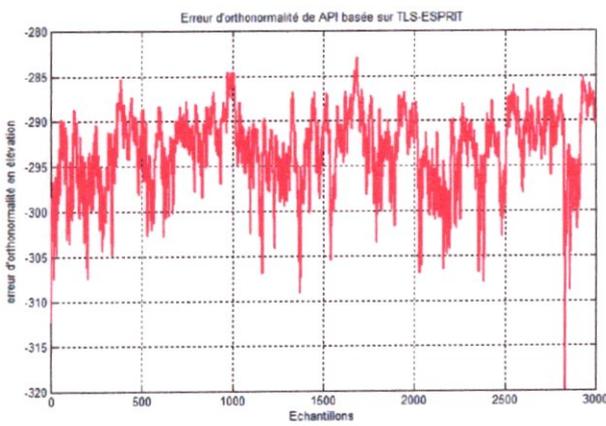
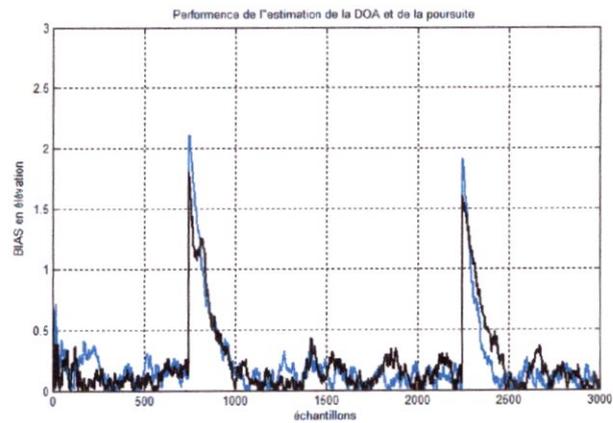
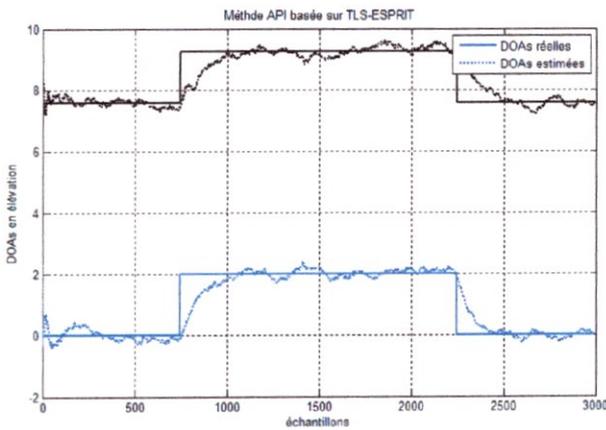


L'erreur d'orthogonalité moyenne : -293.0086 dB

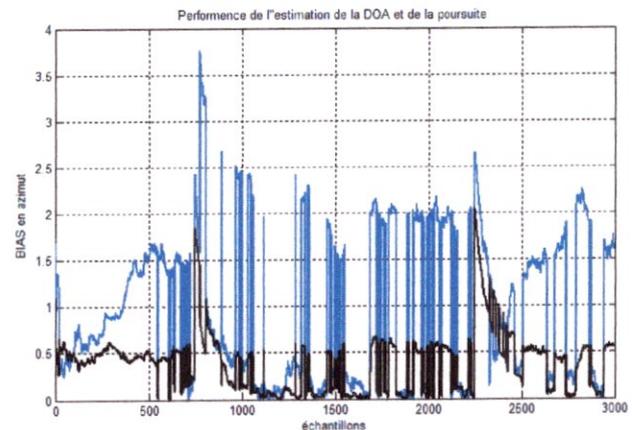
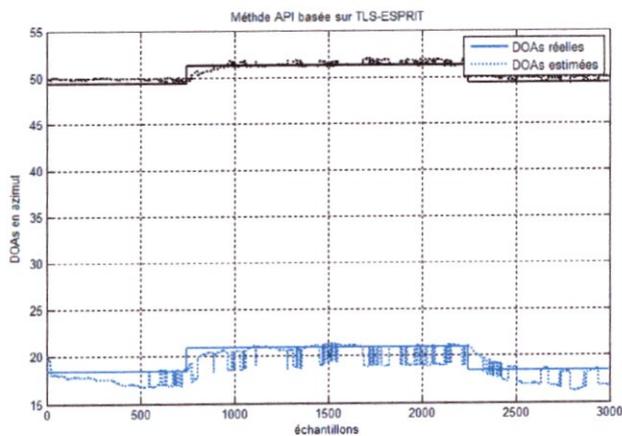


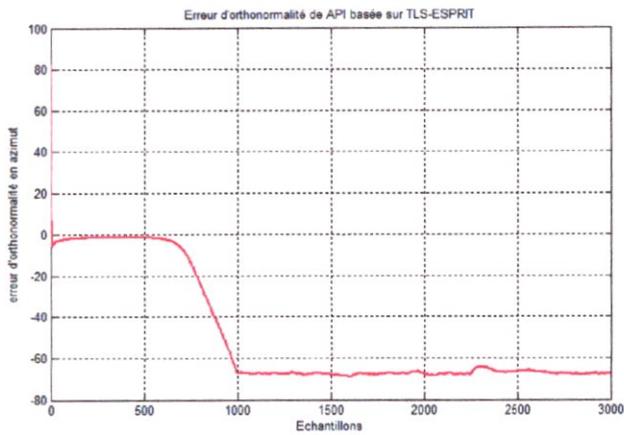


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -58.9706 dB

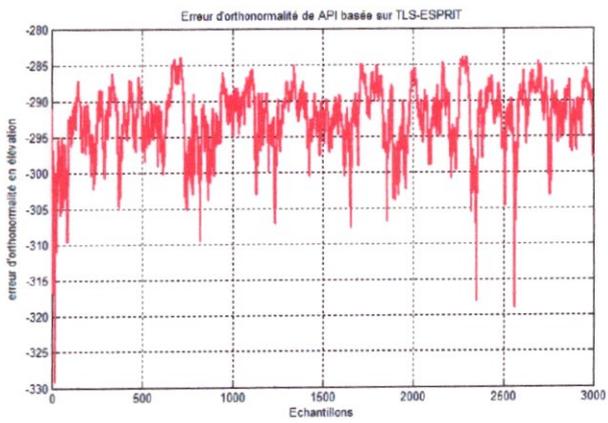
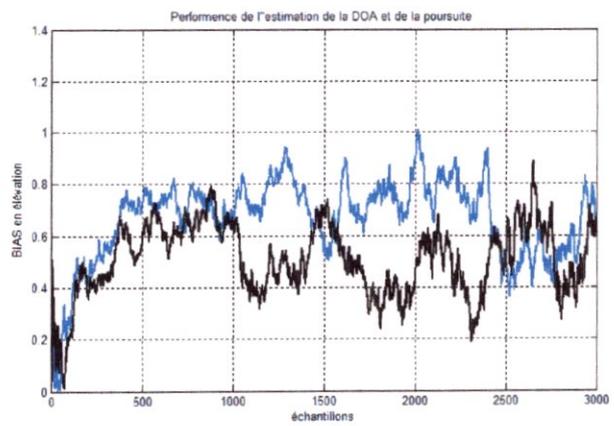
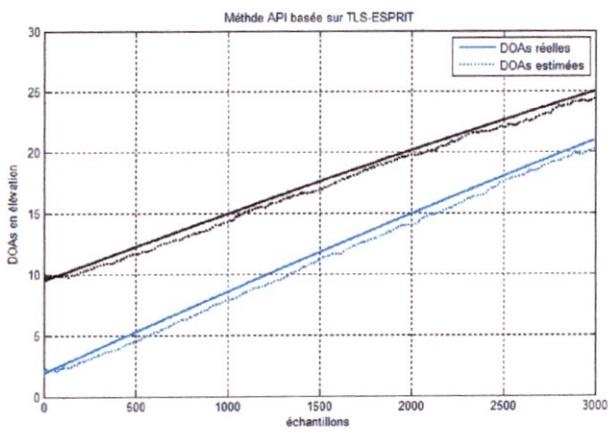


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -293.2782 dB

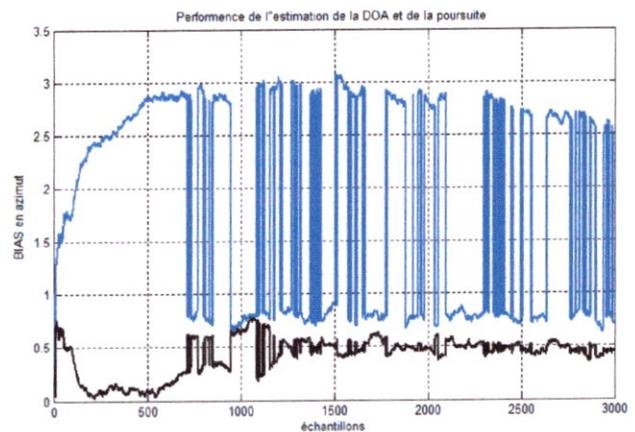
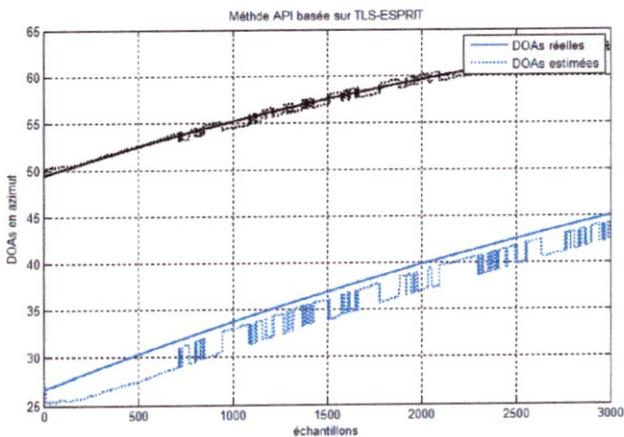


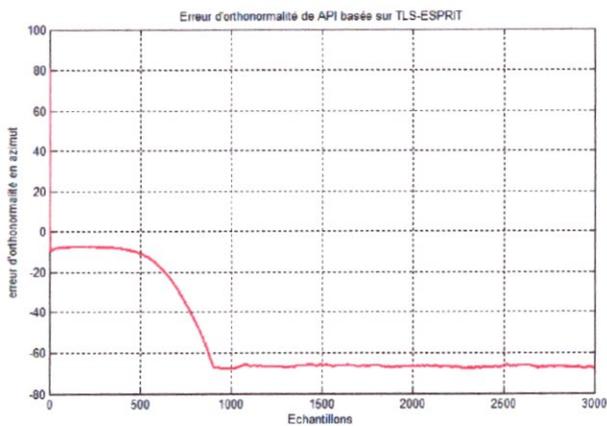


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -48.7145 dB



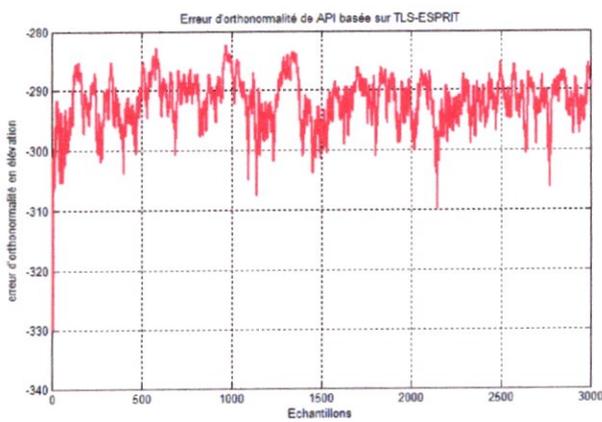
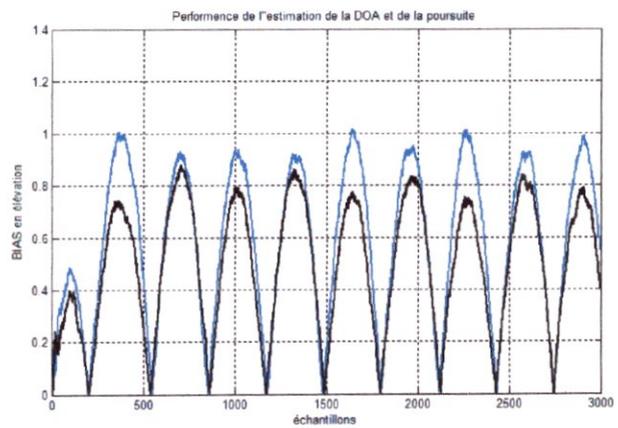
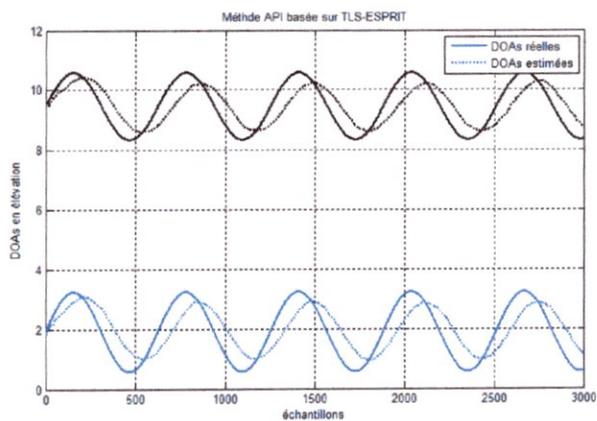
L'erreur d'orthonormalité moyenne : -292.5195 dB



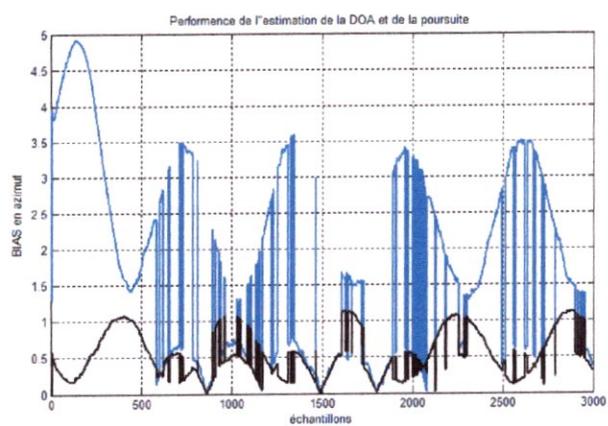
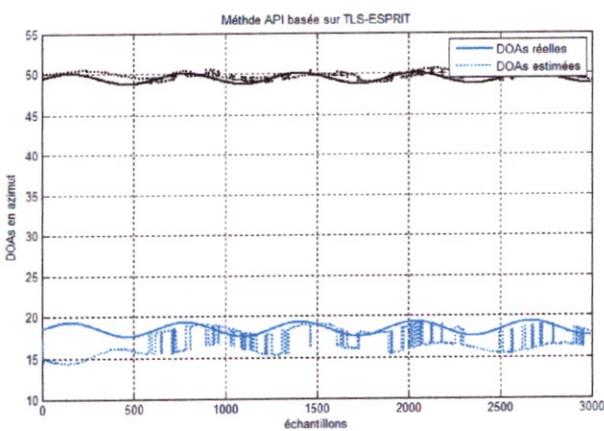


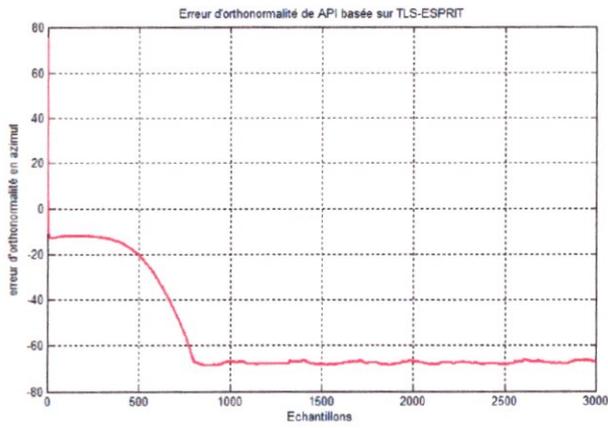
L'erreur d'orthonormalité moyenne : -52.1877 dB

**Nombres d'antennes N=12**

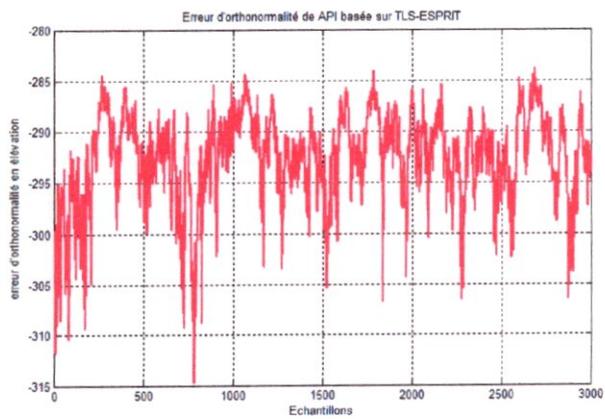
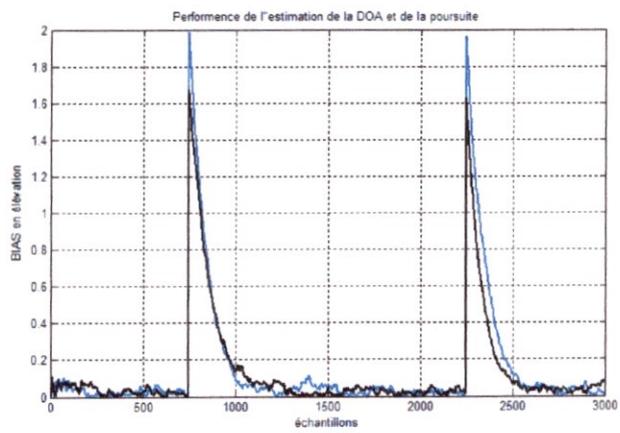
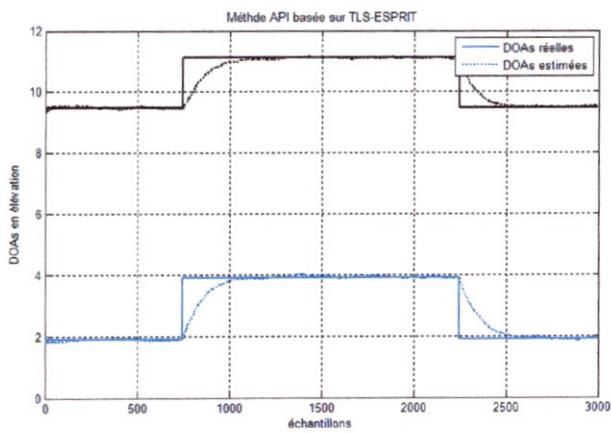


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -291.8731 dB

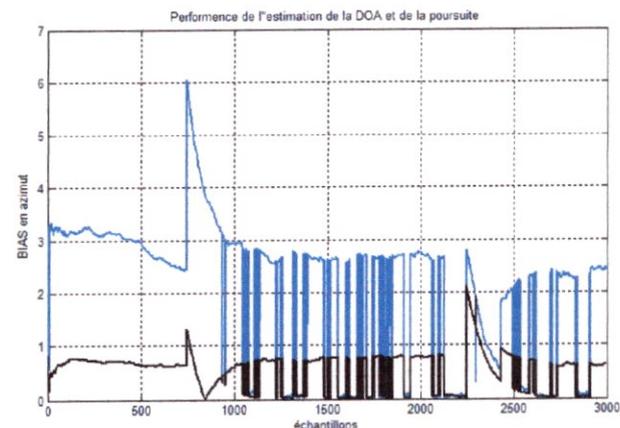
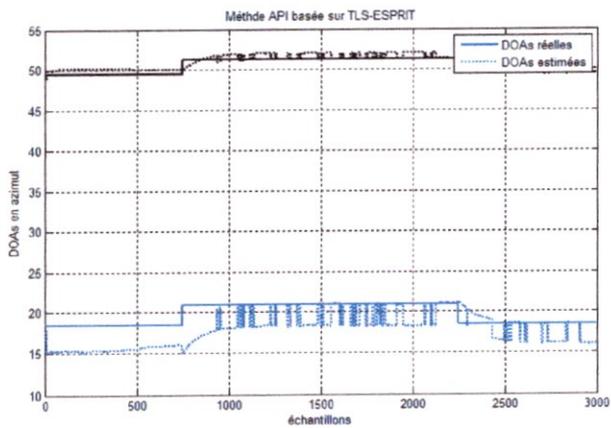


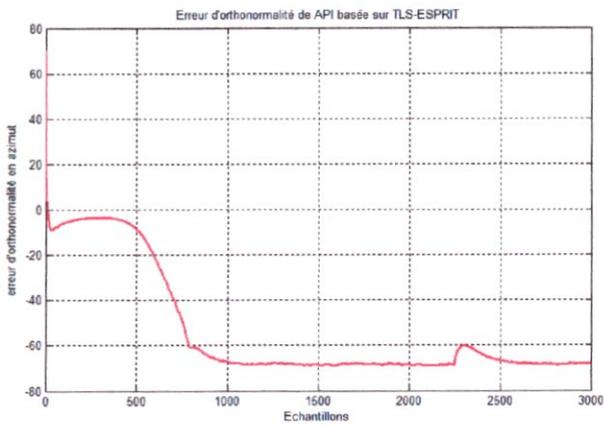


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -55.5871 dB

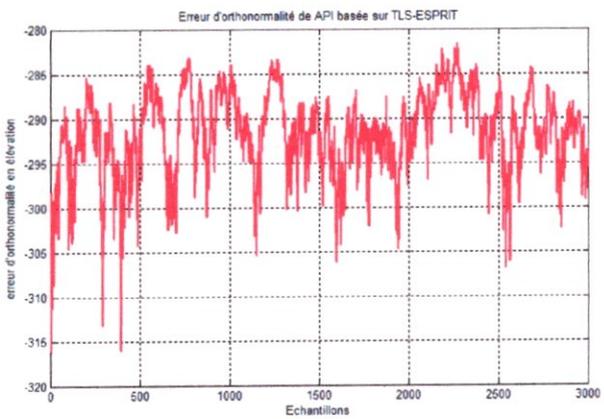
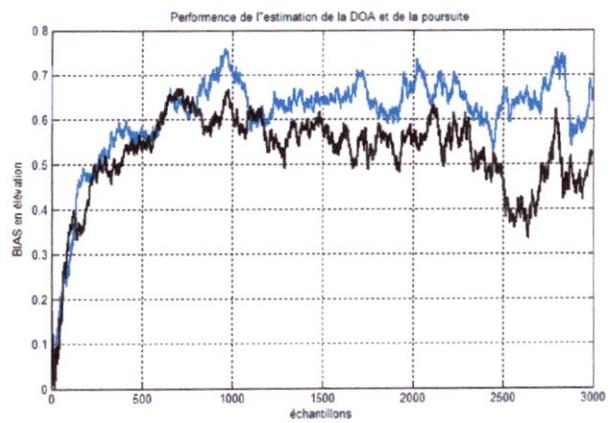
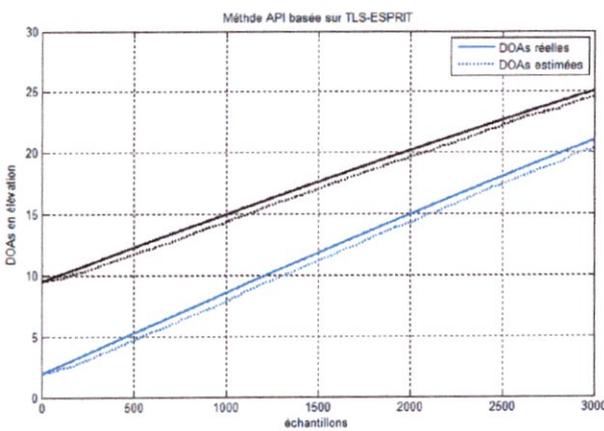


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -292.5576 dB

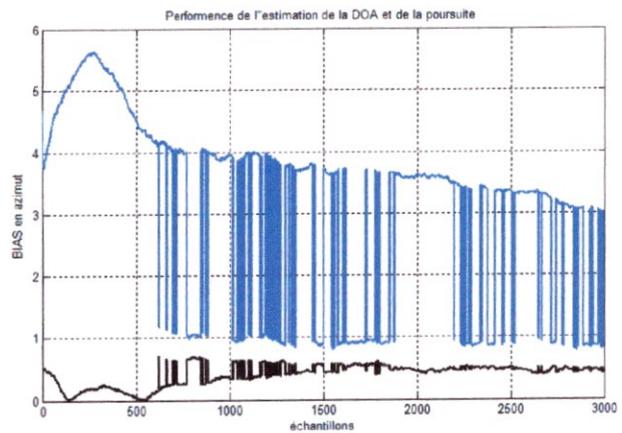
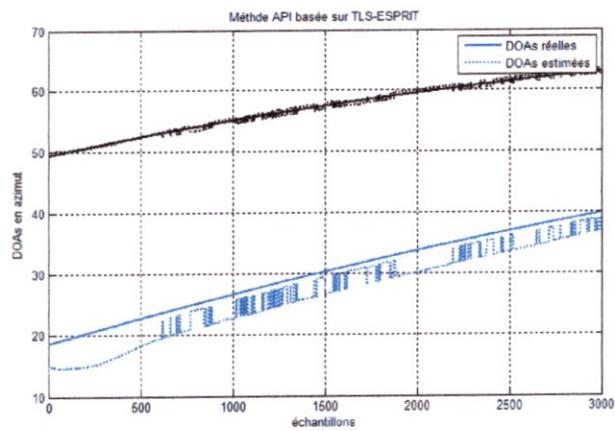


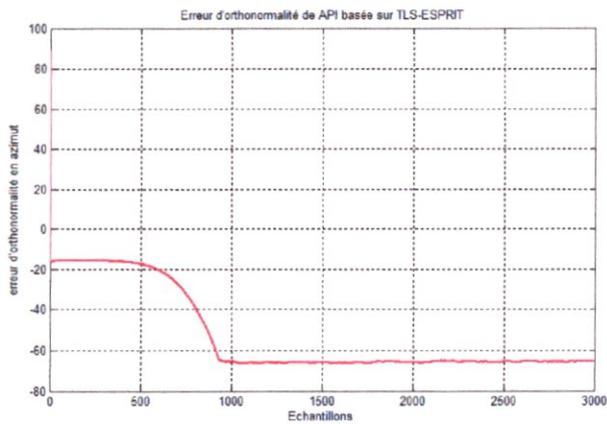


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -53.2944 dB



L'erreur d'orthonormalité moyenne : -291.6718 dB





L'erreur d'orthonormalité moyenne : -52.5883 dB

### Interprétation de l'algorithme API avec TLS-ESPRIT en 2D

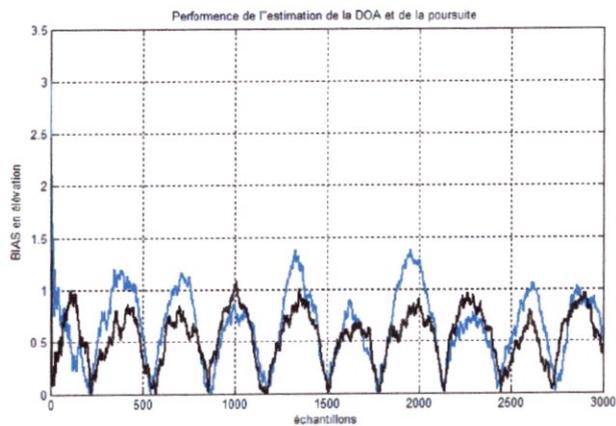
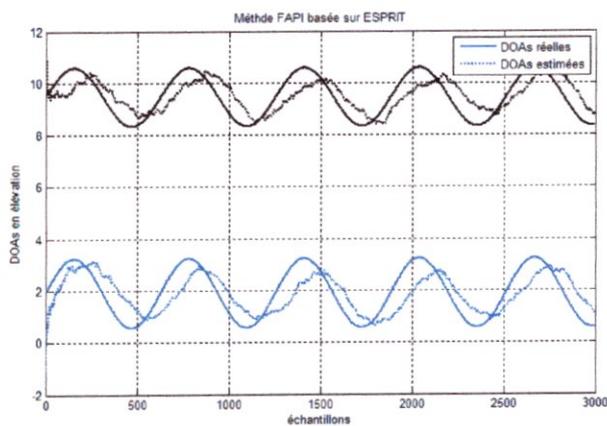
Dans le cas où l'algorithme API est utilisé avec TLS ESPRIT, La convergence est nettement plus rapide qu'avec ESPRIT et on constate une meilleure précision (Le biais est plus faible) dans le cas de la poursuite de l'élévation. Tandis que dans le cas de l'azimut, un biais important est dû au terme de couplage entre les deux angles présent dans le vecteur de directivité ; on peut remédier à ce problème en augmentant le nombre d'antenne.

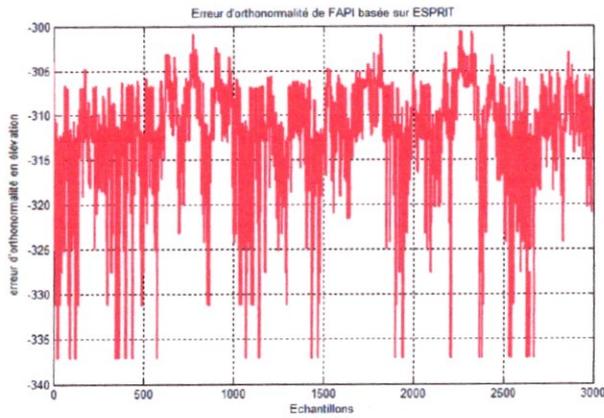
On peut remarquer aussi que l'erreur d'orthonormalité et sa valeur moyenne, diminue en élévation en utilisant TLS-ESPRIT, mais en azimut, l'interprétation est la même qu'avec ESPRIT.

#### 4.5.2 L'algorithme FAPI réseau en L

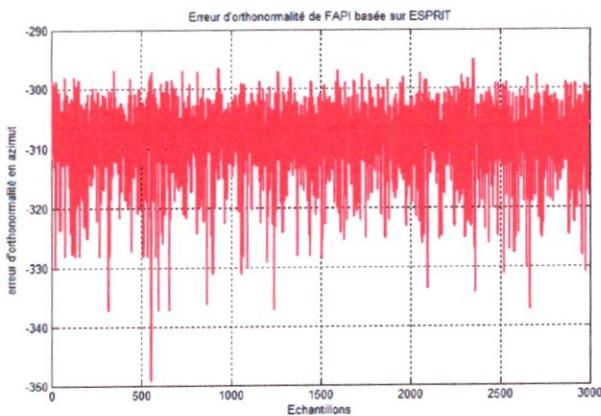
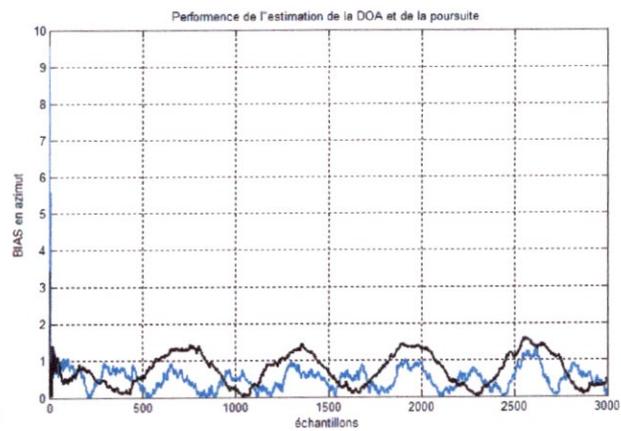
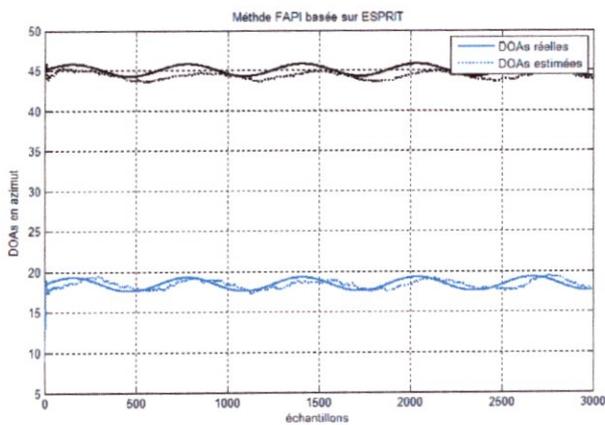
##### a. ESPRIT

##### Nombres d'antennes N=6

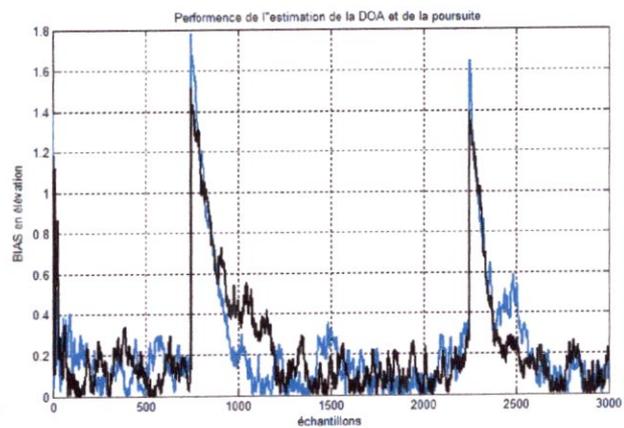
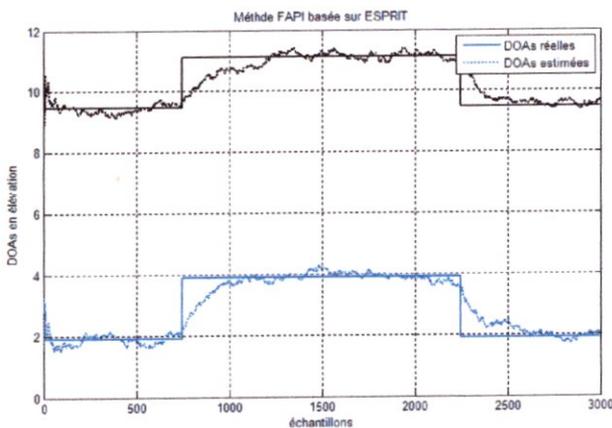


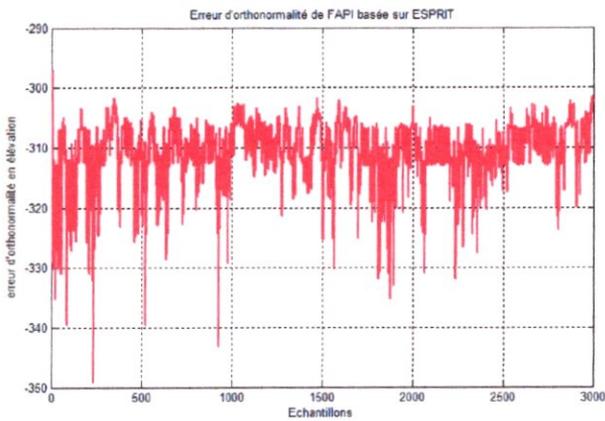


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB

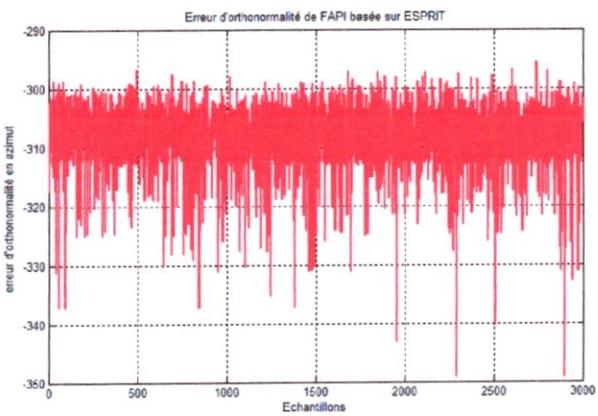
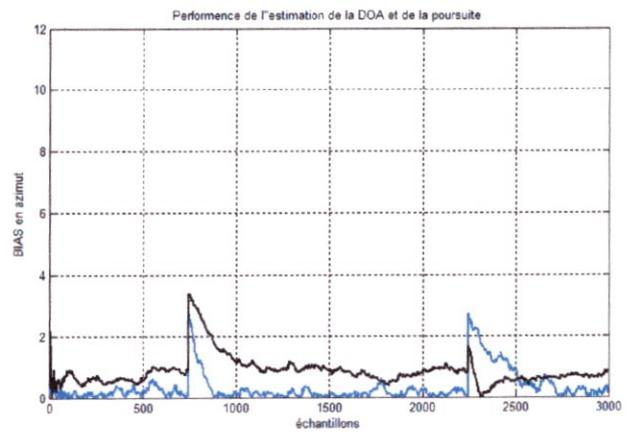
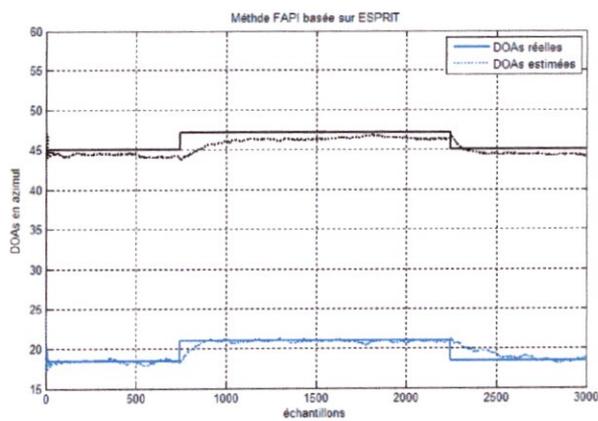


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB

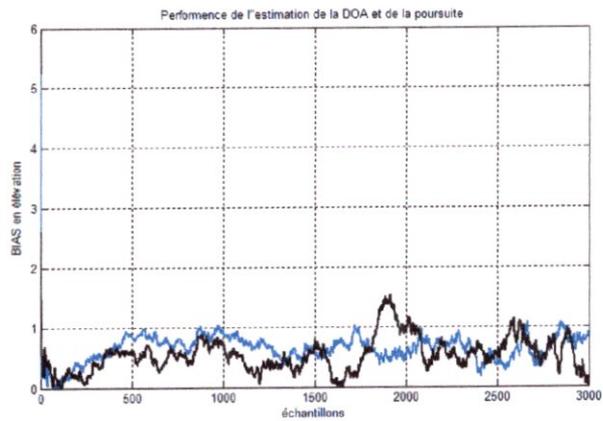
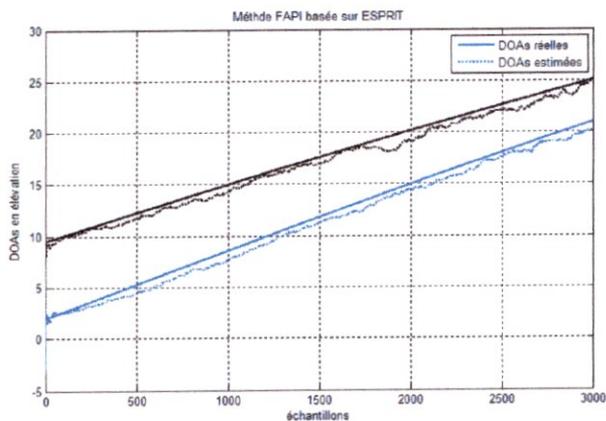


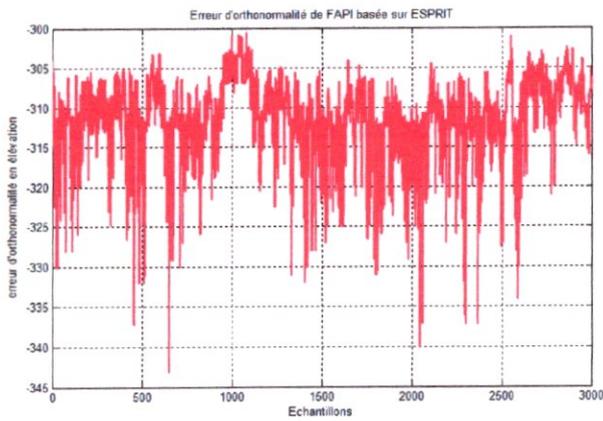


L'erreur d'orthogonalité moyenne : -310.5004 dB

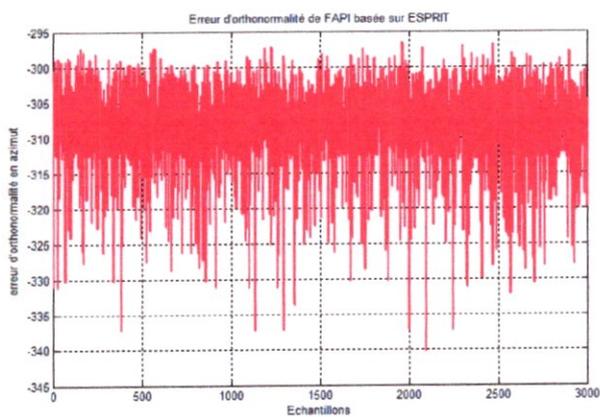
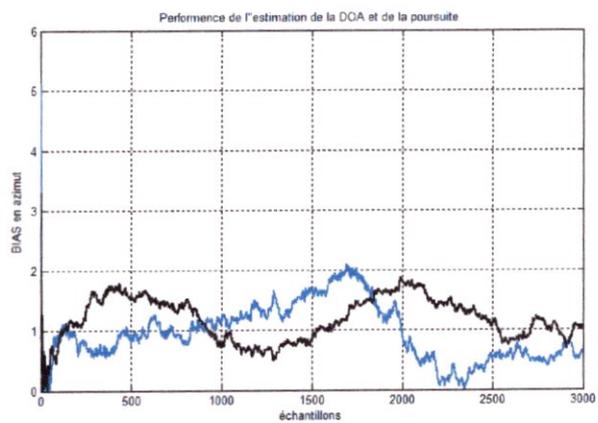
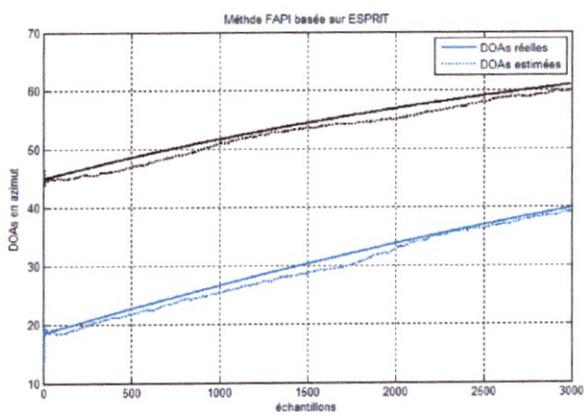


L'erreur d'orthogonalité moyenne : -inf dB



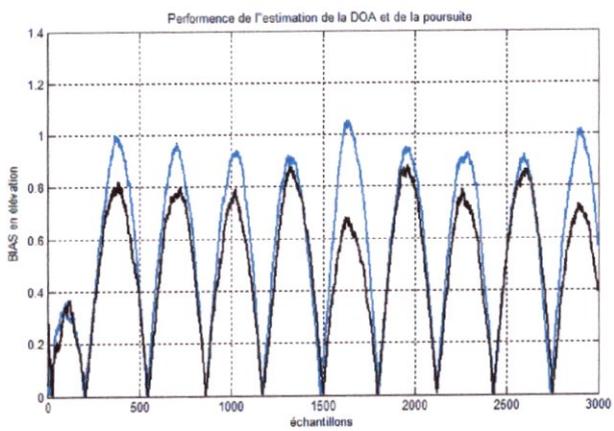
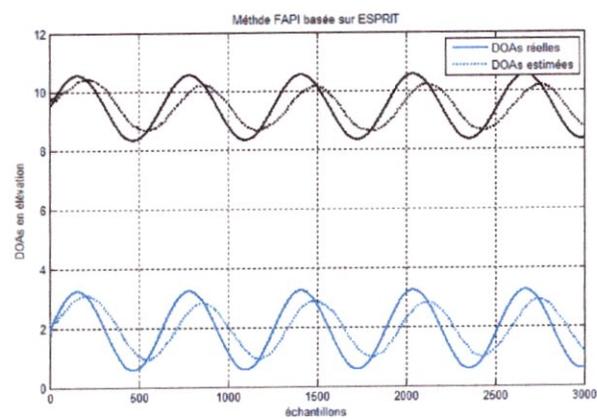


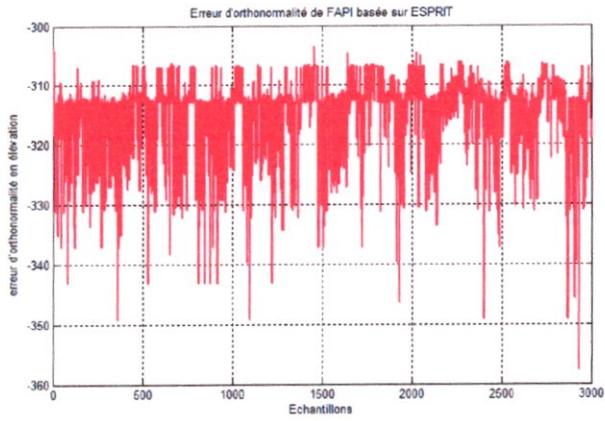
L'erreur d'orthogonalité moyenne : -inf dB



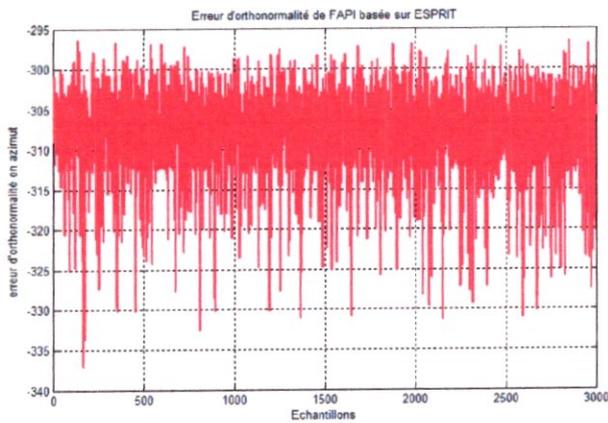
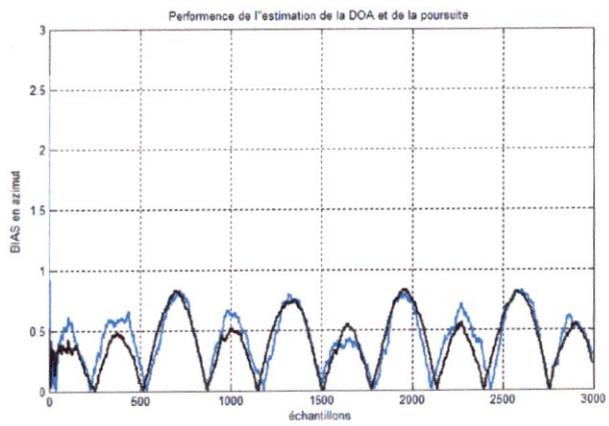
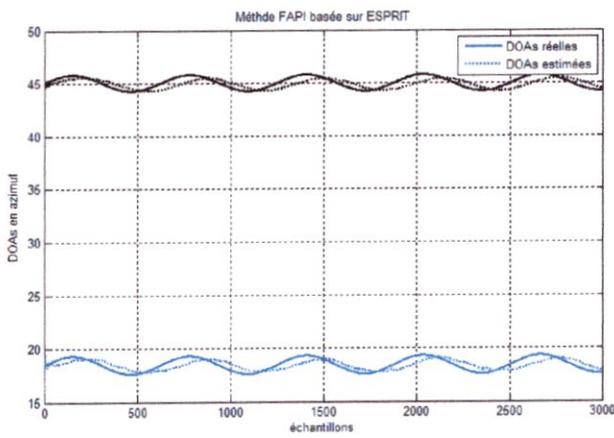
L'erreur d'orthogonalité moyenne : -308.1226 dB

**Nombres d'antennes N=12**

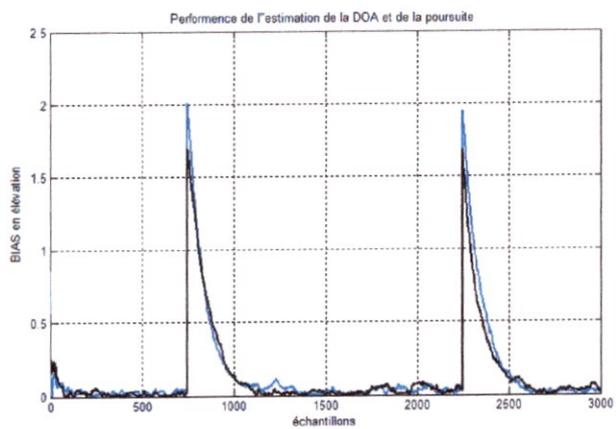
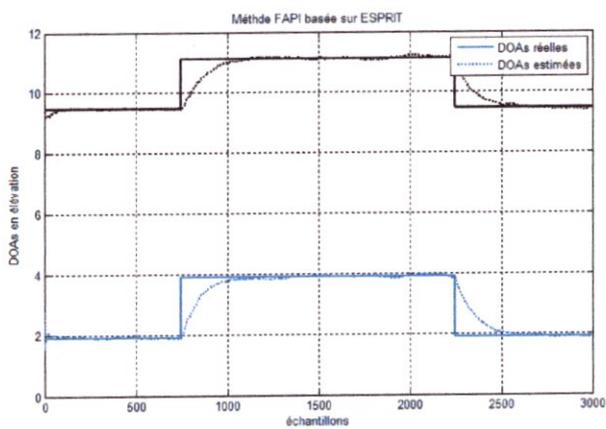


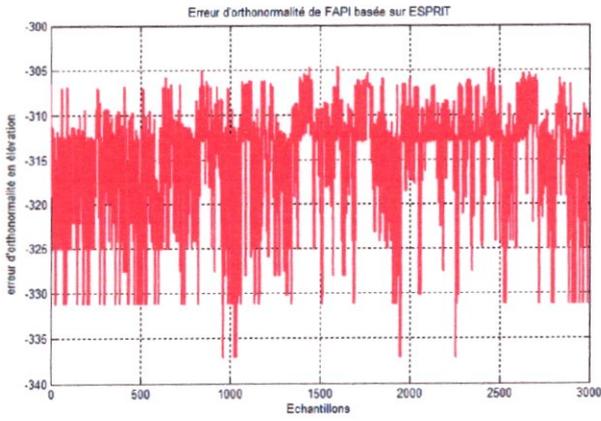


L'erreur d'orthogonalité moyenne : -inf dB

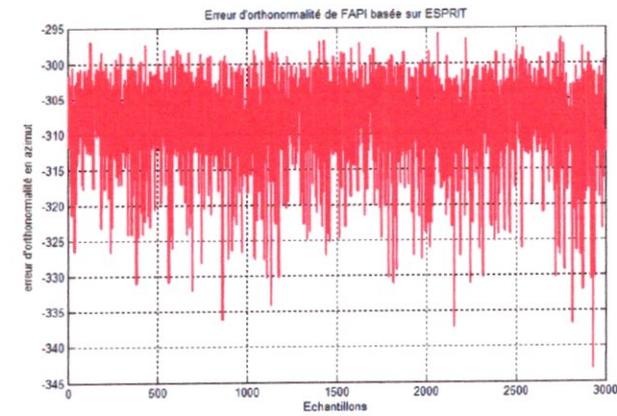
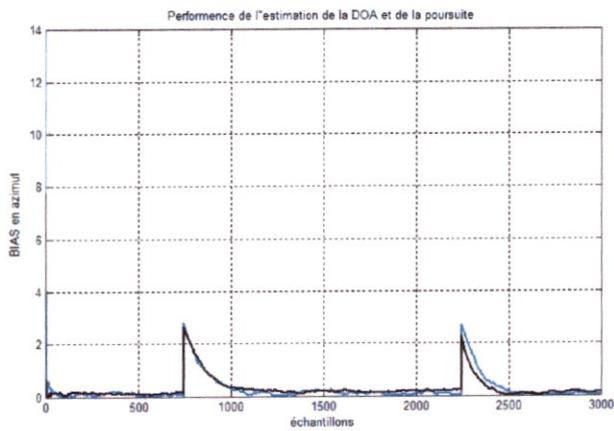
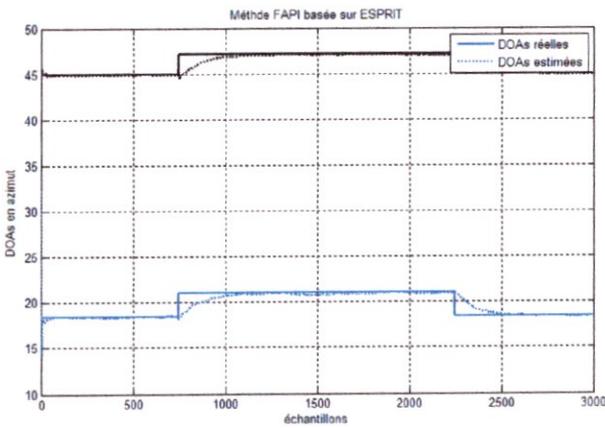


L'erreur d'orthogonalité moyenne : -307.8795 dB

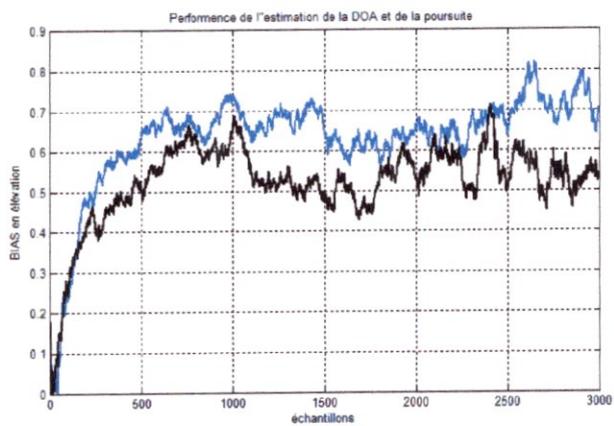
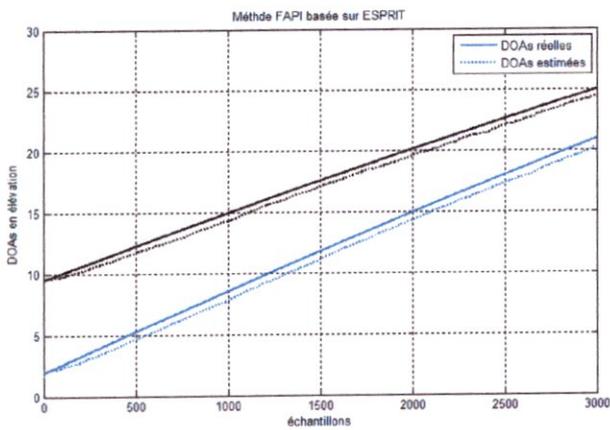


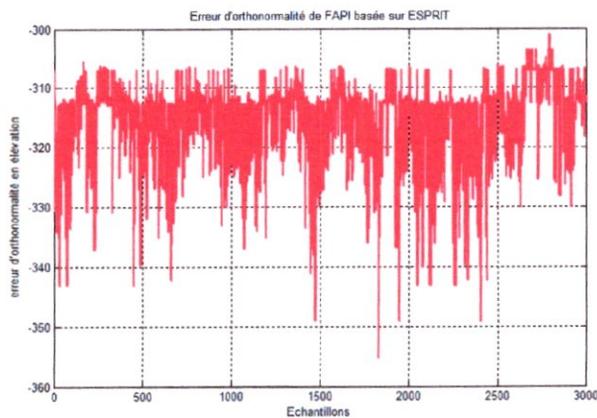


L'erreur d'orthogonalité moyenne : -inf dB

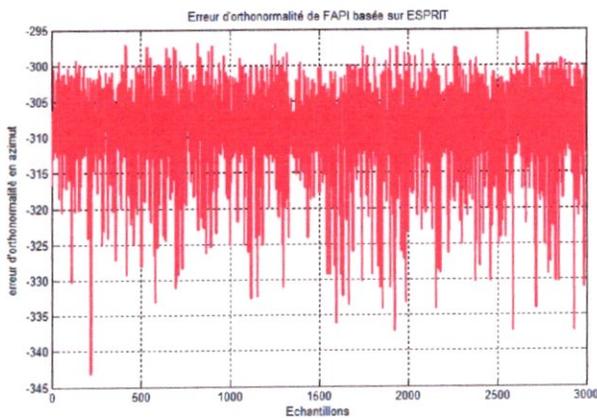
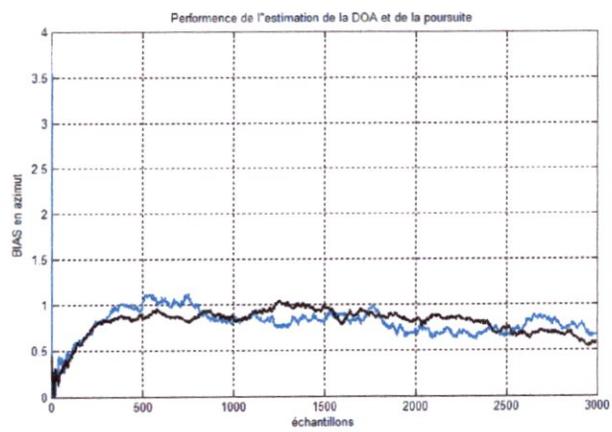
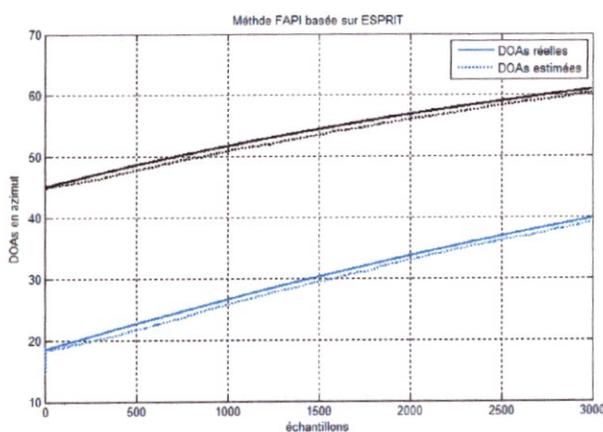


L'erreur d'orthogonalité moyenne : -inf dB





L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB



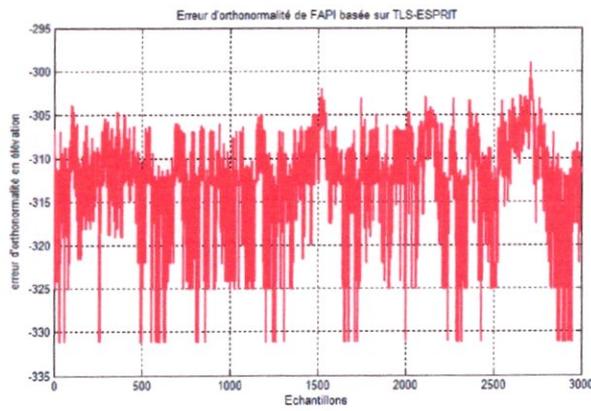
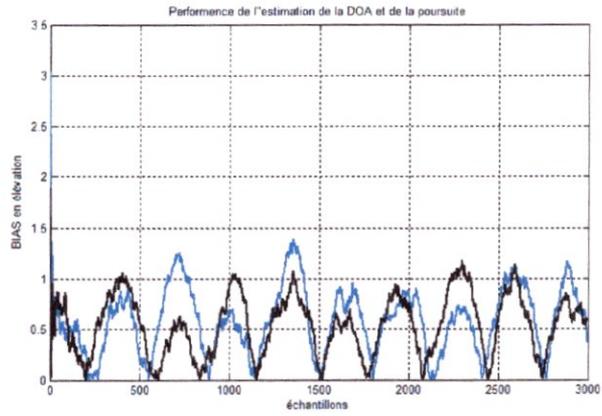
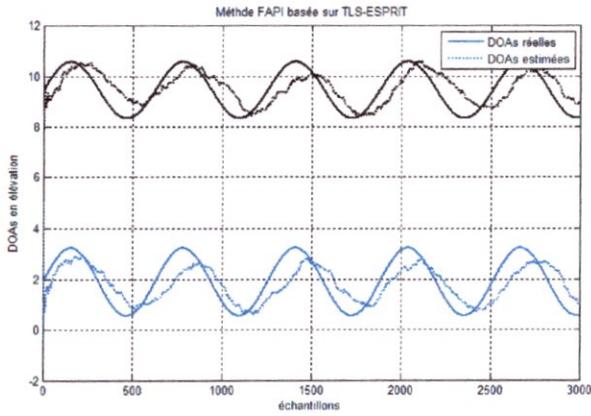
L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB

### Interprétation de FAPI avec ESPRIT en 2D

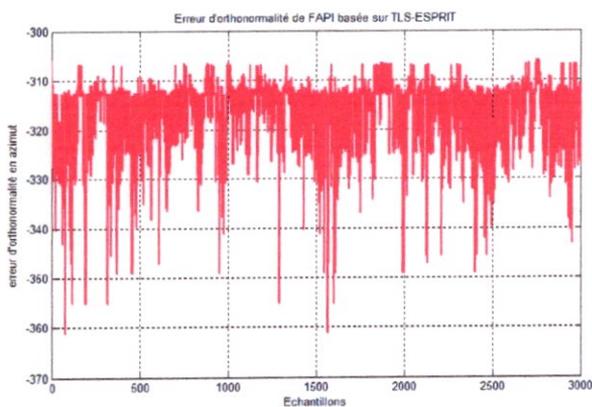
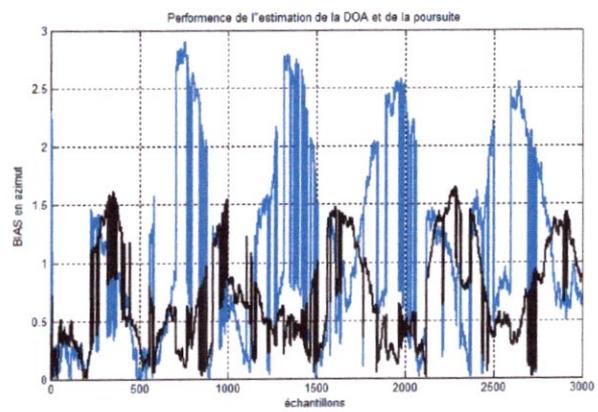
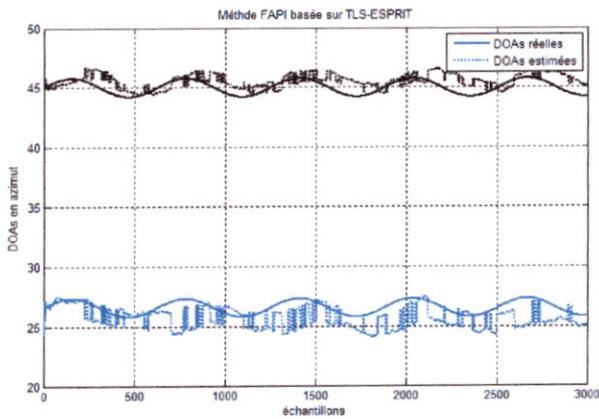
Pour les trois cas de mouvement, on remarque que l'algorithme FAPI basé sur ESPRIT présente une bonne estimation des DOAs en élévation et en azimut, une stabilité très satisfaisante et un faible biais, même dans le cas d'un mouvement rapide ou une variation brusque, la convergence est rapide (une erreur d'orthonormalité très petite). La poursuite est encore meilleure en augmentant le nombre d'antennes à 12 éléments.

**b. TLS-ESPRIT**

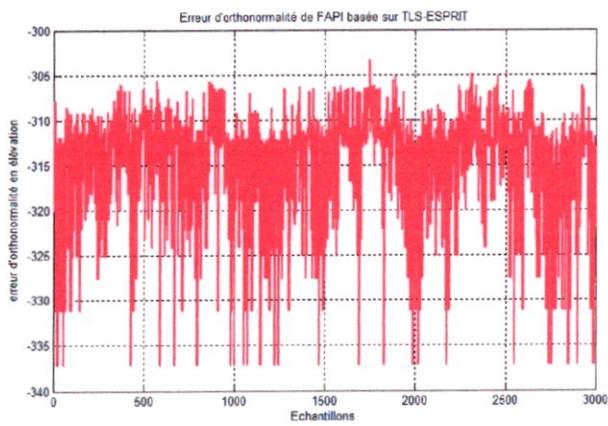
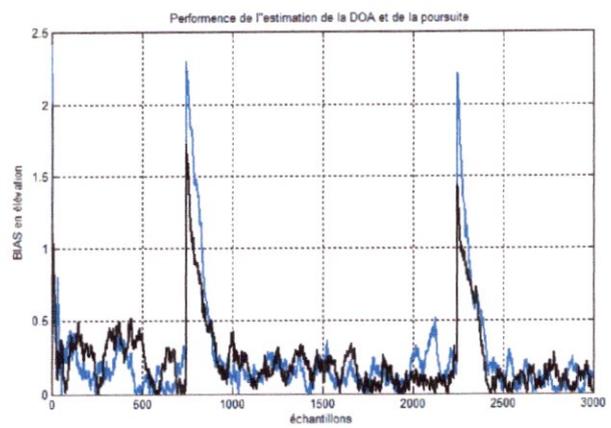
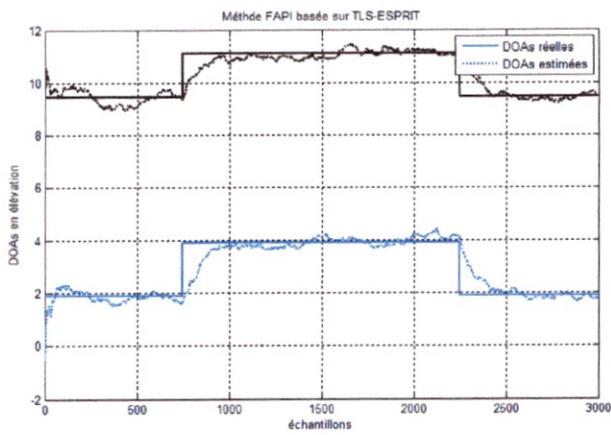
**Nombres d'antennes N=6**



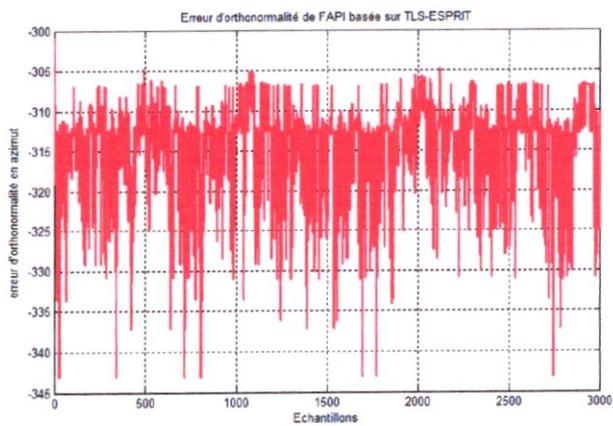
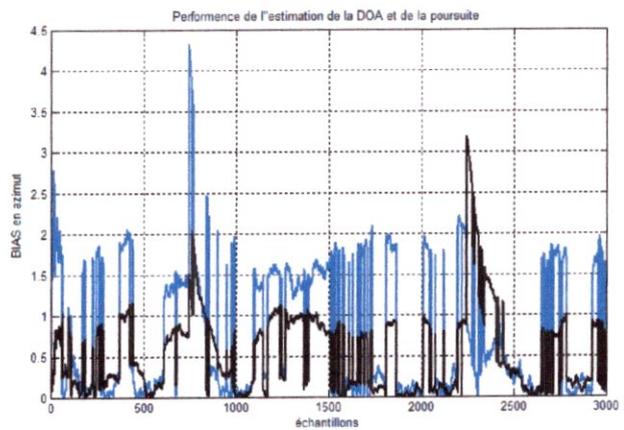
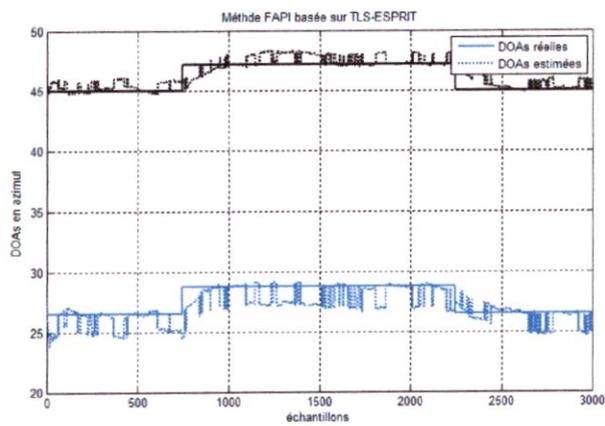
L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB



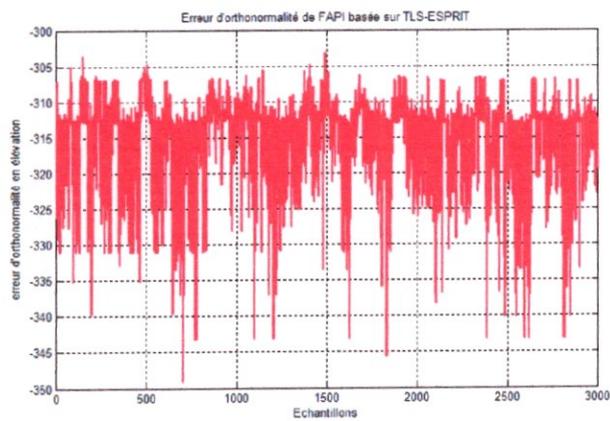
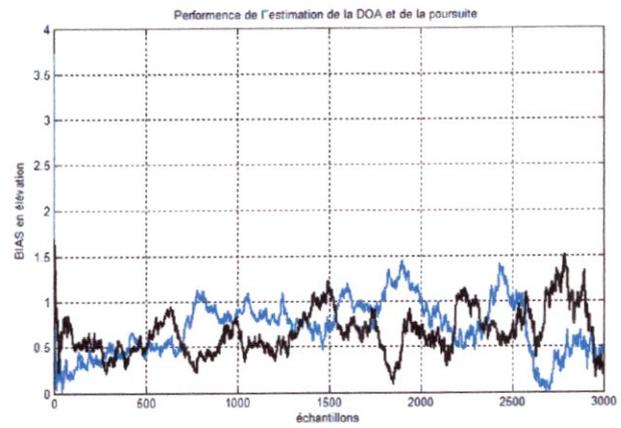
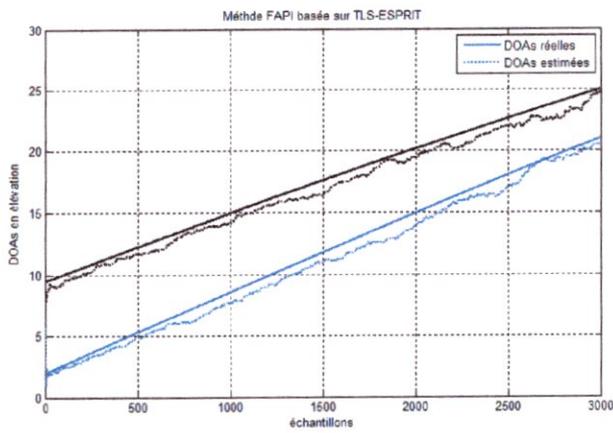
L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB



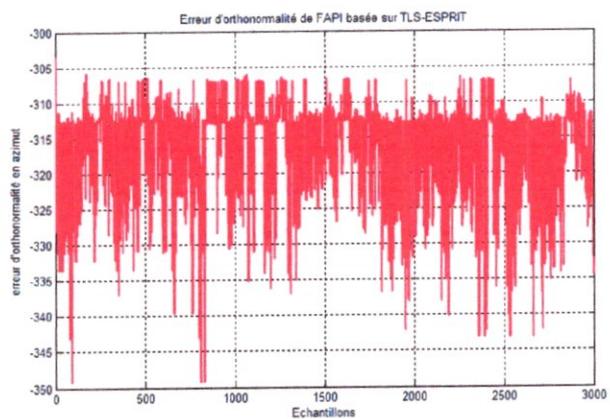
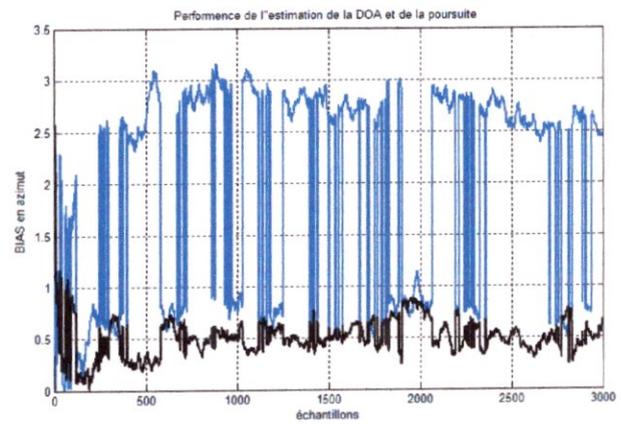
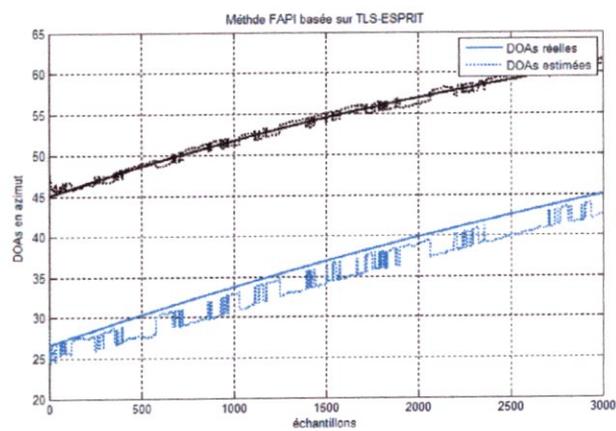
L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB



L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB

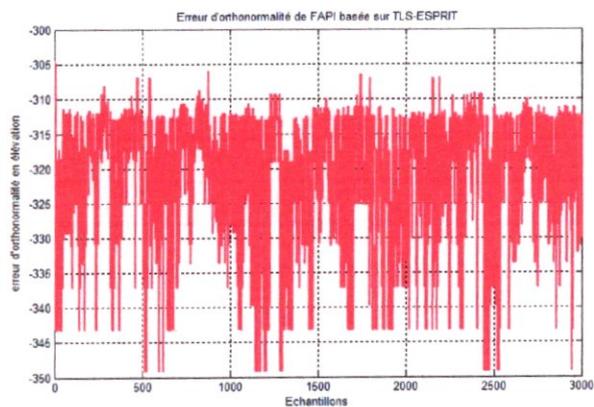
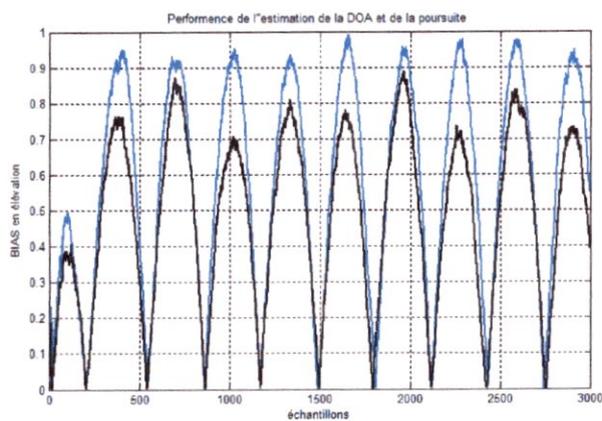
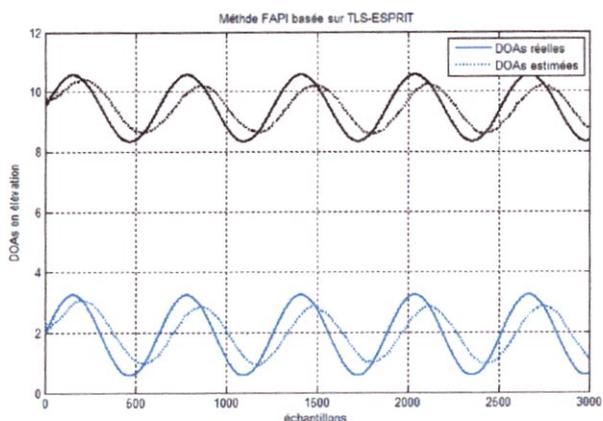


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB

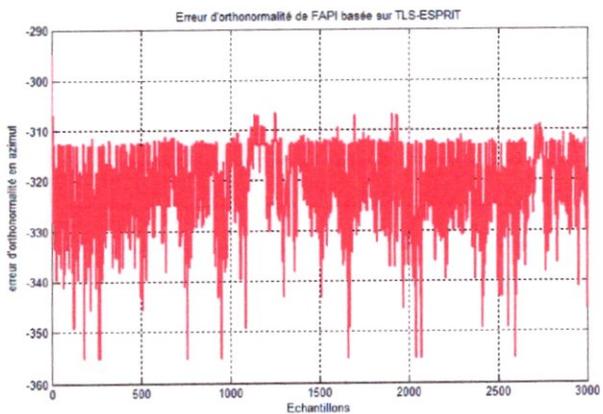
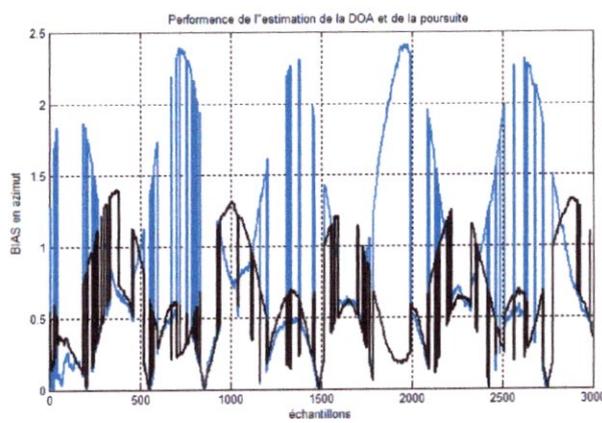
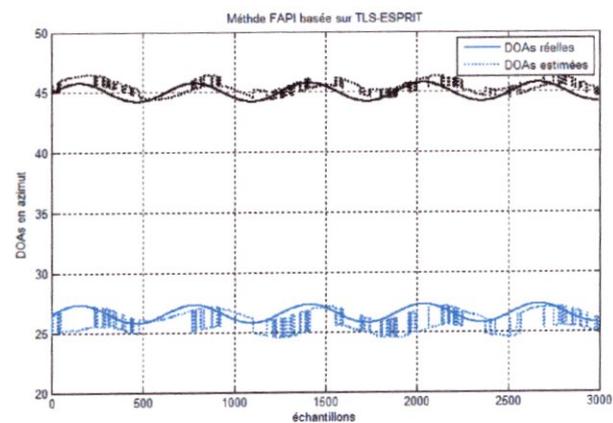


L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB

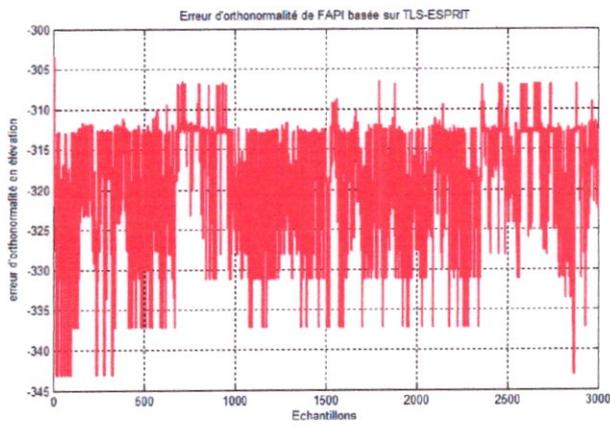
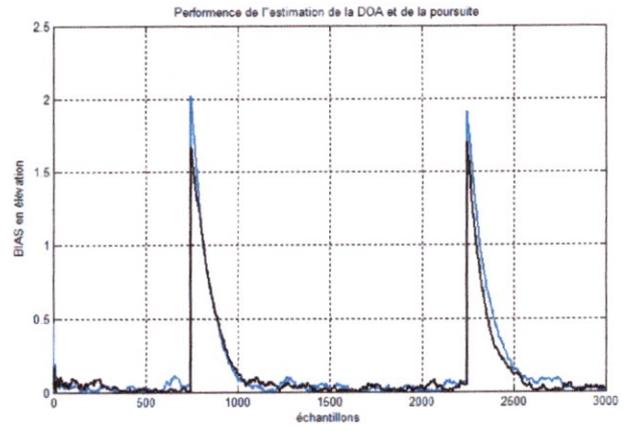
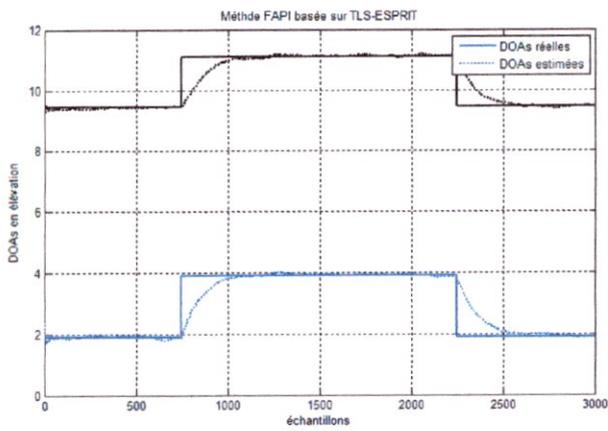
### Nombres d'antennes N=12



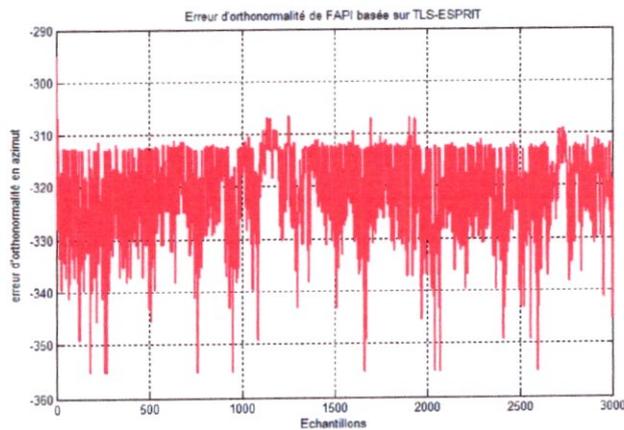
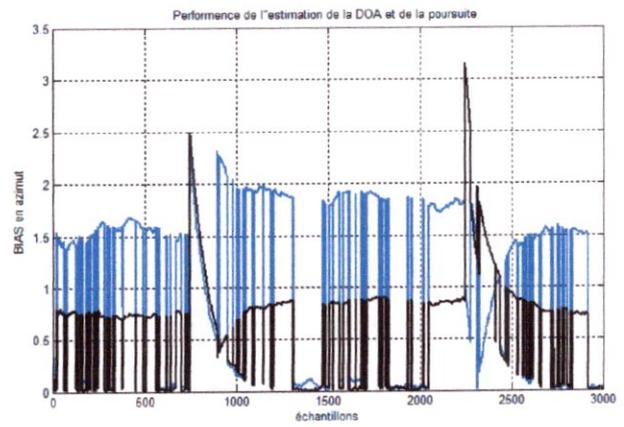
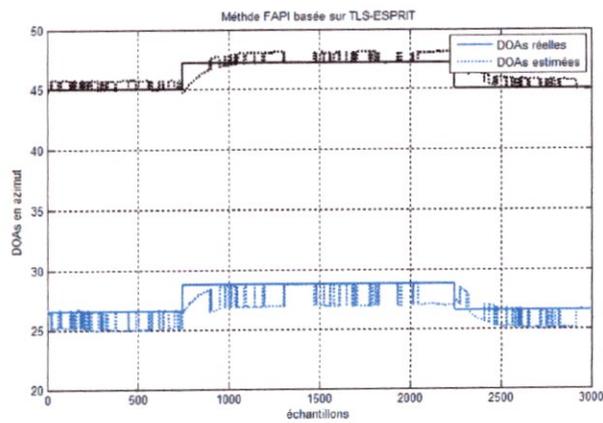
L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB



L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB



L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB



L'erreur d'orthonormalité moyenne : -inf dB

### Interprétation de FAPI avec TLS-ESPRIT en 2D

D'après les résultats de simulation de l'algorithme FAPI basé sur TLS ESPRIT, on peut remarquer que la poursuite des DOAs en élévation est meilleure qu'avec ESPRIT, mais dans le cas de l'azimut, la poursuite présente une marge d'erreur, cela est dû au terme de couplage entre les deux angles présent dans le vecteur de directivité, mais à chaque fois, l'algorithme retrouve son état de stabilité. L'augmentation de nombre d'antennes a minimisé le biais et a augmenté la précision, mais les perturbations persistent toujours.

En terme d'orthonormalité, L'algorithme FAPI avec TLS-ESPRIT maintient toujours la convergence vers une base orthonormée et l'erreur moyenne d'orthonormalité est négligeable, en effet, elle ne représente que -inf dB qui est équivalent à 0.

#### 4.6 Comportement de la méthode API vis-à-vis du SNR

Nous analysons ici l'effet du RSB sur l'estimation et la poursuite de l'espace signal. Les tableaux 4.1 à 4.4 montre la variation de l'erreur d'orthonormalité moyenne obtenu avec les méthodes API et FAPI basées sur ESPRIT et TLS-ESPRIT, en utilisant les paramètres : nombre d'antenne  $N=8$ , la fréquence  $f=1000$  Hz, la position initiale  $X_{0\_A} = 10000$  pieds et on fait varier le rapport signal sur bruit SNR de -20 dB jusqu'à 20 dB avec un pas de 5 dB. Nous avons considéré une seule source rayonnante dont la trajectoire est linéaire.

API basé sur ESPRIT									
SNR (dB)	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
L'angle moyenne d'erreur (°)	25	3.5	1.7	1.3	1.2	1.2	1.19	1.18	1.17
L'erreur d'orthonormalité moyenne (dB)	-inf								

Tableau 4.1: Comportement d'API basé sur ESPRIT vis-à-vis du SNR

API basé sur TLS-ESPRIT									
SNR (dB)	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
L'angle moyenne d'erreur (°)	17.3	5.7	1.2	1.25	1.2	1.17	1.16	1.15	1.15
L'erreur d'orthonormalité moyenne (dB)	-inf								

Tableau 4.2: Comportement d'API basé sur TLS-ESPRIT vis-à-vis du SNR

## 4.7 Conclusion

L'ensemble de simulation réalisées et illustrées dans ce chapitre nous a permis de voir les performances algorithmes de poursuite API et FAPI basés sur les méthodes HR ESPRIT et TLS-ESPRIT, pour deux géométrie de réseaux : ULA, L. les interprétations correspondantes aux simulations prennent en compte les critères de stabilité, précision et convergence en calculant le biais et l'erreur d'orthonormalité moyenne.

L'étude comparative des algorithmes de poursuite API et FAPI, proposée dans la ce chapitre, a montré la supériorité de la méthode des puissances itérées rapide (FAPI) en terme de convergence et de précision, notamment lorsqu'elle est utilisée avec TLS-EPRIT. La poursuite des cibles en une dimension est toujours bonne pour toutes les combinaisons d'utilisation de API et FAPI avec ESPRIT et TLS-EPRIT. En deux dimensions, c'est également le cas pour la poursuite de DOAs en élévation, mais en azimut, la poursuite n'est pas toujours bonne et elle présente une certaine divergence et non stabilité et elle est moins précise. Nous avons pu remarquer que les deux algorithmes API et FAPI fournissent une convergence vers une base orthonormée, ce qui n'est plus le cas pour l'algorithme PAST [voir les simulations dans [15] ] et ses dérivés, en revanche, l'algorithme OPAST [19] fournit cette convergence, mais il très complexe et très lent par rapport à API, est donc très couteux.

Le travail mené au cours de cette thèse a permis d'apporter un certain nombre de résultats théoriques concernant la poursuite des trajectoires temporelles des sinusoïdes en traitant des signaux dont les paramètres varient au cours du temps (sous l'hypothèse d'un bruit blanc additif). Un très grand nombre d'algorithmes permettant de suivre les variations temporelles de l'espace signal ont été proposés dans la littérature. Les simulations numériques que nous avons effectuées ont montré la supériorité de la méthode d'approximation des puissances itérées en terme d'estimation de l'espace signal. Cette méthode repose sur une approximation moins restrictive que celle connue dans la littérature sous le nom de projection approximation. En effet, cet algorithme atteint une complexité linéaire et garantit l'orthonormalité de la base de l'espace signal à chaque itération (ce qui n'est pas toujours le cas des algorithmes publiés dans la littérature). Cette méthode s'avère robuste à de brusques variations de fréquences, et atteint de meilleures performances que de nombreux algorithmes de poursuite de sous-espace, à la fois en terme d'estimation de l'espace signal et de complexité algorithmique.

Nous avons appliqué les deux algorithmes API et FAPI aux deux méthodes de type haute résolution, ESPRIT et TLS-ESPRIT, avec des géométries de réseaux d'antenne linéaires (pour l'estimation des DOAs en 1D) et en L (pour l'estimation des DOAs en 2D), et nous avons réalisé les simulations pour des mouvements des cibles lents, rapide et à changement brusque, en azimuth et en élévation selon la géométrie considérée. Les performances de ces algorithmes ont été étudiées en calculant à chaque simulation le biais et l'erreur d'orthonormalité. Pour les estimateurs de DOAs, TLS-ESPRIT présente une vitesse de convergence plus rapide qu'ESPRIT, mais présente quand il s'agit de DOAs à 2D une erreur restant bornée notamment de l'azimuth dû au terme de couplage entre azimuth et élévation présent dans le vecteur de direction. Les tracés des trajectoires estimées des DOAs présente parfois des pics importants, dus, dans quelques simulations à la nature des mouvements des cibles et dans des autres au rapprochement des DOAs. Nous avons ainsi montré que la structure particulière de la mise à jour de l'espace signal effectuée par API ou par FAPI permet de calculer la matrice spectrale de manière récursive. Les pôles complexes sont ensuite obtenus en calculant l'EVD de cette matrice, dont la complexité est réduite grâce à un calcul récursif. L'algorithme obtenu permet de suivre de manière précise et rapide les trajectoires temporelles des sinusoïdes.

Sur le plan théorique, d'autres développements pourraient compléter ce travail de thèse, comme l'algorithme de poursuite de sous-espace, dérivé de l'algorithme a été proposé par [C.E.Davila, 2000] baptisé Subspace Projection (SP), déjà proposé dans [13] sous l'appellation YAST (Yet Another Subspace Tracker). Cet algorithme atteint également une complexité linéaire et offre des performances très supérieures à celles des algorithmes classiques de poursuite de sous-espace de même complexité, dont FAPI. De plus, il garantit lui aussi l'orthonormalité de la base de l'espace signal à chaque itération. Ou bien, l'algorithme de poursuite de l'espace signal baptisé Sliding Window Adaptive SVD (SWASVD), développé antérieurement à FAPI et YAST et publié dans la revue IEEE Transactions on Signal Processing [Badeau et al., 2004].

Une autre étude peut être aussi suggérée qui consiste à combiner les algorithmes de poursuite avec les algorithmes d'annulation d'interférences tels que la technique GSC (Generalized side lobe canceller) qui permet la réduction de l'effet des lobes secondaires. Ou bien avec les algorithmes d'élimination des multi-trajets tels que ....cela permettra sans doute d'améliorer la résolution, notamment en azimuth dans le cas de la poursuite en deux dimensions ainsi que la poursuite d'un plus grand nombre de cibles.

# Annexes

### A.1 Théorème central limite

La distribution normale a été introduite par le mathématicien français De Moivre en 1733 ; il l'utilisa comme approximation de la loi binomiale  $B(n ; p)$  pour  $n$  grand.

Ce résultat fut ensuite généralisé par Laplace et par d'autres mathématiciens pour devenir le théorème central limite ou théorème de la limite centrale qui donne les conditions dans lesquelles une variable aléatoire tend vers une variable normale. La version la plus simple du théorème central limite est la suivante :

Soit  $(X_n), n \geq 1$ , une suite de  $n$  variables aléatoires indépendantes, de même loi de probabilité, d'espérance mathématique  $m$  et de variance  $\sigma^2$

On considère la variable aléatoire  $Y_n$  définie par :

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - nm}{\sigma \sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m}{\sigma \sqrt{n}}$$

La loi de la variable aléatoire  $Y_n$  converge vers la loi  $N(0 ; 1)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

La démonstration de ce théorème fait appel aux propriétés de la fonction caractéristique d'une distribution.

### A.2 Lemmes d'inversion matricielle

Le lemme suivant montre comment l'inverse d'une matrice est modifié par l'ajout d'une matrice de rang faible.

**Lemme A.2 :** (Formule d'inversion par ajout d'une matrice de rang faible). Soient  $r \in \mathbb{N}$ ,  $q \in \mathbb{N}$  et  $C$  une matrice inversible de dimension  $r \times r$ . Soient,  $A$  une matrice de dimensions  $r \times q$ ,  $B$  une matrice de dimensions  $q \times r$ , et  $D$  une matrice inversible de dimension  $q \times q$ . Considérons la matrice  $\tilde{C} = C + AD B$ , de dimension  $r \times r$ . Alors  $\tilde{C}$  est inversible si et seulement si la matrice  $D^{-1} + B C^{-1} A$ , de dimension  $q \times q$ , est inversible, et dans ce cas  $\tilde{C}^{-1} = C^{-1} - C^{-1} A \Gamma B C^{-1}$ , où  $\Gamma = (D^{-1} - B C^{-1} A)^{-1}$ .

### A.3 Orthogonalisation de Gram- Schmidt

L'idée générale est de construire une base orthonormée du sous-espace image d'un ensemble de vecteurs. L'intérêt numérique est que cette construction équivaut à triangulariser la matrice formée par ces vecteurs. On présentera ici la construction de cette base orthonormée, connue sous le nom de procédure de Gram-Schmidt, dont l'intérêt est purement académique.

Considérons tout d'abord une matrice carrée  $A \in M_{n \times n}(R)$  dont les colonnes  $a_i$  sont linéairement indépendantes. Montrons que l'on peut construire itérativement une matrice orthogonale  $Q$ , dont les colonnes sont notées  $q_i$  telle que  $Q^T A = R$ , où  $R$  est triangulaire supérieure.

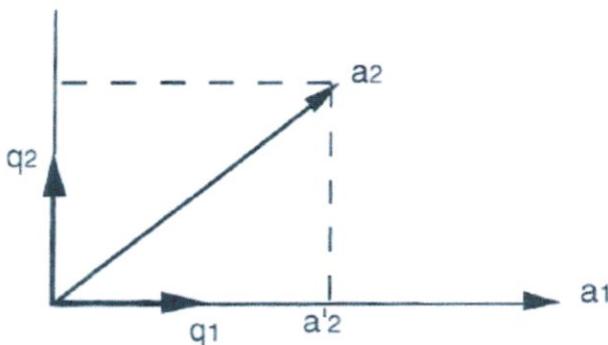
Comme  $Q$  est orthogonale, on a :  $A = QR$ . Or, les éléments de  $R$  sont de la forme :

$$\begin{aligned} r_{11} &= q_1^t a_1 \\ r_{12} &= q_1^t a_2, \quad r_{22} = q_2^t a_2 \\ &\vdots \\ r_{1n} &= q_1^t a_n, \quad \dots \quad r_{nn} = q_n^t a_n \end{aligned}$$

On identifie alors le produit  $QR$  par colonne :

$$\begin{aligned} a_1 &= (q_1^t a_1) q_1 && \Rightarrow q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} \text{ et } r_{11} = \|a_1\| \\ a_2 &= (q_1^t a_2) q_1 + (q_2^t a_2) q_2, && \Rightarrow q_2 = \frac{a_2 - (q_1^t a_2) q_1}{\|a_2 - (q_1^t a_2) q_1\|} \\ &\vdots \end{aligned}$$

On remarque que chaque colonne  $q_i$  est obtenue en soustrayant de  $a_i$  ses projections orthogonales sur les  $i - 1$  premiers vecteurs de la base orthonormée déjà calculés, puis en normant le résultat :



#### A.4 Approximation de la méthode des puissances itérées

Les résultats du chapitre 3 sont démontrés ici.

##### Démonstration de la proposition 3.2.4.1

En substituant l'équation (3.7) dans l'équation (3.15) et en multipliant à gauche par

$W(t - 1)^H$ , on obtient :

$$\Theta(t)R(t) = \beta S(t - 1)^H + \underline{y}(t) \underline{J} \underline{y}(t)^H \quad (\text{A1})$$

Ensuite, on utilise le lemme d'inversion matricielle A.2 pour inverser le membre de droite de cette égalité. L'intérêt de cette approche est que le problème de l'inversion d'une matrice

de dimension  $r \times r$  est transformé en l'inversion d'une matrice plus petite, de dimension  $q \times q$  (avec  $q=1$  ou  $2$ ).

En appliquant le lemme A.2 à l'équation (A.1), on montre que la matrice  $\Theta(t) R(t)$ , de dimension

$r \times r$ , est inversible si et seulement si la matrice  $\beta J^{-1} + \underline{y}(t)^H \underline{h}(t)$ , de dimension  $q \times q$ , est inversible (ce qui fournit un moyen rapide de détecter la singularité de  $R(t)$  ou  $\Theta(t)$ ). Dans le cas d'inversibilité, le lemme A.2 conduit à l'équation :

$$(\Theta(t)R(t))^{-1} = \frac{1}{\beta} Z(t-1)^H \Theta(t-1)^H \left( I_r - \underline{y}(t) \underline{g}(t)^H \right)$$

Finalement, en multipliant le conjugué hermitien de cette dernière équation à gauche par  $\Theta(t)^H$ , et en le multipliant à droite par  $\Theta(t)^{-H}$ , on obtient la récurrence (3.22).

#### Démonstration de la proposition 3.2.4.2

En substituant l'équation (3.7) dans l'équation (3.15) et en multipliant à droite par  $\Theta(t)$ , on montre que  $W(t)$  satisfait la récurrence

$$W(t)S(t)^H = \left( \beta W(t-1)S(t-1)^H + \underline{x}(t) \underline{J} \underline{y}(t)^H \right) \Theta(t)$$

En substituant les équations (A.1) et (3.25) dans l'équation ci-dessus, on montre que :

$$W(t)S(t)^H = W(t-1)S(t-1)^H + \underline{e}(t) \underline{J} \underline{y}(t)^H \Theta(t) \quad (\text{A.2})$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation (A.1) à gauche par  $\underline{g}(t)^H$ , et en remplaçant  $\underline{g}(t)$  par sa définition dans l'équation (3.23), on obtient

$$\underline{g}(t)^H \Theta(t)R(t) = \frac{1}{\beta} \left( \beta \underline{J}^{-H} + \underline{y}(t)^H \underline{h}(t)^H \right) \left( \left( \beta S(t-1) \underline{h}(t) \right)^H + \left( \underline{y}(t)^H \underline{h}(t)^H \underline{J} \underline{y}(t)^H \right)^H \right) \quad (\text{A.3})$$

Alors les équations (3.20) et (3.21) montrent que

$$(\beta S(t-1)h(t))^H = \beta \underline{y}(t)^H = \beta J^{-1} J \underline{y}(t)^H \quad (\text{A.4})$$

En substituant l'équation (A.4) dans l'équation (A.3), on obtient

$$\underline{g}(t)\Theta(t)R(t) = J \underline{y}(t)^H \quad (\text{A.5})$$

Finalement, en substituant l'équation (A.5) dans l'équation (A.2) et en multipliant  $S(t)^{-1} = Z(t)^H$ , on obtient l'équation (3.24).

- [1] **Guillaume VILLEMAUD** :« Cours d'antennes » 5ème année ingénieur du Département Génie Électrique. Université de S.Dahlab.2010
- [2] **Léo THOUREL** : Calcul et conception des dispositifs en ondes centimétriques et millimétriques « les Antennes » , Tome 02. Cepadus –Edition.
- [3] **S.MEGUELATI**: « Cours d'antenne » 4ème année ingénieur du Département d'aéronautique, Université de S.Dahlab.2010
- [4] **B. ATROUZ** , « Systèmes radar : Théories, techniques et Application » Ministère de la Défense National . Décembre 2007.
- [5] **M MANSOURI, D. SAILILIA et F.Z DOUDOU** « Estimation de la direction d'arrivée DOA des signaux par les méthodes ESPRIT et TLS », Dept Aero. Univ S.Dahlab. Juin2005
- [6] **PILLAI** , Array signal processing Booklyn 1998
- [7] **HAARDT, M.**, Efficient One-, Two-, and Multidimensional High-Resolution Array Signal Processing, New York: Shaker Verlag, 1997.
- Rotational Invariance Techniques," *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 37, No.7, July 1989, pp. 984–995.
- [8] **Nizar Abdel-Hafeeth Mohammed Tayem**, "Direction of arrival angle estimation for wireless communication system"
- [9] **Ferid HARRABI, Hatem CHANGUEL and Ali GHARSALLAH**. "Estimation of 2D Direction of Arrival with Extended Correlation Matrix". Groupe d'électronique, laboratoire de physique de la matière molle, Faculty of sciences, Tunis,2092,Tunisia. Publication :24 May 2007.
- [10] **HAARDT, M.** " 2D Unitary ESPRIT For Efficient 2D Parameter Estimation," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 3, May 9–12, 1995, pp. 2096–2099.
- [11] **ROY, R., and T. KAILILATH**, "ESPRIT-Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques," *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 37, No.7, July 1989, pp. 984–995.
- [12] **R. Badeau, G. Richard, and B. David**, "Approximated power iterations for fast subspace tracking," in Proc. of 7th Int. Symp. on Signal Proc. and its Applications, vol. 2, Paris, France, July 2003.

- [13] **Roland BADEAU**, Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoides modulées. Application aux signaux de musique. De l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, spécialité : Signal et Images. Soutenue le 18 avril 2005.
- [14] **Roland Badeau, Gaël Richard, Bertrand David and Karim Abed-Meraim**, Approximated Power Iterations For Fast Subspace Tracking. Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13 France
- [15] **FERHATNI Asma**, Algorithmes adaptatifs de la poursuite de sous espace d'approximation de projection basés sur les méthodes HR « Min NORM, MUSIC, ESPRIT et TLS-ESPRIT » avec des réseaux ULA, UCA et en L, Université de Blida, DAB, 2010.
- [16] **Roland BADEAU**, Analyse spectrale à haute résolution et décompositions non-négatives appliquées au traitement des signaux de musique. Institut Télécom, Télécom ParisTech, CNRS LTCI ; 46 rue Barrault - 75634 Paris Cedex 13 – France, 2007
- [17] **B. Yang**, "Projection approximation subspace tracking," IEEE Trans. Signal Processing, Jan. 1995.
- [18] **Y. Hua, Y. Xiang, T. Chen, K. Abed-Meraim, et Y. Miao**. A new look at the power method for fast subspace tracking. Digital Signal Processing, octobre 1999.
- [19] **K. Abed-Meraim, A. Chkeif, et Y. Hua**, Fast orthonormal PAST algorithm. IEEE Signal Proc. Letters, 7(3) :60–62, mars 2000.
- [20] **Y. Miao et Y. Hua**. Fast subspace tracking and neural network learning by a novel information criterion. IEEE Trans. Signal Processing, 46(7) :1967–1979, juillet 1998.
- [21] **P. Strobach**, Low-rank adaptive filters. IEEE Transactions on Signal Processing, 44(12) :2932–2947, décembre 1996.
- [22] **Nabil BEHLOUL et Ibrahim Vall OULD AHMED SALEM**, Etude comparative des performances des méthodes de détection des angles d'arrivée en une et deux dimensions, Université de Blida, DAB, 2010.
-