

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPEREUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**  
**FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR**  
**DEPARTEMENT D'AERONAUTIQUE**

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES**  
**POUR L'OBTENTION DU DIPLOME**  
**D'INGENIEUR D'ETAT EN AERONAUTIQUE**  
**SPECIALITE : NAVIGATION AERIENNE**  
**OPTION : INSTALLATION**

**THEME**

**Simulation de l'algorithme à Modèles Multiples à**  
**Association de Données Adaptatif**  
**(IMM-APDA)**

Présenté par :  
M<sup>elle</sup> HAMMADOU Daouya

Proposé par :  
M<sup>r</sup>. S. MEGUELATI

Année Universitaire : 2008/2009

# TABLE DES MATIERES

---

<b>RESUMES.....</b>	<b>1</b>
<b>LISTE DES FIGURES.....</b>	<b>2</b>
<b>SYMBOLES ET NOTATIONS .....</b>	<b>4</b>
<b>ABREVIATIONS USUELLES .....</b>	<b>5</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE.....</b>	<b>ERREUR ! SIGNET NON DEFINI.</b>
<b>I GENERALITES SUR LA POURSUITE DES CIBLES .....</b>	<b>8</b>
I.1 Introduction.....	8
I.2 Le suivi de cibles .....	9
I.3 Les cibles .....	10
I.3.1 Cas de cibles non manoeuvrantes.....	10
I.3.2 Cas de cibles manoeuvrantes.....	11
I.4 Détecteur de manoeuvres.....	11
I.4.1 Techniques de détection de manoeuvres .....	12
I.4.2 Adaptation à la manoeuvre.....	14
I.5 Description d'un système de poursuite multicibles.....	18
I.5.1 Description .....	18
I.5.2 Validation des mesures.....	20
I.6 Problèmes d'association de pistes.....	20
I.7 Catégories d'association de données .....	21
I.7.1 Mesure à mesure (déclenchement de la poursuite).....	21
I.7.2 Mesure à une piste (mise à jour et maintien de la poursuite) .....	21
I.7.3 Poursuite à poursuite (fusionnement de poursuite) .....	22
I.8 Conclusion .....	22
<b>II LES FILTRES DE POURSUITE.....</b>	<b>23</b>
II.1 Introduction .....	23
II.2 Le filtre $\alpha/\beta$ .....	23
II.3 Le filtre de Kalman.....	24
II.3.1 Le filtre de Kalman discret.....	26
II.3.2 Le filtre de Kalman étendu (EKF) .....	31
II.3.3 Les applications du filtre.....	35
II.3.4 Initialisation du filtre.....	35
II.3.5 Les modèles d'état .....	37
II.4 Le filtre particulière .....	39
II.4.1 Principe de base .....	40
II.4.2 Implémentation .....	42
II.4.3 L'algorithme particulière .....	43
II.5 Conclusion .....	45

---

<b>III</b>	<b>APPROCHE A MODELES MULTIPLES .....</b>	<b>46</b>
III.1	Introduction .....	46
III.2	Mélange gaussien .....	46
III.3	Estimation adaptative à modèles multiples .....	47
III.4	Approche d'estimation à modèles multiples pour la poursuite de cibles .....	48
III.4.1	Approche à modèles multiples (cas de non changement de modèles).....	48
III.4.2	Approche à modèles multiples (cas de changement de modèles).....	50
III.5	L'algorithme IMM.....	56
III.6	Conclusion.....	61
<b>IV</b>	<b>APPROCHE PROBABILISTE D'ASSOCIATION DE DONNEES .....</b>	<b>62</b>
IV.1	Introduction.....	62
IV.2	Fenêtrage statistique.....	62
IV.3	Algorithmes classiques d'association de données .....	64
IV.3.1	Méthode du plus proche voisin (PPV).....	64
IV.3.2	Filtre probabiliste d'association de données (PDAF).....	65
IV.4	Forme de l'estimateur PDAF .....	65
IV.4.1	Hypothèses d'association .....	66
IV.4.2	Mise à jour de l'état prédit.....	66
IV.4.3	Mise à jour de la covariance prédite .....	67
IV.4.4	Equations de prédiction .....	68
IV.4.5	Evaluation des probabilités.....	68
IV.4.6	Le PDA paramétrique :.....	70
IV.4.7	Le PDA non paramétrique.....	70
IV.5	Filtre à association de données par probabilités conjointes (JPDAF).....	70
IV.6	Filtre à hypothèses multiples (MHT).....	72
IV.7	Initialisation et mort de pistes : vraies ou fausses pistes.....	73
IV.8	Conclusion .....	74
<b>V</b>	<b>ALGORITHME IMM-PDA ADAPTATIF : SIMULATIONS ET RESULTATS .....</b>	<b>75</b>
V.1	Introduction .....	75
V.2	Les algorithmes .....	75
V.2.1	L'algorithme IMM-PDA.....	75
V.2.2	Filtrage adaptatif .....	77
V.2.3	L'algorithme IMM-PDA adaptatif.....	78
V.3	Les interfaces.....	79
V.3.1	Génération de la trajectoire.....	79
V.3.2	La première interface .....	79
V.3.3	La deuxième interface.....	81
V.4	Simulations.....	84
V.4.1	Scénario 1 .....	85
V.4.2	Scénario 2 .....	87
V.4.3	Scénario 3 .....	88
V.4.4	Scénario 4 .....	90
V.4.5	Interprétation des résultats .....	91
V.5	Conclusion.....	92

---

<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>93</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>94</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>97</b>

## RESUMES

---

### ملخص

في هذه المذكرة، نقوم بوصف نظام المراقبة المعتمد على ترشيح كالمان، إننا نقصد طريقة تقدير تداخل الأنظمة المتعددة و طريقة جمع المعلومات . نبدأ بتقويم بعض المعلومات العامة على متابعة الأهداف أيضا الترشيحات المستعملة في هذه الأخيرة، ثم نقوم بوصف مختلف الطرق المستعملة في الأنظمة المتعددة و جمع المعلومات المتواجدة لتقدير الحركة. ة قد ركزنا وصفنا على خوارزمية تداخل الأنظمة المتعددة التي بإمكانها تقدير الثوابت الحركية للهدف في حالة حركة مفاجئة لها، بالإضافة إلى خوارزمية جمع المعلومات التي يمكنها فعل ذلك حتى إذا كان الهدف في مجال يحتوي على تنبيهات خاطئة. أخيرا نقوم بتقديم نتائج تجريبية لخوارزمية تجمع الخوارزميتين السابقتين.

### Résumé

Dans ce mémoire, nous décrivons deux techniques de poursuite basées sur le filtrage de Kalman étendu, la première est la technique d'estimation à modèles multiples interagissant, tandis que la deuxième est l'association probabiliste de données. Nous commençons par introduire quelques généralités sur la poursuite de cible, ainsi que les filtres utilisés dans cette dernière. Puis nous décrivons les différentes approches à modèles multiples et probabilistes d'association de données existantes pour l'estimation du mouvement, avec une étude détaillée de l'algorithme modèle multiple interagissant (IMM) qui est capable d'estimer les paramètres dynamiques de la cible dans le cas des mouvements brusque de celle-ci, et l'algorithme d'association de données probabiliste PDA qui peut faire cette estimation même en présence de fausses alarmes. A la fin, nous présentons les résultats de notre simulation de l'algorithme IMM-APDA qui a montré une certaine efficacité.

### Abstract

In this memory, we describe two tracking methods based on the Extended Kalman filtering , it's the multiple models interacting and probability data association estimation methods. We start by introducing some general information about the target tracking, and different filters used in it. Then we talk about the diverse existing multiple model and probability data association approaches for the estimate of the motion, but we focus on the description of interacting multiple model (IMM) and probabilistic data association algorithms which together, can estimate the dynamics parameters of the target in case of abrupt motion in cluttered environment. Finally, we present our simulation results of the IMM-APDA algorithm.

---

## LISTE DES FIGURES

---

<b>Chapitre</b>	<b>Page</b>
Chapitre I	
Fig. I.1 Structure d'un système de surveillance .....	9
Fig. I.2 Le module de pistage .....	10
Fig. I.3 Cible (a) non manœuvrante (b) manœuvrante .....	10
Fig. I.4 Processus de filtrage en présence d'un détecteur de manœuvre .....	12
Fig. I.5 Adaptation des dimensions de la fenêtre de corrélation .....	15
Fig. I.6 : Filtrage avec changement de la dimension du filtre .....	16
Fig. I.7 Schéma bloc d'un système MM .....	17
Fig. I.8 : Schéma bloc du système à Modèles Multiples Interactif.....	18
Fig. I.9 Schéma synoptique d'un algorithme classique de poursuite .....	18
Fig. I.10 Exemple de situation de conflit dans un problème de poursuite multicibles .....	21
Chapitre II	
Fig. II.1 Schéma d'implémentation du filtre $\alpha/\beta$ à une dimension.....	24
Fig. II.2 Interprétation du filtre de Kalman.....	28
Fig. II.3 Le cycle du filtre de Kalman discret .....	29
Fig. II.4 Schéma descriptif de l'algorithme du filtre de Kalman .....	30
Fig. II.5 Schéma descriptif de l'algorithme du filtre de Kalman étendu .....	35
Fig. II.6 Représentation des courbes et poids des particules .....	41
Fig. II.7 La redistribution des particules .....	42
Fig. II.8 Schéma descriptif du réseau particulaire.....	42
Fig. II.9 Schéma descriptif de l'algorithme particulaire.....	43
Chapitre III	
Fig. III.1. Schéma fonctionnel de l'algorithme d'estimation à modèle multiple fixe (Cas de non changement de modèles).....	49
Fig. III.2. Schéma descriptif de l'algorithme GPB-1 .....	50
Fig. III.3. Schéma descriptif de l'algorithme GPB-2 .....	52
Fig. III.4. Schéma descriptif de l'algorithme IMM.....	57

---

Fig. III.5. Organigramme de l'algorithme IMM .....	60
Chapitre IV	
Fig. IV.1. Fenêtre ellipsoïdale.....	63
Fig. IV.2. Exemple d'association NN.....	65
Fig. IV.3. Exemple d'association JPDAF .....	71
Fig. IV.4. Tableau des hypothèses.....	72
Fig. IV.5. Arbre d'hypothèses.....	73
Chapitre V	
Fig. V.1. Trajectoire de simulation.....	79
Fig. V.2. Interface N°1.....	80
Fig. V.3. Organigramme de l'interface 1.....	81
Fig. V.4 : Interface N°2.....	82
Fig. V.5 : Organigramme de l'interface 2.....	83
Fig. V.6. Trajectoires des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA.....	85
Fig. V.7. Erreurs sur la position des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA.....	85
Fig. V.8. Probabilités des modèles CV1, CT+ ,CT- et CV2.....	86
Fig. V.9. Mesures validées.....	86
Fig. V.10. Variation du paramètre d'adaptation $\theta$ .....	86
Fig. V.11 : Trajectoires des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA.....	87
Fig. V.12 : Erreurs sur la position des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA.....	87
Fig. V.13 : Variation du paramètre d'adaptation $\theta$ .....	88
Fig. V.14 : Trajectoires des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA.....	88
Fig. V.15 : Erreurs sur la position des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA.....	89
Fig. V.16. Mesures validées.....	89
Fig. V.17 : Variation du paramètre d'adaptation $\theta$ .....	89
Fig. V.18 : Trajectoires des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA.....	90
Fig. V.19 : Erreurs sur la position des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA.....	90
Fig. V.20. Tableau comparatif des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA.....	91

---

## Symboles et notations

---

<u>Symbole</u>	<u>Définition</u>
H	Matrice de mesure
I	Matrice unité
K	Gain du filtre de Kalman
P	Matrice de covariance de l'erreur d'estimation
Q	Matrice de covariance de bruit de système
R	Matrice de covariance de bruit de mesure
$x(k)$	Vecteur d'état du processus au temps $t(k)$
$V(k)$	Vecteur de bruit de mesure au temps $t(k)$
$W(k)$	Vecteur de bruit de processus au temps $t(k)$
$\hat{x}(k)$	Vecteur d'estimation de $x(k)$ au temps $t(k)$
$\hat{x}(k/k-1)$	Vecteur d'estimation à priori au temps $t(k)$
$z(k)$	Vecteur de mesure au temps $t(k)$
$F(k)$	Matrice de transition reliant l'instant $t(k)$ à l'instant $t(k+1)$
$\Delta t$	Intervalle de temps entre l'instant $t(k)$ et l'instant $t(k+1)$
$\tilde{z}$	Résidu du filtre de Kalman
$P(k)$	Matrice de covariance de l'estimation
$P(k/k-1)$	Matrice de covariance de l'estimation prédite
$P(\cdot)$	Probabilité
$F\{\cdot\}$	La densité de probabilité
$M_j(k)$	Modèle $j$ à l'instant $k$
$E[\cdot]$	Espérance mathématique
$e_k^-$	Estimation d'erreur à priori
$e_k^+$	Estimation d'erreur à posteriori
$\hat{x}_k^-$	Estimation d'état à priori
$\hat{x}_k^+$	Estimation d'état à posteriori

---

## Abréviations usuelles

---

IMM	Modèle Multiple Interagissant
KF	Filtre de Kalman
EKF	Filtre de Kalman Etendu
GPB1	Estimateur Pseudo-Bayésien Généralisé de premier ordre
GPB2	Estimateur Pseudo-Bayésien Généralisé de deuxième ordre
CT	Modèle de Virage
CV	Modèle à vitesse constante
PDF	Fonction de Densité de Probabilité

---

## INTRODUCTION GENERALE

---

La prolifération et le développement des systèmes de surveillance, que ce soit militaire ou civile, ont engendré l'engouement des chercheurs pour des algorithmes de poursuite capable de traquer simultanément un grand nombre de cibles, en utilisant des mesures et des données pouvant provenir d'un ou de plusieurs capteurs de même ou de différents types.

Les algorithmes modernes de la poursuite multicibles datent des années 60 et fondent, aux seins d'une même analyse, les deux problèmes centraux qui sont l'association de données et la poursuite proprement dites.

La fonction de pistage constitue le noyau algorithmique des applications de surveillance, tant civil que militaire, ou elle permet de convertir l'information extraite des capteurs en une information spatio-temporelle. Les techniques à mettre en œuvre pour réaliser cette fonction font généralement appel au filtrage de Kalman et présentent aujourd'hui une réelle maturité dans ce domaine. Toutefois deux facteurs récents méritent une attention particulière :

- Évolution des objets à pister : mobilité accrue, détection plus difficile, en particulier bien sûr dans le domaine militaire avec par exemple les avions à forte manœuvrabilité .
- Évolution des systèmes de mesures : progrès des radars, apparition des capteurs imageurs, systèmes multicapteurs...

Dans le contexte du pistage, la difficulté d'identifier correctement l'appartenance ou de faire correspondre une mesure à une cible, compte tenu des imprécisions de mesures, reflète la problématique liée à l'association de données.

Ce n'est qu'en 1964 qu'il a été mis en évidence, que lors de la poursuite de cibles il peut y avoir des incertitudes associées avec les mesures, en plus des erreurs qui les entachent, qui sont généralement modélisées par un bruit additif. Certaines mesures peuvent être fausses, d'où la nécessité de l'utilisation d'algorithmes permettant l'obtention d'une estimation de l'état à partir d'un ensemble de mesures associées à une même cible.

C'est dans le cadre de cette dernière problématique que s'inscrit le présent travail. Notre travail consistera à étudier les performances d'un filtre de poursuite (IMM-APDA) à modèles multiples et à association de données doté d'un dispositif d'adaptation aux manœuvres brusques.

Pour une meilleure présentation, notre mémoire est divisé en cinq chapitres :

Le premier est consacré à des généralités sur la poursuite des cibles.

Le deuxième consiste à étudier les filtres de poursuite en particulier le filtre de Kalman.

---

Le troisième chapitre comprend une étude des différentes approches à modèles multiples pour l'estimation de mouvement et précisément une étude détaillée de l'algorithme IMM, qui représente une partie de notre algorithme.

Le quatrième chapitre quant à lui, présente une étude générale des approches probabilistes d'association de données en détaillant l'algorithme d'association probabiliste de données PDA qui représente aussi une partie de notre algorithme.

Le dernier chapitre consiste à la simulation de l'algorithme IMM-APDA, avec présentation des résultats et des commentaires concernant les performances de cet algorithme.

---

---

# I GENERALITES SUR LA POURSUITE DES CIBLES

---

## I.1 Introduction

La poursuite de cible (Target tracking) est un domaine très large dont l'objectif est de suivre le mouvement d'un mobile dans l'espace défini par la zone de perception d'un ou de plusieurs mobiles.

La poursuite intervient donc après une phase de détection de mouvement. Elle fait appel à plusieurs domaines de traitement du signal et d'automatique :

Le traitement d'image et/ou le traitement de signal acoustique, selon le mode de perception utilisé (vision, acoustique, radar).

Le filtrage pour éliminer le bruit sur les mesures des positions de la cible effectuées et prédire la trajectoire.

La fusion de capteur, car suivre un mobile avec un seul capteur est difficilement réalisable, il faut envisager des capteurs de résolutions et de natures différentes collaborant entre eux.

L'automatique pour asservir les capteurs les capteurs mobiles à suivre la trajectoire d'une cible.

Depuis plusieurs années, ce domaine de recherche a attiré l'attention de nombreux chercheurs, et plusieurs algorithmes d'estimation de trajectoire de cibles sont apparus.

L'intérêt tient à la diversité des applications, essentiellement militaires :

- Détection et poursuite des missiles balistiques (les données utilisées sont alors des images infrarouges fournies par des satellites de surveillance).

- Poursuite de missiles conventionnels (anti-missiles) ou d'aéronefs.

- Perception des obstacles ou des objectifs environnants un véhicule automatisé en mouvement.

- Surveillance de zones (parking,....).

- Dans des applications météorologiques (calcul de la vitesse et de l'orientation des vents).

L'outil permettant de réaliser cette opération est intitulé « filtre de poursuite », citant par exemple le filtre Kalman qui est souvent utilisé vu les résultats satisfaisants qu'il donne pour les systèmes gaussiens, linéaire ou non linéaire, mais quand le système n'est plus gaussien un autre filtre plus

---

performant peut effectuer la poursuite, nous parlons ici du « filtre particulière », le chapitre deux est consacré pour ces filtres de poursuite.

## I.2 Le suivi de cibles

Le rôle du pistage de cible est d'assurer la cohérence temporelle des observations afin d'éviter les fausses alarmes et de filtrer l'état.

La structure d'un tel système est donnée par le schéma suivant :

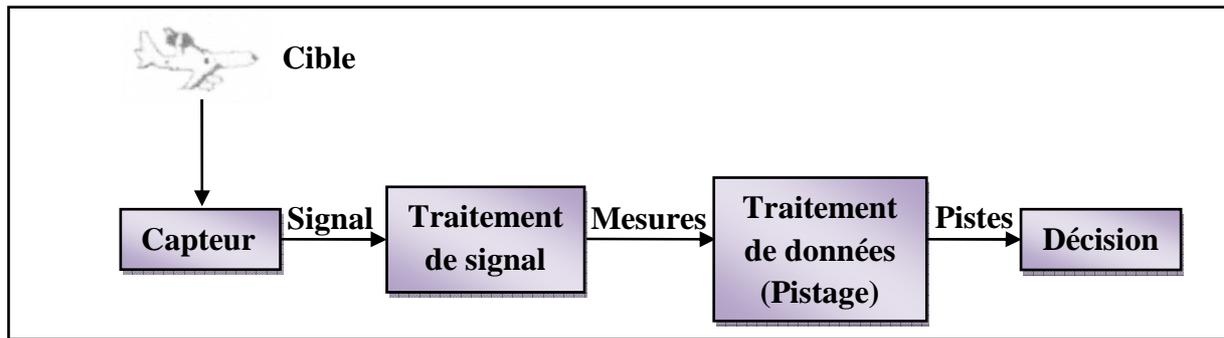


Fig. I.1 Structure d'un système de surveillance

Les capteurs délivrent des signaux qui sont collectés par un module de traitement de signal qui délivre à son tour des mesures au module de traitement des données. Les pistes sont des éléments du sous-système de traitement des données dont le rôle est de former et de maintenir les pistes.

Le suivi de cibles est un élément indispensable pour un système de détection d'obstacles. Son rôle est de déterminer le nombre, la position et le mouvement des différentes pistes.

Un système de pistage repose sur plusieurs modules dont le principal est celui qui permet une estimation récursive de l'état de la piste (position, vitesse, voire accélération).

Ce module s'appuie sur une méthode de filtrage telle que le filtrage de Kalman ou le filtrage particulière. D'autres modules comme l'initialisation, la destruction, l'association des pistes sont indispensables au bon fonctionnement (voir fig. I.2).

En effet toutes les mesures délivrées par les capteurs ne sont pas forcément des mesures provenant de cibles mais peuvent provenir d'interférences aléatoires (condition atmosphériques, fausses alarmes,...). Il est donc nécessaire de valider les mesures qui correspondent le mieux à l'estimation : c'est l'association.

Une piste tentée est issue d'une mesure non associée avec les pistes existantes. La confirmation d'une piste est basée sur le nombre de mises à jour effectuées pendant un temps fixe : c'est l'initialisation.

Une piste est dite supprimée si elle n'est pas mise à jour par une mesure pendant un laps de temps fixe : c'est la destruction.

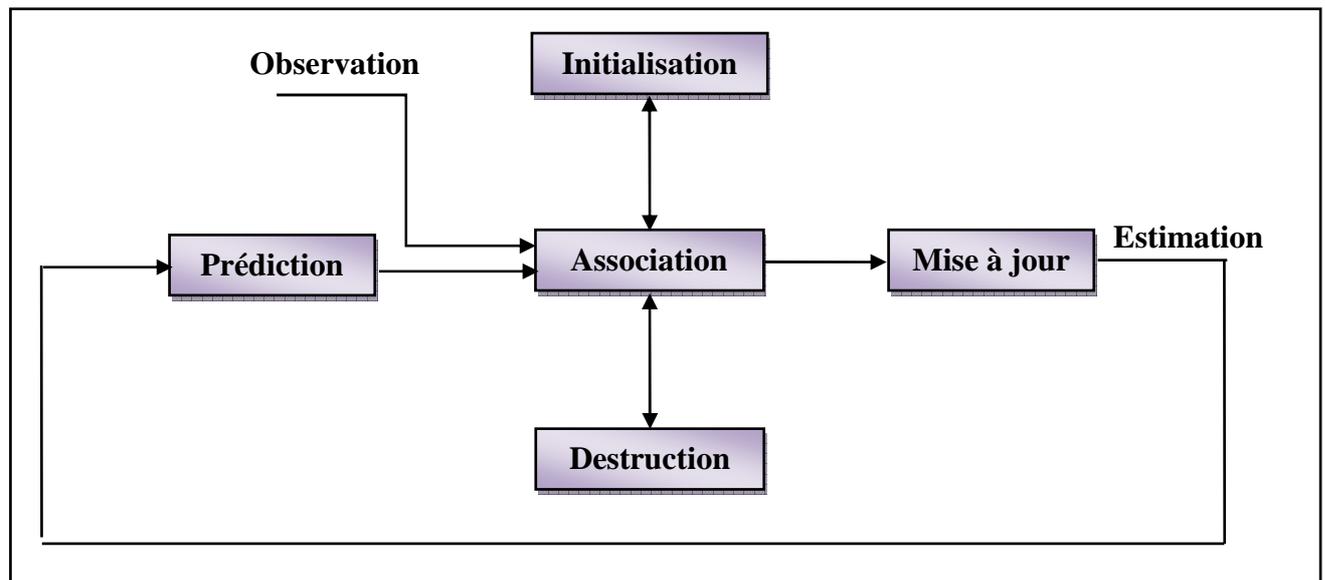


Fig. I.2 Le module de pistage

### I.3 Les cibles

Selon la manoeuvrabilité des cibles on peut distinguer deux types de cibles (Fig. I.3):

- Cibles non manoeuvrantes.
- Cibles manoeuvrantes.

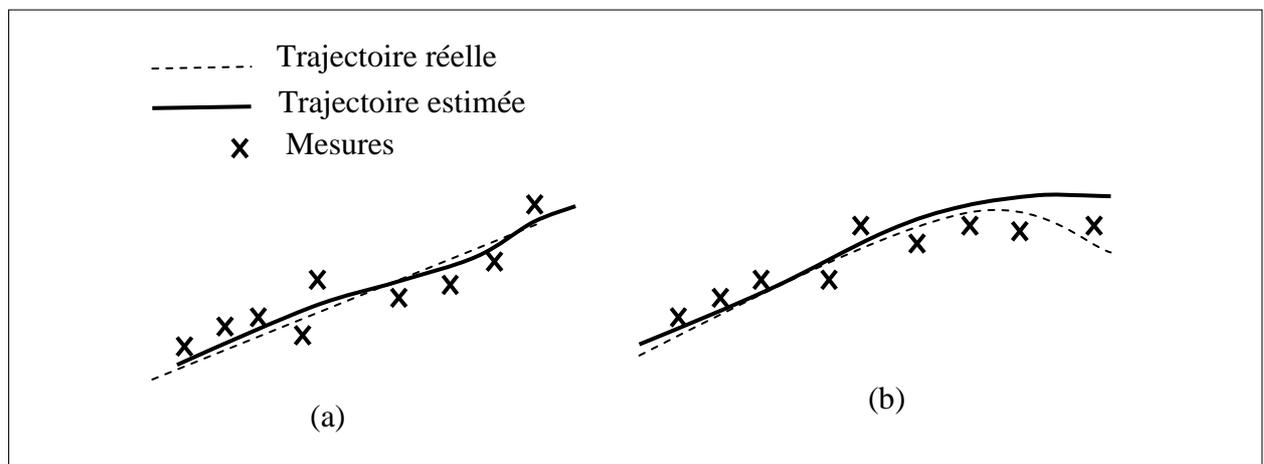


Fig. I.3 Cible (a) non manoeuvrante (b) manoeuvrante

#### I.3.1 Cas de cibles non manoeuvrantes

Dans les cas de cibles non manoeuvrantes, par exemple des avions de l'aviation civile volant suivant des trajectoires rectilignes, le système peut être décrit par l'équation :  $dx_t = Fx_t dt + Gdv_t$

Où  $\{x_t\}$  désigne le processus état du mobile (typiquement position, vitesse, ... de son centre de gravité) et  $\{v_t\}$  un bruit d'état. Les mesures  $z_t$  (capteurs radar, infrarouge,...) servent à estimer  $x$  par l'espérance conditionnelle  $\hat{x} = x_t | z_t$  qui minimise l'erreur quadratique moyenne  $E\{\hat{x}_t^T \hat{x}_t | z_t\}$  avec  $\hat{x}_t = x_t - \hat{x}_t$ . Un filtre de Kalman classique suffit pour effectuer la poursuite de telles cibles.

### I.3.2 Cas de cibles manoeuvrantes

Dans le cas de cibles manoeuvrantes, l'accélération du mobile comporte, en plus des fluctuations autour d'une moyenne nulle, une partie quasi discontinue et non linéaire correspondant aux manoeuvres commandées par le pilote. L'apparition soudaine de ce terme commandé appelle une augmentation de la bande passante du pisteur afin de ne pas laisser croître l'erreur, qui peut induire un traînage et risquer de décrocher. Le modèle doit alors être complété par un terme discret :  $dx_t = Fx_t dt + Gdv_t + b_j(x_t)d\phi_t$ , où  $\phi$  est un processus ponctuel (sauf  $d\phi_t = 0$  aux instants de manoeuvres) et  $b_{\phi x}(t)$  relie les sauts de  $\phi$  aux manoeuvres considérées.

Dans ces conditions, un filtre de Kalman classique est insuffisant, on doit faire alors appel à des dispositifs de détection de manoeuvres incorporés dans le système de poursuite pour pouvoir suivre avec précision les trajectoires des cibles. La description de ces dispositifs fait l'objet des paragraphes suivants.

### I.4 Détecteur de manoeuvres

La poursuite des cibles manoeuvrantes est un thème abordé fréquemment dans le domaine militaire. En effet, la majorité des systèmes tactiques nécessite la poursuite de cibles manoeuvrantes tels que les avions, les bateaux, les missiles ou les sous-marins. De même dans le domaine civil, les systèmes de contrôle et de surveillance aériens nécessitent la mise au point de «traqueurs» performants.

La manoeuvre se traduit par une accélération de la cible qui engendre une augmentation des erreurs de prédiction et de filtrage. Si ces erreurs sont trop grandes, le processus de corrélation devient incertain et la probabilité de perdre la cible devient importante. L'utilisation d'un détecteur de manoeuvre est indispensable pour minimiser les erreurs d'estimation des paramètres d'état des pistes et par conséquent assurer une bonne qualité de poursuite des cibles en phase de manoeuvre.

Un détecteur de manoeuvre est en général suivi d'une fonction d'adaptation des paramètres du filtre de poursuite à la manoeuvre détectée. Parfois, ces deux fonctions peuvent être confondues en un seul bloc, comme le représente la figure I.4 :

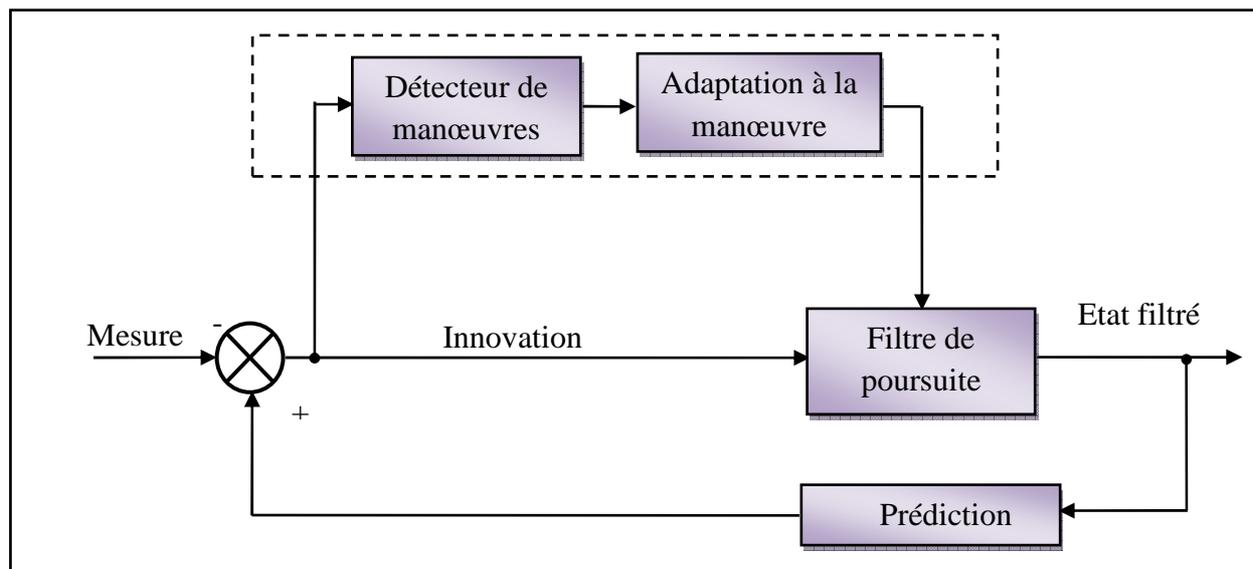


Fig. I.4 Processus de filtrage en présence d'un détecteur de manœuvre

#### I.4.1 Techniques de détection de manœuvres

La plupart des techniques de détection de manœuvre sont basées sur le traitement de l'innovation  $\tilde{z}(k)$ , donnée par l'équation :  $\tilde{z}(k+1) = z(k+1) - H \hat{x}(k+1/k)$

C'est une variable aléatoire gaussienne, de moyenne nulle et de matrice de covariance  $P(k)$ , donnée par :  $P(k) = H P(k/k-1)H^T + R$ .

En présence d'une manœuvre, un biais s'ajoute à la moyenne de l'innovation qui perd ainsi ses caractéristiques statistiques.

Pour déterminer automatiquement le début et la fin d'une manœuvre, plusieurs techniques ont été développées telles que :

- La technique de la fenêtre glissante, qui exploite les changements des caractéristiques statistiques de l'innovation en présence de la manœuvre (ajout d'un biais à sa moyenne), pour décider s'il y a manœuvre ou non. La sommation de l'innovation  $\tilde{z}(k)$  sur toute la longueur  $L$  de la fenêtre est définie par :

$$D_L(k) = \sum_{i=k-L+1}^k \tilde{z}(i) \quad \left| \begin{array}{l} \text{oui} \\ > \eta \\ < \eta \\ \text{non} \end{array} \right.$$

La statistique  $D_L(k)$  est une variable aléatoire gaussienne.

- La technique basée sur le test du signe de l'innovation, où on exploite le signe de l'innovation pendant quelques périodes de balayage du radar, pour affirmer la présence d'une manœuvre.

La sommation du signe est définie par :

$$B_{mk}(k) = \sum_{i=0}^{m-1} I(k-i) \quad \left| \begin{array}{l} \text{oui} \\ > \quad \eta \\ < \\ \text{non} \end{array} \right.$$

Avec  $m$  la longueur de la fenêtre utilisée et la statistique est une variable aléatoire de distribution binomiale.

- La technique basée sur le test de l'erreur quadratique normalisée, elle est donnée par :

$$\rho(k) = \tilde{z}^T(k) P^{-1}(k) \tilde{z}(k) \quad \left| \begin{array}{l} \text{oui} \\ > \quad \eta \sum_{i=0}^{m-1} I(k-i) \\ < \\ \text{non} \end{array} \right.$$

avec  $\rho(k)$  est une variable aléatoire, de loi de probabilité Chi-Deux avec  $n_z$  (dimension du vecteur mesure) degrés de liberté.

Dés que la valeur de la statistique évaluée dépasse le seuil, cela confirme la présence d'une manœuvre. Le seuil est déterminé en fonction de la probabilité de fausses alarmes admise, il peut être tiré à partir des références standards des distributions de la statistique correspondante. Toutefois, ces techniques de détection de manœuvre sont très limitées, elles engendrent des retards de détection qui peuvent causer la perte de la cible. Elles sont faciles à implémenter, mais elles nécessitent souvent une fonction d'adaptation des paramètres du filtre pour former un détecteur efficace.

- Techniques basées sur l'estimation de l'accélération, lors de l'utilisation d'un filtre de poursuite linéaire, la séquence de l'innovation contient en plus de la composante habituelle du bruit due aux erreurs de filtrage, la composante déterministe de l'accélération qui est l'erreur du système. Dans le but de réduire cette dernière, l'estimation de l'accélération s'avère nécessaire.

Certains algorithmes utilisent un test d'hypothèses pour évaluer l'accélération  $\gamma$ . Si on considère le retard de détection, l'évaluation de  $\gamma$  et de  $t_0$  est obtenue par la résolution d'un problème

combiné de l'estimation et de la détection. Cette méthode nécessite l'utilisation d'un banc de filtres (excités par l'innovation) dont chacun est paramétré par un couple  $(\gamma, t_0)$  pour le rendre adapté à un type de manœuvre.

Le filtre qui représente la sortie la plus importante nous permet de tirer les caractéristiques correspondantes de la manœuvre  $(\gamma, t_0)$  qui sont utilisées pour la correction du vecteur d'état. L'inconvénient majeur de cette méthode, est qu'elle nécessite l'évaluation des sorties de tous les filtres du banc utilisé, ce qui implique un temps de calcul énorme.

Il existe aussi une méthode de l'estimation de l'accélération basée sur le critère de minimisation quadratique de l'innovation, l'estimation s'effectue sans tenir compte des valeurs précédentes de l'accélération, ce qui nécessite un large temps de calcul en plus de la nécessité de ressources mémoires pour le stockage de quelques paramètres.

Une nouvelle méthode d'estimation basée sur la minimisation de la covariance de l'estimation a vu le jour. C'est une méthode récursive qui permet l'estimation de l'accélération à chaque instant, qui sera utilisée pour corriger l'état prédit et filtré. Cette méthode assure de bonnes performances lors de la poursuite des cibles manœuvrantes, et présente l'avantage de la facilité d'implémentation vu son caractère récursif.

Ces méthodes de détection de manœuvre basées sur l'estimation de l'accélération sont très intéressantes lors de l'utilisation des filtres  $\alpha\beta$ , elles permettent en plus de la détection, une adaptation du filtre pour diminuer les erreurs du système causées par la manœuvre. Par ailleurs, lors du choix d'une méthode, on doit tenir compte de son temps de calcul et de sa complexité d'implémentation.

## **I.4.2 Adaptation à la manœuvre**

Une fois qu'une manœuvre est signalée par le détecteur, une adaptation est nécessaire pour les paramètres du filtre, elle s'effectue selon le modèle adopté du mouvement de la cible et a pour but de réduire les erreurs de prédiction et d'estimation de l'état de la cible (position et vitesse).

L'accélération peut être modélisée par une variable aléatoire ou déterministe, pour cela quatre grandes approches sont proposées pour adapter les paramètres du filtre de poursuite à la nouvelle situation (présence de manœuvre).

### **I.4.2.1 Approche basée sur le changement des paramètres de poursuite**

Pour cette approche, l'accélération est considérée comme un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de covariance  $Q$ , qui perturbe le mouvement des cibles considéré uniforme (vitesse constante). Son principe est basé sur l'utilisation de plusieurs fenêtres de corrélation, dont la

---

dimension correspond à un degré de manœuvrabilité (fig. I.5). Les paramètres de filtre de poursuite sont ajustés en fonction des paramètres statistiques de l'accélération (moyenne et covariance  $Q$ ) correspondants à la fenêtre dans laquelle le plot radar associé est situé.

Si l'on considère que l'accélération est un bruit blanc, en l'absence de manœuvre le bruit est supposé au niveau  $Q_1$ . Une fois que la manœuvre est détectée on augmente le niveau de bruit passant ainsi à  $Q_2$ . Le processus similaire peut être utilisé pour diminuer le niveau de bruit à la fin de la manœuvre.

Cette méthode peut être généralisée pour plusieurs niveaux de bruit. Ce type d'adaptation rend le filtre capable de suivre la cible dans la phase de manœuvre, la moyenne de l'innovation diminue et tend vers zéro mais sa variance augmente.

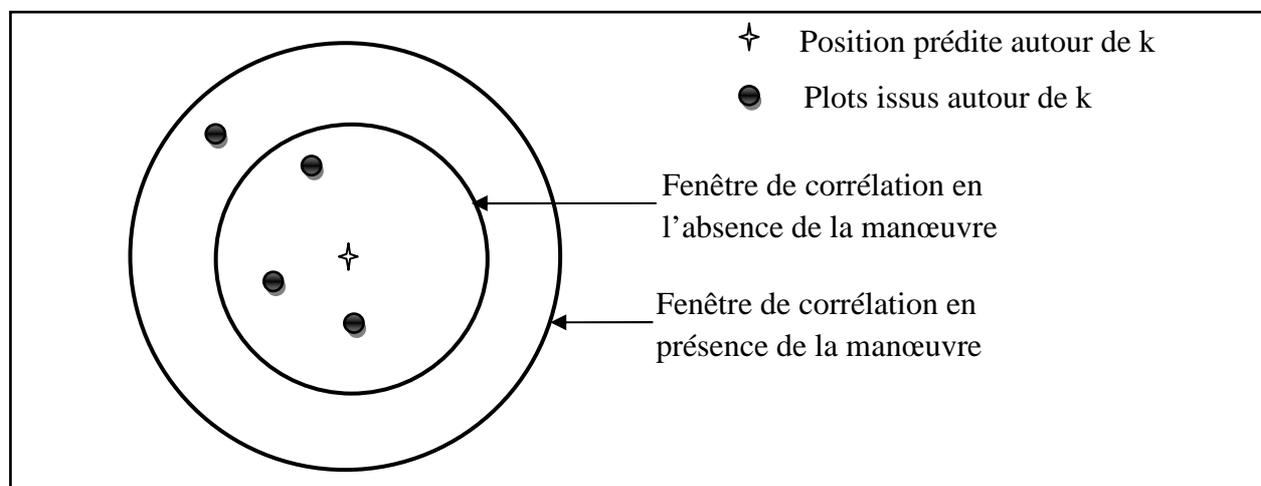


Fig. I.5 Adaptation des dimensions de la fenêtre de corrélation

#### **I.4.2.2 Approche basée sur le changement de la dimension du modèle**

Dans le cas général, la trajectoire des objectifs est considérée rectiligne et le modèle d'état considère que la vitesse est constante. Si une manœuvre est détectée, un deuxième modèle d'état est utilisé qui prend en considération l'accélération en plus de la position et de la vitesse. Pour remédier au problème de retard de détection, un historique des états est utilisé pour initialiser le deuxième modèle. Une fois que le vecteur d'état est modifié, le processus de filtrage recommence à partir de l'instant  $k-s$ , comme le montre la figure (I.6).

L'approche basée sur le changement de l'ordre du modèle d'état, permet une bonne poursuite des cibles en phase de manœuvres, et elle n'est pas très sensible au retard de détection. Son inconvénient majeur est la nécessité de mémorisation d'un nombre de paramètres important, et un large temps de calcul spécialement à l'instant de la détection de la manœuvre.

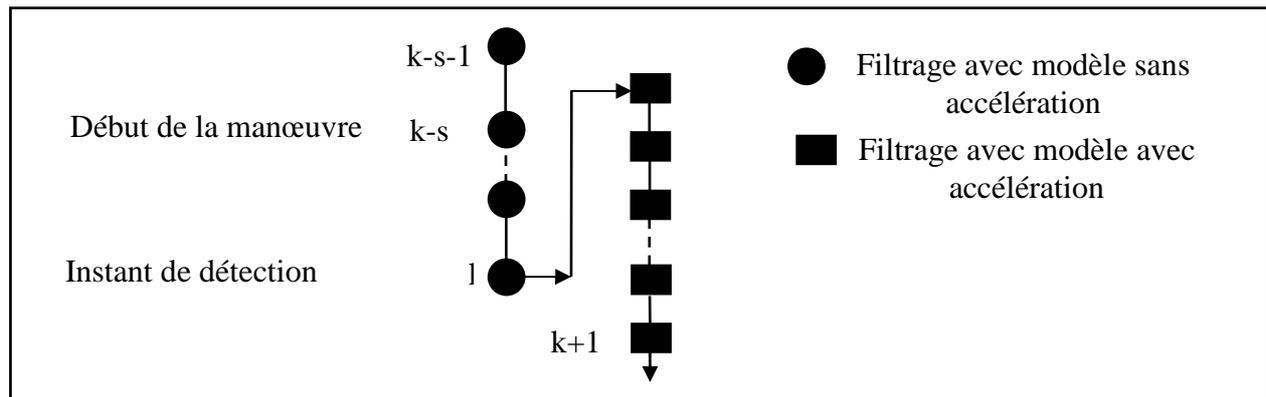


Fig. I.6 : Filtrage avec changement de la dimension du filtre

#### I.4.2.3 Approche basée sur l'estimation de l'accélération :

Pour cette approche, l'accélération est considérée comme un terme additif déterministe. Son estimation s'effectue en utilisant la séquence de l'innovation  $\{\tilde{z}(1), \tilde{z}(2), \dots, \tilde{z}(k)\}$ .

Une fois l'accélération estimée, elle est utilisée pour corriger les estimations d'état. Cette méthode d'adaptation donne de bons résultats, mais nécessite un grand espace mémoire ainsi qu'un énorme temps de calcul. Ceci est dû au fait qu'elle estime l'accélération d'une façon non récursive.

#### I.4.2.4 Approche à Modèles Multiples

L'approche à Modèle Multiple (MM), que nous développerons dans le troisième chapitre, consiste à considérer que le système ne peut obéir qu'à un nombre fini de modèles distincts. De tels systèmes sont dits hybrides puisqu'ils ont à la fois des incertitudes sur l'état et des incertitudes sur le modèle. Cette approche peut se diviser en deux grandes approches qui sont :

##### ● Approche à modèle fixe

Une fois que les filtres sont initialisés avec la première mesure, ils fonctionnent récursivement sur leurs propres estimés, l'état estimé global est une combinaison linéaire de ces derniers comme le montre la figure (I.7).

Cette approche est valide si le modèle du système ne change pas durant la période en question. Elle ne l'est plus si à un moment donné la cible manœuvre ou si le modèle de la cible ne se trouve pas parmi les candidats.

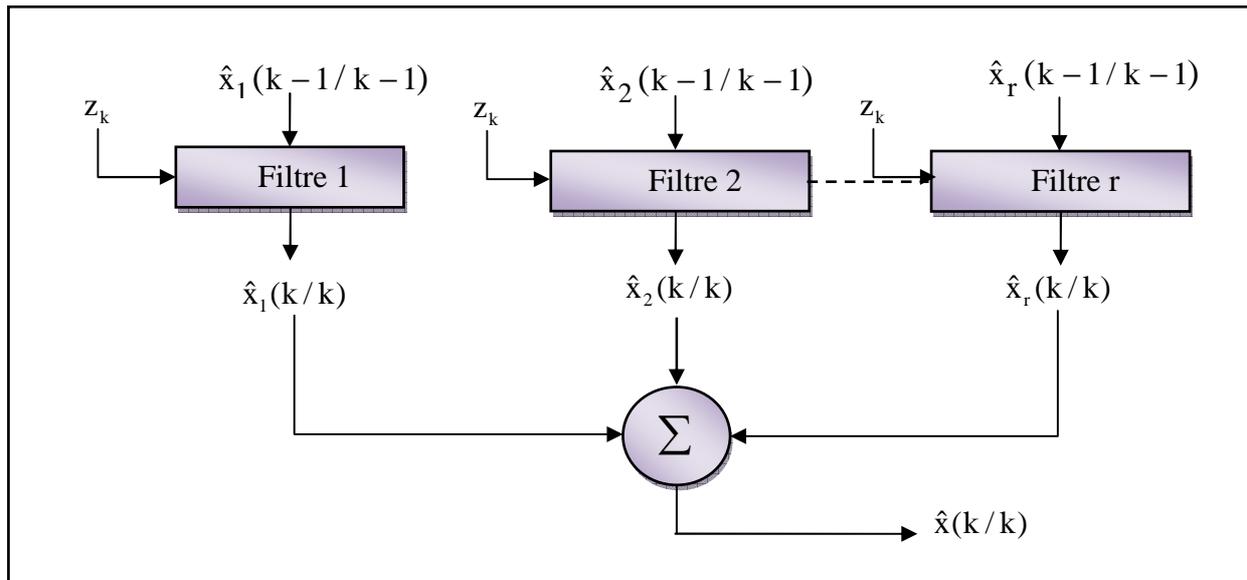


Fig. I.7 Schéma bloc d'un système MM

### ● Approche à changement de modèle

Pour s'affranchir de la première hypothèse, on peut estimer l'état de la cible pour toutes les suites possibles de modèles. Supposons que l'on ait  $m$  modèles durant  $k$  échantillons, il faut calculer un estimé de l'état pour les  $m^k$  historiques de modèles possibles. Le problème de cette approche est qu'elle induit une croissance exponentielle du nombre d'historiques à considérer. Et pour remédier à ce problème, on opte pour l'utilisation des techniques sous optimales (Pseudo-Bayésiennes Généralisées, Modèle Multiple Interactifs illustré dans la figure (I.8).

Ces algorithmes sous optimaux ne nécessitent pas l'étape de détection de la manœuvre, mais pour couvrir toutes les manœuvres probables, il leur faut un grand nombre de filtres différents. Ces approches demandent une connaissance à priori sur les manœuvres de la cible,

elles fonctionnent relativement bien tant que les manœuvres obéissent aux hypothèses énoncées, mais leurs performances sont gravement diminuées dès que la cible effectue une manœuvre dont les caractéristiques n'ont pas été prévues

Cependant, lors de la poursuite de plusieurs cibles à la fois ou poursuite d'une cible se trouvant dans un environnement qui contient des fausses alarmes, une autre opération doit être également effectuée par le système de poursuite, à savoir l'association des différentes données ou mesures reçues des différentes cibles traquées.

Dans la mesure où il n'existe pas d'opération d'association universelle qui traite tous les problèmes relevant de l'association, on trouve dans la littérature plusieurs approches gérant les données provenant de plusieurs cibles. Parmi elles, l'approche probabiliste qui est

traditionnellement utilisée pour modéliser l'incertitude et repose sur des bases théoriques connues depuis longtemps

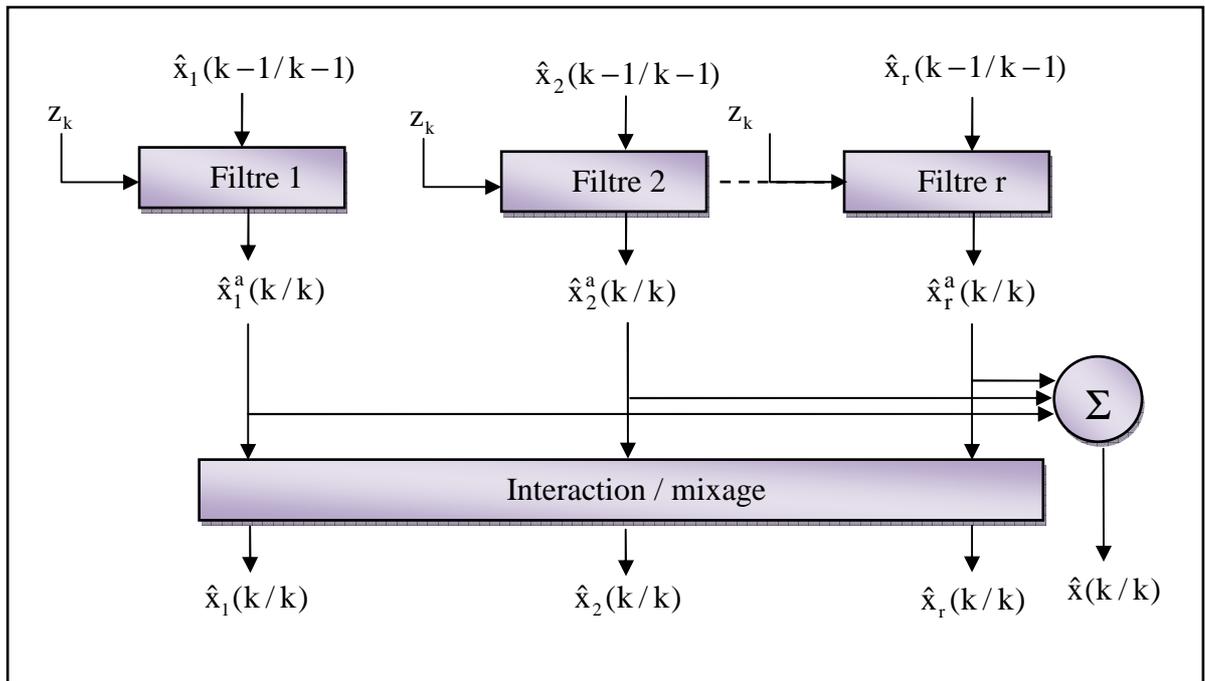


Fig. I.8 : Schéma bloc du système à Modèles Multiples Interactif

### I.5 Description d'un système de poursuite multicibles

#### I.5.1 Description

La figure I.9 illustre les différents composants d'un système de poursuite multicibles :

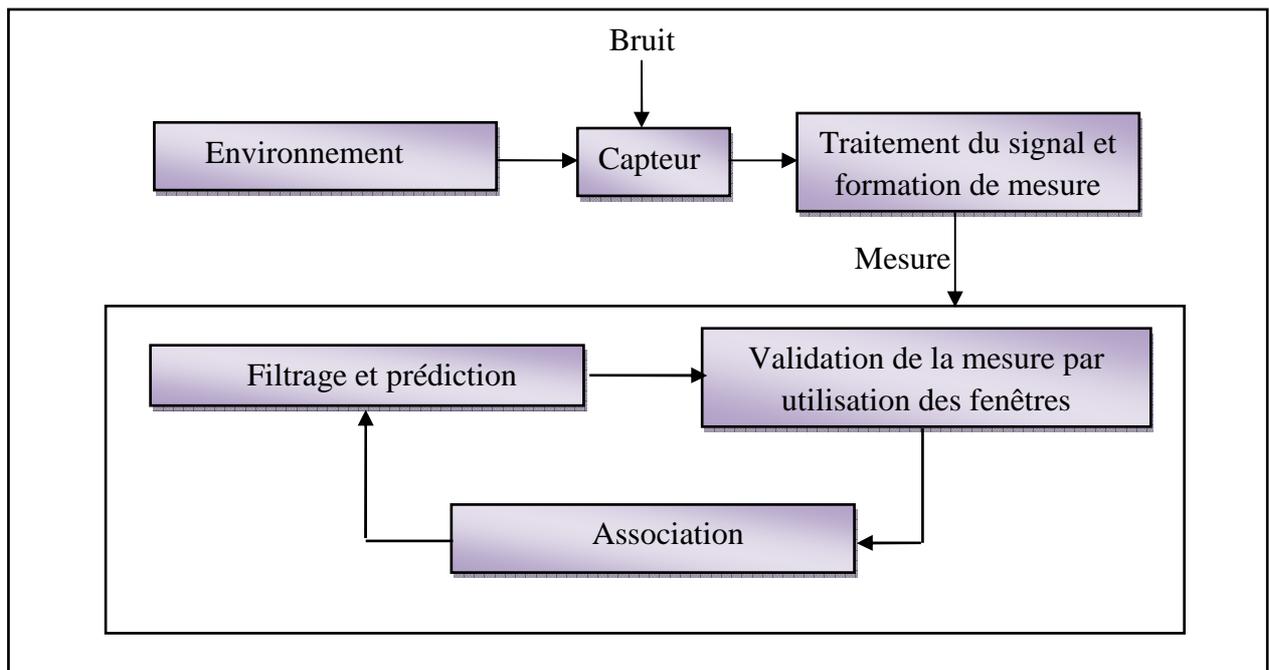


Fig. I.9 Schéma synoptique d'un algorithme classique de poursuite

Les algorithmes de poursuite cherchent en général à maintenir une liste de pistes, c'est-à-dire une liste de cibles en cours de poursuite.

Le processus se déroule comme suit :

L'information est reçue par un capteur, les incertitudes de ce dernier en plus des facteurs perturbateurs extérieurs sont modélisées comme un bruit additif. Le signal récupéré de ce capteur sera traité pour une éventuelle conversion de mesures, qui deviendront les données d'entrée du système de poursuite. Lorsqu'une nouvelle série de mesures est disponible, la première tâche à réaliser est d'associer ces dernières aux pistes maintenues.

Cela passe généralement par trois phases :

1. La première est une phase de fenêtrage, qui a pour but de simplifier la phase d'association, telle qu'une observation issue d'un capteur pourra être considérée comme une information provenant de la cible d'intérêt, si sa distance par rapport à l'état prédit de l'objet est inférieure à un seuil donné. La fenêtre de validation doit être suffisamment grande pour qu'une observation provenant d'une cible s'y trouve et suffisamment petite pour pouvoir filtrer efficacement les observations indésirables.
2. La deuxième est une phase d'association des mesures retenues (valides), par la phase de fenêtrage, avec les pistes existantes. Plusieurs techniques ou approches peuvent être utilisées pour résoudre ce problème seront présentées dans le chapitre quatre.

Après la phase d'association, la dernière phase qui est celle du maintien des pistes qui consiste à décider si nous devons :

- Créer de nouvelles pistes, si un nouvel objet non encore poursuivi est entré dans le champ de vue du capteur.
- Ignorer d'anciennes pistes, si des objets poursuivis ont disparu du champ de vue du capteur.
- Maintenir une piste existante, selon qu'une nouvelle observation lui a été attribuée ou non.

Les deux dernières phases à savoir association de la piste avec l'observation et maintien des pistes, sont spécifiques à la poursuite multicibles, et sont généralement résumées sous le terme d'association de données.

La dernière étape est celle du filtrage qui n'est pas spécifique à la poursuite multicibles, puisqu'elle consiste en la mise à jour et en la prédiction de l'état de chaque piste. Ceci est généralement fait à l'aide d'une des variantes du filtre de Kalman, ou plus récemment à l'aide du filtre à particules.

---

### **I.5.2 Validation des mesures**

Généralement dans des applications de poursuite, après exécution du procédé de détection du signal de mesure, il y a un procédé qui trie les mesures et choisit celles qui seront incorporées dans l'estimateur d'état. Une fenêtre est introduite et seules les détections à l'intérieur de cette fenêtre peuvent être associées à la cible d'intérêt. Ceci est réalisé pour éviter d'assigner les mesures dans tout l'espace de mesure du capteur. Cela permet ainsi, d'une part d'éviter des calculs inutiles par les fonctions d'association et d'autre part de décider si une observation appartient à une piste déjà établie ou à une nouvelle.

Le fenêtrage est effectué pour chaque piste et à chaque instant par la définition d'une zone de surveillance appelé fenêtre (ou région d'intérêt).

L'ensemble des mesures présentes dans cette région, sont sélectionnées pour l'association, les autres sont ignorées. La taille de la fenêtre influe sur le nombre de mesures valides. si nous choisissons une fenêtre trop petite, alors la probabilité d'éliminer la mesure provenant de la cible augmente, ce qui peut provoquer la perte de la piste. Au contraire, si la taille est trop grande, un grand nombre de mesure ne provenant pas de la piste est utilisé, cela tend à augmenter les calculs et à détériorer la précision du pistage.

Le fenêtrage est un essai brut qui permet de classifier l'observation selon l'une des catégories suivante :

- Candidate pour la mise à jour d'une poursuite : l'observation peut satisfaire la fenêtre d'une ou plusieurs pistes existantes. Dans ce cas l'observation devient candidate pour une association avec ces pistes. Notons aussi que plus d'une observation peuvent satisfaire la fenêtre néanmoins l'observation peut ne pas être utilisée pour la mise à jour de la poursuite, même si la fenêtre est satisfaite.
- Observation initiale pour le déclenchement d'une nouvelle poursuite : l'observation peut ne pas satisfaire la fenêtre d'aucune piste existante, dans ce cas elle devient une candidate immédiate pour le déclenchement d'une nouvelle poursuite de cible, ou considérer comme étant une observation indésirable.

### **I.6 Problèmes d'association de pistes**

La principale difficulté de la poursuite multi-cible, vient du fait que nous ne savons pas associer à priori une observation provenant d'un capteur à une cible présente dans le volume d'observation de ce dernier. Cette difficulté se voit accentuée si nous considérons que le capteur peut générer des fausses alarmes, c'est-à-dire des observations ne correspondant à aucun objet existant, et que l'on ne connaît pas le nombre d'objets présent dans le volume d'observations, et si ce nombre peut

---

évoluer au cours du temps. D'où l'application du fenêtrage qui est la première phase de résolution d'un problème d'assignement des différentes observations avec leurs pistes respectives, cependant d'autres techniques sont requises dans le cas où une observation se trouve à l'intérieur de plusieurs fenêtres de cibles poursuivies. La figure (I.10) illustre une situation typique où un conflit d'assignement se produit.

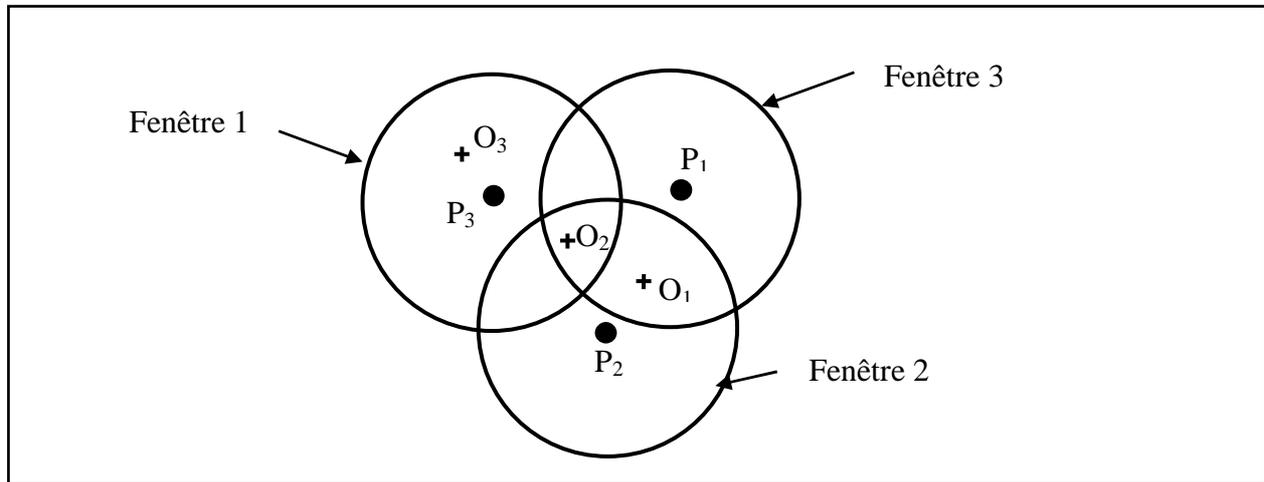


Fig. I.10 Exemple de situation de conflit dans un problème de poursuite

Dans cette figure,  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  représentent les positions des observations effectuées à l'aide de capteur,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  les positions prédites par le système de poursuite et correspondant à trois trajectoires. Les fenêtres sont représentées à l'aide de cercles centrés sur ces prédictions. On remarque que l'observation  $O_3$  est située uniquement à l'intérieur de la fenêtre correspondant à la trajectoire N°3 et que de ce fait, il n'a aucune situation de conflit. Par contre, l'observation  $O_1$  est située simultanément dans les fenêtres des trajectoires N°1 et N°2, alors que l'observation  $O_2$  est située simultanément à l'intérieur des trois fenêtres, ce qui représente dans les deux cas une situation conflictuelle.

## **I.7 Catégories d'association de données**

### **I.7.1 Mesure à mesure (déclenchement de la poursuite)**

Cette catégorie d'association est utilisée pour former de nouvelles tentatives de poursuites dans le cas où il y a des observations non assignées aux pistes existantes. L'objectif de l'opération d'initiation est de confirmer la détection d'une nouvelle cible se trouvant à l'intérieur du champ de couverture du capteur et permettant ainsi d'identifier les observations indésirables (clutter).

### **I.7.2 Mesure à une piste (mise à jour et maintien de la poursuite)**

Cette opération consiste à associer à une piste donnée, une seule observation reçue parmi d'autres à un instant donné. Pour effectuer cette opération, l'utilisation d'une fenêtre générée autour de l'état

prédit est nécessaire, et seules les observations se trouvant à l'intérieur de la région formée par les différentes fenêtres des pistes existantes, seront prises en considération pour en sélectionner une seule piste existante, qui servira de mesure pour actualiser la piste correspondante.

### **I.7.3 Poursuite à poursuite (fusionnement de poursuite)**

Le problème de l'association d'une poursuite à une poursuite, surgit dans le cas d'un système doté d'un réseau de capteurs où chaque capteur dispose de son propre système de traitement de l'information et de son propre ensemble de cibles lors de la poursuite.

## **I.8 Conclusion**

Ce chapitre a été consacré à des généralités sur la poursuite des cibles, nous avons commencé par une définition de la poursuite, ensuite nous avons décrit les types de cibles en détaillant le détecteur de manœuvres où nous avons donné un ensemble d'approches d'adaptation des paramètres du filtre de poursuite, en dernier point nous avons parlé d'une autre technique de poursuite qui est l'association de données utilisée lorsque l'espace représente des fausses alarmes.

---

---

## II LES FILTRES DE POURSUITE

---

### II.1 Introduction

L'émergence des modèles dynamiques à facteurs ou à variables cachées est relativement récente dans la recherche empirique. Les modèles dynamiques à facteurs linéaires ou modèles espace-état en constituent une classe particulière.

Il est donc nécessaire de trouver des techniques pour pouvoir contrôler le mouvement de ces systèmes dynamiques, le filtrage étant considéré comme la solution de cette problématique.

Le filtrage est une description mathématique des opérations de traitement que subit un signal mélangé au bruit. Son principe est de déterminer des estimateurs de variables du système lorsque l'environnement présente des perturbations aléatoires. Il consiste à estimer de façon récursive un état caché au vu d'observations.

Le domaine d'application principal est la localisation, la navigation et la poursuite de mobiles, dans le domaine militaire et aussi en robotique mobile, ou il s'agit de combiner un modèle à priori de déplacement du mobile à des mesures issues de capteurs.

Un filtre de poursuite effectue les deux fonctions qui sont l'estimation de l'état de la cible, et la prédiction de son état futur en se basant sur la dynamique de son mouvement.

Plusieurs filtres ont été développés, nous pouvons citer comme exemple le filtre  $\alpha\beta$ , le filtre de Kalman, qui sont les plus utilisés dans la poursuite radar, et le filtre particulaire qui s'avère plus sophistiqué.

Ce chapitre a pour but de donner quelques généralités sur le filtre  $\alpha\beta$  ainsi que le filtre particulaire, et une étude détaillée du filtre de Kalman que nous utiliserons dans notre simulation.

### II.2 Le filtre $\alpha/\beta$

Le filtre  $\alpha/\beta$  est un algorithme à base des équations du filtre de Kalman. Des simplifications ont été apportées à ce dernier pour faciliter davantage son implémentation sur machine et réduire le temps de calcul. Dans ce type de filtres, les gains de position et de vitesse qui sont respectivement  $\alpha$  et  $\beta/T$  sont constants, ce qui réduit énormément les calculs. Ces deux paramètres doivent être fixés pour avoir une grande efficacité en terme de filtrage de bruit, d'assurer une réponse rapide pendant les déplacements brusques de la cible, et d'assurer la stabilité du filtre.

---

Le filtre de poursuite fondé sur l'hypothèse de vitesse constante désigné sous le nom de traqueur  $\alpha/\beta$ , fonctionne est représenté à l'aide des deux équations :

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + \alpha(z(k) - \hat{x}(k|k-1))$$

$$\hat{v}(k|k) = \hat{v}(k|k-1) + \left( \frac{\beta}{t_k - t_{k-1}} \right) (z(k) - \hat{x}(k|k-1))$$

Où  $z(k)$  est la mesure à l'instant  $k$  de la position de la cible. Le traqueur  $\alpha/\beta$ , reçoit son nom des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  qui sont utilisés comme des facteurs de pondération pour faire les mises à jour. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont nuls, alors le système se fonde purement sur les prédictions fournies par le modèle dynamique inclus dans le système. Réciproquement, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont égaux à 1, alors le système ignore le modèle dynamique du système, et compte uniquement sur la dernière mesure. Ainsi, en ajustant  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut réduire l'erreur entre la trajectoire réelle et la trajectoire estimée par le filtre. La poursuite des cibles à l'aide du filtre  $\alpha/\beta$ , suppose des trajectoires rectilignes et uniformes (sans accélération).

La figure (II.1) montre un schéma d'implémentation du filtre à une dimension.

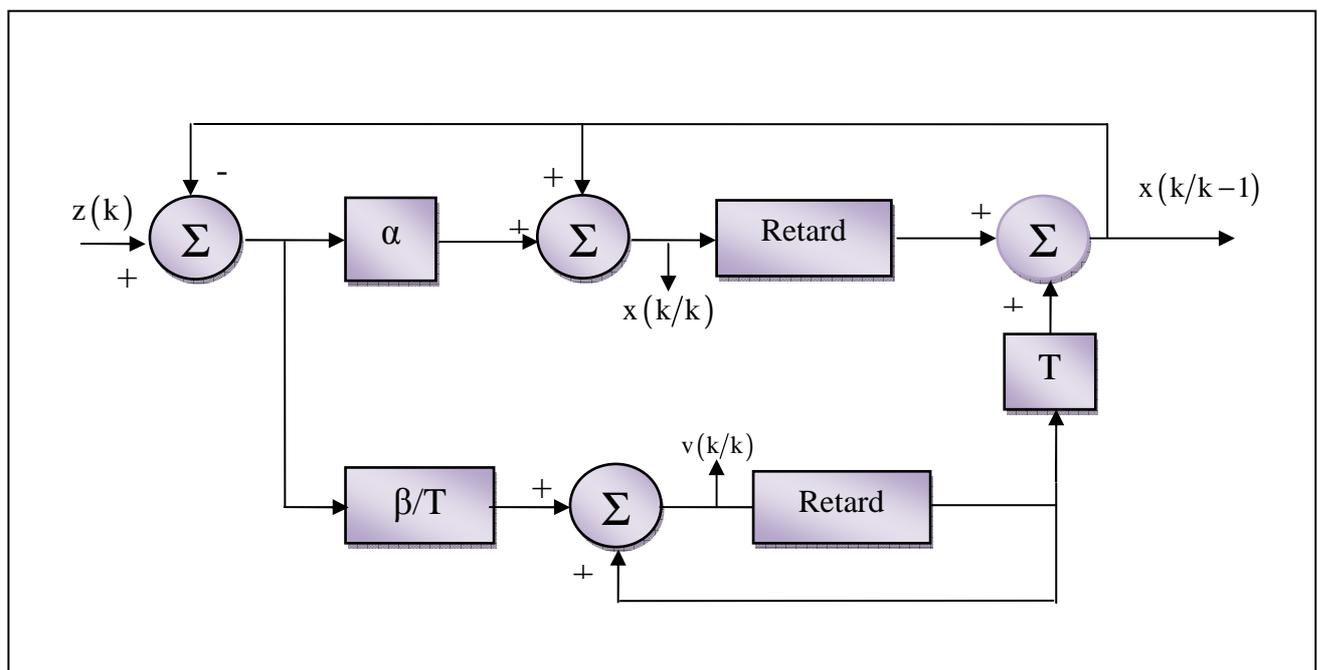


Fig. II.1 Schéma d'implémentation du filtre  $\alpha/\beta$  à une dimension

### II.3 Le filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est utilisé dans une large gamme de domaines technologiques (radar, vision électronique, communication ...). C'est un thème majeur de l'automatique et du traitement du signal. Un exemple d'utilisation peut être la mise à disposition, en continu, d'informations telles que la

position ou la vitesse d'un objet à partir d'une série d'observations relative à sa position, incluant éventuellement des erreurs de mesures.

Par exemple, pour le cas des radars où l'on désire suivre une cible, des données sur sa position, sa vitesse et son accélération sont mesurées à chaque instant mais avec énormément de perturbations dues au bruit ou aux erreurs de mesure. Le filtre de Kalman fait appel à la dynamique de la cible qui définit son évolution dans le temps pour obtenir de meilleures données, éliminant ainsi l'effet du bruit. Ces données peuvent être calculées pour l'instant présent (filtrage), dans le passé (lissage), ou sur un horizon futur (prédiction).

Le filtrage de Kalman est aussi de plus en plus utilisé en dehors du domaine du traitement du signal, par exemple en météorologie et en océanographie, pour l'assimilation de données dans un modèle numérique, en finance ou en navigation et il est même utilisé dans l'estimation des états de trafic routier.

Le filtre de Kalman doit son nom à Rudolf Kalman bien que Thorvald Nicolai Thiele et Peter Swerling aient développé un algorithme similaire avant lui. La paternité du filtre fait l'objet d'une petite controverse dans la communauté scientifique. Le filtre a été décrit dans diverses publications par Swerling (1958), Kalman (1960) et Kalman-Bucy (1961). Stanley Schmidt est reconnu comme ayant réalisé la première implémentation du filtre. C'était lors d'une visite de Rudolf Kalman au NASA Ames Research Center, là où il vit le potentiel de son filtre pour l'estimation de la trajectoire pour le programme Apollo. Ceci conduisit à l'utilisation du filtre dans l'ordinateur de navigation.

Une grande variété de filtres de Kalman ont été, depuis, développés à partir de la formulation originale dite filtre de Kalman simple. Schmidt développa le filtre de Kalman étendu, Bierman, Thornton et bien d'autres développèrent toute une gamme de filtres racine carré. Le filtre le plus utilisé est vraisemblablement la phase-locked loop, largement répandue dans les radios, ordinateurs, équipement de communication, etc.

Le filtre de Kalman est un estimateur récursif. Cela signifie que pour estimer l'état courant, seul l'état précédent et les mesures actuelles sont nécessaires. L'historique des observations et des estimations n'est ainsi pas requis.

Le filtre de Kalman a deux phases distinctes : Prédiction et Mise à jour. La phase de prédiction utilise l'état estimé de l'instant précédent pour produire une estimation de l'état courant. Dans l'étape de mise à jour, les observations de l'instant courant sont utilisées pour corriger l'état prédit dans le but d'obtenir une estimation plus précise.

---

### II.3.1 Le filtre de Kalman discret

#### II.3.1.1 Le processus d'estimation

Le filtre de Kalman pose le problème général de l'essai d'estimation de l'état  $x \in \mathbb{R}^n$  d'un processus commandé par temps discret qui est régi par l'équation de différence stochastique linéaire :

$$x_k = F x_{k-1} + G w_{k-1} \quad \text{II.1}$$

Avec la mesure  $z \in \mathbb{R}^n$  qui est :

$$z_k = H x_k + v_k \quad \text{II.2}$$

Les variables aléatoires  $w_k$  et  $v_k$  représentent respectivement le bruit d'état et de mesure. Nous admettons qu'ils sont indépendants l'un de l'autre, blanc, et avec des probabilités de distributions normales :

$$P(w) \approx N(0, Q) \quad \text{II.3}$$

$$P(v) \approx N(0, R) \quad \text{II.4}$$

Dans la pratique, la covariance de bruit  $Q$  et la matrice de processus de covariance de bruit de mesure  $R$  pourraient changer avec l'état ou la mesure, toutefois ici nous les admettons constantes.

La matrice  $F(k)$  de dimensions  $n \times n$  dans l'équation de différence (II.1) relie l'état de l'étape précédente de temps  $k-1$  à l'état de l'étape courante  $k$ , en l'absence d'une fonction de commande ou de bruit d'état. Notons que dans la pratique  $F(k)$  pourrait changer avec chaque période de temps, mais nous supposons qu'elle est constante.

La matrice  $H(k)$  de dimensions  $m \times n$  dans l'équation de mesure (II.2) relie l'état à la mesure  $z(k)$ . Elle pourrait changer en pratique chaque fois avec l'état ou la mesure, mais nous la considérons également constante.

#### II.3.1.2 Les origines de calcul du filtre

Nous définissons  $\hat{x}^-(k) \in \mathbb{R}^n$  pour être notre estimation d'état à priori à l'étape  $k$  connaissant le processus avant cette étape, et  $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  pour être notre estimation à posteriori à l'étape  $k$  donnant la mesure  $z(k)$ . Nous pouvons alors définir à priori et à posteriori les estimations d'erreurs comme :

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \text{ (à priori)}$$


---

et  $e_k = x_k - \hat{x}_k$  (à posteriori)

La covariance à priori d'erreur d'estimation est alors :

$$\bar{P}(k) = E\left[e^-(k)e^-(k)^T\right] \quad \text{II.5}$$

Et la covariance à posteriori d'erreur d'estimation est :

$$P(k) = E\left[e(k)e(k)^T\right] \quad \text{II.6}$$

En dérivant les équations pour le filtre de Kalman, nous commençons par trouver une équation qui calcule à posteriori une estimation d'état  $\hat{x}_k$  comme combinaison linéaire d'une estimation à priori  $\hat{x}_k^-$  et une différence entre une mesure réelle  $z(k)$  et la prédiction de la mesure  $H \hat{x}_k^-$ , notée comme suit :

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z(k) - H \hat{x}_k^-) \quad \text{II.7}$$

La différence  $z(k) - H \hat{x}_k^-$  dans l'équation (II.7) s'appelle l'innovation de mesure, ou le résidu.

Le résidu reflète la différence entre la mesure prévue  $H \hat{x}_k^-$  et la mesure réelle  $z(k)$ . Un résidu nul signifie que les deux mesures prévue et réelle sont identiques.

La matrice  $K$  de dimensions  $n \times m$  dans (II.7) est calculée de sorte à être le gain ou le facteur de mixage qui minimise la covariance d'erreur à posteriori (II.6).

Cette minimisation peut être accomplie en remplaçant d'abord (II.7) dans la définition de  $e_k$  ci-dessus, substituant celle-ci dans (II.6), développant les espérances indiquées, calculant et annulant la dérivée de la trace du résultat en fonction de  $K$  et puis résolvant pour  $K$ . La forme résultante qui minimise (II.6) est donnée par :

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \quad \text{II.8}$$

On aura 
$$K_k = \frac{P_k^- H^T}{H P_k^- H^T + R}$$

Les équations de filtre de Kalman peuvent être représentées sous différentes formes. L'équation (II.8) représente le gain de Kalman.

En observant (II.8), nous remarquons que lorsque la covariance d'erreur de mesure tend vers zéro, le gain  $K$  amplifie le résidu. Autrement dit :  $\lim_{R_k \rightarrow 0} K_k = H^{-1}$

D'autre part, lorsque la covariance d'erreur d'estimation à priori tend vers zéro, le gain  $K$  amplifie moins le résidu. Autrement dit :  $\lim_{P_k \rightarrow 0} K_k = 0$

Une autre manière de voir l'effet de la pondération  $K$  est que, comme la covariance d'erreur de mesure  $R$  tend vers zéro, la mesure réelle  $z_k$  est favorisée de plus en plus, alors que la mesure prévue  $H \hat{x}_k^-$  est favorisée de moins en moins.

D'autre part, comme la covariance d'erreur d'estimation à priori  $P_k^-$  tend vers zéro, la mesure réelle  $z_k$  est favorisée de moins en moins, alors que la mesure prévue  $H \hat{x}_k^-$  est favorisée de plus en plus.

Tout ce qu'on vient de citer se résume comme suit :

- Lorsqu'il y a une grande incertitude sur le vecteur d'état (le modèle)  $\Rightarrow P$  est grande  $\Rightarrow$  gain  $K$  est grand  $\Rightarrow$  innovation favorisée.
- Lorsqu'il y a une grande incertitude sur la mesure  $\Rightarrow w$  grande  $\Rightarrow$  gain  $K$  petit  $\Rightarrow$  prédiction favorisée.

La figure II-12 résume ces propriétés du filtre.

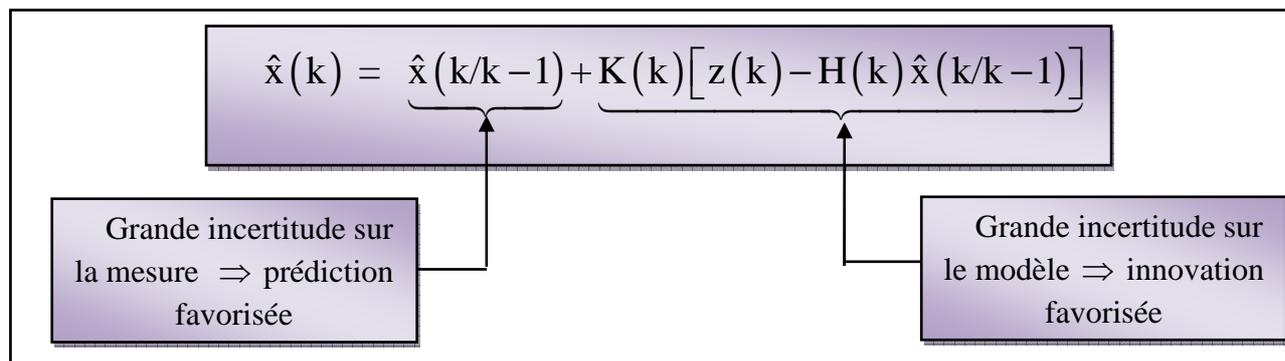


Fig. II.2 Interprétation du filtre de Kalman

### II.3.1.3 Les origines probabilistes du filtre

La justification de (II.7) dérive de la probabilité d'estimation à priori  $\hat{x}_k^-$  conditionnée sur toutes les mesures antérieures  $z_k$  (règle de Bayes).

Pour le moment, il est suffisant de dire que le filtre de Kalman maintient les deux premiers moments de la distribution d'état :

$$E[x_k] = \hat{x}_k$$

$$E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] = P_k$$

L'estimé d'état à posteriori (II.7) reflète la moyenne (le premier moment) de la distribution d'état, qui est normalement distribuée si les conditions (II.3) et (II.4) sont réunies.

L'estimé à posteriori de la covariance d'erreur (II.6) reflète la variance de la distribution d'état (le deuxième moment). En d'autres termes :

$$\begin{aligned} P(x_k/z_k) &\approx N\left(E(x), E\left[\left(x_k - x_k^-\right)\left(x_k - x_k^-\right)^T\right]\right) \\ &= N(\hat{x}_k, P_k) \end{aligned}$$

### II.3.1.4 L'algorithme du filtre de Kalman discret

Le filtre de Kalman estime un processus en employant une fonction de contre-réaction. Le filtre estime l'état du processus à un moment donné et puis obtient la réaction sous forme de mesures bruitées.

Les équations du filtre de Kalman se divisent en deux groupes : les équations de mise à jour de temps et les équations de mise à jour de la mesure.

Les équations de mise à jour du temps comprennent les estimations de l'état actuel et des covariances d'erreur pour obtenir les estimations à priori pour la prochaine étape. Les équations de mise à jour de mesure continuent la contre-réaction c'est-à-dire qu'elles incorporent une nouvelle mesure dans l'estimation à priori pour obtenir une estimation à posteriori améliorée.

Les équations de mise à jour de temps peuvent également être considérées comme des équations de prédiction, alors que les équations de mise à jour de mesure peuvent être considérées comme des équations de correction.

En effet, l'algorithme final d'estimation ressemble à un algorithme de prédiction/correction pour la résolution de problèmes numériques comme représenté dans la figure suivante.

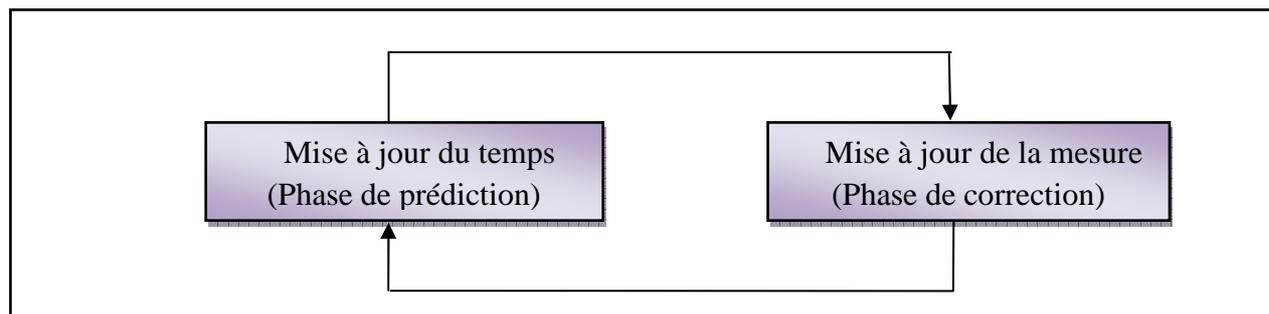


Fig. II.3 Le cycle du filtre de Kalman discret

Les équations spécifiques pour la mise à jour de temps et de mesure sont présentées ci-dessous :

- **Phase de prédiction**

$$\hat{x}_k = F \hat{x}_{k-1} \quad \text{II.9}$$

$$P_k^- = F P_{k-1}^- + Q \quad \text{II.10}$$

Notons encore comment les équations de mise à jour de temps dans les équations ci-dessus projettent les estimations d'état et de covariance en avant de l'instant  $k-1$  à l'instant  $k$ .  $F$  et  $G$  sont tirées de (II.1) et (II.3).

- **Phase de correction**

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \quad \text{II.11}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H \hat{x}_k^-) \quad \text{II.12}$$

$$P_k = (I - K_k H) P_k^- \quad \text{II.13}$$

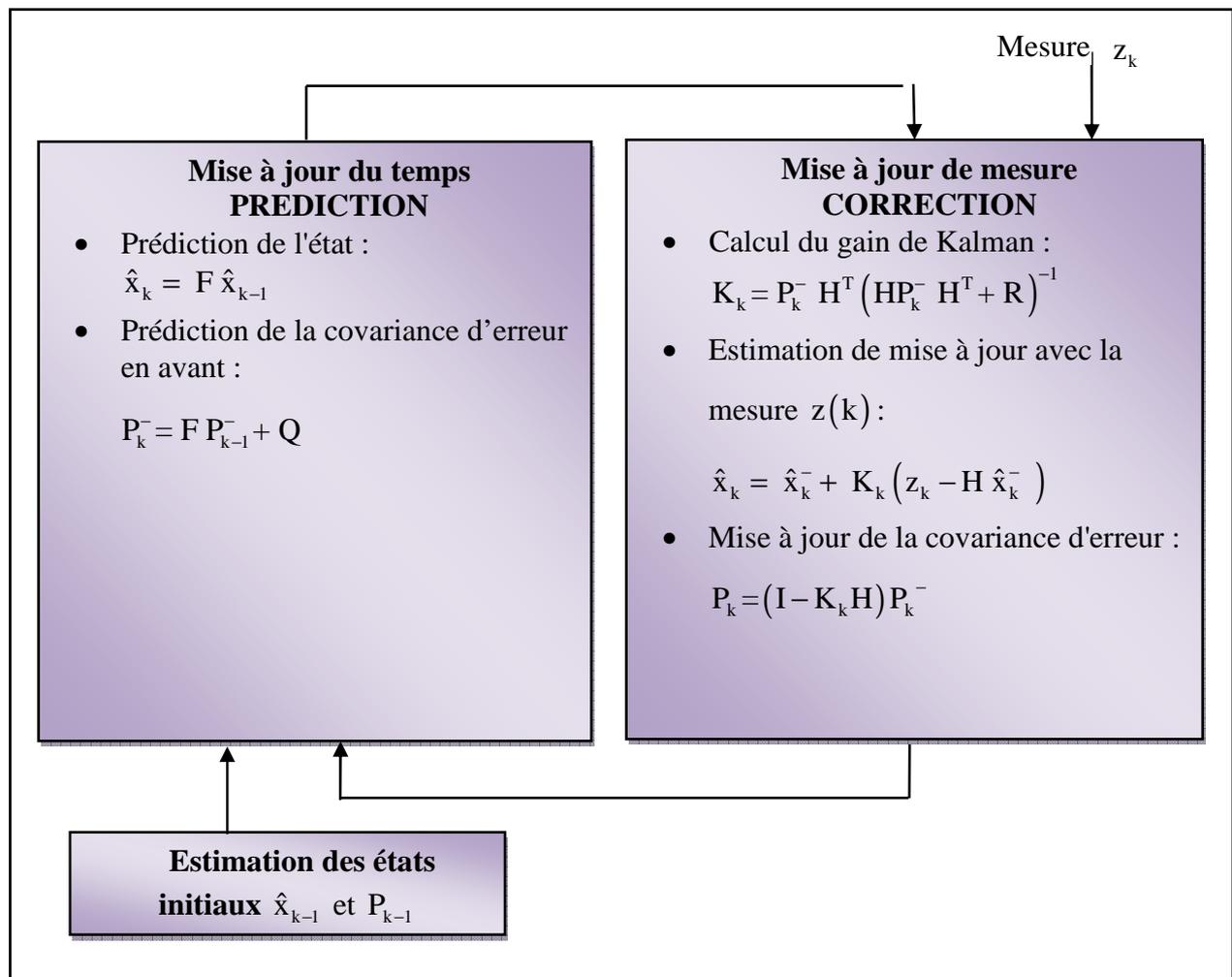


Fig. II.4 Schéma descriptif de l'algorithme du filtre de Kalman

La première tâche pendant la mise à jour de mesure est de calculer le gain de Kalman  $K_k$ . Notons que l'équation donnée dans (II.11) est identique à celle de (II.8). L'étape suivante est de calculer une estimation d'état à posteriori en incorporant la mesure dans (II.12). L'étape finale est d'obtenir une estimation de la covariance d'erreur à posteriori par l'équation (II.13).

Ensuite, à chaque instant, le processus se répète avec les estimations précédentes à posteriori pour prédire les nouvelles estimations à priori. Cette caractéristique de récursivité est un des grands avantages du filtre de Kalman par rapport à d'autre type de filtres (Fig. II.4).

### II.3.1.5 Les paramètres et le réglage du filtre

Dans l'utilisation du filtre, la covariance de bruit de mesure  $R$  est habituellement mesurée avant utilisation du filtre. La mesure de la covariance d'erreur de mesure  $R$  est généralement possible, parce que nous devons être capable de mesurer le processus n'importe quand (pendant le fonctionnement du filtre), ainsi nous devrions généralement pouvoir prendre à part un nombre d'échantillons de mesure afin de déterminer la variance de bruit de mesure.

La détermination de la covariance de processus de bruit  $Q$  est généralement plus difficile car, typiquement, nous n'avons pas la capacité d'observer directement le processus que nous estimons.

Parfois un modèle de processus relativement simple peut produire des résultats acceptables si nous injectons assez d'incertitude dans le processus par l'intermédiaire du choix de  $Q$ .

Le réglage est habituellement réalisé hors-ligne, fréquemment avec l'aide d'un autre filtre de Kalman inséré dans le système, et il est généralement désigné sous le nom d'identification de système.

Enfin, notons que dans les conditions où  $Q$  et  $R$  sont des constantes, la matrice de covariance  $P_k$  de l'erreur d'estimation et le gain de Kalman  $K_k$  se stabilisent rapidement et tendent vers des constantes. Si c'est le cas, ces paramètres peuvent être calculés à l'avance en faisant fonctionner le filtre hors-ligne, ou par exemple en déterminant la valeur d'équilibre de  $P_k$ .

Cependant, dans beaucoup de cas, les valeurs de  $Q$  et  $R$  ne sont pas des constantes, dans ces conditions, ils doivent être ajustés en fonction des besoins.

### II.3.2 Le filtre de Kalman étendu (EKF)

Comme c'est décrit précédemment, le filtre de Kalman s'intéresse au problème de l'estimation de l'état  $x \in \mathbb{R}^n$  d'un processus discret régi par une équation différentielle linéaire stochastique.

Mais que se passe-t-il si le processus à estimer et (ou) la relation entre la mesure et le processus sont non linéaire? Certaines des applications les plus intéressantes et les plus réussites du filtre de Kalman ont été de telle situations. Un filtre de Kalman qui linéarise autour de la moyenne et de la covariance est désigné sous le nom de filtre de Kalman étendu (ou EKF pour Extended Kalman Filter).

En utilisant un développement en série de Taylor, nous pouvons linéariser l'estimation autour de l'estimée courante en utilisant les dérivées partielles des fonctions du processus et de mesure pour calculer des estimations même face à des équations différentielles non linéaires.

Supposons que notre processus a un vecteur d'état régi par l'équation différentielle stochastique non linéaire suivante :

$$x_k = f(x_{k-1}, w_{k-1}) \quad \text{II.14}$$

avec une mesure  $z \in \mathbb{R}^n$  de la forme :

$$z_k = h(x_k, v_k) \quad \text{II.15}$$

où les variables  $w_k$  et  $v_k$  représentent les bruits d'état et de mesure comme dans les équations II.3 et II.4.

La fonction  $f$  non linéaire dans l'équation différentielle II.14 relie l'état de l'étape  $k-1$  à l'état de l'étape  $k$ . Elle inclut le paramètre de bruit de processus  $w_k$  de moyenne nulle.

La fonction non linéaire  $h$  dans l'équation de mesure II.15 relie l'état  $x_k$  à la mesure  $z_k$ .

Dans la pratique, on ne connaît pas les valeurs de bruit  $w_k$  et  $v_k$  à chaque instant. Cependant, on peut approximer le vecteur d'état et de mesure sans prendre en considérations ces valeurs, on aura alors :

$$\hat{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, 0) \quad \text{II.16}$$

$$\text{Et } \hat{z}_k = h(\hat{x}_k, 0) \quad \text{II.17}$$

Où  $\hat{x}_k$  est une certaine estimation à posteriori de l'état.

Il est important de noter que les distributions (ou les densités dans le cas continu) des diverses variables aléatoires ne sont plus normales après avoir subi les transformations non linéaires de l'EKF, car, il est simplement un estimateur Ad-Hoc d'état qui approche seulement l'optimalité de la règle de Bayes par la linéarisation.

### II.3.2.1 Les origines de calcul du filtre

Pour estimer le processus non linéaire, nous commençons par écrire de nouvelles équations qui linéarisent les estimées autour de II.16 et II.17 :

$$x_k = \tilde{x}_k + F(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + Gw_{k-1} \quad \text{II.18}$$

$$z_k = \tilde{z}_k + H(x_k - \tilde{x}_k) + Vv_k \quad \text{II.19}$$

où :

$x_k$  et  $z_k$  sont respectivement les vecteurs réels d'état et de mesure.

$\tilde{x}_k$  et  $\tilde{z}_k$  sont les vecteurs approchés d'état et de mesure (II.16) et (II.17).

$\tilde{x}_k$  est une estimée à posteriori de l'état à l'étape  $k$ , les variables aléatoires  $w_k$  et  $v_k$  représentent respectivement les bruits d'état et de mesure.

- $F$  est la matrice jacobéenne des dérivées partielles de  $f$  en fonction de  $x$ , soit :

$$F_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, 0)$$

- $G$  est la matrice jacobéenne des dérivées partielles de  $f$  en fonction de  $w$ :

$$G_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, 0)$$

- $H$  est la matrice jacobéenne des dérivées partielles de  $h$  en fonction de  $x$  :

$$H_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\tilde{x}_k, 0).$$

- $V$  est la matrice jacobéenne des dérivées partielles de  $h$  en fonction de  $v$  :

$$V_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial v_{[j]}}(\tilde{x}_k, 0)$$

Maintenant nous définissons une nouvelle notation pour l'erreur de prédiction :

$$\tilde{e}_{x_k} \equiv x_k - \hat{x}_k \tag{II.20}$$

Et le résidu de mesure :

$$\tilde{e}_{z_k} \equiv z_k - \hat{z}_k \tag{II.21}$$

Il faut se rappeler que dans la pratique, nous n'avons pas accès à  $x_k$  dans l'équation II.20, car c'est le vecteur réel d'état, c'est-à-dire la quantité qu'on essaye d'estimer. Par contre, nous avons accès à  $z_k$  dans II.21, qui est la mesure réelle que nous utilisons pour estimer  $x_k$ . En utilisant II.20 et II.21, nous pouvons écrire les équations d'erreur comme suit :

$$\tilde{e}_{x_k} \approx F(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \varepsilon_k \tag{II.22}$$

$$\tilde{e}_{z_k} \approx H \bar{e}_{x_k} - \eta_k \tag{II.23}$$

Où  $\varepsilon_k$  et  $\eta_k$  représentent de nouvelles variables aléatoires indépendantes ayant des moyennes nulles et des matrices de covariance  $WQW^T$  et  $VRV^T$ , avec  $Q$  et  $R$  données par II.3 et II.4 respectivement.

Notons que les équations (II.22) et (II.23) sont linéaires, et qu'elles ressemblent aux équations de différence et de mesure (II.1) et (II.2) du filtre de Kalman discret.

Ceci nous motive pour utiliser le résidu de mesure  $\tilde{\epsilon}_{z_k}$  dans (II.1) et un deuxième filtre (hypothétique) de Kalman pour estimer l'erreur de prédiction  $\tilde{\epsilon}_{x_k}$  donnée par (II.20).

Cette estimation, notée  $\hat{\epsilon}_k$ , peut alors être utilisée avec (II.20) pour obtenir une estimation à posteriori d'état pour le processus non linéaire original comme :

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + \hat{\epsilon}_{x_k}. \quad \text{II.24}$$

Les variables aléatoires de (II.22) et (II.23) ont approximativement les distributions de probabilité suivantes :

$$P(\tilde{\epsilon}_{x_k}) \approx N(0, E[\tilde{\epsilon}_{x_k} \tilde{\epsilon}_{x_k}^T])$$

$$P(\epsilon_k) \approx N(0, WQW^T)$$

$$P(\eta_k) \approx N(0, VRV^T)$$

Etant donné ces approximations et en annulant  $\hat{\epsilon}_k$ , l'équation du filtre de Kalman utilisée pour estimer  $\hat{\epsilon}_k$  est :

$$\tilde{\epsilon}_k = K_k \tilde{\epsilon}_{z_k} \quad \text{II.25}$$

En substituant (II.25) de nouveau dans (II.24) et en se servant de (II.21) nous remarquons que nous n'avons pas besoins réellement d'un deuxième filtre (hypothétique) de Kalman :

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \tilde{x}_k + K_k \tilde{\epsilon}_{z_k} \\ &= \tilde{x}_k + K_k (z_k - \tilde{z}_k) \end{aligned} \quad \text{II.26}$$

L'équation (II.26) peut maintenant être employée pour la mise à jour de mesure dans le filtre de Kalman étendu, avec  $\tilde{x}_k$  et  $\tilde{z}_k$  tirés de (II.16) et (II.17) et le gain de Kalman  $K_k$  pris de (II.11), avec la substitution appropriée pour la covariance d'erreur de mesure.

L'ensemble complet d'équations de l'EKF est donné ci-dessous dans les équations (II.27) à (II.31).

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, 0) \quad \text{II.27}$$

$$P_k^- = F_k P_{k-1} F_k^T + G_k Q_{k-1} G_k^T \quad \text{II.28}$$

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1} \quad \text{II.29}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-, 0)) \quad \text{II.30}$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad \text{II.31}$$

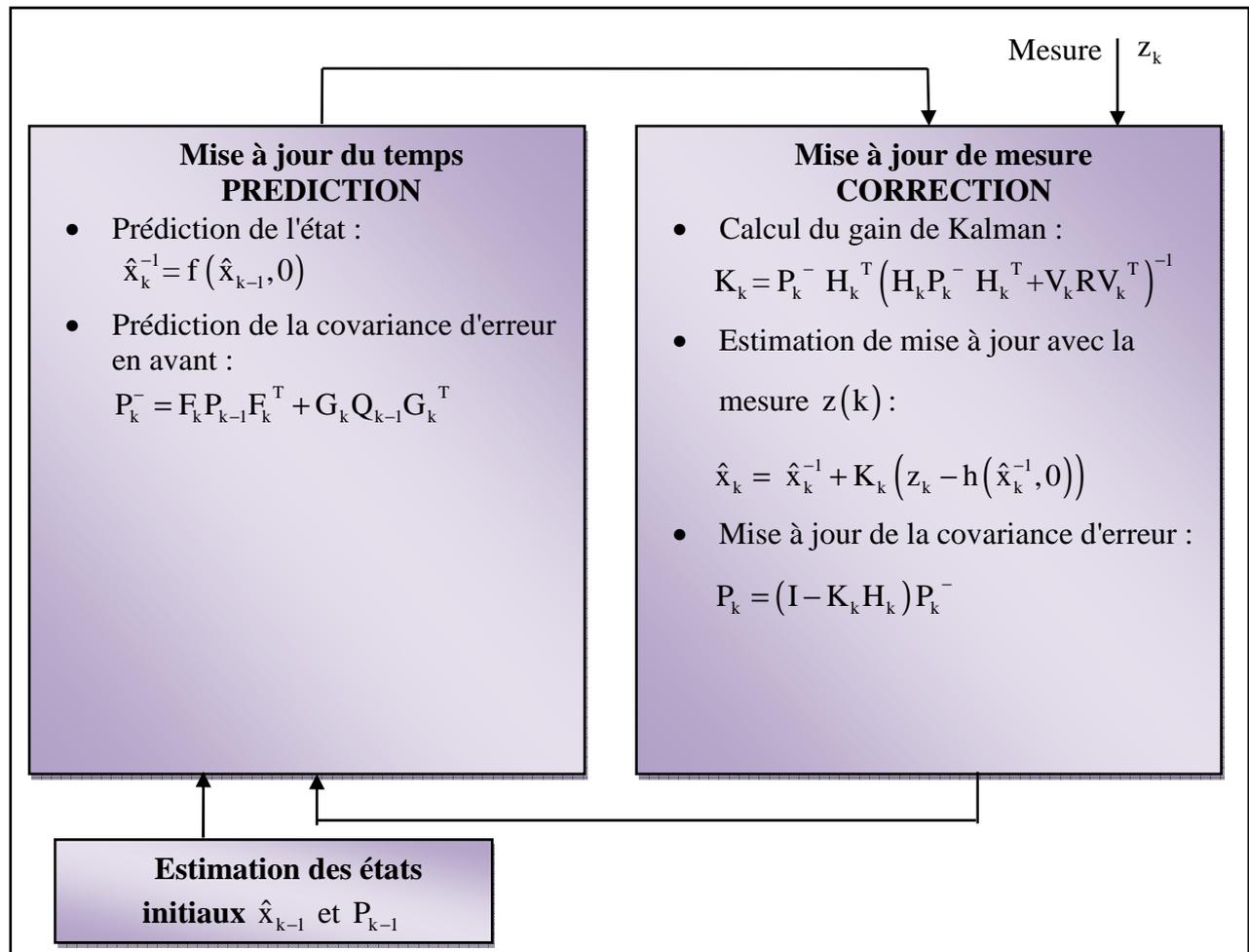


Fig. II.5 Schéma descriptif de l'algorithme du filtre de Kalman étendu

### II.3.3 Les applications du filtre

Les applications du filtre de Kalman sont nombreuses dans les métiers de l'ingénieur.

Le filtre de Kalman permet de donner un estimé de l'état de système à partir d'une information à priori sur l'évolution de cet état (modèle) et de mesures réelles, il est utilisé pour :

- Estimer les conditions initiales inconnues (balistique).
- Prédire des trajectoires de mobiles (trajectographie)
- Localiser un engin (navigation,..)
- Implanter des lois de commande fondées sur un estimateur de l'état et un retour d'état (Commande Linéaire Quadratique Gaussienne..).

### II.3.4 Initialisation du filtre

Nous avons vu que le filtre de Kalman n'est en fait qu'un algorithme récursif. Il faut donc lui fournir un estimé à priori initial ainsi que la matrice de covariance de son erreur.

Dans cette section, nous allons voir comment choisir adéquatement ces paramètres initiaux afin d'assurer le bon fonctionnement du pistage.

De façon optimale, la matrice de covariance  $P(k)$  de l'erreur d'estimation doit représenter en tout temps et le plus fidèlement possible la précision de la piste calculée.

Ce principe vaut aussi pour l'instant d'initialisation du filtre. Il arrive quelque fois de rencontrer une technique d'initialisation qui consiste à choisir n'importe quelle valeur pour  $x(0|-1)$  et à prendre  $P(0|-1)$  très grande. Cette méthode a comme inconvénient de conserver  $P(k)$  élevée pendant une grande période, délaissant ainsi l'information apportée par les mesures durant cette période.

Une méthode plus efficace permet de conserver l'optimalité de la piste calculée. Dans le cas d'une mesure de position (abscisse et ordonné), supposant qu'à l'instant  $t = t(0)$  nous avons en mémoire les deux vecteurs de mesure  $z(-1)$  et  $z(0)$  ou  $z(k) = \begin{bmatrix} x_m(k) & y_m(k) \end{bmatrix}^T$  et que  $\Delta t(-1)$  représente l'intervalle de temps entre  $t(-1)$  et  $t(0)$ .

Nous pouvons alors former l'estimé à priori initial du vecteur d'état (position et vitesse) de la manière suivante :

$$x(0|-1) = \begin{bmatrix} z(0,1) \\ \frac{z(0,1) - z(-1,1)}{\Delta t(-1)} \\ z(0,2) \\ \frac{z(0,2) - z(-1,2)}{\Delta t(-1)} \end{bmatrix} \quad \text{II.32}$$

où  $z(k,i)$  représente la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur de mesure à l'instant  $t(k)$ . La matrice de covariance de l'erreur de l'estimé à priori initial est donnée par :

$$P(0|-1) = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \frac{\sigma_x^2}{\Delta t(-1)} & \sigma_{xy}^2 & \frac{\sigma_{xy}^2}{\Delta t(-1)} \\ \frac{\sigma_x^2}{\Delta t(-1)} & \frac{2\sigma_x^2}{\Delta t(-1)^2} & \frac{\sigma_{xy}^2}{\Delta t(-1)} & \frac{2\sigma_{xy}^2}{\Delta t(-1)^2} \\ \sigma_{xy}^2 & \frac{\sigma_{xy}^2}{\Delta t(-1)} & \sigma_y^2 & \frac{\sigma_x^2}{\Delta t(-1)} \\ \frac{\sigma_{xy}^2}{\Delta t(-1)} & \frac{2\sigma_{xy}^2}{\Delta t(-1)^2} & \frac{\sigma_y^2}{\Delta t(-1)} & \frac{2\sigma_y^2}{\Delta t(-1)^2} \end{bmatrix} \quad \text{II.33}$$

Les équations (II.32) et (II.33) permettent donc d'initialiser correctement le filtre de Kalman à partir des mesures.

### II.3.5 Les modèles d'état

Différents types de modèles ont été développés pour représenter tous les types de trajectoires rencontrées en pratique. Nous décrivons dans cette partie, trois types de modèles qui sont CV, CT et CA.

#### II.3.5.1 Modèle à vitesse constante (CV)

Un des plus simples des modèles de poursuite utilise les coordonnées cartésiennes pour décrire la position et la vitesse de la cible. Avec une dimension, nous utilisons la position  $x$  et la vitesse  $\dot{x}$  comme vecteur d'état  $X$ , soit :  $X(t) = (x(t), \dot{x}(t))^T$

Nous pouvons utiliser le modèle continu suivant :

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t) \quad \text{II.34}$$

Où nous avons supposé une perturbation autour de la vitesse constante du modèle.

Si nous supposons que le bruit (accélération) est constant durant la période d'échantillonnage  $T$ , nous pouvons écrire le modèle discret sous la forme :

$$X_{t+1} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_t + \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{pmatrix} v_t \quad \text{II.35}$$

#### II.3.5.2 Modèle à accélération constante (CA)

En 1970, un filtre basé sur les techniques de Kalman est développé pour les cibles manoeuvrantes. L'idée est de représenter les différentes formes de manoeuvres des véhicules. La manoeuvre ici, est l'accélération supposée corrélée dans le temps.

Ceci est due au fait qu'on suppose que la cible accélère à l'instant  $t$ , et continue d'accélérer à l'instant  $t + \tau$ , où  $\tau$  est un petit incrément de temps. Un tel modèle se représente par la fonction d'auto-corrélation :

$$E[\ddot{x}(t), \ddot{x}(t + \tau)] = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \quad \text{II.36}$$

Où  $\sigma^2$  est la variance de l'accélération.

L'équation dynamique de l'accélération peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \ddot{x}(t) = -\alpha \ddot{x}(t) + v(t) \quad \text{II.37}$$

Où  $v(t)$  est un bruit blanc de variance  $2\alpha\sigma^2\delta(\tau)$ . Le modèle est connu sous la désignation de processus de Gauss-Markov du premier ordre.

En supposant un vecteur d'état de composantes : position, vitesse et accélération. Le modèle s'écrit :

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t) \quad \text{II.38}$$

En discrétisant la matrice d'évolution du système avec l'hypothèse d'une période d'échantillonnage  $T$  constante, nous avons :

$$\Phi = e^{-AT} = \begin{bmatrix} 1 & T & (e^{-\alpha T} - 1 - \alpha T)/\alpha^2 \\ 0 & 1 & (1 - e^{-\alpha T})/\alpha \\ 0 & 0 & e^{-\alpha T} \end{bmatrix} \quad \text{II.39}$$

Souvent la période d'échantillonnage est inférieure à la durée de la manœuvre ( $1/\alpha$ ), dans ce cas l'approximation est souvent utilisée :

$$\Phi \cong e^{-AT} = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T(1 - (\alpha T/2)) \\ 0 & 0 & e^{-\alpha T} \end{bmatrix} \quad \text{II.40}$$

Le cas limite est un cas d'intérêt particulier :

$$\lim_{\alpha T \rightarrow 0} \Phi \cong \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{II.41}$$

Qui est la matrice newtonienne du modèle à accélération constante.

### II.3.5.3 Modèle de virage (CT)

C'est un modèle non linéaire sous la désignation de modèle (Coordinated Turn CT).

Soit  $X_t = (x, y, \dot{x}, \dot{y})^T$  où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées cartésiennes de la position,  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  les composantes de la vitesse. Si nous supposons une vitesse constante,  $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  et un taux  $\psi$  de virage constant  $\Omega = \dot{\psi}$  où nous avons :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \psi \\ \dot{y} = v \sin \psi \end{cases} \quad \text{II.42}$$

Les composantes de l'accélération avec  $\dot{\psi} = 0$  sont :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{d}{dt} \dot{x} = -v \Omega \sin\psi = -\Omega \dot{y} \\ \ddot{y} = \frac{d}{dt} \dot{y} = v \Omega \cos\psi = \Omega \dot{x} \end{cases} \quad \text{II.43}$$

L'équation d'état peut s'exprimer par :

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\Omega \dot{y} \\ y \\ \Omega \dot{x} \end{pmatrix} \quad \text{II.44}$$

En discrétisant le système on trouve :

$$\mathbf{X}_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & (\sin\Omega T)/\Omega & 0 & (1-\cos\Omega T)/\Omega \\ 0 & \cos\Omega T & 0 & -\sin\Omega T \\ 0 & (1-\cos\Omega T)/\Omega & 1 & (\sin\Omega T)/\Omega \\ 0 & \sin\Omega T & 0 & \cos\Omega T \end{bmatrix} \mathbf{X}_t + \mathbf{B}v_t$$

#### II.4 Le filtre particulière

Le filtre de Kalman est un des outils les plus puissants du traitement statistique du signal pour l'estimation, la prédiction et le filtrage. Cependant, sa mise en oeuvre n'est possible que sur des modèles d'état linaires et gaussiens.

Lorsque ces hypothèses ne sont pas vérifiées, on peut alors recourir à l'approximation du filtre de Kalman étendu (avec plus ou moins de succès), ou choisir un modèle inexact, mais qui respecte les hypothèses 'linéaire gaussien'.

Une approche alternative récente permet la mise en oeuvre du filtrage statistique 'exact' en contexte quelconque. Au lieu d'estimer l'espérance mathématique et la variance de la distribution des paramètres d'état conditionnellement aux observations, on génère une population de 'particules' distribuées selon cette distribution. Ces particules sont propagées et mises à jour au cours du temps, et sont utilisées pour estimer, filtrer, prédire, ...

Le filtrage particulière ou méthode de Monte Carlo séquentielle est une technique très efficace pour estimer séquentiellement l'état caché d'un système dynamique non linéaire. Le calcul de cette estimation dépend de la densité de probabilité à posteriori de l'état caché sachant les observations.

Cependant, dans le cas d'un système dynamique non linéaire cette densité ne peut pas être déterminée analytiquement. Il faut utiliser des approximations numériques.

Le filtrage particulaire approxime la densité à posteriori avec des échantillons pondérés, appelés particules, qui évoluent dans le temps selon les lois dynamiques du système considéré. Cette évolution permet l'estimation séquentielle de l'état caché.

Le filtrage particulaire est donc une méthode globale qui repose sur une exploration de l'espace d'état du problème par des "particules" dont la dynamique évolue de façon aléatoire. L'ensemble de ces particules est distribué selon la probabilité du processus à estimer, conditionnelle aux observations délivrées par le ou les capteurs.

Ne nécessitant pas de résolution explicite des équations du problème, cette méthode est applicable quelle que soit la complexité de ces équations, notamment en termes de non linéarité et de non gaussianité.

Aucun modèle physique, aussi réaliste soit-il, ne lui est donc inaccessible.

#### **II.4.1 Principe de base**

L'estimateur particulaire est dans sa version la plus simple constitué de  $N$  "particules" qui évoluent en parallèle. Chaque particule évolue en fonction des mesures relevées par les capteurs à l'instant d'échantillonnage  $t$ , et simule une "trajectoire" possible, c'est à dire l'évolution d'un processus respectant les mêmes équations que le processus à estimer. Chaque particule fournit en sortie deux informations:

- un vecteur d'état de même structure que le vecteur d'état du processus à estimer.
- une grandeur scalaire appelée poids, représentative de la probabilité que ce vecteur soit celui du processus à estimer.

Pour un nombre  $N$  de particules suffisamment élevé, on montre que l'ensemble des états des particules pondérés par leurs poids respectifs est représentatif de la loi de probabilité conditionnelle du vecteur d'état du processus.

---

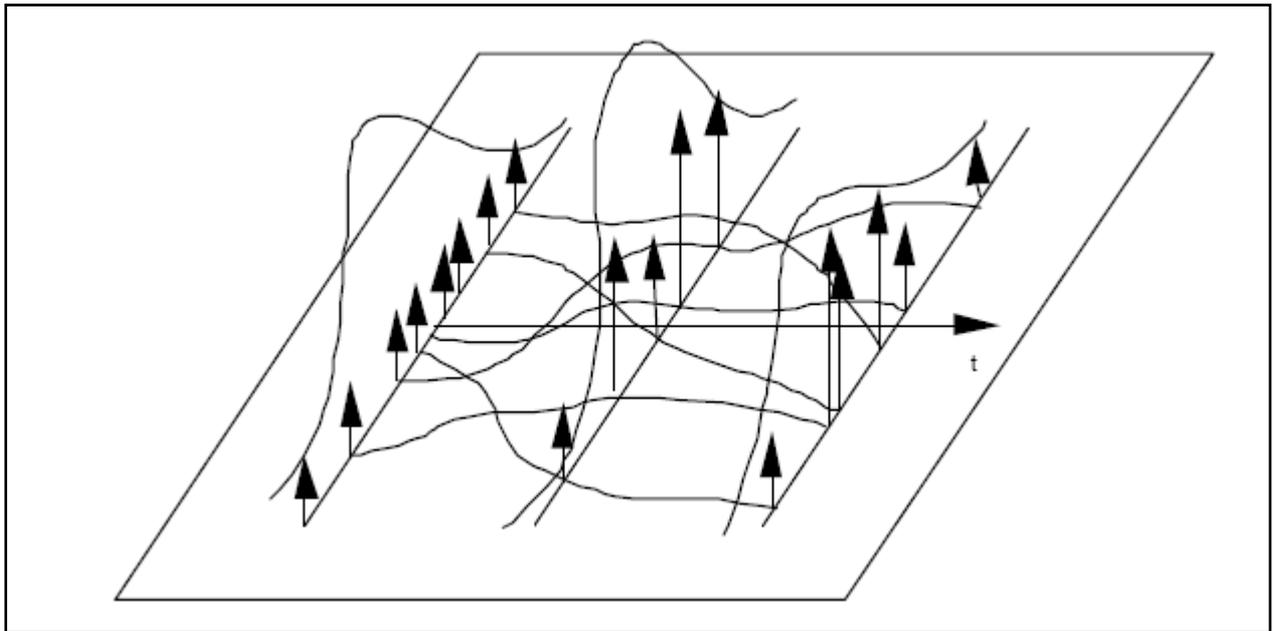


Fig. II.6 Représentation des courbes et poids des particules

Les trajectoires des particules sont représentées par les courbes et leur poids respectifs par la hauteur des flèches. Le poids d'une particule représente l'estimation de la densité à posteriori en cette trajectoire.

En pratique, et afin d'augmenter la capacité exploratoire de l'estimateur, sans pour cela augmenter le nombre de particules, on redistribue périodiquement les  $N$  particules sur leurs supports (un support représente une trajectoire possible de l'état). Cette redistribution s'effectuant conformément à la probabilité de chacun des supports.

Cette procédure permet de concentrer la capacité exploratoire du réseau de particules dans les zones où la probabilité est maximale, augmentant ainsi la précision de l'estimation.

L'effet de cette redistribution est représenté sur la figure ci-dessous. On remarque que plusieurs particules sont nées au même endroit et que d'autres ont disparu. On favorise en effet les particules les plus "lourdes" en donnant naissance à plusieurs particules à la même position, alors que celles se trouvant dans les régions les moins probables sont peu choisies ou pas du tout : elles disparaissent alors.

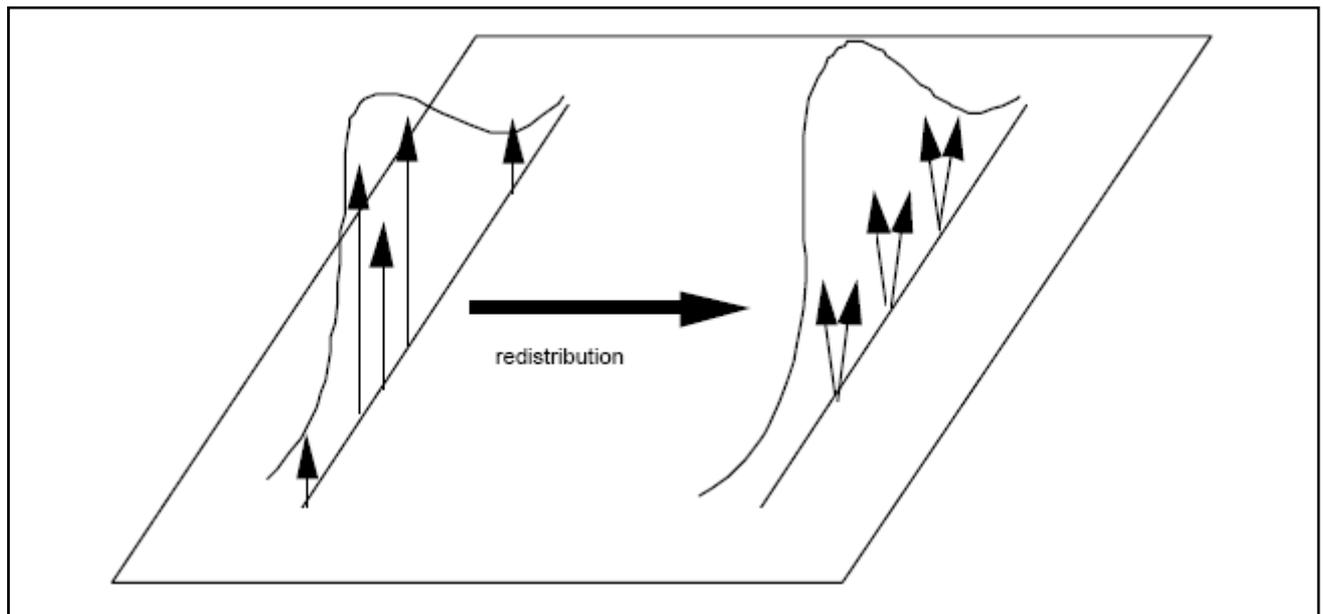


Fig. II.7 La redistribution des particules

#### II.4.2 Implémentation

Le réseau particulaire est implémenté sur un réseau de  $N$  processeurs identiques fonctionnant en parallèle (voir fig. II.8) :

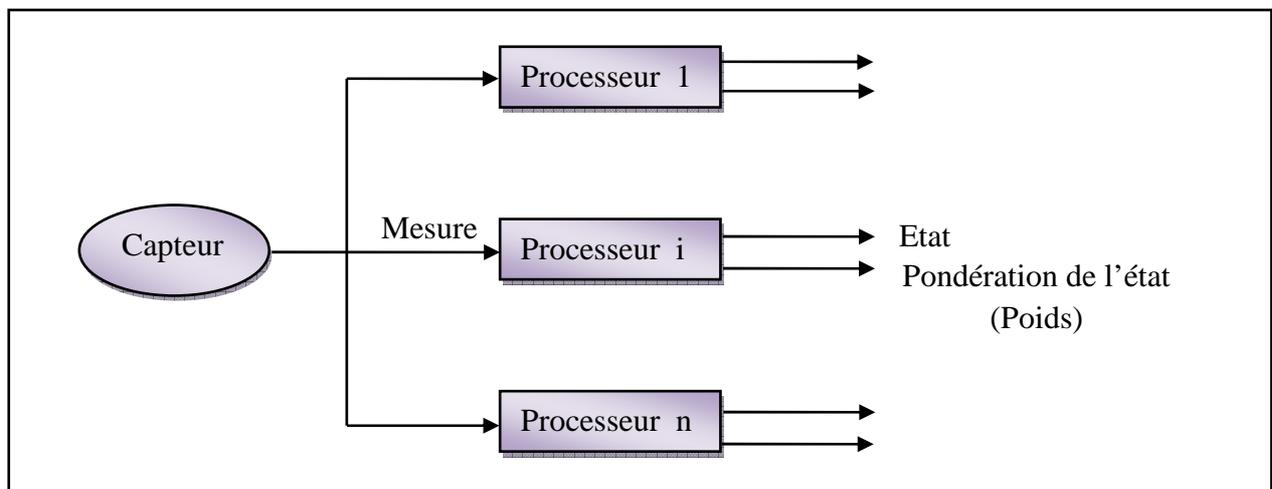


Fig. II.8 Schéma descriptif du réseau particulaire

Chaque processeur reçoit en entrée l'ensemble des mesures relevées par les capteurs à l'instant  $k$  et fournit en sortie :

- un vecteur d'état possible que peut occuper le processus à l'instant  $k$ .
- un poids qui représente la probabilité pour que ce vecteur d'état soit celui du processus à estimer.

### II.4.3 L'algorithme particulaire

L'algorithme utilisé est le suivant :

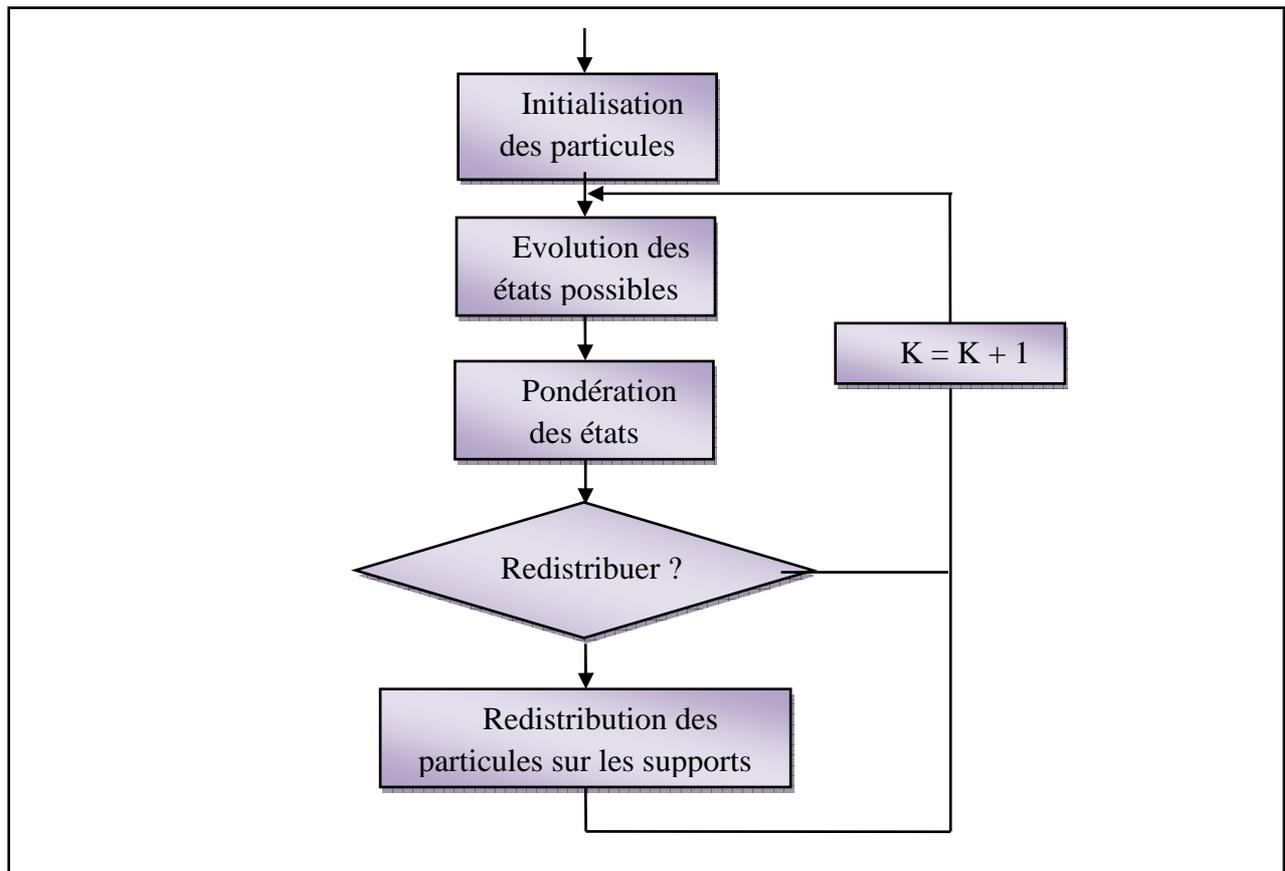


Fig. II.9 Schéma descriptif de l'algorithme particulaire

Les étapes de cet algorithme sont :

#### II.4.3.1 Initialisation

Les  $N$  états  $X^i$  sont initialisés à partir de  $N$  tirages aléatoires indépendants effectués selon la densité de probabilité de l'état à estimer à l'instant initial.

Le poids accordé à chacun des tirages est identique.

Notons qu'une connaissance précise de l'état initial n'est pas nécessaire.

#### II.4.3.2 Evolution des états possibles

C'est à ce stade que le modèle dynamique du système entre en jeu. Les  $N$  états possibles  $X^i$  évoluent aléatoirement et indépendamment suivant le modèle dynamique discrétisé du processus :

$$X_{k-1}^i = F(X_{k-1}^i, W_k)$$

Lorsque le processus à estimer est stable, chaque transition d'état  $X_{k-1}^i \rightarrow X_k^i$  est tirée suivant la statistique à priori du bruit de dynamique.

L'objectif final est d'avoir la meilleure couverture des zones les plus probables de l'espace d'état, avec le nombre le plus faible de particules. Les techniques particulières permettent de contrôler dynamiquement la dispersion des particules autour de l'état réel (à estimer), en pilotant l'exploration de l'espace par l'intermédiaire des mesures.

#### II.4.3.3 Pondération des états possibles

L'équation de mesure intervient pour pondérer les  $N$  états possibles à partir des mesures relevées par les capteurs :  $Y_k = H_k X_k + V_k$

Chaque transition d'état  $X_{k-1}^i \rightarrow X_k^i$  est pondérée par l'intermédiaire de la probabilité de la réalisation du bruit  $V_k = Y_k - H_k X_k$  expliquant les mesures.

La pondération avant normalisation d'une trajectoire d'état  $X_{[0,k]}^i$  est obtenue en multipliant sur l'intervalle  $[0, k]$  l'ensemble des probabilités de transition d'état.

#### II.4.3.4 Redistribution des états possibles sur les supports du réseau

La redistribution des particules sur leurs supports est nécessaire au contrôle de la dispersion du réseau.

Les particules sont réaffectées dans l'espace d'état suivant la loi de probabilité qu'elles forment dans leur ensemble.

L'efficacité du réseau est ainsi augmentée en le resserrant sur les régions intéressantes à explorer et en rendant plus homogène l'ensemble des pondérations.

Finalement, Le filtrage particulaire, développée à l'origine dans le domaine de la poursuite, connaît actuellement un fort développement dans de nombreux domaines relevant des sciences et techniques de l'information et de la communication, ou des sciences de l'ingénieur :

- Localisation, navigation, poursuite.
- Poursuite multicibles.
- Vision.
- Robotique.
- Traitement du signal audio.
- Communications numériques.

Cette liste de références est bien sur loin d'être exhaustive, en particulier dans le domaine de la poursuite.

---

## **II.5 Conclusion**

Dans ce présent chapitre, nous avons cité les différents filtres utilisés pour l'estimation d'état, commençant par le filtre  $\alpha \beta$ , puis le filtre de Kalman standard conçu pour estimer les état des modèles linéaires avec son extension pour les modèles non linéaires, qui consiste à linéariser ces modèles autour des points de fonctionnement, enfin nous donnons un aperçu sur un filtre plus sophistiqué inventés récemment qui est le filtre particulaire.

---

## III APPROCHE A MODELES MULTIPLES

---

### III.1 Introduction

Un système de poursuite est dédiée au suivi d'objet ou des cibles mobiles qui ne sont pas nécessairement coopératives, notamment dans les applications militaires ou les cibles ennemies sont toujours fuyantes, pour effectuer une telle tâche, ce dernier utilise en général des modèles de l'environnement réel pour estimer le passé, le présent, et prédire le futur.

Presque tous les systèmes de poursuite modernes utilisent le filtre de Kalman comme un outil central pour l'estimation d'état. Cependant, si la cible est manoeuvrante, le succès du filtre de Kalman peut être limité. En effet, des structures alternatives utilisant plusieurs filtres de Kalman en parallèle ont été développées afin de résoudre ce problème, dont l'approche à modèles multiple en constitue une.

### III.2 Mélange gaussien

Nous considérons qu'un échantillon de données suit, non pas une loi de probabilité usuelle, mais une loi dont la fonction de densité est une densité mélangée.

Bien que n'importe quelle loi puisse être utilisée, la plus courante est la loi normale dont la fonction de densité est une gaussienne. On parle alors de mélange gaussien.

Le mélange gaussien est donc un outil puissant de modélisation de la densité de probabilité (PDF) des variables qui suivent des distributions multi modèles compliquées.

La forme de base d'un mélange gaussien contenant N composants est :

$$f\{x\} = \sum_{i=1}^N p_i N\{x; \hat{x}_i, p_i\} \quad \text{III.1}$$

où  $\{p_i\}$  sont les poids relatifs de chaque composant gaussien  $\left(p_i \geq 0 \forall i, \sum_i p_i = 1\right)$ ,  $\hat{x}_i$  sont les moyennes de chaque composant, et  $p_i$  sont les covariances.

Les modèles de mélange gaussien surgissent naturellement comme solution à plusieurs problèmes dans la poursuite de cibles, notamment la poursuite de cibles manoeuvrantes et l'association de données.

---

Dans les sections qui suivent, il sera souvent nécessaire de calculer la moyenne globale et la covariance globale d'un mélange gaussien.

La moyenne globale peut être calculée en utilisant l'opération d'espérance.

$$\begin{aligned}
 \mu_c &= E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^N p_i N\{x; \hat{x}_i, p_i\} \right\} dx \\
 &= \sum_{i=1}^N p_i \int_{-\infty}^{+\infty} x N\{x; \hat{x}_i, p_i\} dx \\
 &= \sum_{i=1}^N p_i x_i
 \end{aligned} \tag{III.2}$$

De même pour la covariance globale, elle peut être calculée comme suit :

$$\begin{aligned}
 P_c &= E\{(x - \mu_c)(x - \mu_c)^T\} = E\{xx^T\} - \mu_c \mu_c^T \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^N p_i x x^T N\{x; \hat{x}_i, P_i\} \right\} dx - \mu_c \mu_c^T \\
 &= \sum_{i=1}^N p_i \int_{-\infty}^{+\infty} x x^T N\{x; \hat{x}_i, P_i\} dx - \mu_c \mu_c^T \\
 &= \sum_{i=1}^N p_i (P_i + x_i x_i^T) - \mu_c \mu_c^T \\
 &= \sum_{i=1}^N p_i [P_i + (\hat{x}_i - \mu_c)(\hat{x}_i - \mu_c)^T]
 \end{aligned} \tag{III.3}$$

### III.3 Estimation adaptative à modèles multiples

Généralement lors de la poursuite de cibles, deux classes de modèles sont considérés, à savoir : manœuvrant ou non manœuvrant. Les modèles non manœuvrant sont employés pour exploiter le fait que la plupart des avions civils volent le plus de temps en trajectoires rectilignes. Une telle connaissance introduit la certitude intrinsèque dans le problème d'estimation, qui peut être exploité pour réduire la largeur de bande du filtre de poursuite et par conséquent augmenter considérablement la précision des estimations d'état.

Cependant, dans des applications militaires, les avions peuvent effectuer une variété de manœuvres, rendant nécessaire l'incorporation des modèles manœuvrants dans les systèmes de poursuite pour décrire convenablement le mouvement de la cible.

Deux types de stratégies sont utilisées pour s'adapter aux changements des modèles dynamiques. La première est basée sur l'utilisation de la mesure pour l'estimation des paramètres inconnus de la manœuvre, mais elle présente l'inconvénient d'une adaptation lente lors de la manœuvre.

Quand à la deuxième, elle est basée sur l'utilisation d'une bande parallèle d'estimateurs, permettant ainsi de pallier à l'inconvénient de la première approche. Chacun des estimateurs est

accordé à une condition de fonctionnement différente, leurs sorties sont combinées dans une estimation moyenne pondérée sur l'excursion apparente de chaque filtre élémentaire.

### III.4 Approche d'estimation à modèles multiples pour la poursuite de cibles

Toutes les techniques à modèles multiples partagent la même architecture de base, et diffèrent seulement de la façon avec laquelle les poids des modèles sont calculés, et dans le mélange d'estimations des modèles conditionnés entre les cycles de traitement. Nous allons présenter brièvement les différentes approches à modèles multiples existantes.

Nous supposons dans ce qui suit que chaque filtre basé sur le modèle  $M_j$  a pour sorties les paramètres suivants :

- l'estimée de l'état du modèle  $\hat{x}_j$ .
- La covariance associée  $P_j$ .
- La fonction de vraisemblance du modèle  $\Lambda_j$ .

#### III.4.1 Approche à modèles multiples (cas de non changement de modèles)

Dans cette approche, il est supposé que les cibles peuvent suivre un modèle de mouvement parmi  $r$  possibles. L'algorithme de cette dernière se déroule selon les phases suivantes :

##### III.4.1.1 Calcul des probabilités des modèles

Dans ce calcul aucun argument du temps n'est exigé, car on assume que le modèle ne change pas avec le temps, la probabilité à posteriori que le modèle  $j$  étant correct sachant l'historique de mesure jusqu'à l'instant  $k$  est représentée par :

$$\mu_j(k) = P(M_j/Z^k) \quad \text{III.4}$$

##### III.4.1.2 Calcul des estimées combinées

L'estimation de la moyenne conditionnelle du système est calculée comme une moyenne pondérée des estimées élémentaires de chaque filtre, en utilisant les probabilités des modèles  $\mu_j(k)$  comme poids :

$$\hat{x}(k/k) = \sum_{j=1}^r \mu_j(k) \hat{x}_j(k/k) \quad \text{III.5}$$

La covariance de cette estimation peut également être formulée en utilisant une moyenne pondérée, mais la considération du terme de correction induit par le décalage entre les différentes

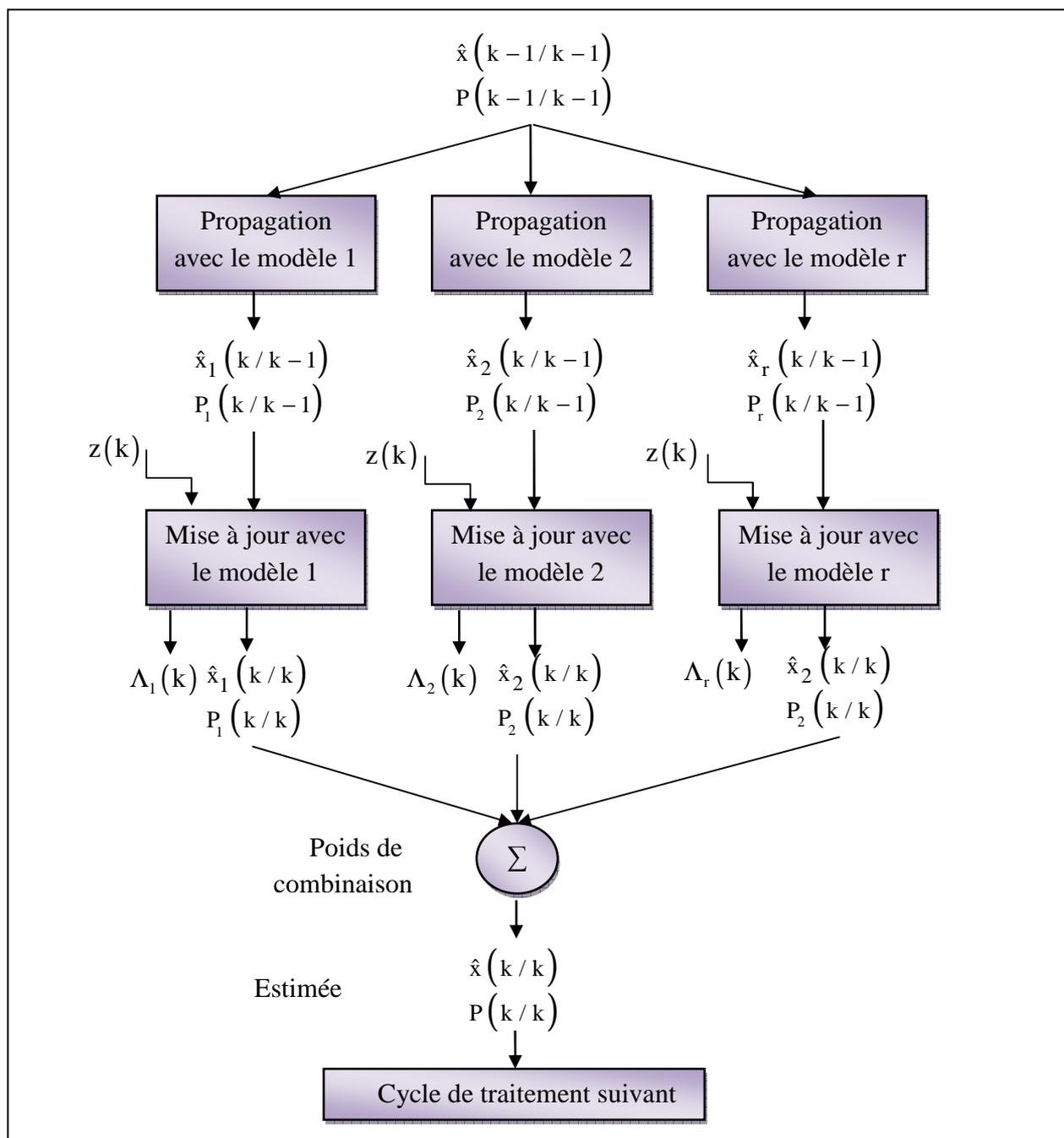


Fig. III.1. Schéma fonctionnel de l'algorithme d'estimation à modèle multiple fixe (Cas de non changement de modèles)

estimées issues de la formulation gaussienne des densités de ces estimées, cette dernière est donnée par :

$$P(k/k) = \sum_{j=1}^r \mu_j(k) \left\{ P_j(k/k) + [\hat{x}_j(k/k) - \hat{x}(k/k)][\hat{x}_j(k/k) - \hat{x}(k/k)]^T \right\} \quad \text{III.6}$$

Où  $\hat{x}_j$  et  $P_j$  sont respectivement l'état et la covariance estimés associés au filtre  $j$ .

La figure (III.1) montre la structure générale de l'algorithme modèle multiple pour des modèles fixes. Les estimées des modèles conditionnées par chaque filtre élémentaire à chaque cycle de traitement sont passées directement dans le même filtre au cycle de traitement suivant, car nous supposons que le modèle ne change pas avec le temps. L'estimation combinée globale est calculée comme moyenne pondérée des estimées des différents filtres.

### III.4.2 Approche à modèles multiples (cas de changement de modèles)

Trois principaux algorithmes ont été proposés qui diffèrent par leur complexité et leur efficacité.

#### III.4.2.1 Estimateur Pseudo-Bayésien Généralisé de premier ordre (GPB-1)

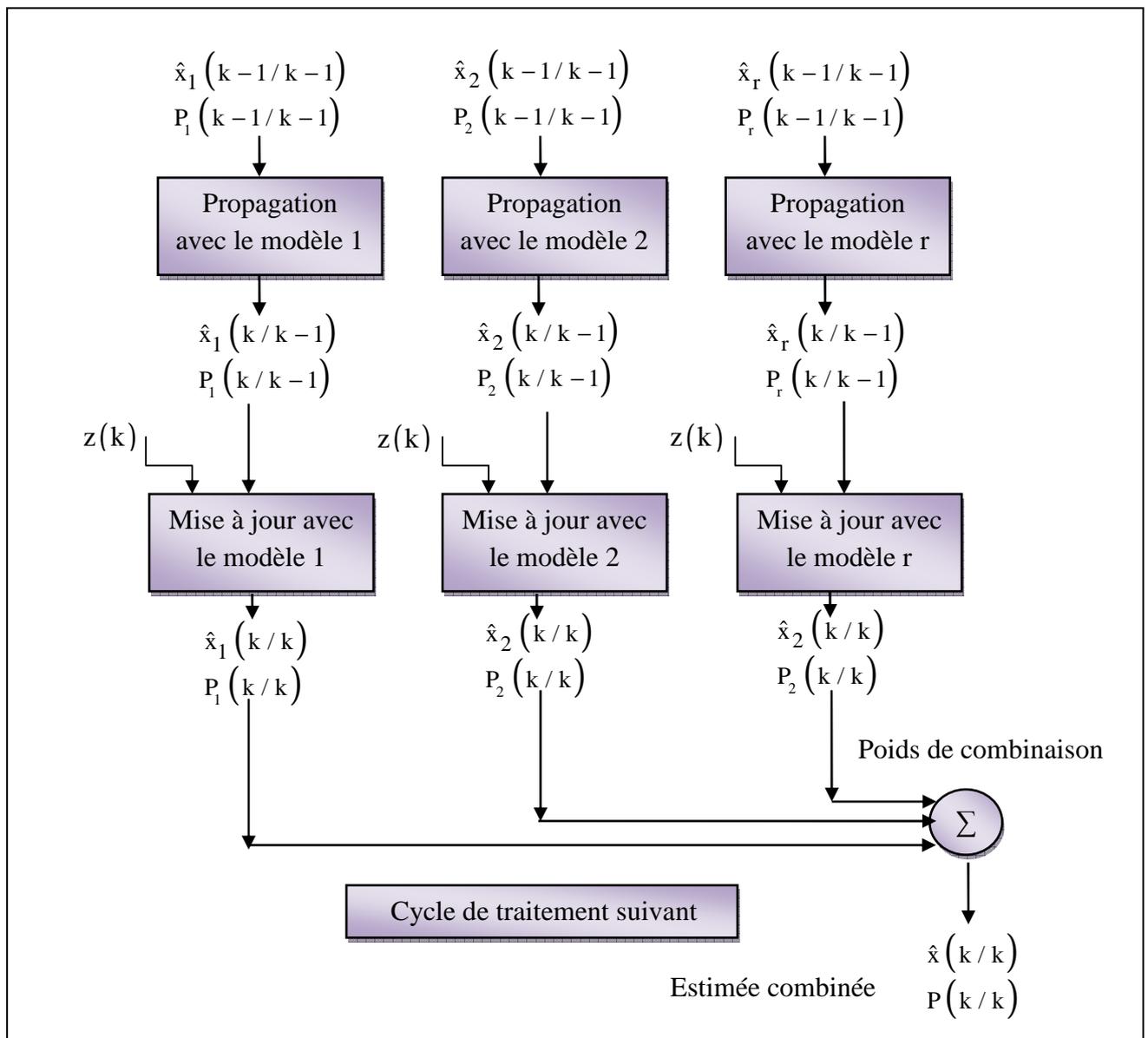


Fig. III.2. Schéma descriptif de l'algorithme GPB-1

Ce type d'estimateur utilise les estimées globales de l'instant précédent comme entrée commune pour tous les filtres. Le nombre d'estimées au début de chaque cycle de l'algorithme est alors  $N_e = 1$  et le nombre de filtres est  $N_f = r$ . La structure de l'algorithme GPB-1 est illustrée par la figure (III.2).

A chaque cycle de traitement, les sorties de tous les filtres sont fusionnées dans un estimé de  $x$  et de  $P$  en utilisant les probabilités des modèles. Elle sera par la suite employée comme entrée de chacun des filtres au prochain cycle de traitement, fournissant une approximation très brute du système optimal.

#### **III.4.2.2 Estimateur Pseudo-Bayésien Généralisé du deuxième ordre (GPB-2)**

Le nombre de filtres nécessaires pour son implémentation est égal au nombre de modèles considérés à la puissance deux. Il présente de bonnes performances accompagnées d'une complexité calculatoire, qui peut être évitée grâce au troisième algorithme.

Le nombre d'estimées au début de chaque cycle de l'algorithme est  $N_e = r$ , et le nombre de filtre  $N_f = r^2$ .

La structure de cet algorithme est représentée par la figure III.3.

Comparé à la structure de l'algorithme GPB-1 représenté dans la figure III.2, l'algorithme GPB-2 utilise  $r^2$  filtres, ainsi il peut maintenir  $r$  estimations et propage chaque estimation avec chacun des  $r$  filtres à chaque intervalle de traitement.

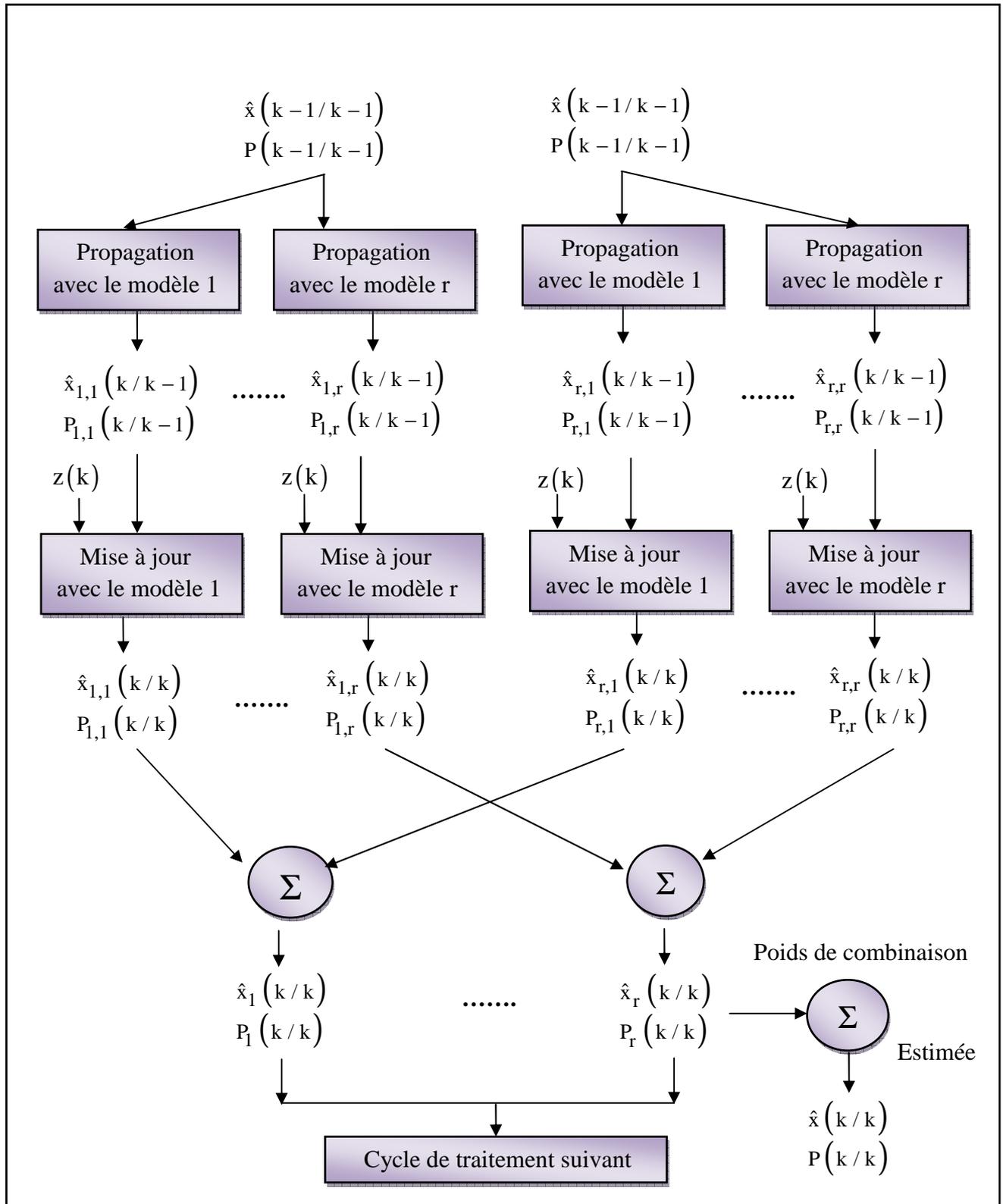


Fig. III.3. Schéma descriptif de l'algorithme GPB-2

### III.4.2.3 Estimateur Modèles multiples Interagissant (IMM)

Une question importante pour l'application de l'estimateur modèle multiple est de réduire le nombre d'hypothèses, c'est-à-dire les combinaisons possibles des estimées au début de chaque cycle de l'algorithme avec les différents filtres.

Ainsi l'estimateur IMM modèle multiple interagissant, en anglais Interacting Multiple Model, réalise une excursion comparable à l'estimateur GPB-2 à l'aide seulement de  $r$  filtres élémentaires plutôt que  $r^2$ .

L'algorithme peut être dérivé en considérant les limitations inhérentes au problème : si seulement  $r$  filtres élémentaires sont permis, alors l'entrée au  $j^{\text{ième}}$  filtre devrait être la meilleure estimation de l'état à l'instant  $k-1$ , conditionnée sur l'événement que le modèle  $j$  est en vigueur à l'instant  $k$  (le nouvel instant d'échantillonnage) :  $f\{x(k-1)/M_{k,j}, Z^k\}$ .

En utilisant cette expression comme point de départ, nous suivons une itération simple de l'algorithme, à travers le calcul de la même fonction à la période d'échantillonnage suivant.

Après un cycle de mise à jour de propagation du filtre de Kalman standard au  $k^{\text{ième}}$  instant d'échantillonnage, la sortie de  $j^{\text{ième}}$  filtre élémentaire sera :  $f\{x(k)/M_{k,j}, Z^k\}$ .

La condition pour l'algorithme IMM est donc de combiner les estimations des  $r$  filtres élémentaires pour calculer les entrées  $f\{x(k)/M_{k+1,j}, Z^k\}$  de chaque filtre élémentaire pour le prochain cycle de traitement.

La PDF globale formée en utilisant l'information de tous les  $r$  filtres représente l'information totale contenue par le système à l'instant  $k$  :

$$f\{x(k)/Z^k\} = \sum_{j=1}^r f\{x(k)/M_{k,j}, Z^k\} P\{M_{k,j}/Z^k\} \quad \text{III.7}$$

De l'équation (III.7) on peut déduire la PDF nécessaire à l'entrée du prochain cycle de traitement :

$$f\{x(k)/Z^k\} = \sum_{j=1}^r f\{x(k)/M_{k+1,j}, Z^k\} P\{M_{k,j}/Z^k\} \quad \text{III.8}$$

Le dernier facteur dans l'équation (III.8) est facilement évalué en utilisant l'hypothèse de Markov :

$$\begin{aligned} P\{M_{k+1,i}/Z^k\} &= \sum_{j=1}^r P\{M_{k+1,i}/Z^k\} P\{M_{k,i}/Z^k\} \\ &= \sum_{j=1}^r P\{M_{k+1,i}/M_{k,i}\} P\{M_{k,j}/Z^k\} \end{aligned} \quad \text{III.9}$$

Notons que si  $T(k+1/k)$  est la matrice de transition de Markov telle que :

$$\{T\}_{ij} = P\{M_{k+1,i}/M_{k,j}\}$$

Alors l'équation (III.9) est simplement une multiplication de la matrice  $T(k+1/k)$  par le vecteur dont les éléments sont les probabilités  $P\{M_{k,j}/Z^k\}$ , remplaçant le vecteur des composants qui représentent les probabilités  $P\{M_{k+1,i}/Z^k\}$ .

Le facteur principal dans la somme d'équation (III.8) est alors augmenté en utilisant le théorème de probabilité totale au dessus du modèle précédent de l'index  $j$  :

$$f\{x(k)/M_{k+1,i}, Z^k\} = \sum_{j=1}^r \{x(k)/M_{k+1,i}, M_{k,j}, Z^k\} P\{M_{k,j}/M_{k+1,i}, Z^k\} \quad \text{III.10}$$

Où les probabilités en arrière de transition sont calculées par :

$$\begin{aligned} P\{M_{k,j}/M_{k+1,i}, Z^k\} &= \frac{P\{M_{k,j}, M_{k+1,i}/Z^k\}}{P\{M_{k+1,i}/Z^k\}} \\ &= \frac{P\{M_{k+1,i}/M_{k,j}, Z^k\} P\{M_{k,j}/Z^k\}}{P\{M_{k+1,i}/Z^k\}} \\ &= \frac{P\{M_{k+1,i}/M_{k,j}, Z^k\} P\{M_{k,j}/Z^k\}}{\sum_{n=1}^r P\{M_{k+1,i}/M_{k,n}, Z^k\} P\{M_{k,n}/Z^k\}} \end{aligned} \quad \text{III.11}$$

Selon l'hypothèse de Markov, la probabilité de transition  $P\{M_{k+1,i}/M_{k,j}, Z^k\}$  ne dépend pas de l'historique de  $Z^k$ .

Supposant que l'historique  $Z^k$  de l'estimateur est convenablement modelé par les  $r$  estimations du cycle de traitement précédent (chaque estimation conditionnée sur un modèle différent  $M_{k,i}$ ), l'équation (III.10) est alors approximée par une densité gaussienne simple :

$$\begin{aligned} f\{x(k)/M_{k+1,i}, Z^k\} &\approx \sum_{j=1}^r f\{x(k)/M_{k+1,i}, \hat{x}_i(k/k), P_i(k/k)\} P\{M_{k,j}/M_{k+1,i}, Z^k\} \\ &\approx N\{x(k), \hat{x}^i(k/k), P_i(k/k)\} \end{aligned} \quad \text{III.12}$$

Dont la moyenne et la variance de la gaussienne sont données par :

$$\begin{aligned} \hat{x}^i(k/k) &= \sum_{j=1}^r P\{M_{k,j}/M_{k+1,i}, Z^k\} \hat{x}_j(k/k) \quad i=1, \dots, r \\ P^i(k/k) &= \sum_{j=1}^r P\{M_{k,j}/M_{k+1,i}, Z^k\} \left\{ P_j(k/k) + [\hat{x}_j(k/k) - \hat{x}^i(k/k)] [\hat{x}_j(k/k) - \hat{x}^i(k/k)]^T \right\} \end{aligned} \quad \text{III.13}$$

Avec :

$$\mu_{i/j} = P\{M_{k+1,i}/Z^k\}. \quad \text{III.14}$$

Les probabilités a posteriori des modèles  $P\{M_{k+1,i}/Z^k\}$  exigées pour l'équation (III.11) sont récursivement calculées en utilisant les expressions :

$$\begin{aligned} P\{M_{k,j}/Z^k\} &= P\{M_{k,j}/z(k), Z^k\} \\ &= \frac{f\{M_{k,j}, z(k)/Z^k\}}{f\{z(k)/Z^k\}} \\ &= \frac{f\{z(k)/M_{k,j}, Z^{k-1}\} P\{M_{k,j}/Z^{k-1}\}}{f\{z(k)/Z^k\}} \end{aligned} \quad \text{III.15}$$

Comme discuté dans l'équation (III.9),  $P\{M_{k,j}/Z^k\}$  peut être augmentée ou développée en utilisant le théorème de la probabilité totale comme suit :

$$P\{M_{k,j}/Z^{k-1}\} = \sum_{j=1}^r P\{M_{k,j}/M_{k-1,i}\} P\{M_{k-1,j}/Z^{k-1}\} \quad \text{III.16}$$

Où l'hypothèse que la probabilité de transition du modèle ne dépend pas de l'historique de mesure est de nouveau appelée.

Ainsi, en remplaçant l'équation (III.16) dans l'équation (III.15) et en développant le dénominateur en utilisant le théorème de la probabilité totale, cette dernière devient :

$$P\{M_{k,j}/Z^k\} = \frac{f\{z(k)/M_{k,j}, Z^{k-1}\} \sum_{j=1}^r P\{M_{k,j}/M_{k-1,i}, Z^{k-1}\} P\{M_{k-1,i}/Z^{k-1}\}}{\sum_{n=1}^r f\{z(k)/M_{k,n}, Z^{k-1}\} P\{M_{k,n}/Z^{k-1}\}} \quad \text{III.17}$$

On note que le dénominateur est simplement le facteur de normalisation nécessaire pour assurer que la somme de probabilités des modèles conditionnels est égale à 1.

Selon les techniques à modèles multiples précédentes, l'estimation combinée est calculée à chaque cycle de traitement pour donner la sortie de l'estimateur.

La structure de l'algorithme IMM est très semblable à la structure des modèles fixe (cas de non changement de modèles) illustré par la figure (III.1) : il y a r filtres, dont chacun possède une entrée différente. Cependant, plutôt de passer la sortie de chaque filtre directement dans le même filtre au prochain cycle de traitement, l'algorithme mélange les estimations selon le modèle de transition de Markov afin de permettre au système de réagir aux changements du modèle en vigueur. D'une autre façon, l'entrée au filtre assorti au modèle i est obtenue par une interaction de r filtres, qui consiste à

mélanger les estimées  $x_j(k/k)$  avec les pondérations (probabilités)  $\mu_{i/j}(k/k)$ , appelées probabilités mixtes.

La structure de l'algorithme IMM est  $(N_e, N_f) = (r, r)$ .

où  $N_e$  est le nombre d'estimées au début de chaque cycle de l'algorithme et  $N_f$  le nombre de filtres.

La figure III.4 illustre cette structure.

### III.5 L'algorithme IMM

Nous allons présenter les différentes étapes de l'algorithme IMM.

Le système observé évolue par sélection d'un modèle parmi  $r$  modèles linéaire avec des basculements d'un modèle à un autre. Soit  $j$  l'indice du modèle,  $j \in \{1, r\}$ . Nous supposons des modèles d'état de la forme :

$$\begin{aligned} x(k) &= F_j(k)x(k-1) + w(k-1) \\ z(k) &= H_j x(k) + v(k) \end{aligned} \quad \text{III.18}$$

où  $x(k)$  est le vecteur d'état à l'instant  $k$ ,  $z(k)$  est le vecteur de mesure,  $F_j(k)$  est la matrice d'état,  $H_j(k)$  est la matrice de mesure,  $w(k)$  et  $v(k)$  sont respectivement le bruit d'état et le bruit de mesure tel que :

$$E[w(k)w(i)^T] = \begin{cases} Q(k) & \text{pour } k = i \\ 0 & \text{pour } k \neq i \end{cases}$$

$$E[v(k)v(i)^T] = \begin{cases} R(k) & \text{pour } k = i \\ 0 & \text{pour } k \neq i \end{cases}$$

$$E[w(k)v(i)^T] = 0 \quad \forall k, i$$

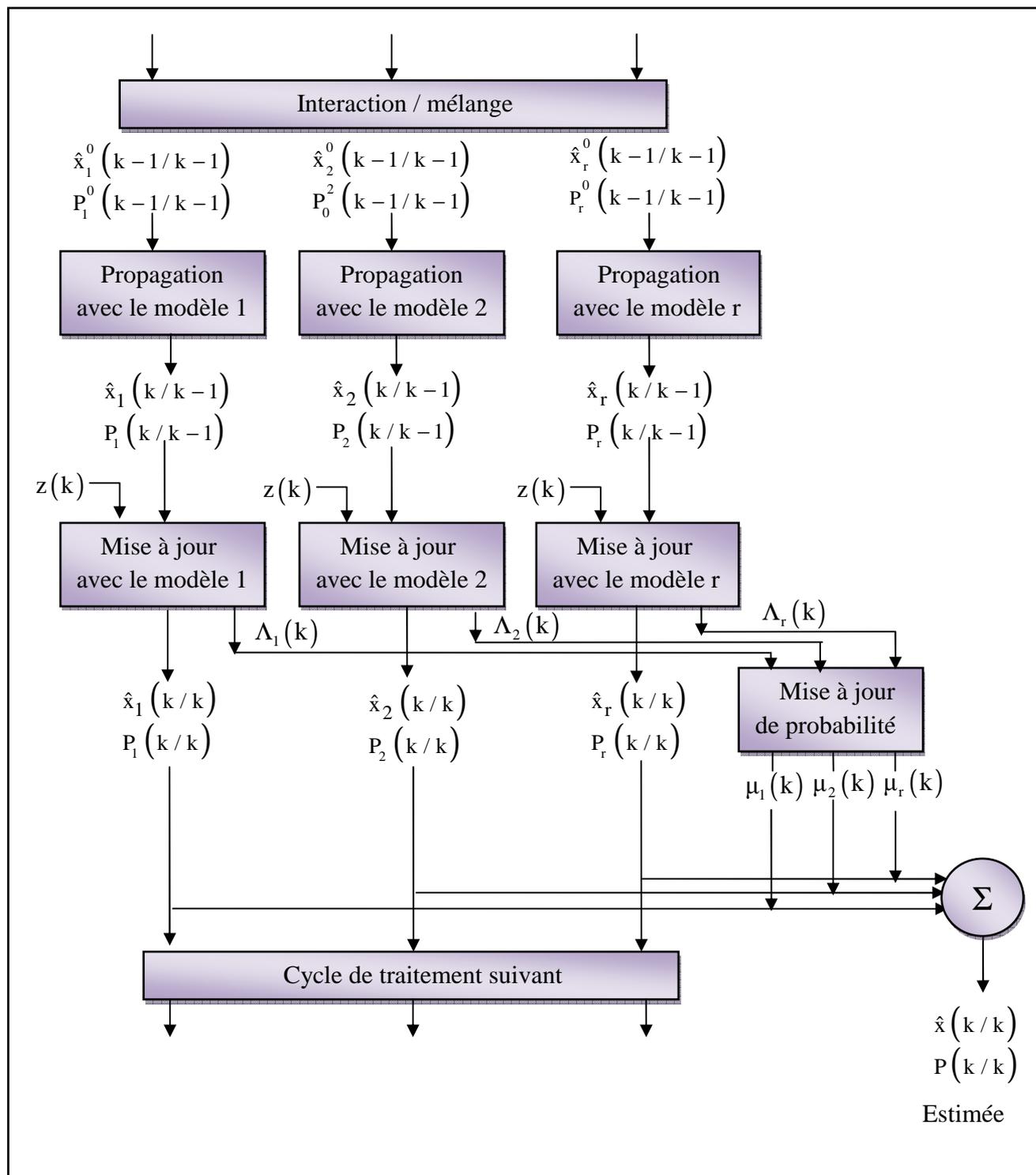


Fig.III.4. Schéma descriptif de l'algorithme IMM

• **Calcul de probabilité mixte :**

Soit  $p_{ij}$  la probabilité de transition du modèle  $j$  vers le modèle  $i$ . la probabilité d'utilisation du modèle  $j$  à l'instant  $k-1$  est  $\mu_j(k-1)$ , la probabilité prédite est :

$$\bar{c}^j = \sum_{i=1}^r p_{ij} \mu_i(k-1)$$

A chaque nouvelle itération, les estimations calculées précédemment pour chaque modèle sont fusionnées. Nous calculons ainsi  $\mu_{ij}$  la probabilité conditionnelle d'utilisation d'un modèle  $j$  sachant que nous utilisons un modèle  $i$  :

$$\mu_{ij}(k-1) = \frac{p_{ij}\mu_i(k-1)}{\bar{c}_j} \quad \text{III.20}$$

- **Le mélange (mixing)**

L'estimation de l'état fusionné pour le modèle  $j$  est donnée par la relation (III.21), celle de la covariance de l'état par l'équation (III.22) :

$$\hat{x}_{0j}(k-1) = \sum_{i=1}^r \hat{x}_i(k-1/k-1)\mu_{ij}(k-1) \quad \text{III.21}$$

$$P_{0j}(k-1) = \sum_{i=1}^r \mu_{ij}(k-1) \left[ P_i(k-1) + (V^{ij})(V^{ij})^T \right] \quad \text{III.22}$$

Avec :  $V^{ij} = \hat{x}_i(k-1/k-1) - \hat{x}_{0j}(k-1)$

Chaque estimation fusionnée est mise à jour avec la nouvelle mesure  $z(k)$ , disponible à l'instant  $k$ . Les équations de prédiction sont alors :

$$\text{Etat : } \hat{x}_j(k/k-1) = F_j \hat{x}_{0j}(k-1) \quad \text{III.23}$$

$$\text{Covariance : } P_j(k/k-1) = F_j P_{0j}(k-1/k-1) F_j^T + Q_j$$

La mesure résiduelle est :  $\text{inov}_j(k) = z(k) - H_j \hat{x}_j(k/k-1)$  .

L'estimation de sa matrice de covariance est :  $S_j(k) = H_j P_j(k/k-1) H_j^T + R_j$ .

L'expression du gain est :

$$K_j(k) = (P_j(k/k-1) H_j^T) / S_j(k) \quad \text{III.24}$$

Et les estimations (correction état) sont :

$$\text{Etat : } \hat{x}_j(k/k) = \hat{x}_j(k/k-1) + K_j(k) \text{inov}_j(k) \quad \text{III.25}$$

$$\text{Covariance : } P_j(k/k) = P_j(k/k-1) - K_j(k) H_j P_j(k/k-1)$$

- **Mise à jour de probabilité du modèle**

Il est généralement nécessaire de mettre à jour les probabilités des différents modèles. Elles sont recalculées à partir de leurs probabilités prédites et leurs fonctions de vraisemblance. Pour un modèle  $j$  la fonction de vraisemblance est donnée, dans un cas gaussien, par :

$$\Lambda_j(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|S_j(k)|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\text{inov}_j(k))^T (S_j(k))^{-1} (\text{inov}_j(k))\right) \quad \text{III.26}$$

Il en résulte la probabilité  $\mu_j$  du modèle  $j$  :

$$\mu_j(k) = \frac{1}{c} \Lambda_j(k) \bar{c}_j \quad \text{Avec :} \quad c = \sum_{j=1}^r \Lambda_j(k) \bar{c}_j$$

- **Combinaison des états estimés et covariances**

$$\text{Etat : } \hat{x}(k/k) = \sum_{j=1}^r \hat{x}_j(k/k) \mu_j(k) \quad \text{III.27}$$

$$\text{Covariance : } P(k/k) = \sum_{j=1}^r \mu_j(k) \left[ P_j(k/k) + [\hat{x}_j(k/k) - \hat{x}(k/k)] [\hat{x}_j(k/k) - \hat{x}(k/k)]^T \right]$$

- **Organigramme détaillé de l'algorithme IMM**

L'algorithme à modèles multiples interactifs IMM pour la simulation de la poursuite de cibles manoeuvrantes est représenté dans l'organigramme de la figure (III.5). Il se compose d'une partie d'initialisation et de deux ou trois filtres de Kalman.

Chaque modèle de l'algorithme IMM suit les étapes de l'organigramme ci-dessous :

Il commence par l'initialisation de la probabilité de transition  $p_{ij}$ , la probabilité d'utilisation  $\mu_0^j$ , la covariance de l'erreur  $P_0^j$  et l'état initial du vecteur d'état  $x_0^j$ .

- Calcul de la probabilité d'utilisation  $\mu_{ij}$ .
- Calcul de l'état et de la covariance initial mélangés.
- Prédiction de l'état et de la covariance du modèle  $j$ .
- Calcul du gain, de l'innovation de mesure, de la covariance et de la fonction de vraisemblance.
- Correction de l'état et la covariance de modèle  $j$ .
- Calcul de l'état final et la covariance finale.

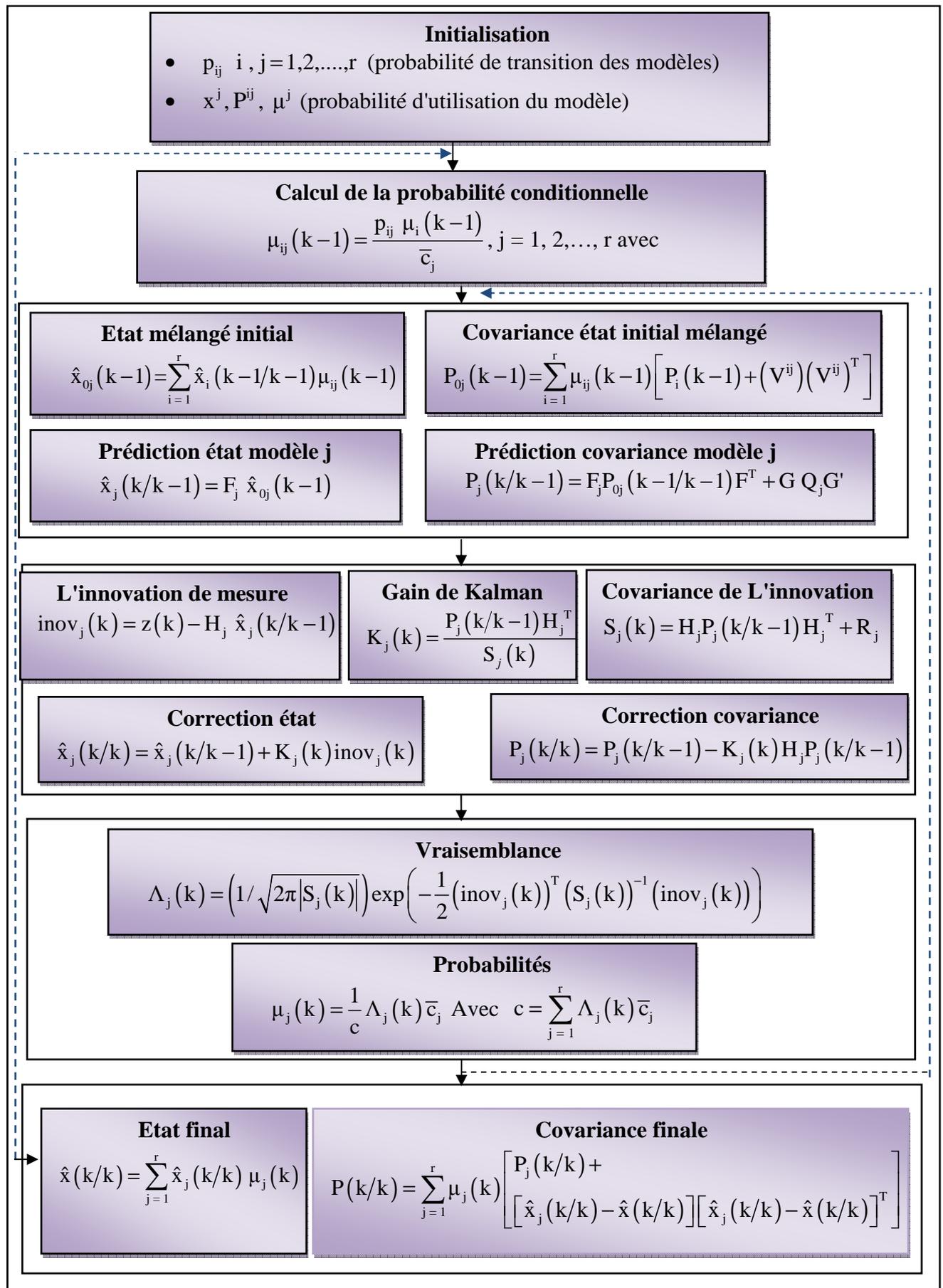


Fig. III.5. Organigramme de l'algorithme IMM

### **III.6 Conclusion**

Dans ce présent chapitre, nous avons cité quelques algorithmes de poursuite de cibles manœuvrantes, et nous avons détaillé l'algorithme interactif multiple modèle dont nous allons utiliser dans notre programme.

---

---

## IV APPROCHE PROBABILISTE D'ASSOCIATION DE DONNEES

---

### IV.1 Introduction

La gestion d'un système complexe de surveillance nécessite des moyens de perception lui permettant d'appréhender son environnement. La connaissance de cet environnement passe le plus souvent par des informations et des connaissances à priori et par une collecte de données de diverses natures provenant de cibles. L'association de ces données disponibles aux cibles existantes à des instants communs, permet d'accroître la connaissance de l'état de ces cibles.

Dans cette partie, nous allons décrire certains algorithmes d'associations les plus couramment utilisés.

### IV.2 Fenêtrage statistique

Dans un contexte de pistage en présence de "clutter", une première phase essentielle pour l'association de données est le fenêtrage. Le fenêtrage est effectué pour chaque piste et à chaque instant par la définition d'une zone de surveillance appelée fenêtre (ou région d'intérêt) dont le centre est la mesure prédite issu du filtrage. La mesure ou l'ensemble de mesures présentes dans cette région est sélectionné pour l'association, les autres sont ignorées. Il permet donc de ne pas prendre en considération les mesures qui sont loin de la mesure prédite et de ne sélectionner que celles ayant la plus forte probabilité d'entretenir la piste, dans le but d'intégrer au filtre les bonnes mesures et éviter les calculs inutiles en cas de présence de "clutter".

La taille de la fenêtre influence le nombre de mesures validées de la manière suivante : Si on choisit une fenêtre trop petite alors la probabilité d'éliminer la mesure provenant de la cible augmente, ce qui provoque la perte de la piste. Et si la taille est trop grande, il y a risque d'utiliser un nombre de mesures ne provenant pas de la cible mais plutôt des clutter, ce qui va augmenter le temps de calcul et détériore la précision du pistage.

La fenêtre de validation doit donc être suffisamment grande pour qu'une mesure provenant d'une cible s'y trouve et suffisamment petite pour pouvoir filtrer efficacement les mesures indésirables.

La plupart méthodes utilisent des types de fenêtres ellipsoïdaux comme le montre la figure IV.1.

---

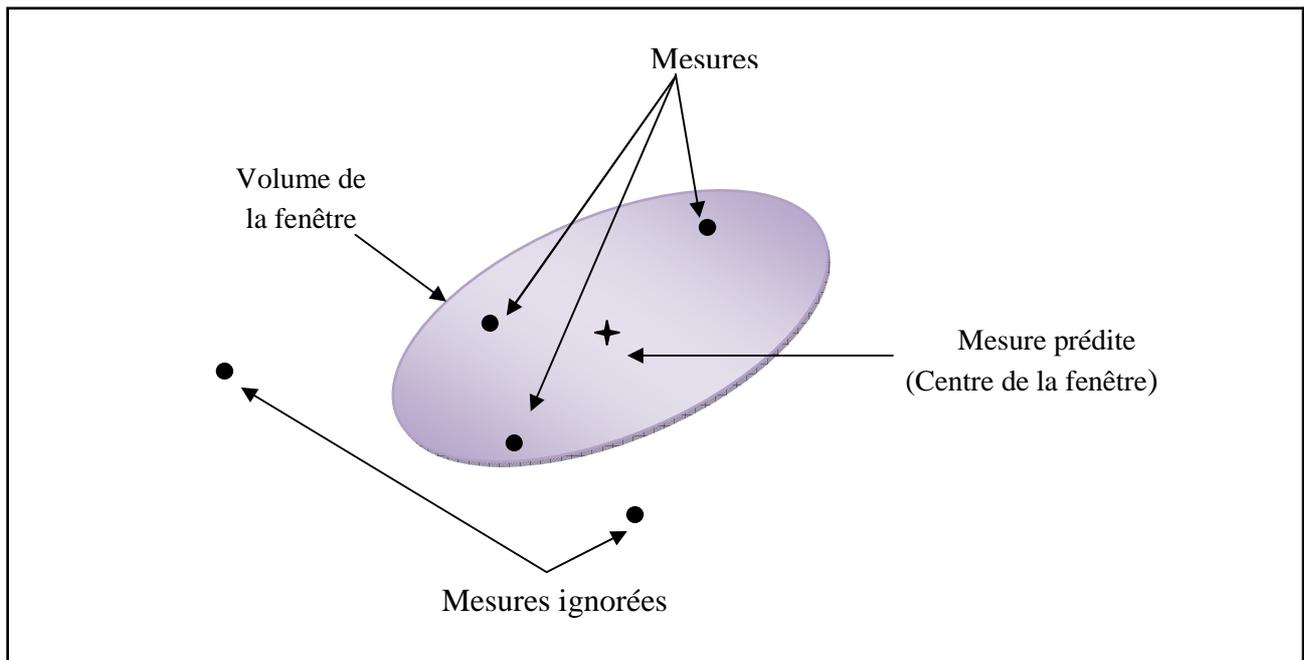


Fig. IV.1. Fenêtre ellipsoïdale

Pour calculer le test de validation  $T(z)$ , il faut supposer que la mesure  $z$  provient de la cible et que la probabilité de  $x(k)$  connaissant l'ensemble  $Z^{k-1}$  des mesures validées jusqu'à l'instant  $k-1$ , vérifie :

$$p(x(k)/z^{k-1}) = N(x(k), \hat{x}(k/k-1); P(k/k-1))$$

où  $N(x, m; P)$  désigne la densité de probabilité gaussienne de variable  $x$ , de moyenne  $m$  et de covariance  $P$ . l'état prédit  $\hat{x}(k/k-1)$  et la covariance prédite  $P(k/k-1)$  sont disponible à l'étape  $k$ . le test de validation s'obtient en imposant un seuil minimal  $\gamma$  à la distance normalisé

$$d^2 = \tilde{z}^T(k) S^{-1} \tilde{z}(k)$$

avec :

$$\tilde{z}(k) = z - \hat{z}(k/k-1) \quad \text{et} \quad \hat{z}(k/k-1) = H(k) \hat{x}(k/k-1)$$

$$S(k) = H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)$$

Le test de validation de la mesure est le suivant :

$$\begin{cases} T(z) = 1 & \text{si } d^2 \leq \gamma \quad (z \text{ validée}) \\ T(z) = 0 & \text{si } d^2 > \gamma \quad (z \text{ rejetée}) \end{cases}$$

Le seuil  $\gamma$  est fixé en choisissant la taille de la fenêtre de validation de telle sorte que la probabilité de trouver la mesure correcte à l'intérieur de cette fenêtre soit égale à  $P_g$ .  $\gamma$  est lié à  $P_g$

par la relation :  $P_g = p(x_{n_z}^2 \leq \gamma)$  où  $x_{n_z}^2$  désigne une variable de loi de distribution chi-deux de  $n_z$  degré de liberté dont les valeurs sont obtenues à partir de tables.

A chaque Instant  $k$ , nous calculons la distance  $d^2$  entre les différentes mesures et les mesures prédites, puis les comparer au seuil. Nous obtiendrons à la fin la matrice de corrélation mesures/piste qui contiendra les mesures validées.

### IV.3 Algorithmes classiques d'association de données

Il existe fondamentalement deux différents modèles sur lesquels les algorithmes d'association de données peuvent être construits.

Le premier est déterministe, où il est considéré que le résultat de l'association est certain, dans ce cas un test sur les hypothèses d'association est effectué pour sélectionner la plus probable en acceptant les hypothèses sujettes à des probabilités d'erreurs. Le résultat d'une association déterministe est un ensemble d'observations assignées aux différentes pistes existantes, qui seront utilisées directement dans l'algorithme de poursuite mis en place pour une éventuelle mise à jour des états estimés.

Le deuxième modèle est probabiliste, où les probabilités des différents événements (ex. : la mesure «x» appartient à la cible «y») pour chaque cible sont calculées, ainsi toutes les mesures appartenant à la région formée par les différentes fenêtres des pistes existantes, seront considérées avec des pondérations différentes pour la mise à jour d'une piste à la fois.

Nous présentons ici, d'une manière assez brève, les algorithmes classiques d'association de données rencontrés souvent dans la littérature dédiés à la poursuite.

#### IV.3.1 Méthode du plus proche voisin (PPV)

Cette méthode est plus connue sous la désignation anglo-saxonne de NN (Nearest Neighbour). Il existe différentes versions.

C'est une approche purement séquentielle : pour chaque nouvel ensemble d'observations, le but est de trouver l'association la plus probable entre une observation et une piste existante, ou entre une nouvelle observation et l'hypothèse d'une nouvelle piste. Comme son nom l'indique, cette méthode prend en compte la plus proche mesure pour effectuer la mise à jour de la trajectoire.

Le principal inconvénient de la méthode du plus proche voisin tient au fait que la décision sur l'association est immédiate et irrévocable, car elle ignore totalement les autres mesures : l'hypothèse la plus probable est considérée comme vraie. Son principal avantage, outre sa popularité, est son faible coût calculatoire.

---

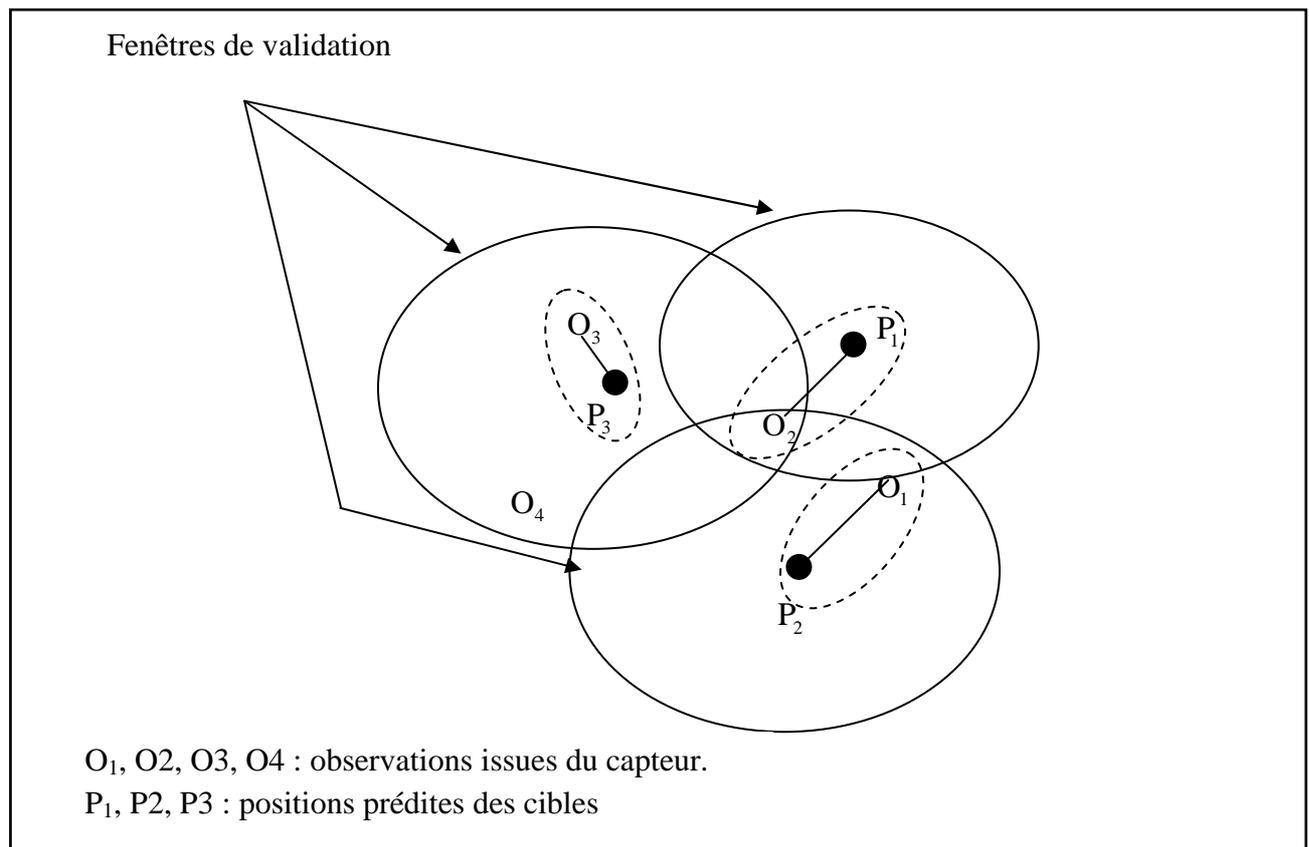


Fig. IV.2. Exemple d'association NN

La figure (IV.2) représente une situation utilisant une association de type plus proche voisin :  $O_3$  est associé à  $P_3$  parce qu'en étant la plus proche, de la manière,  $O_2$  est associé à  $P_1$ ,  $O_1$  est associé à  $P_2$ .  $O_4$  n'est associé à aucune cible.

### IV.3.2 Filtre probabiliste d'association de données (PDAF)

Le filtre récursif bayésien sous optimal à association probabiliste de données (PDAF), n'est pas seulement un filtre de poursuite multicibles, mais permet de prendre en compte la présence de fausses alarmes. Plusieurs observations peuvent être retournées à un instant « $k$ » par le capteur, alors que l'on suppose la présence d'un seul objet dans le champ de vue du capteur.

Le PDAF sélectionne les mesures les plus probables à l'aide d'un fenêtrage statistique, donc il tient compte de toutes les observations du capteur se trouvant dans la fenêtre de validation pour mettre à jour le filtre de Kalman afin de déduire une unique position de la cible estimée.

### IV.4 Forme de l'estimateur PDAF

Les hypothèses sur la nature des observations sont les suivantes :

- L'origine des observations est double : ou bien l'observation provient du système étudié, ou bien il s'agit d'une observation indésirable.
- Les observations sont résolues : chaque observation ne provient que d'une seule origine.

- L'observation issue du système étudié est unique et n'est disponible que s'il y a en détection.
- Les observations indésirables sont indépendantes de la cible, indépendantes les une des autres et uniformément réparties.

#### IV.4.1 Hypothèses d'association

Soit  $m_k$ , le nombre de mesures validées à l'instant  $k$  par la technique du fenêtrage statistique.

Il existe un ensemble exhaustif de  $m_{k+1}$  hypothèses incompatibles concernant l'origine des mesures. Ces hypothèses sont caractérisées par les événements suivants :

$$\begin{aligned}\theta_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{aucune des mesures validées à l'instant } k \text{ ne provient de la cible} \} \\ \theta_j &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{la } j^{\text{ème}} \text{ mesure validée à l'instant } k \text{ provient de la cible} \} \quad (1 \leq j \leq m_k)\end{aligned}\tag{IV.1}$$

La probabilité conditionnelle de réalisation  $\beta_j$ , connaissant l'ensemble  $z^k$  des mesures validées jusqu'à l'instant  $k$ , est notée :

$$\beta_j \stackrel{\text{def}}{=} p_r(\theta_j / z^k) \quad (0 \leq j \leq m_k)\tag{IV.2}$$

Les probabilités conditionnelles de réalisation de  $\theta_0$  et  $\theta_j$ , connaissant l'ensemble des mesures disponibles jusqu'à l'instant  $k$  sont démontrées dans le paragraphe (IV.3.2.6).

#### IV.4.2 Mise à jour de l'état prédit

L'estimateur PDAF est donné par la moyenne conditionnelle fondée sur toutes les observations validées jusqu'à l'instant  $k$  :

$$\hat{x}(k/k-1) = E[x(k)/z^k] = \int x p(x/z^k) dx\tag{IV.3}$$

Puisque les hypothèses d'association sont mutuellement exclusives et exhaustives, l'équation (IV.3) se décompose en utilisant le théorème des probabilités totales :

$$\hat{x}(k/k) = \sum_{j=0}^{m_k} \beta_j E[x(k)/z^k, \theta_j]\tag{IV.4}$$

Quand la  $j^{\text{ème}}$  mesure validée provient de la cible (hypothèse  $\beta_j$ ,  $j \neq 0$ ) l'espérance du vecteur d'état s'obtient directement par l'équation de mise à jour d'un filtre de Kalman standard exploitant la mesure  $z_j(k)$  :

$$\hat{x}_j(k/k) \stackrel{\text{def}}{=} E[x(k)/z^k, \theta_j] = \hat{x}_j(k/k-1) + K(k) \tilde{z}_j(k)\tag{IV.5}$$

avec :

$$\mathbf{K}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}(k/k-1) \mathbf{H}^T(k) \mathbf{S}^{-1}(k) \quad \text{IV.6}$$

Et :

$$\tilde{z}_j(k) \stackrel{\text{def}}{=} z_j(k) - \hat{z}(k/k-1) \quad (j \neq 0) \quad \text{IV.7}$$

Quand aucune des mesures validées à l'instant  $k$  ne provient de la cible (hypothèse  $\theta_0$ ), la meilleure estimation de  $\mathbf{x}(k)$  est donnée par l'état prédit, d'où l'écriture :

$$\hat{\mathbf{x}}_0(k/k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}[\mathbf{x}(k)/z^k, \theta_0] = \hat{\mathbf{x}}(k/k-1) \quad \text{IV.8}$$

En utilisant l'équation (IV.4) et (IV.5) nous auront :

$$\hat{\mathbf{x}}(k/k) = \hat{\mathbf{x}}(k/k-1) + \mathbf{K}(k) \sum_{j=0}^{m_k} \beta_j \tilde{z}_j(k) \quad \text{IV.9}$$

Quand aucune mesure n'est validée à l'instant  $k$  ( $m_k = 0$ ), l'état prédit est propagé comme pour l'hypothèse  $\theta_0$  (IV.8).

#### IV.4.3 Mise à jour de la covariance prédite

La mise à jour de la covariance prédite  $\mathbf{P}(k/k-1)$  est donnée par la variance du vecteur d'état conditionnellement à l'ensemble des observations validées :

$$\mathbf{P}(k/k) \stackrel{\text{def}}{=} \text{var}(\mathbf{x}(k)/z^k) = \mathbf{E}[\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)/z^k] - \hat{\mathbf{x}}(k/k) \hat{\mathbf{x}}^T(k/k) \quad \text{IV.10}$$

Le moment du second ordre se décompose à l'aide des hypothèses d'association :

$$\mathbf{P}(k/k) = \sum_{j=0}^{m_k} \beta_j \mathbf{E}[\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)/z^k, \theta_j] - \hat{\mathbf{x}}(k/k) \hat{\mathbf{x}}^T(k/k) \quad \text{IV.11}$$

Le premier terme de l'équation précédente s'écrit :

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)/z^k, \theta_j] = \text{var}(\mathbf{x}(k)/z^k, \theta_j) + \hat{\mathbf{x}}(k/k) \hat{\mathbf{x}}_j^T(k/k) \quad \text{IV.12}$$

Quand la  $j^{\text{ème}}$  mesure validée provient de la cible (hypothèse  $\beta_j$ ,  $j \neq 0$ ), le premier terme de l'équation (IV.12) correspond à la matrice de covariance corrigée obtenue par un filtre de Kalman standard exploitant la mesure  $z_j(k)$ . Pour l'hypothèse  $\theta_0$ , la meilleure estimation supposée de la variance de  $\mathbf{x}(k)$  est la covariance prédite ; d'où l'écriture :

$$\text{var}(\mathbf{x}(k)/z^k) = \begin{cases} \mathbf{P}_c \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \mathbf{H}(k)) \mathbf{P}(k/k-1) & j \neq 0 \\ \mathbf{P}(k/k-1) & j = 0 \end{cases} \quad \text{IV.13}$$

En reportant (IV.13) dans (IV.12), puis dans (IV.11) et en utilisant les relations (IV.5), (IV.8) et (III.22), et après quelques opérations algébriques,  $P(k/k-1)$  s'écrit :

$$P(k/k-1) = \beta_0 P(k/k-1) + (1-\beta_0) P_c + \tilde{P} \quad \text{IV.14}$$

Avec

$$\tilde{P} \stackrel{\text{def}}{=} K(k) \left\{ \sum_{j=1}^{m_k} \beta_j \tilde{z}_j \tilde{z}_j^T - \left( \sum_{j=1}^{m_k} \beta_j \tilde{z}_j \right) \left( \sum_{j=1}^{m_k} \beta_j \tilde{z}_j \right)^T \right\} K^T(k) \quad \text{IV.15}$$

Si aucune mesure n'est validée ( $m_k = 0$ ), la matrice de covariance prédite est donnée par  $P(k/k) = P(k/k-1)$

#### IV.4.4 Equations de prédiction

Pour obtenir un filtre récursif et pour valider l'hypothèse de normalité, il faut approcher la densité de  $x(k)$  par une loi gaussienne :

$$p(x(k)/z^k) \approx N(x(k), \hat{x}(k); P(k/k)) \quad \text{IV.16}$$

Avec cette approximation, les équations de prédiction de l'état et de la covariance sont calculées comme celle d'un Kalman standard :

$$\hat{x}(k/k+1) = F \hat{x}(k/k) \quad \text{IV.17}$$

$$P(k/k+1) = F P(k/k) F^T(k) + G Q(k) G^T \quad \text{IV.18}$$

L'état prédit et la covariance prédite sont disponibles pour l'étape  $k+1$ . Il est important de noter que, contrairement à un filtre de Kalman standard, le PDAF est un filtre récursif sous-optimal.

#### IV.4.5 Evaluation des probabilités

Pour évaluer les probabilités d'association, le traitement est décomposé en données antérieures  $z^{k-1}$  et actuelle  $z^k$ . On pourra écrire la probabilité  $\beta_i$  de l'événement  $\theta_i$  sachant les mesures  $z^k$  :

$$\beta_i(k) = P\{\theta_i(k)/z^k\} = P\{\theta_i(k)/z^k, m(k), z^{k-1}\}$$

Où  $m(k)$  désigne le nombre de mesures validées à l'instant  $k$ .

En utilisant la formule de Bayes, l'équation précédente devient :

$$\beta_i(k) = \left( \frac{1}{c} \right) P[z(k)/\theta_i, m(k), z^{k-1}] P\{\theta_i/m(k), z^{k-1}\} \quad i=0, \dots, m(k) \quad \text{IV.19}$$

Où  $c$  est un coefficient de normalisation.

La densité de probabilité de la mesure correcte s'écrit :

$$\begin{aligned} P[z(k)/\theta_i, m(k), z^{k-1}] &= P_G^{-1} N[z_i(k); z(k/k-1), S(k)] \\ &= P_G^{-1} N[V_i(k); 0, S(k)] \end{aligned} \quad \text{IV.20}$$

Où  $P_G$  est la probabilité pour que la mesure correcte soit située à l'intérieur de la fenêtre.

Le premier facteur de l'équation (IV.19) pourra s'écrire :

$$P[z(k)/\theta_i, m(k), z^{k-1}] = \begin{cases} V(k)^{-m(k)+1} P_G^{-1} N[V_i; 0; S(k)] & i = 0, \dots, m(k) \\ V(k)^{-m(k)} & i = 0 \end{cases} \quad \text{IV.21}$$

Où  $V(k)$  représente le volume de la fenêtre de validation donné par l'équation :

$$V(k) = c_{n_z} |\gamma S(k)|^{1/2} = c_{n_z} \gamma^{n_z/2} |S(k)|^{1/2} \quad \text{IV.22}$$

Où  $c$  est une constante qui dépend de la dimension du vecteur de mesure,  $\gamma$  le seuil et  $S$  la matrice d'innovation.

Le second facteur de l'équation (IV.19) est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} &P\{\theta_i/m(k), z^{k-1}\} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{m(k)} P_D P_G \left[ P_D P_G + \left( 1 - P_D P_G \frac{\mu_F(m(k))}{\mu_F(m(k)-1)} \right) \right]^{-1} & i = 0, \dots, m(k) \\ (1 - P_D P_G) \frac{\mu_F(m(k))}{\mu_F(m(k)-1)} \left[ P_D P_G + \left( 1 - P_D P_G \frac{\mu_F(m(k))}{\mu_F(m(k)-1)} \right) \right]^{-1} & i = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \text{IV.23}$$

Où  $\mu_F(m(k))$  est la fonction de la masse de probabilité des fausses mesures dans la région de validation.

Deux modèles peuvent être considérés pour le choix de la fonction  $\mu_F$  :

- Un modèle de Poisson :

$$\mu_F(m) = e^{-\lambda v} \frac{(\lambda v)^m}{m!}$$

- Un modèle diffus :

$$\mu_F(m) = \mu_F(m-0) = \delta$$

Finalement on obtient les résultats suivants pour les deux modèles :

#### IV.4.6 Le PDA paramétrique :

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{e_i}{b + \sum_{j=1}^{m(k)} e_j} & i = 1, \dots, m(k) \\ \frac{b}{b + \sum_{j=1}^{m(k)} e_j} & i = 0 \end{cases}$$

Où :

$$e_i \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{1}{2} v_i(k)^T S(k)^{-1} v_i(k)}$$

$$b \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \left| 2\pi S(k) \right|^{1/2} \frac{1 - P_D P_G}{P_D}$$

Et

Cette dernière expression peut s'écrire :

$$b \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{n_z}{2}} \lambda V(k) (c_{n_z})^{-1} \frac{1 - P_D P_G}{P_D}$$

Avec :

- $m_k$  est le nombre d'observations validées à l'instant  $k$ .
- $P_D$  est la probabilité de détection de la cible.
- $\lambda$  est le nombre de faux échos par unité de volume.
- $P_G$  est la probabilité de validation.
- $\gamma$  est le seuil de la fenêtre de validation.
- $S(k)$  est la covariance de l'erreur de mesure.
- $\tilde{z}_j(k)$  est l'innovation de la mesure.

Les coefficients  $\beta_j$  vérifient :  $\sum_{j=0}^{m_k} \beta_j = 1$ .

#### IV.4.7 Le PDA non paramétrique

Le PDA non paramétrique est le même que le modèle PDA paramétrique, excepté le remplacement de  $\lambda V(k)$  par  $m(k)$ .

#### IV.5 Filtre à association de données par probabilités conjointes (JPDAF)

Le JPDAF est une extension du PDAF pour la poursuite multicibles. Pour cette méthode, le nombre de cibles  $M$  est supposé connu et constant. L'estimation de l'état de chaque cible se fait

selon un filtre de Kalman comme dans le PDAF. La seule différence réside au niveau de l'évaluation des probabilités d'association.

La figure (III.9) permet de comprendre de manière intuitive le principe du JPDAF dans une situation conflictuelle. Dans cet exemple, deux pistes sont formées et poursuivies.

Les états prédits de ces deux pistes à un instant donné sont représentés par les points  $P_1$  et  $P_2$ , la fenêtre de validation de chacune des pistes est représentée par un cercle centré autour de ces derniers. Les deux fenêtres de validation se chevauchent partiellement. A cet instant, le capteur envoie trois observations. La première est située à l'intérieur de la fenêtre de validation de la première piste uniquement, les deux autres sont situées dans la zone commune aux deux fenêtres de validation. Comme les trois observations sont dans la fenêtre de validation de la première piste, la mise à jour de cette piste se fera en tenant compte de ces trois observations, sous forme d'une somme pondérée par la probabilité d'association de chacune des trois mesures.

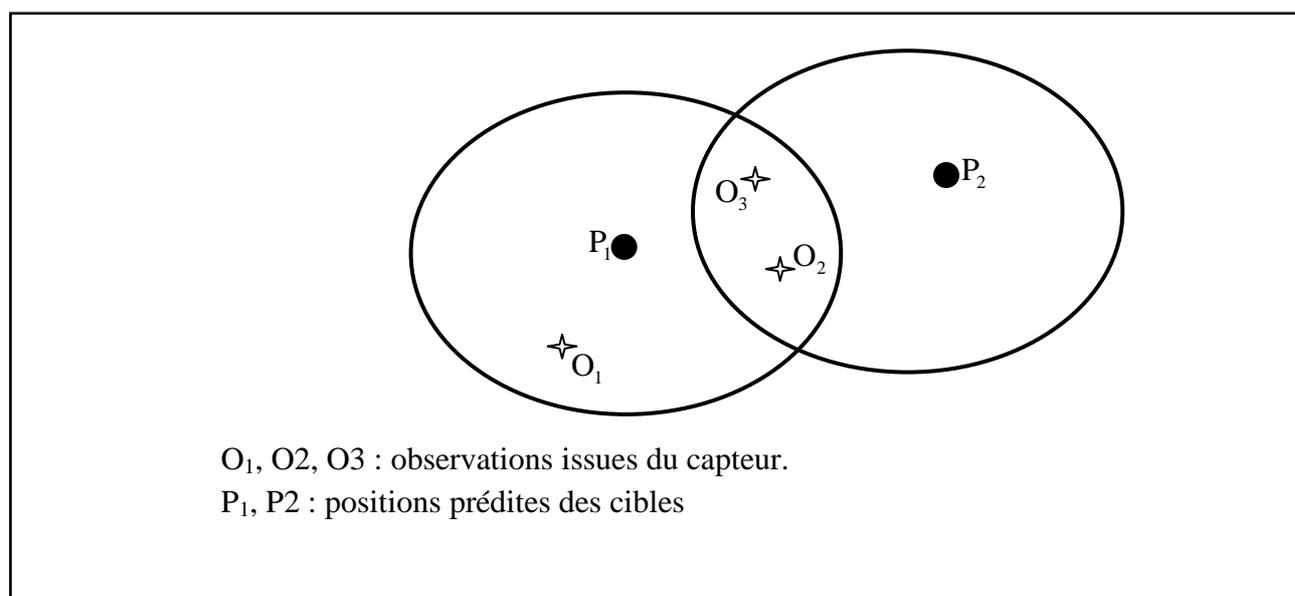


Fig. IV.3. Exemple d'association JPDAF

Toutefois, la probabilité d'association, et donc le poids des observations  $O_2$  et  $O_3$ , sera réduite pour tenir compte de leur présence dans la fenêtre de validation de la deuxième piste. La mise à jour de la deuxième piste sera faite en tenant compte des observations  $O_1$  et  $O_2$ .

On a l'habitude de représenter dans un tableau, toutes les hypothèses. On a représenté les hypothèses de notre exemple dans le tableau IV.1. La première ligne de cette table correspond à l'hypothèse où toutes les mesures sont des fausses alarmes, la deuxième ligne correspond à l'affectation de la mesure N° 3 à la première trajectoire et à deux fausses alarmes, etc...

Hypothèse N°	Traj. N° 1	Traj. N° 1	Fausses alarmes
1	–	–	1, 2, 3
2	1	–	2,3
3	2	–	1,3
4	3	–	1,2
5	–	2	1,3
6	1	2	3
7	3	2	1
8	–	3	1,2
9	1	3	2
10	2	3	1

Fig. IV.4. Tableau des hypothèses

Le JPDA original suppose un nombre connu et constant de pistes. Il a été étendu pour gérer la création et l'élimination de pistes.

La création d'une nouvelle piste est envisagée pour les observations ayant obtenu une faible probabilité d'association avec une piste existante.

Pour chaque piste, et pour chaque tentative de nouvelle piste, la probabilité que cette piste corresponde à une piste existante et la confirmation de nouvelles pistes sont décidées par un seuillage sur cette probabilité.

#### IV.6 Filtre à hypothèses multiples (MHT)

Le nombre de cibles est supposé supérieur à un mais non connu à priori et pouvant croître au cours du temps. Les hypothèses H1 et H2 des PDAF et JPDAF cités précédemment sont conservées pour cette méthode. Le principe du MHT est de considérer systématiquement toutes les hypothèses d'association possibles, et de créer une piste pour chacune de ces hypothèses. L'idée est d'attendre que de nouvelles observations captées lèvent l'ambiguïté et permettent de décider quelles hypothèses sont à abandonner et quelles hypothèses sont à garder.

L'ensemble des associations possibles au cours du temps est souvent représenté sous forme d'arbre. A chaque branche de l'arbre est associée une valeur de probabilité d'existence.

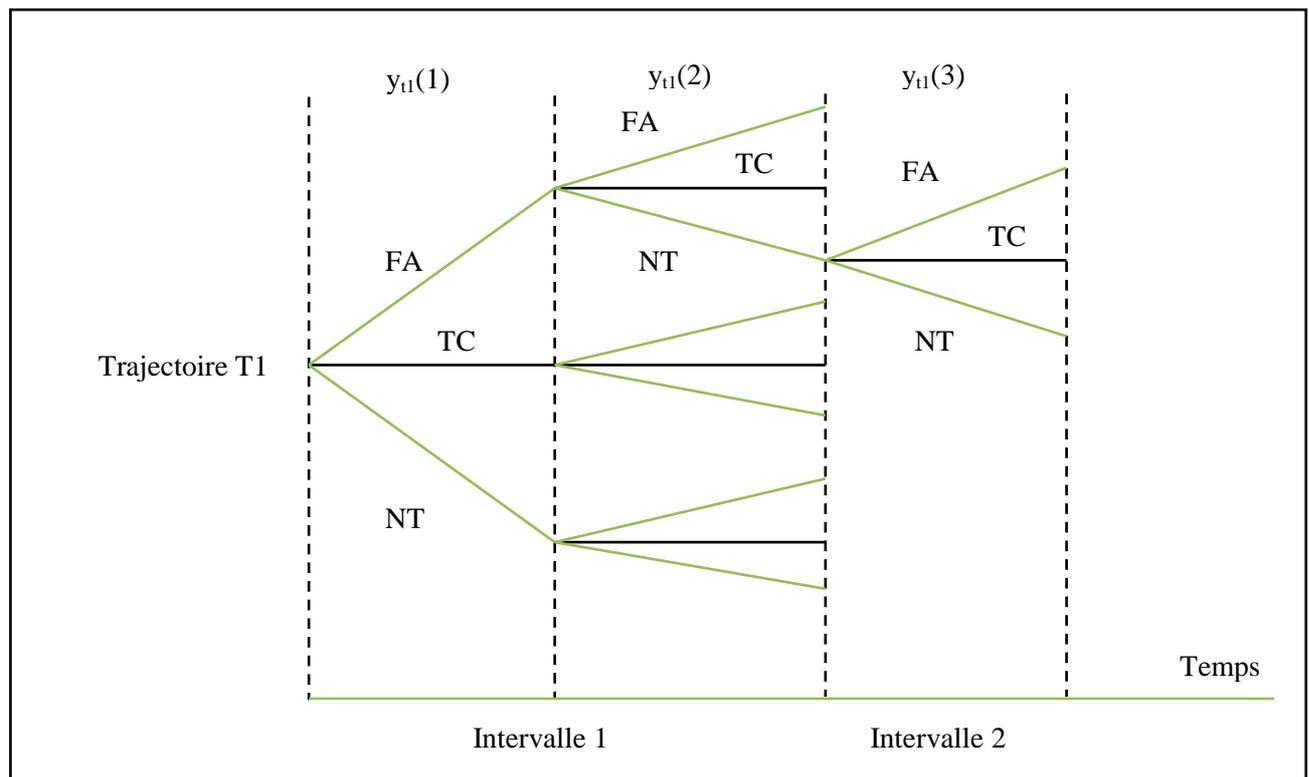


Fig. IV.5. Arbre d'hypothèses

La taille de l'arbre croissant exponentiellement avec le nombre d'observation capteur, cette méthode est inexploitable telle quelle. Il est nécessaire d'élaguer les branches de l'arbre dont les probabilités sont trop faibles. Le nombre de branches supprimées doit être assez élevé pour que la complexité de l'algorithme soit réduite. Il peut être, cependant fatal d'éliminer trop rapidement une hypothèse à un instant donné, qui se serait révélée intéressante par la suite.

Dans la figure (IV.4), nous avons représenté un arbre d'hypothèses de l'algorithme MHT.

Les observations sont notées  $y_{ti}(k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m(k)$  où  $m(k)$  désigne le nombre de mesure à l'instant  $k$  et on a supposé une seule trajectoire  $T_1$ . A l'instant  $k$ , deux mesures sont reçues  $y_{t1}(k)$  et  $y_{t2}(k)$ , elles sont enregistrées à des instants différents  $t_1$  et  $t_2$ . Trois types d'hypothèses sont considérées dans cet exemple : les observations peuvent être issues de fausses alarmes (FA), être utilisées pour la mise à jour de la piste (TC), ou enfin utilisées pour une nouvelle trajectoire (NT).

#### IV.7 Initialisation et mort de pistes : vraies ou fausses pistes

Les systèmes d'association de données évoluent dans des situations où les mesures ne sont pas certaines. On sait que dans de nombreuses applications, notamment radar, les mesures peuvent provenir de cibles ou de fausses alarmes (divers objets, terrain, bruit thermique,...). Dans des contextes multicibles, les mesures peuvent provenir d'une cible ou d'une autre. Dans de telles conditions, un système d'initialisation de pistes crée de vraies pistes (à partir des mesures d'une

cible) et des fausses pistes (à partir de fausses mesures). Durant l'opération de maintien des pistes, une vraie piste peut devenir fausse si la détection n'a pas eu lieu, ou si le filtre utilisé ne modélise pas les manœuvres effectuées par la piste. De manière équivalente, une fausse piste peut devenir une vraie piste si les mesures issues d'une cible sont utilisées pour la mise à jour. Il est donc nécessaire de distinguer les vraies des fausses pistes. Quand une piste est considérée comme vraie, elle est intégrée au traitement suivant. Quand une piste est considérée comme fausse, on dit qu'elle morte est ou terminée.

Pour distinguer une fausse piste d'une vraie, les systèmes de pistage utilisent en général une mesure de qualité pour la piste considérée. Les divers algorithmes de pistage utilisent des noms différents pour cette mesure de qualité. On parlera d'une fonction de score de piste «track score function» pour MHT (Multiple Hypothesis Tracking), d'une probabilité d'existence de piste pour le IPDA (Integrated Probability Data Association) ou de probabilité de détection de piste pour IMM-PDA (Integrated Multiple Model Probability Data Association). La procédure usuelle est de considérer une piste comme vraie si sa qualité est au-dessus d'un seuil : on parlera de seuil de confirmation. Elle considère, de plus, qu'une piste est fausse si sa qualité est inférieure à un seuil : on parlera de seuil de terminaison. Dans de nombreux cas, ces différents seuils sont constants. Dans d'autres cas, des seuils évoluent avec l'âge de la piste.

L'initialisation et la terminaison des pistes sont donc basées sur une mesure de qualité.

#### **IV.8 Conclusion**

Dans cette partie, nous avons parlé des différents algorithmes de pistage utilisant la méthode d'association de données, avec une étude détaillée de l'approche probabiliste pour l'association de données qui est le PDA, qui consiste à attribuer des poids aux différentes mesures validées .

---

## V ALGORITHME IMM-PDA ADAPTATIF : SIMULATIONS ET RESULTATS

---

### V.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter notre travail qui consiste à simuler les filtre pour cibles manoeuvrantes, IMM, le filtre probabilistique IMM-PDA sans adaptation puis avec adaptation. Nous effectuerons une comparaison des performances de ces trois filtres à partir de simulations.

### V.2 Les algorithmes

#### V.2.1 L'algorithme IMM-PDA

L'algorithme IMM-PDA est une association des filtres IMM pour cibles manoeuvrantes et le filtre probabilistique pour la prise en compte des fausses alarmes. Ce filtre est sensé résoudre les problèmes de poursuite de cibles agiles dans un environnement bruité.

L'algorithme du filtre IMM-PDA a exactement la même structure que le filtre IMM vu dans le chapitre II où on a remplacé le filtre de Kalman par le filtre PDA. L'évaluation des vraisemblances et des probabilités des modèles dépend maintenant des paramètres du filtre PDA.

Nous présentons dans ce qui suit le détail de cet algorithme.

- **Intéraction / mélange de probabilités**

$$\mu_{k-1|k-1}^{ij} = \frac{p_{ij} \mu_{k-1}^i}{\bar{c}^j} \quad j=1, 2, \dots, N \quad \text{avec la constante de normalisation } \bar{c}^j = \sum_{i=1}^N p_{ij} \mu_{k-1}^i$$

$p_{ij}$  : Probabilités de transition des modèles

$\mu^i$  : La probabilité des modèles

- **Etat et covariance initiaux**

Pour  $j=1$  à  $N$  faire :

$$\hat{x}_{k-1|k-1}^{0j} = \sum_{i=1}^N \mu_{k-1|k-1}^{ij} \hat{x}_{k-1/k-1}^i$$

$$P_{k-1}^{0j} = \sum_{i=1}^N \mu_{k-1|k-1}^{ij} \left[ P_{k-1|k-1}^i + (\hat{x}_{k-1/k-1}^i - \hat{x}_{k-1/k-1}^{0j})(\hat{x}_{k-1/k-1}^i - \hat{x}_{k-1/k-1}^{0j})^T \right]$$

Fin de la boucle

- **Filtre de Kalman et PDA**

---

Pour  $j=1$  à  $N$  faire :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^j = \mathbf{F}^j \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{0j}$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^j = \mathbf{F}^j \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{0j} \mathbf{F}^{jT} + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T$$

$$\mathbf{S}_k^j = \mathbf{H}^j \mathbf{P}_{k|k-1}^j \mathbf{H}^{jT} + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{K}_k^j = \mathbf{P}_{k|k-1}^j \mathbf{H}^{jT} (\mathbf{S}_k^j)^{-1}$$

- Pour chaque mesure  $z^i(k)$ , on calcule la distance :

$$d^2(k) = [z^i(k) - \hat{z}_{k|k-1}^j]^T (\mathbf{S}_k^j)^{-1} [z^i(k) - \underbrace{\hat{z}_{k|k-1}^j}_{\text{mesure prédite}}]$$

Et on retient les  $m_k$  mesures telles que :  $d^2(k) < \gamma$   $\left( \begin{array}{c} \gamma = 16 \\ \text{seuil} \end{array} \right)$

**Si  $m_k^j \neq 0$  faire :**

- Pour l'ensemble des  $m_k^j$  mesures, on calcule :

$$e_i(k) = \frac{1}{P_G} \exp \left[ -\frac{1}{2} (z_i(k) - \hat{z}_{k|k-1}^j)^T \mathbf{S}_k^j (z_i(k) - \hat{z}_{k|k-1}^j) \right] \quad i = 1, \dots, m_k$$

$$b(k) = \frac{m_k^j (1 - P_d P_G)}{P_d P_G V_k^j} \quad \text{avec} \quad \underbrace{V_k^j(k)}_{\text{volume}} = \pi \gamma \sqrt{\det(\mathbf{S}_k^j)} \quad P_d = 0,9 \quad P_G = 0,99$$

Puis on calcule les  $m_k$  probabilités :

$$\beta_i(k) = \frac{e_i(k)}{b(k) + \sum_{n=1}^{m_k^j} e_n(k)} \quad i = 1, \dots, m_k^j$$

$$\beta_0(k) = \frac{b(k)}{b(k) + \sum_{n=1}^{m_k^j} e_n(k)} \quad (\text{Hypothèse où toutes les mesures sont des fausses alarmes})$$

- Estimation de l'état et de la covariance du modèle  $j$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^j = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^j + \mathbf{K}_k^j \underbrace{\mathbf{v}_k^j}_{\text{innovation combinée}} \quad \text{avec comme innovation combinée :} \quad \underbrace{\mathbf{v}_k^j}_{\text{innovation combinée}} = \sum_{i=1}^{m_k^j} \beta_i(k) [z_i(k) - \hat{z}_{k|k-1}^j]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k}^j &= \beta_0(k) \mathbf{P}_{k|k-1}^j \\ &+ [1 - \beta_0(k)] [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^j \mathbf{H}^j] \mathbf{P}_{k|k-1}^j \\ &+ \mathbf{K}_k^j \left\{ \left[ \sum_{i=1}^{m_k^j} \beta_i(k) [z_i(k) - \hat{z}_{k|k-1}^j] [z_i(k) - \hat{z}_{k|k-1}^j]^T \right] - \mathbf{v}_k^j (\mathbf{v}_k^j)^T \right\} (\mathbf{K}_k^j)^T \end{aligned}$$

- Calcul de la vraisemblance modèle j

$$\Lambda_k^j = \left[ \mathbf{b}(k) + \sum_{i=1}^{m_k^j} \mathbf{e}_i(k) \right] \frac{\mathbf{P}_d \mathbf{P}_G}{m_k^j} \mathbf{V}_k^{1-m_k^j}$$

- Mise à jour des probabilités des modèles

$$\mu_k^j = \frac{\Lambda_k^j \sum_{i=1}^N [\mathbf{p}_{ij} \mu_{k-1}^i]}{\sum_{j=1}^N \left[ \Lambda_k^j \sum_{i=1}^N [\mathbf{p}_{ij} \mu_{k-1}^i] \right]}$$

Fin de la boucle

- Combinaison des états et des covariances

**Si  $m_k^j \neq 0$  faire :**

$$\text{Etat final} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{j=1}^N \mu_k^j \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^j$$

$$\text{Covariance finale} \quad \mathbf{P}_{k|k} = \sum_{j=1}^N \mu_k^j \left\{ \mathbf{P}_{k|k}^j + \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^j - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \right] \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^j - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \right]^T \right\}$$

**Si  $m_k^j = 0$  faire :**

$$\text{Etat final} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{j=1}^N \mu_{k-1}^j \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^j$$

$$\text{Covariance finale} \quad \mathbf{P}_{k|k} = \sum_{j=1}^N \mu_{k-1}^j \left\{ \mathbf{P}_{k|k-1}^j + \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^j - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^j - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right]^T \right\}$$

### V.2.2 Filtrage adaptatif

Le gain de Kalman a un rôle important pour l'estimation de l'état d'une cible manoeuvrante, mais il est indépendant des mesures ce qui provoque des limitations au filtre de Kalman.

Pour rendre ce filtre adaptatif aux changements brusques du mouvement de la cible, on va utiliser un coefficient  $\theta$  qui va modifier la matrice de covariance  $\mathbf{Q}$  du modèle.

L'objectif du filtre de Kalman adaptatif est donc de prendre en considération les observations (mesures) pendant l'estimation de la covariance d'état, afin que le niveau de gain du filtre de Kalman soit ajusté d'une manière adaptative avec le changement dynamique de la cible.

L'équation dynamique de la cible est :

$$\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{F} \mathbf{x}(k) + \theta(k) \mathbf{G} \mathbf{w}(k)$$

Le vecteur de mesures est donné par :

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{H} \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)$$

où  $\theta(k)$  est le facteur scalaire adaptatif. Les variables aléatoires  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  représentent respectivement le bruit d'état et de mesure. Nous admettons qu'ils sont indépendants l'un de l'autre, blanc, et avec des probabilités de distributions normales.

L'innovation est :

$$v(k) = z(k) - H\hat{x}(k/k-1)$$

La matrice de covariance de l'innovation est :

$$S(k) = H P(k|k) H^T + R$$

La matrice de covariance prédite est :

$$P(k) = F P(k-1|k-1) F^T + \theta^2(k-1) G Q G^T$$

Calcul du paramètre d'adaptation  $\theta_{k-1}^2$  [Ref ] :

Nous supposons que  $\varphi^2$ ,  $\eta^2$  et  $\delta^2$  sont respectivement les sommes des éléments diagonaux de /

$$S(k), [H.F.P(k/k-1).F^T.H^T + R] \text{ et } [HGQG^T H^T].$$

Alors :

$$\varphi^2 = \eta^2(k) + \theta^2(k-1).\delta^2(k)$$

Si  $v_k^j = \varphi^2(k)$ , alors :

$$\theta^2(k) = \max(a.\theta^2(0) + (b+c)\theta^2(k-1), 0)$$

Sinon :

$$\theta^2(k) = \max\left(a.\theta^2(0) + b.\theta^2(k-1) + c.\left(\frac{|v(k)|^2 - \eta^2(k)}{\delta^2(k)}\right), 0\right)$$

avec :  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c \geq 0$  et  $a + b + c = 1$

at  $\theta^2(0) = 1$  comme valeur initiale.

La lettre  $c$  est considérée comme un paramètre sensible qui est utilisé pour ajuster le comportement adaptatif du filtre.

### V.2.3 L'algorithme IMM-PDA adaptatif

La transformation du filtre IMM-PDA en filtre adaptatif (IMM-APDA) vu antérieurement est très simple, il suffit de faire les modifications suivantes :

- Calcul de la covariance du modèle :

$$\text{Remplacer } P_{k|k-1}^j = F^j P_{k-1|k-1}^{0j} F^{jT} + G Q G^T \quad \text{par} \quad P_{k|k-1}^j = F^j P_{k-1|k-1}^{0j} F^{jT} + \theta^2(k-1) G Q G^T$$

- Calcul de  $\theta$

On introduit le calcul de  $\theta$  après le calcul de la vraisemblance des modèles.

### V.3 Les interfaces

#### V.3.1 Génération de la trajectoire

Notre trajectoire est constituée d'un tronçon rectiligne (CV1) suivi d'un virage à droite (CT<sup>+</sup>), puis d'un virage à gauche (CT<sup>-</sup>) de rayon de courbure R et finalement un tronçon rectiligne (CV2). L'ensemble de la trajectoire est parcouru à une vitesse constante sauf pour le dernier tronçon (figure V.1).

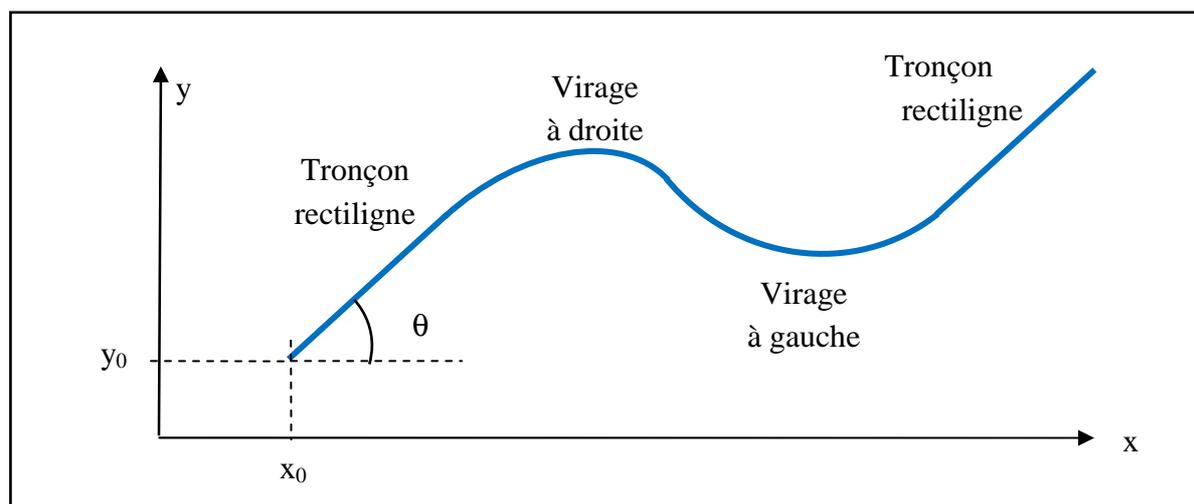


Fig. V.1. Trajectoire de simulation

Pour présenter les résultats, nous avons utilisé deux interfaces :

#### V.3.2 La première interface

Cette interface réalisée à l'aide de l'outil « Guide » de Matlab affiche un certain nombre de trajectoires types qu'on peut sélectionner à l'aide d'un bouton « Popuption » (figure V.2)

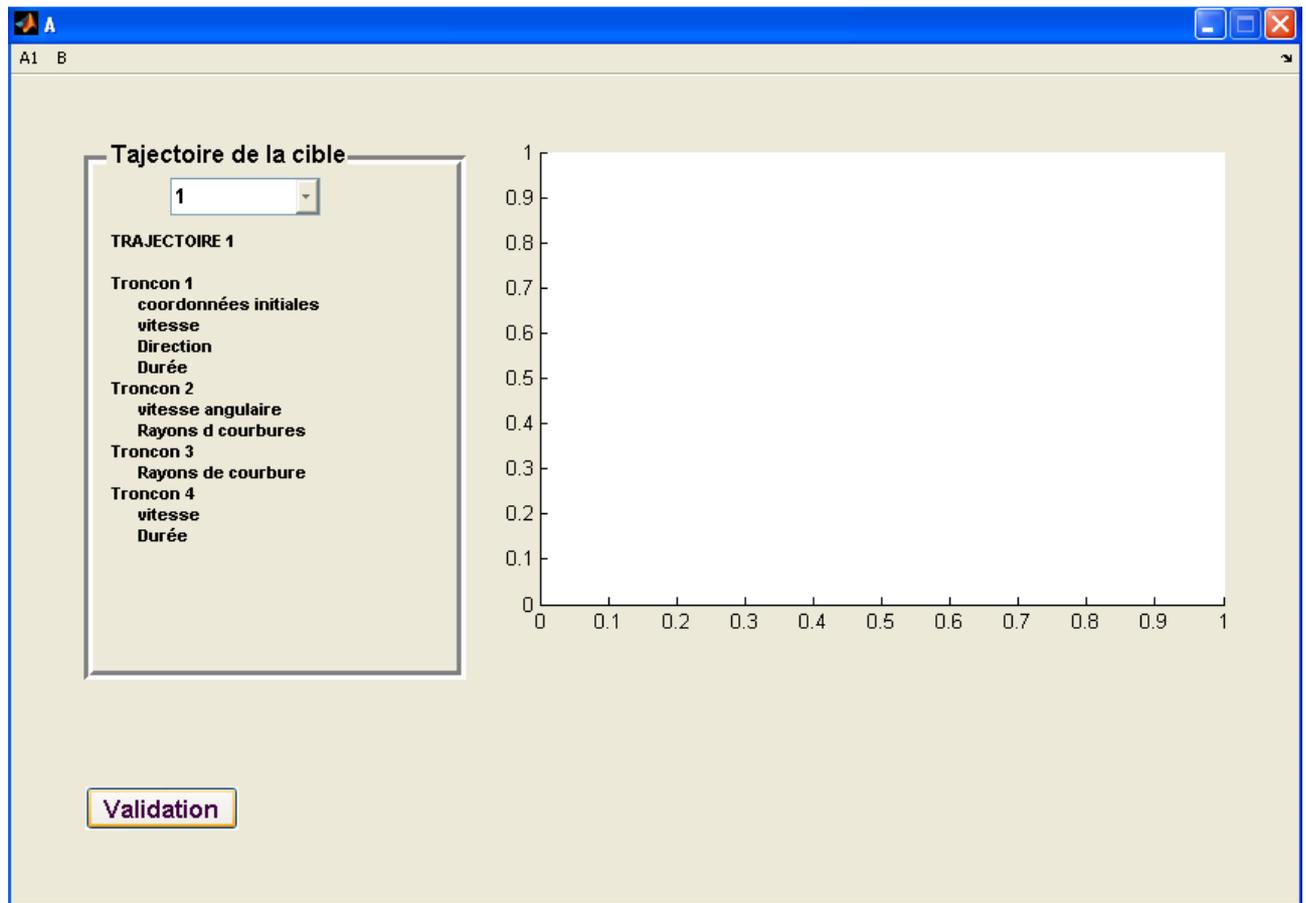


Fig. V.2. Interface N°1

L'organigramme de cette interface est présenté dans la figure V.3.

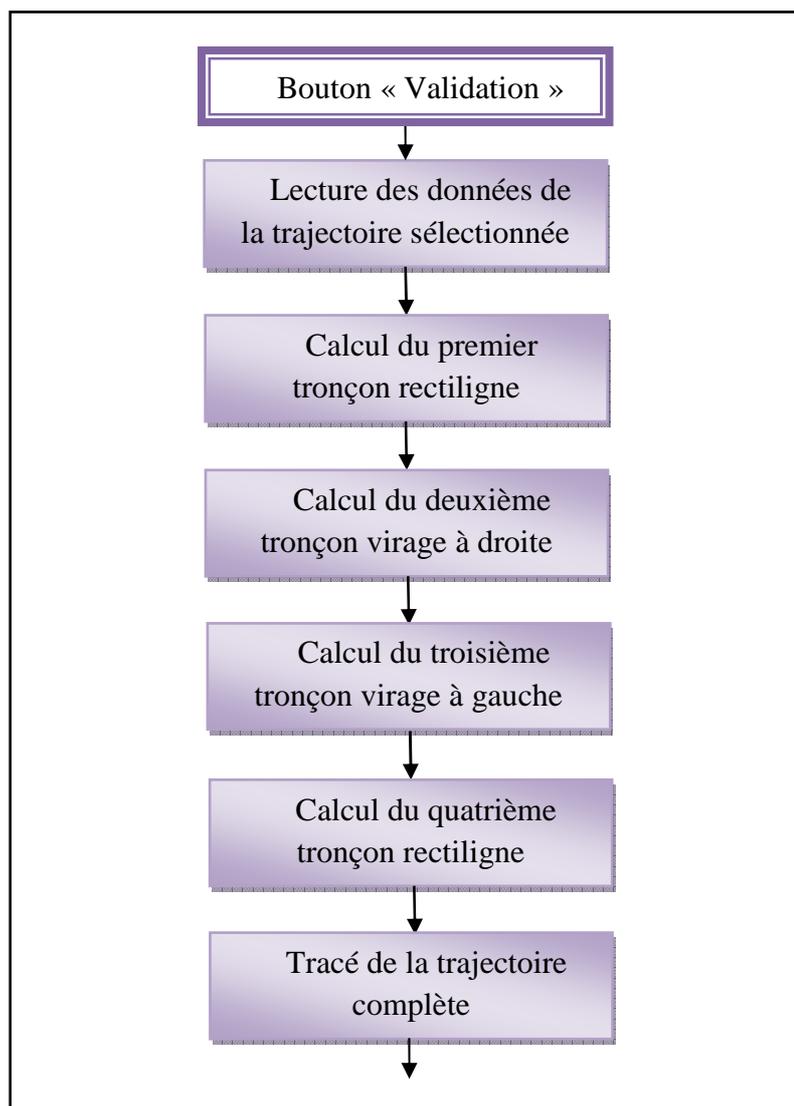


Fig. V.3. Organigramme de l'interface 1

### V.3.3 La deuxième interface

Elle présente les résultats de simulation des algorithmes IMM, IMM-PDA et IMM-APDA (figure V.4). Cette interface comprend plusieurs zones :

Une zone pour entrer les paramètres de simulation (bruit des modèles, probabilités, ...),

Une zone pour l'affichage des figures,

Une zone pour sélectionner le type de résultat

Une dernière zone affiche les statistiques sur les erreurs des trois filtres.

Son organigramme est présenté en figure V.5.

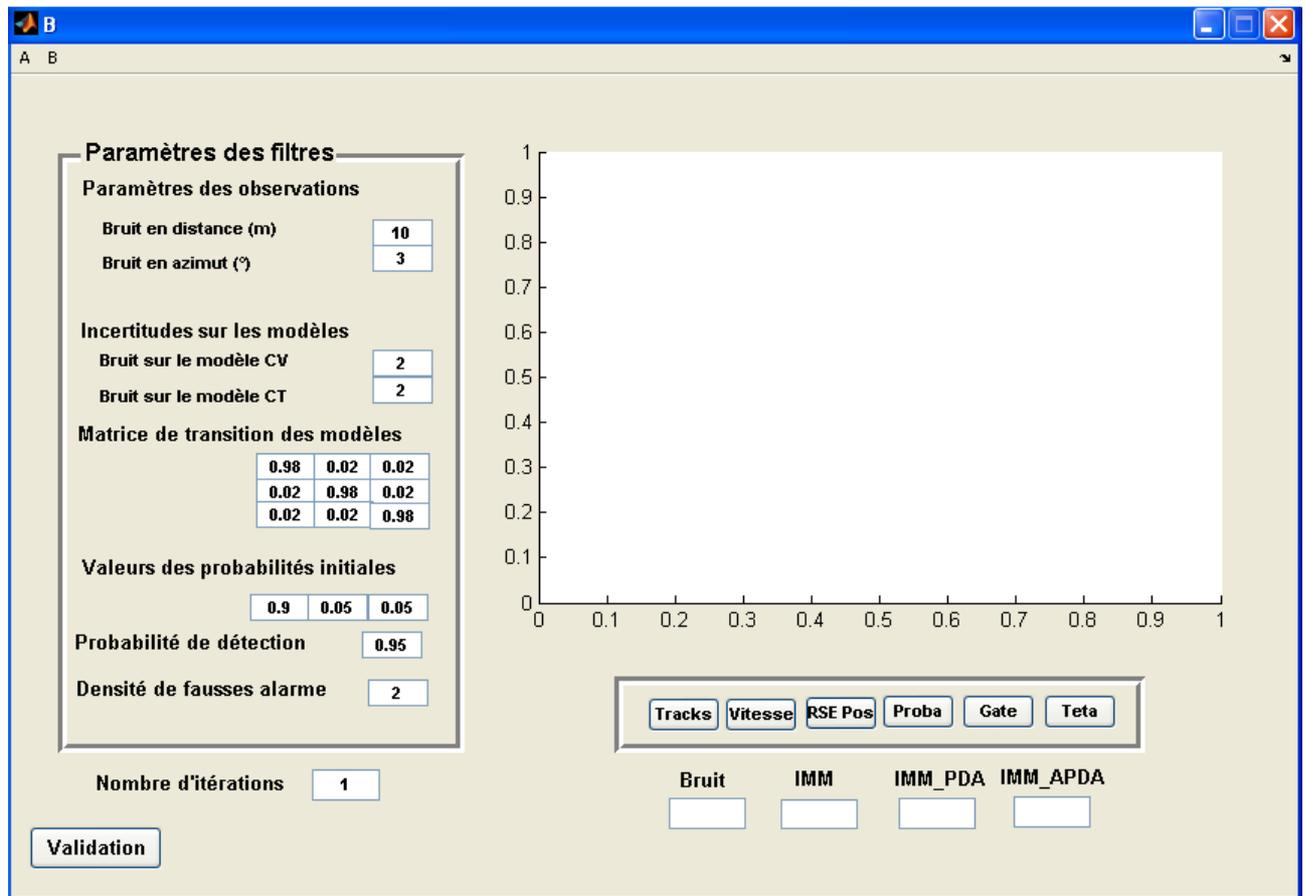


Fig. V.4 : Interface N°2

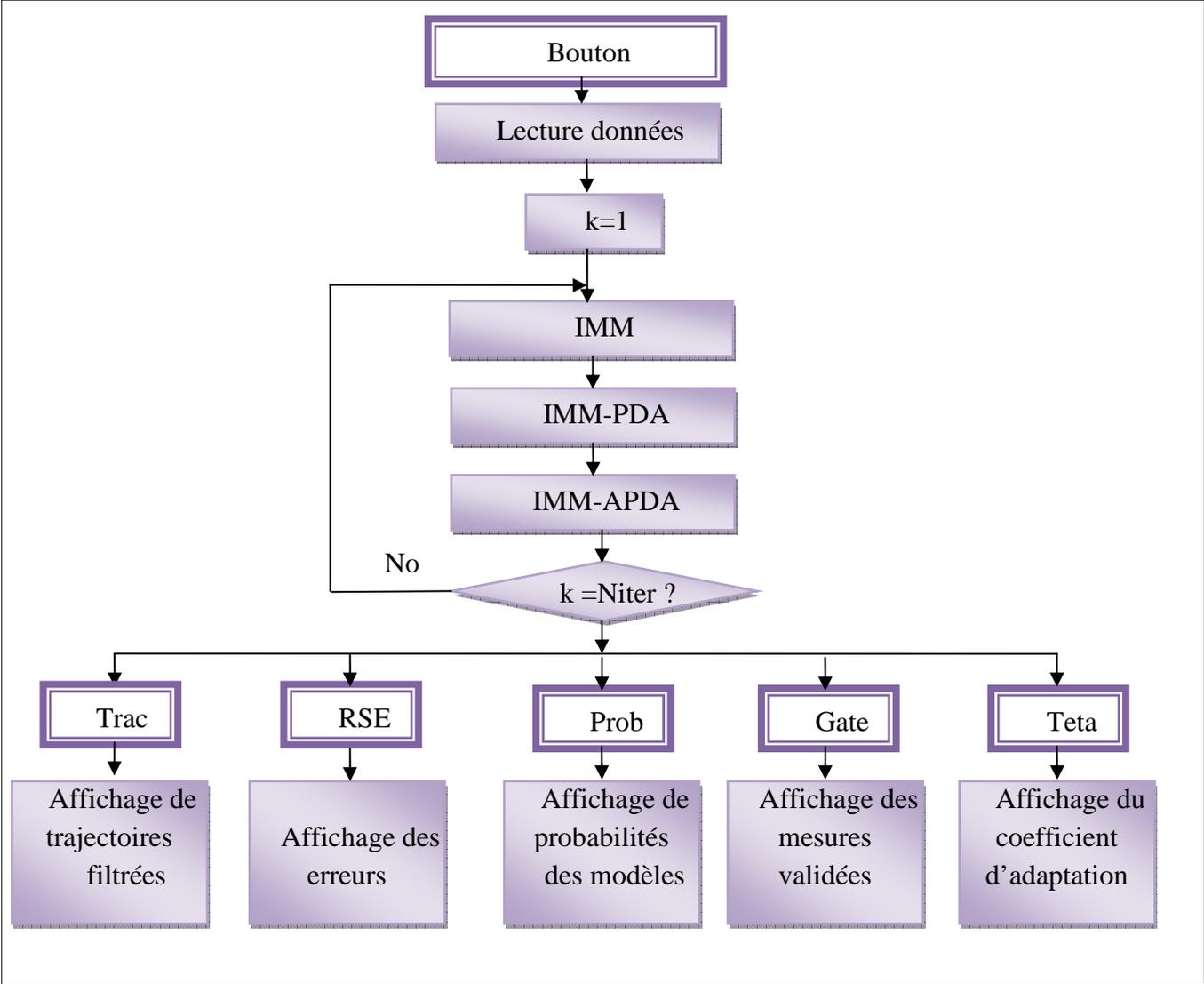


Fig. V.5. Organigramme de l'interface 2

Pour évaluer les performances de l'algorithme IMM-APDA, nous avons élaboré différents scénarios pour pouvoir tirer des conclusions.

Les équations des modèles sont les suivantes :

- Modèle d'état CV

$$X_{k+1} = FX_k + Gw_k$$

Avec :

$$X_k = [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y}]^T$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Modèle d'état CT

$$X_{k+1} = FX_k + Gw_k$$

Avec :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \sin(wT)/w & 0 & -(\cos(wT)-1)/w \\ 0 & \cos(wT) & 0 & -\sin(wT) \\ 0 & (1-\cos(wT))/w & 1 & \sin(wT)/w \\ 0 & \sin(wT) & 0 & \cos(wT) \end{bmatrix}$$

- Modèle de mesure CV et CT

$$Z_k = hX_k$$

Avec :

$$Z_k = [x \ y]$$

$$h_k = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{arctg}(y/x) \end{bmatrix}$$

### **Remarque**

Comme les mesures  $z$  ne sont pas disponibles, nous les avons générées en bruitant la trajectoire réelle.

### **V.4 Simulations**

Nous avons un certain nombre de scénarios (trajectoires) de simulation en jouant sur les vitesses  $v_1$  et  $v_2$  des tronçons rectilignes et sur la densité de fausses alarmes  $\lambda$  (/km<sup>2</sup>) pour pouvoir comparer les filtres et tirer certaines conclusions.

### V.4.1 Scénario 1

$$\theta = 10^\circ \quad v_1 = 70 \text{ m/s} \quad 150\text{s}$$

$$R = 1000 \text{ m}$$

$$v_2 = 70 \text{ m/s} \quad 30\text{s}$$

$$\lambda = 3 \quad P_D = 0.95$$

Nous avons représenté les résultats sur les figures V.6 à V.12

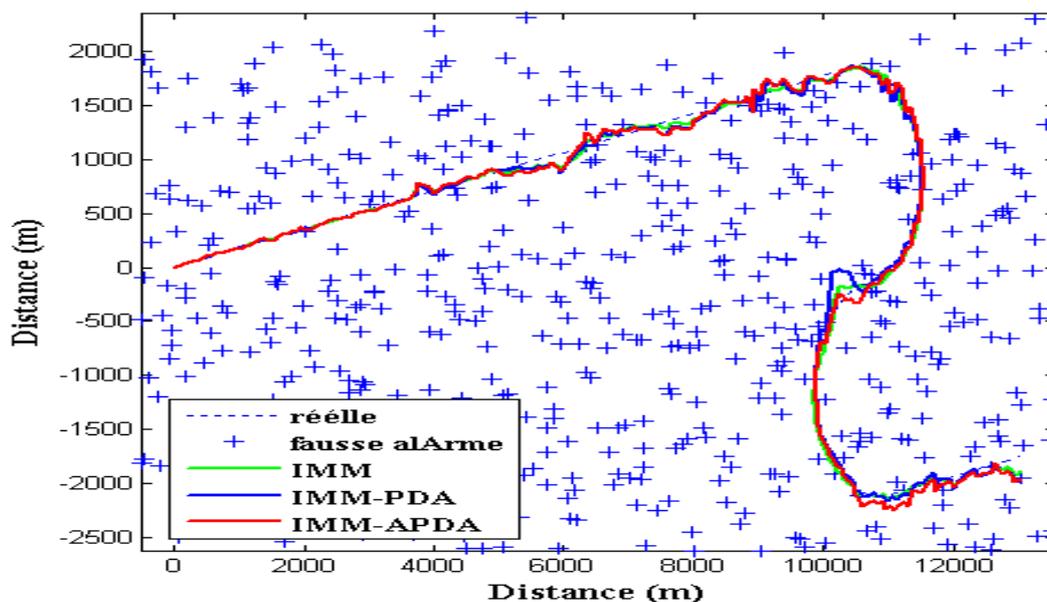


Fig. V.6. Trajectoires des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA

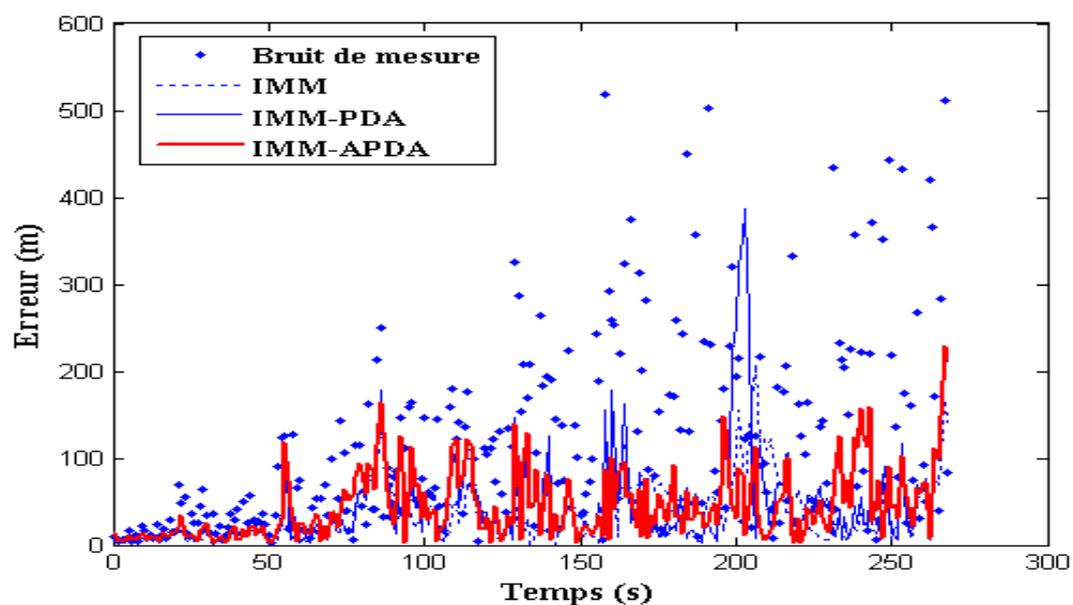


Fig. V.7. Erreurs sur la position des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA

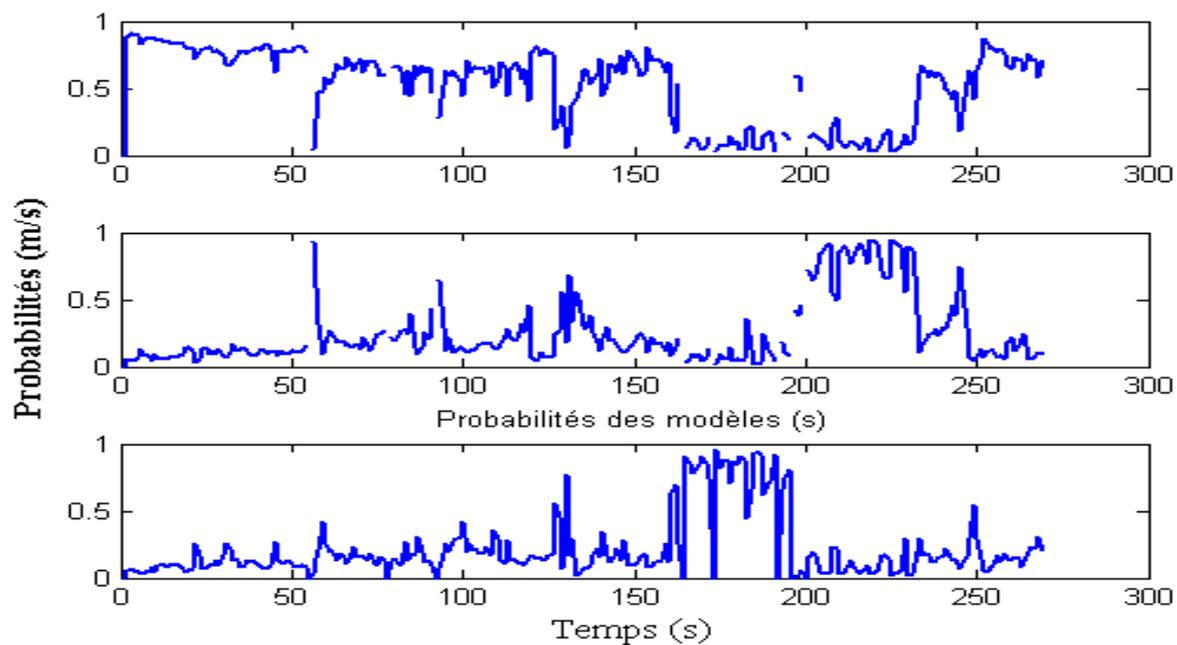


Fig. V.8. Probabilités des modèles CV1, CT+, CT- et CV2

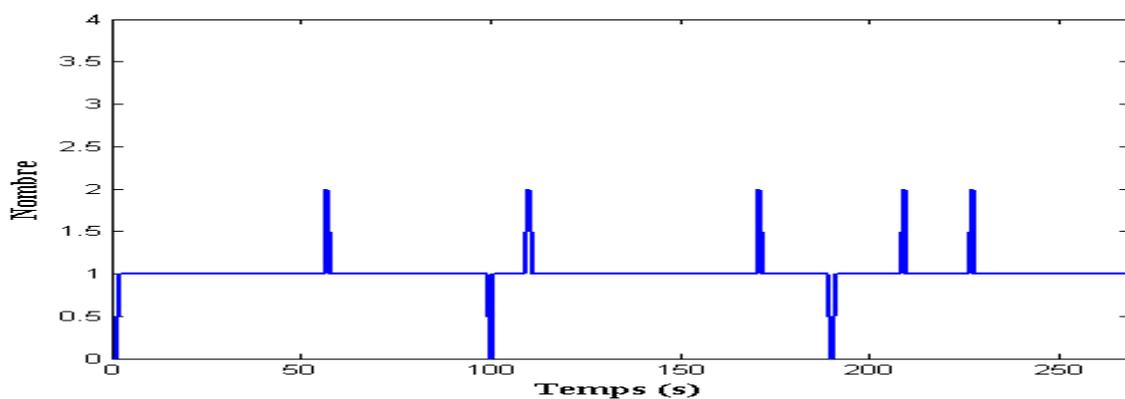


Fig. V.9. Mesures validées

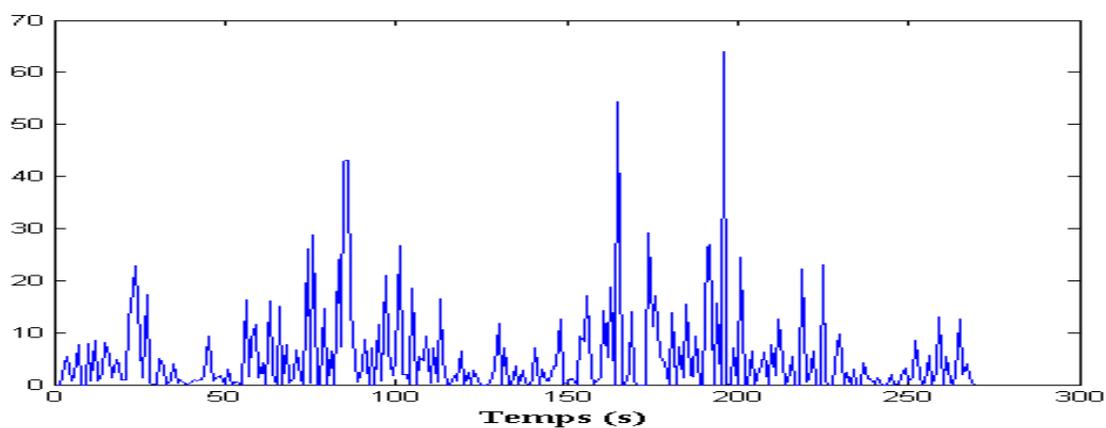


Fig. V.10. Variation du paramètre d'adaptation  $\theta$

### V.4.2 Scénario 2

$\theta = 30^\circ$	$v_1 = 70 \text{ m/s}$	150s
$R = 1000 \text{ m}$		
$v_2 = 35 \text{ m/s}$	30s	
$\lambda = 3$	$P_D = 0.95$	
Gate = 20		

Les figures V.11 à V.13 montrent les résultats de la simulation.

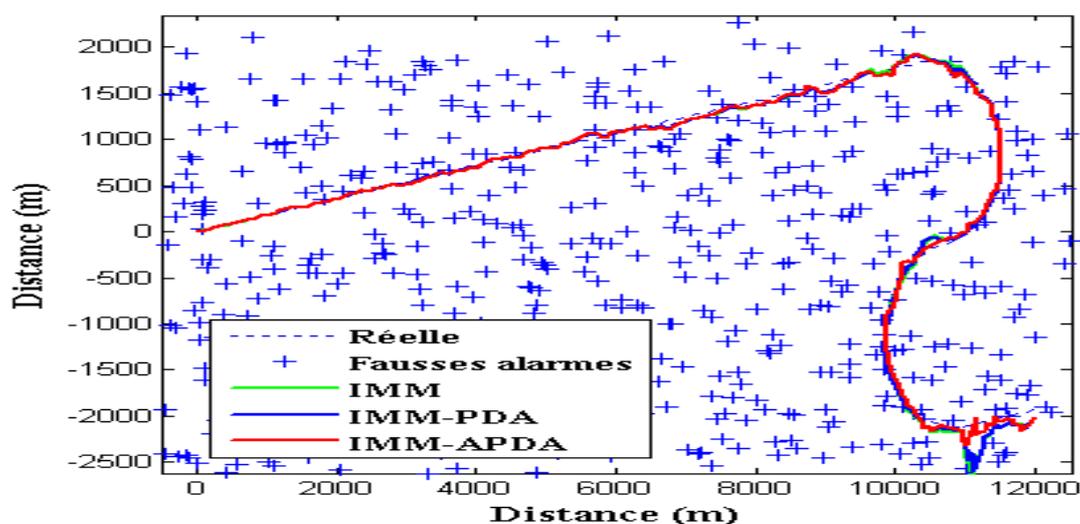


Fig. V.11. Trajectoires des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA

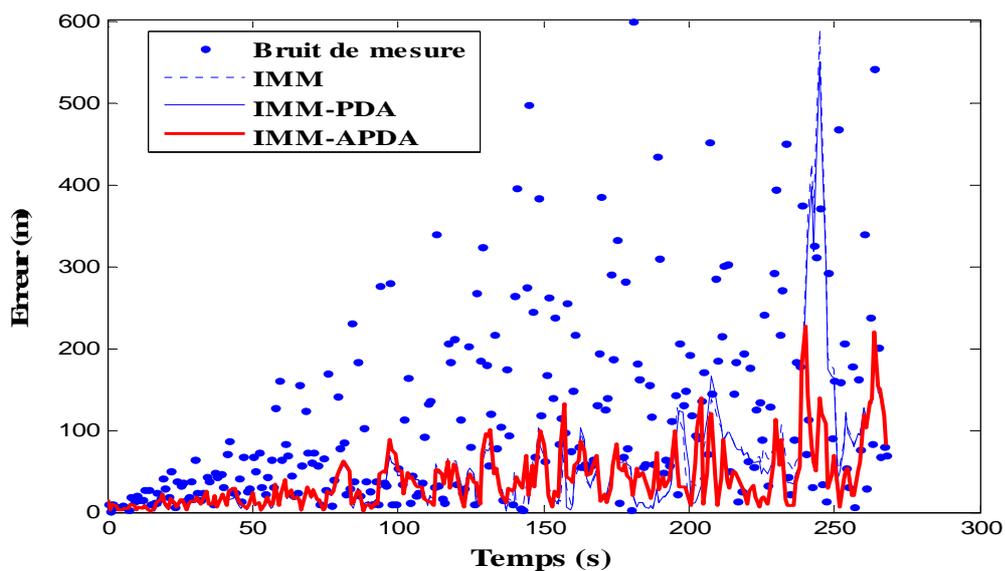


Fig. V.12. Erreurs sur la position des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA

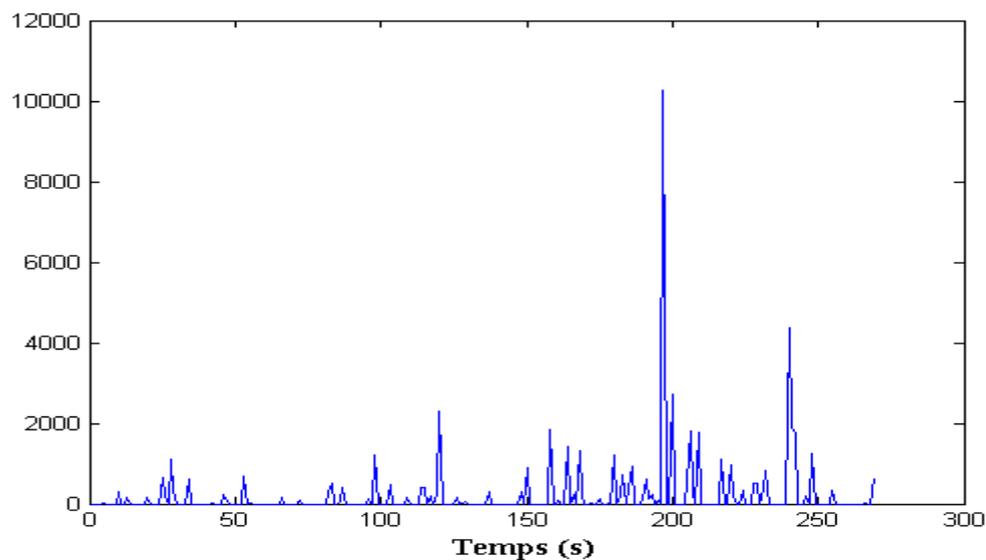


Fig. V.13. Variation du paramètre d'adaptation  $\theta$

### V.4.3 Scénario 3

$\theta = 30^\circ$	$v_1 = 70 \text{ m/s}$	150s
$R = 1000 \text{ m}$		
$v_2 = 100 \text{ m/s}$		30s
$\lambda = 4$	$P_D = 0.95$	
Gate = 50		

Les figures V.14 à V.17 montrent les résultats de la simulation.

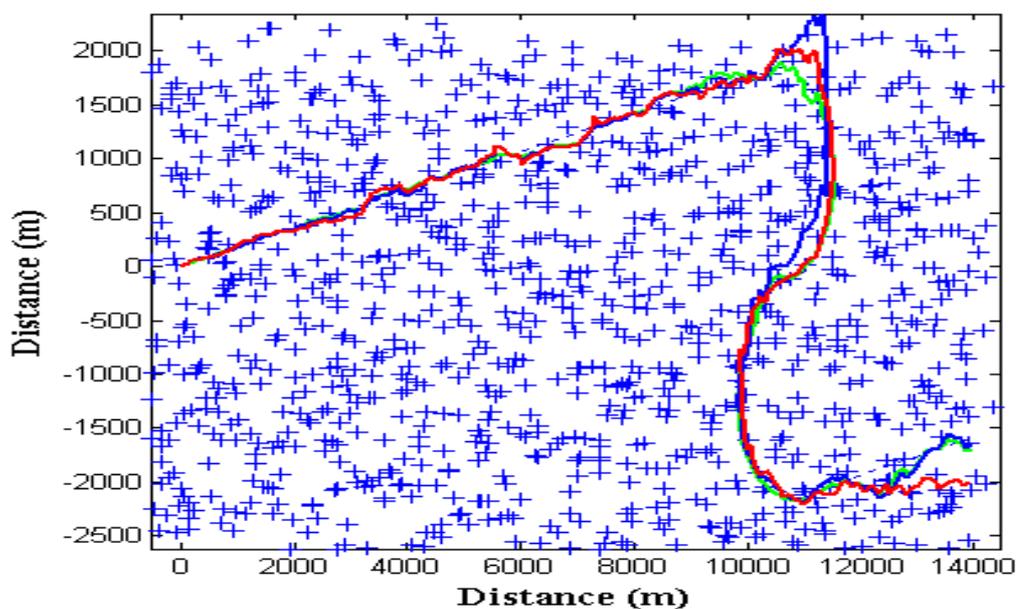


Fig. V.14. Trajectoires des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA

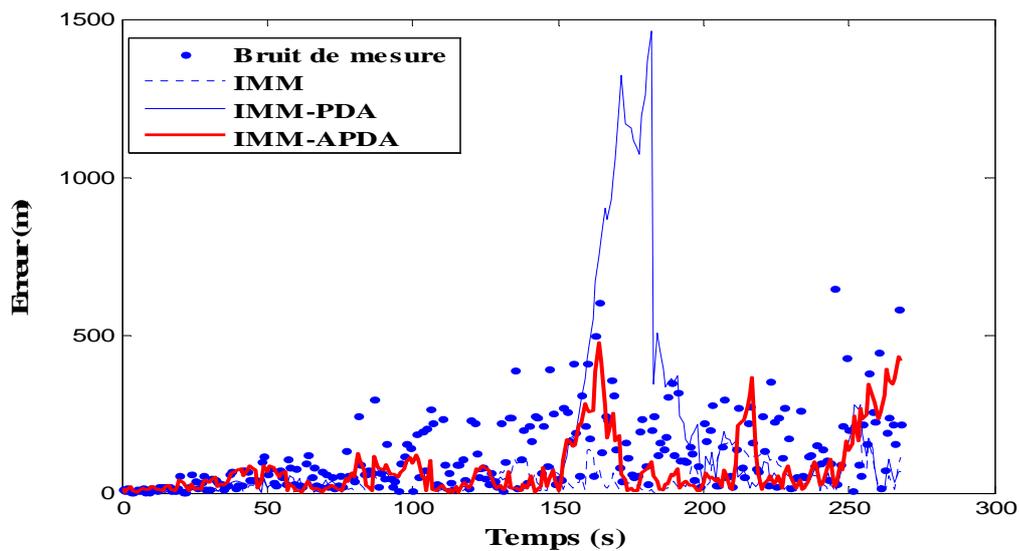


Fig. V.15. Erreurs sur la position des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA

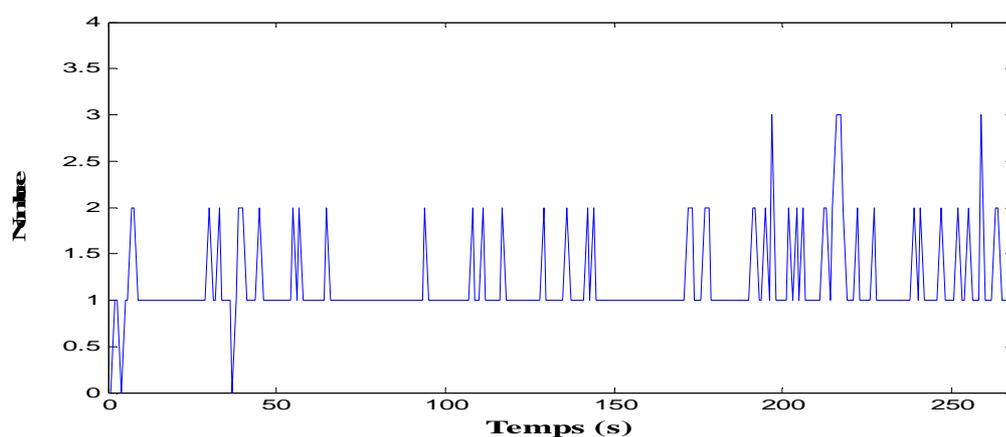


Fig. V.16. Mesures validées

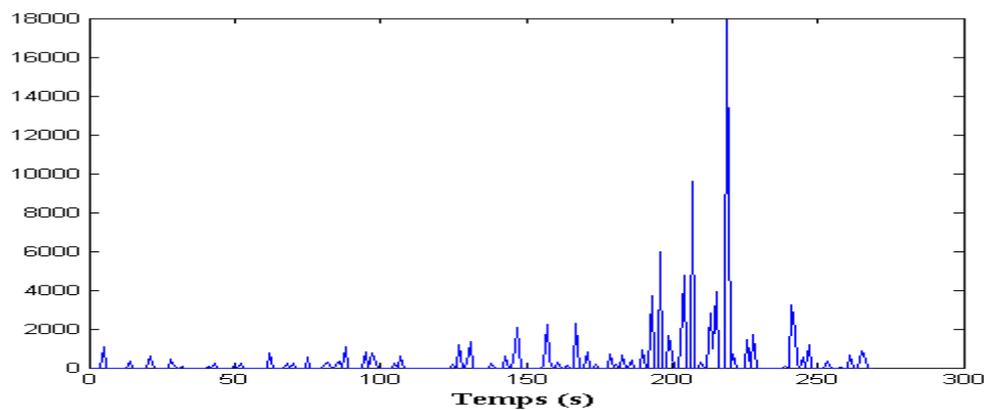


Fig. V.17. Variation du paramètre d'adaptation  $\theta$

**V.4.4 Scénario 4**

$\theta = 30^\circ$	$v_1 = 70 \text{ m/s}$	150s
$R = 1000 \text{ m}$		
$v_2 = 100 \text{ m/s}$	30s	
$\lambda = 4$	$P_D = 0.95$	
Gate = 10		

Les figures V.18 à V.19 montrent les résultats de la simulation.

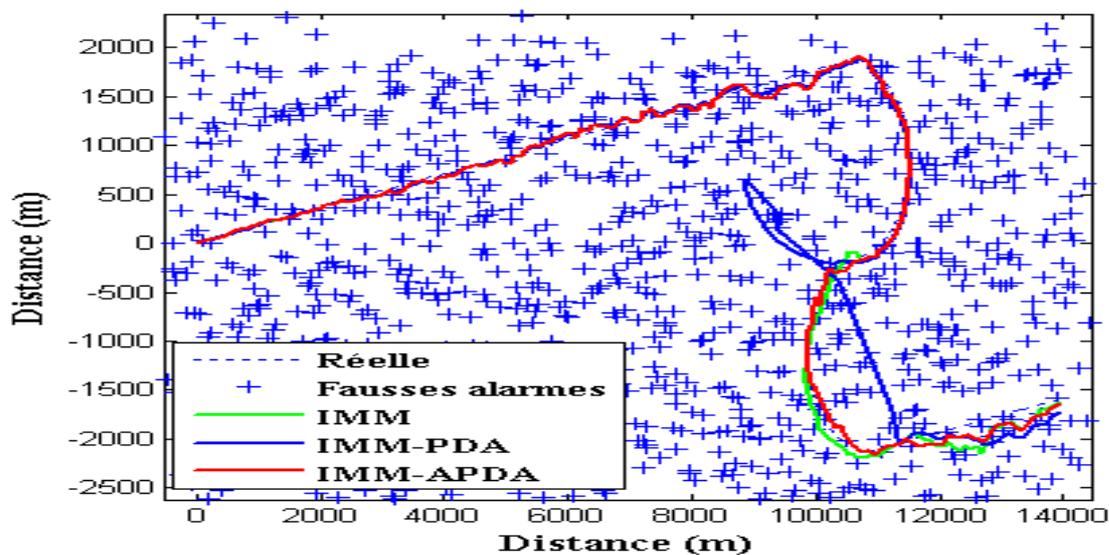


Fig. V.18. Trajectoires des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA

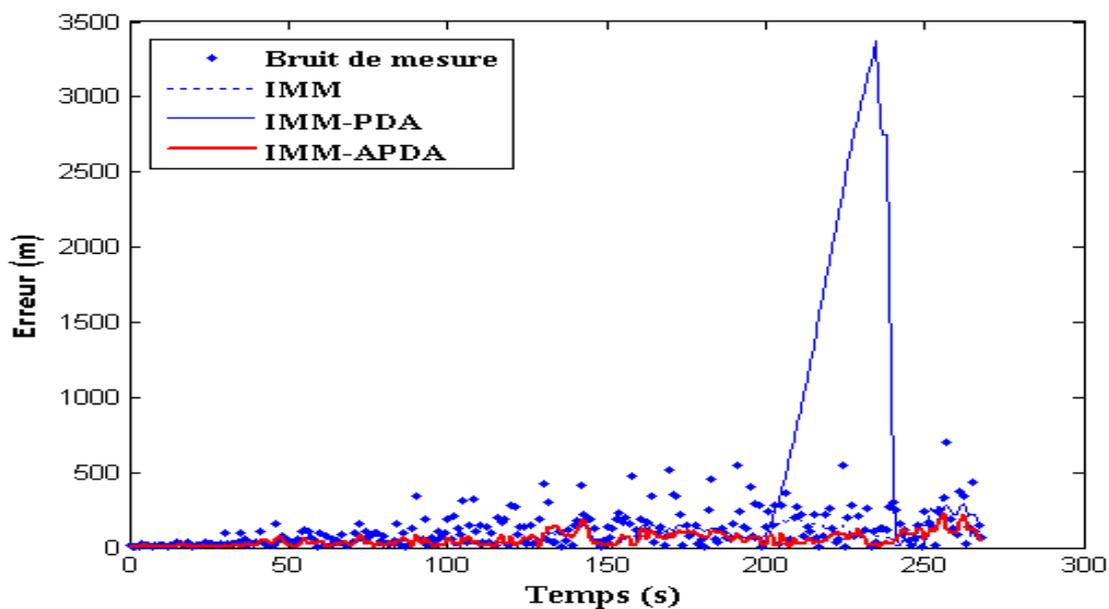


Fig. V.19. Erreurs sur la position des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA

### V.4.5 Interprétation des résultats

L'algorithme IMM-APDA que nous avons mis en œuvre a montré son efficacité devant l'algorithme traditionnel IMM-PDA. Les simulations montrent que cet algorithme s'adapte bien aux brusques changements des paramètres dynamique de la cible (vitesse et virage) même en présence de fausses alarmes, et que l'estimation des différents mouvements de la cibles a été effectuée par le bon filtre correspondant au type de trajectoire, ce qui est prouvé par les courbes des probabilités. En effet, si on observe par exemples les résultats du scénario 2 où on a effectué une brusque accélération dans le dernier tronçon, on remarque que le comportement du filtre IMM-APDA est meilleure.

Dans les scénarios 3 et 4, nous avons utilisé des rayons de la fenêtre de validation de 10 et 50. Nous remarquons que le filtre IMM-APDA continue de fonctionner normalement comme le filtre IMM, par contre le filtre le filtre IMM-PDA non adaptatif a des difficultés à suivre la trajectoire et peut même diverger.

Ceci est confirmer par les résultats du tableau suivant où nous avons effectué la moyenne des erreurs de 25 essais aléatoires de 6 trajectoires différentes avec des densités de fausses alarmes progressives. On voit que les performances du filtre IMM-APDA sont meilleures que celles de l'IMM-PDA

Paramètres de la trajectoire	Bruit	IMM	IMM-PDA	IMM-APDA
v1=70 v2=70 $\lambda =1$	109.50	45.62	53.88	43.06
v1=70 v2=70 $\lambda =2$	112.26	42.94	118.83	44.68
v1=70 v2=70 $\lambda =3$	108.45	41.44	69.21	41.96
v1=70 v2=70 $\lambda =4$	111.20	42.90	362.17	48.71
v1=100 v2=130 $\lambda =4$	108.73	41.84	263.97	44.25
v1=100 v2=130 $\lambda =4$	149.450	56.07	94.85	70.21

Fig. V.20. Tableau comparatif des filtres IMM, IMM-PDA et IMM-APDA

En résumé, on peut dire que le filtre IMM-PDA est bien adapté à la poursuite de trajectoires sans trop fortes variations de vitesse. Mais, dès qu'il y a une variation de vitesse brusque, ce filtre est inadéquat. Par contre, le filtre adapté arrive souvent à suivre la cible, quelque soit ces variations.

## **V.5 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons simulé l'algorithme IMM-APDA qui est utilisé en radar pour la poursuite de cibles manœuvrantes dans un environnement qui contient des fausses alarmes.

Nous avons pu vérifier à partir d'un grand nombre de simulations, que cet algorithme permet effectivement de suivre la cible lors des changements brusques en mouvement et cela même en présence de fausses alarmes.

Après toutes les simulations, nous pouvons dire que l'algorithme IMM-APDA prouve ses hautes performances comparées avec celles de l'IMM-PDA, ce qui valorise l'effet de la partie adaptative ajoutée à l'algorithme traditionnel IMM-PDA.

---

---

## CONCLUSION GENERALE

---

L'objet de cette thèse porte sur la résolution du problème de poursuite de cibles manœuvrantes dans un environnement de fausses alarmes. Pour cela, nous avons décrit deux techniques de poursuite basées sur le filtrage de Kalman étendu (EKF), la technique d'estimation à modèles multiples interagissant, et l'association probabiliste de données.

L'union de ces deux méthodes forme un estimateur très puissant qui est l'IMM-PDA souvent utilisé dans ces conditions et qui peut apporter une solution à notre problématique.

Pour une meilleur adaptation au changement dynamique de la cible, nous avons proposé d'ajouter une partie adaptative au filtre IMM-PDA qui va minimiser les erreurs de positions c'est-à-dire améliorer l'exactitude de la poursuite.

D'après les résultats de simulation, l'algorithme IMM-APDA a montré son efficacité devant l'IMM et l'IMM-PDA, et cela avec différentes valeurs de la densité de fausses alarmes.

Toutefois, le sujet n'est pas clos, plusieurs types d'améliorations peuvent être envisagées, concernant d'une part la structure intrinsèque du filtre, et d'autre part sa stratégie de mise en œuvre.

Un effort pourra notamment être entrepris pour améliorer la procédure de validation des mesures, réalisée à partir des nuages particulières de chacun des paramètres pris en compte. Il s'agit là d'un point clé susceptible d'apporter de nouvelles perspectives, pour ce faire il faudra de toute évidence mettre en œuvre des théories relatives à la fusion de données. Il est également nécessaire de poursuivre une veille active concernant les techniques particulières destinées à limiter les phénomènes de dégénérescence des particules et d'appauvrissement des états.

Du point de vue mise en œuvre, l'articulation générale adoptée privilégie le caractère générique, de telle manière qu'il est particulièrement simple d'intégrer une nouvelle modulation, fût-elle non linéaire ou discontinue.

L'algorithme proposé peut s'inscrire dans une stratégie plus globale et intervenir comme une aide aux méthodes actuelles dans les cas difficiles. Il nécessite une phase de développement qui passe obligatoirement par une optimisation algorithmique si on désire lui conférer un potentiel temps réel. De plus, pour améliorer encore sa robustesse, il est impératif de prendre en compte les nécessités opérationnelles de manière beaucoup plus fine, ce qui nécessite des expérimentations intensives à partir de signaux réels.

---

## ANNEXES

### Rappels et définitions sur les systèmes stochastiques

#### ● Caractérisation d'une variable aléatoire scalaire

Soit  $X$  une variable aléatoire scalaire. la fonction de répartition  $F(x)$  associe à tout réel  $x$ , la probabilité de l'événement  $X < x$ .

On note :  $F(x) = P[X < x]$ .

#### ▪ Propriétés :

$$x_1 < x_2 ; P[x_1 < X < x_2] = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x)) = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x)) = 0$$

$F(x)$  est monotone, non décroissante, et peut être continue ou discontinue selon que  $X$  prenne des valeurs continues ou discrètes.

Si  $F(x)$  est dérivable, alors sa dérivée est appelée densité de probabilité et notée  $p(x)$ .

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Soit :  $p(x)dx = P[x \leq X < x+dx]$ .

Pour caractériser et manipuler mathématiquement une variable aléatoire  $X$ , on utilise également les moments de cette variable. le moment d'ordre 1 est plus connu sous le nom de moyenne ou espérance mathématique. Le moment centre d'ordre 2 est appelé variance que l'on note

$$\text{Var } x = \sigma_x^2$$

$\sigma_x$  désigne l'écart type.

Soit :

#### ● L'espérance mathématique ou moyenne :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

#### ● Le moment d'ordre $k$ :

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)dx$$

#### ● Le moment centre d'ordre $k$ :

$$E[X - E(x)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^k p(x)dx$$

Les moments d'ordre supérieur ou égale à 3 sont très peu utilisés car ils se prêtent mal au calcul théorique. L'intérêt (mathématique) des variables aléatoires gaussiennes est qu'elles sont entièrement caractérisées par leurs moments d'ordre 1 et 2.

Soit  $X$  une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $m$  et d'écart type, alors :

$$p(x) = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}, \quad E(x) = m, \quad E[(x-m)^2] = \sigma^2.$$

### ● Caractérisation d'une variable aléatoire à plusieurs dimensions

Soit  $X = [X_1, \dots, X_q]^T$  une variable aléatoire à  $q$  dimensions prenant ses valeurs dans  $\mathbb{R}^q$ .

#### • Fonction de répartition

$$F(x_1, \dots, x_q) = P(X_1 < x_1 \text{ et } X_2 < x_2 \text{ et } \dots X_q < x_q)$$

#### • Densité de probabilité

$$p(x_1, \dots, x_q) = \frac{\partial^q F(x_1, \dots, x_q)}{\partial x_1 \dots \partial x_q}$$

#### • Moments

On note :  $X = [x_1, \dots, x_q]^T$  et on ne s'intéressera qu'au vecteur des moments d'ordre 1 (c'est-à-dire le vecteur moyen) et à la matrice des moments d'ordre 2 centrés (c'est-à-dire la matrice de covariance).

$$\text{Moyenne : } E(X) = [E(x_1); \dots; E(x_q)]^T.$$

$$\text{Covariance : } \text{Cov}(X) = E[(x - E(x))(x - E(x))^T]$$

L'élément  $\text{Cov } x(i; j)$  de la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de cette matrice de covariance vérifie :

$$\text{Cov } x(i, j) = \int_{\mathbb{R}^2} (x_i - E[x_i])(x_j - E[x_j]) dF(x_i, x_j)$$

La matrice de covariance est définie, positive et symétrique.

### ● Signal aléatoire (processus stochastique)

Etant donné une variable aléatoire  $X$ , le signal aléatoire ou processus stochastique  $x(t)$  est un signal fonction du temps  $t$  tel que pour tout  $t$  fixé,  $x(t)$  corresponde à une valeur de la variable aléatoire  $X$ .

#### • Moment d'un signal aléatoire

Le moment d'ordre 2 d'un signal aléatoire est appelé la fonction d'autocorrélation.

Soit  $w(t)$  un signal aléatoire, alors :

$$\text{Moment d'ordre 1 : } m(t) = E[w(t)].$$

$$\text{Moment d'ordre 2 : } \phi_{ww}(t; \tau) = E[w(t)w(t+\tau)^T].$$

### Remarque

Si  $w(t)$  est un signal vectoriel à  $q$  composantes alors  $\phi_{ww}(t; \tau)$  est une matrice de taille  $q \times q$  définie positive pour chaque valeur de  $t$  et de  $\tau$ . Les termes de la diagonale sont les fonctions scalaires d'autocorrélation de chaque composante et les termes hors diagonaux sont les fonctions scalaires d'intercorrélation entre composantes.

Un signal aléatoire gaussien centre, c'est-à-dire à moyenne nulle, est donc entièrement défini par sa fonction d'autocorrélation.

- **Stationnarité**

Un signal aléatoire est dit stationnaire à l'ordre 2 si sa moyenne est constante ( $m(t)=m$ ) et si sa fonction d'autocorrélation ne dépend que de  $\tau$  ( $\phi_{ww}(t; \tau) = \phi_{ww}(\tau)$ )

La moyenne quadratique ou variance d'un signal aléatoire centré stationnaire est la valeur de la fonction d'autocorrélation à l'origine :  $\sigma_w^2 = \frac{\phi_{ww}(\tau)}{\tau} = 0$ .

- **Bruit blanc**

Un bruit blanc est un signal aléatoire stationnaire de variance infinie dont la fonction d'autocorrélation est proportionnelle à un Dirac (c'est-à-dire un spectre complexe constant sur toute la plage des fréquences). Cela traduit que les valeurs du signal pris a deux instants, même très proches, ne sont pas du tout corrélées.

Les bruits blancs gaussiens centrés  $w(t)$  et  $v(t)$  que nous allons utilisés dans le cadre du filtre de kalman sont donc entièrement définis par leur densités spectrales respectives  $W(t)$  et  $V(t)$  :

$$E[w(t)w(t+\tau)^T] = W(t)\delta(\tau); E[v(t)v(t+\tau)^T] = V(t)\delta(\tau).$$

Les matrices  $W(t)$  et  $V(t)$  deviennent constantes dans le cas de bruits blancs stationnaires. Le bruit blanc gaussien normalisé est tel que  $W(t) = I_{q \times q}$  ( $q$  : nombre de composants dans le bruit).

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

[1] Engin AVCI, Ibrahim TURKOGLU, Mustafa POYRAZ, “The Performance Analysis of Extended Kalman filter on Radar Target Tracking”

Firat University, Department of Electronic and Computer Science, 23119, Elazig, TURKEY.

Firat University, Engineering Faculty, Department of Electric and Electronic, 23119, Elazig, TURKEY. E-mail: [mpoyraz@firat.edu.tr](mailto:mpoyraz@firat.edu.tr)

[2] Morsly Yacine, “Contribution à la mise en oeuvre de techniques d’association de données pour la poursuite de cibles manoeuvrantes”. Thèse magister.

Ecole Militaire Polytechnique, Département d’automatique, Alger 2006.

[3] DIGINEXT, Pole d’activités des milles, 13851 AIX-EN-PROVENCE, “Estimation Non Linéaire Optimale « Filtre Particulaire » ”

[4] Sebbagh Abdenour, “Utilisation des informations visuelles pour la poursuite de cibles manoeuvrantes à l’aide de l’approche IMM”. Thèse magister.

Ecole Militaire Polytechnique, Alger Novembre 2004.

[5] David L.HALL, James LLNAS, “HANDBOOK OF MULTISENSOR DATA FUSION”.

[6] Li Hui Wang Jue Zhang An “ The Processing of Radar Signal Based on Interactive Multiple Models Adaptive Probabilistic Data Association Algorithm”.

Northwestern Polytechnical University Department of Electronic Engineering

Xi’an, Shaanxi, China

[7] Mohinder S.Grewal, “Angus P.Andrew”, ” Kalman filtering: theory and practice using Matlab”, Second edition 2001.

[8] YAACOV BAR-SHALOM,X.Rongli, Thiagalingam Kirubarajan,” estimation with applications to tracking and navigation: theory and software” USA 2001

[9]VPS.Naidu, G.Girija, J.R.Raol , ” data association and fusion algorithms for tracking in presence of measurement loss”. May 2005.

[10] Oliver Frank , « multiple target tracking ».Février 2003.

Mots clés : Radar, Target tracking, Extended Kalman Filter, Filtre particulaire, algorithme de pistage...

---