

Enseignement des mathématiques

Méthodes constructives de la géométrie spatiale

Alan Rüegg
Guido Burmeister

Deuxième édition
revue et augmentée

Presses polytechniques et universitaires romandes



Les auteurs et l'éditeur remercient l'École polytechnique fédérale de Lausanne dont le soutien financier a rendu possible la publication de cet ouvrage.

La collection «Enseignement des mathématiques» est publiée sous la direction du professeur R. Dalang

Analyse

Recueil d'exercices et aide-mémoire vol. 1 et vol. 2

Jacques Douchet

Calcul différentiel et intégral

Jacques Douchet et Bruno Zwaalen

Fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles

Introduction à l'analyse numérique

Jacques Rappaz et Marco Picasso

Algèbre linéaire

Aide-mémoire, exercices et applications

Robert C. Dalang et Amel Chaabouni

Analyse avancée pour ingénieurs

Bernard Dacorogna, Chiara Tanteri

Initiation aux probabilités

Sheldon M. Ross

Cours d'Analyse

Srishti D. Chatterji

1 *Analyse vectorielle*

2 *Analyse complexe*

3 *Equations différentielles*

Introduction à la statistique

Stephan Morgenthaler

Aide-mémoire d'analyse

Heinrich Matzinger

Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'École polytechnique fédérale de Lausanne ainsi que d'autres universités et écoles d'ingénieurs francophones.

Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes, EPFL - Rolex Learning Center, CH-1015 Lausanne, par E-Mail à ppur@epfl.ch, par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

www.ppur.org

Deuxième édition revue et augmentée

ISBN 978-2-88074-889-0

© Presses polytechniques et universitaires romandes, 2010

© Presses polytechniques et universitaires romandes, 1993, 2005 pour la première édition

CH - 1015 Lausanne

Imprimé en Italie

Tous droits réservés.

Reproduction, même partielle, sous quelque forme

ou sur quelque support que ce soit, interdite sans l'accord écrit de l'éditeur.

Table des matières

Avant-propos	v
I Représentation plane d'objets spatiaux : perspective, axonométrie, méthode de Monge	1
1 Introduction	3
1.1 Représentations d'objets spatiaux dans un plan	3
1.2 Système de coordonnées dans l'espace	4
1.3 Deux exemples de représentation	6
1.3.1 Projection cotée	6
1.3.2 Axonométrie aérienne	7
2 Généralités	9
2.1 Projections	9
2.1.1 Définitions	9
2.1.2 Projections et vision humaine	10
2.1.3 Projection d'un objet spatial	11
2.1.4 Propriétés des projections	12
2.1.5 Remarque	14
2.2 Ombres	14
2.2.1 Définitions	14
2.2.2 Exemple	16
2.2.3 Remarque	17
3 Représentations en projection parallèle	19
3.1 Axonométrie aérienne	19
3.1.1 Définition et propriétés	19
3.1.2 Représentation du point	21
3.2 Axonométrie cavalière	22
3.2.1 Définition et propriétés	22

3.2.2	Exemples	23
3.3	Définition générale de l'axonométrie	24
3.3.1	Théorème de Pohlke	24
3.3.2	Axonométrie orthogonale	25
3.4	Méthode de Monge	26
3.4.1	Définition et propriétés	26
3.4.2	Exemples	27
3.4.3	Remarques	28
4	Constructions élémentaires en axonométries aérienne et cavalière	29
4.1	Représentation de la droite	29
4.1.1	Généralités	29
4.1.2	Exemple	30
4.1.3	Positions particulières d'une droite	31
4.2	Représentation du plan	31
4.2.1	Généralités	31
4.2.2	Construction des traces d'un plan	33
4.3	Problèmes d'intersection et de position	34
4.3.1	Droites et plans parallèles	34
4.3.2	Intersection d'une droite et d'un plan	35
4.3.3	Points et droites contenus dans un plan	37
4.3.4	Intersection de deux plans	38
4.3.5	Visibilité	38
4.4	Application à la construction d'ombres portées	39
4.4.1	Introduction	39
4.4.2	Exemples	39
4.4.3	Remarques	41
4.5	Recherche de vraies grandeurs, problèmes métriques	42
4.5.1	Introduction	42
4.5.2	Segment de droite AB dans Π_1	43
4.5.3	Segment de droite AB en position quelconque	43
4.5.4	Angle d'inclinaison d'une droite	45
4.5.5	Angle d'inclinaison d'un plan	45
4.5.6	Remarques	46
4.6	Rappel sur l'affinité	47
4.6.1	Affinité plane	47
4.6.2	Propriétés principales	48
4.7	Affinité et problèmes métriques	51

5	Constructions élémentaires en méthode de Monge	53
5.1	Représentation de la droite	53
5.2	Représentation du plan	55
5.3	Problèmes de position	56
5.3.1	Droites contenues dans un plan	56
5.3.2	Points contenus dans un plan	57
5.3.3	Plan défini par trois points non alignés	57
5.3.4	Droites et plans parallèles	58
5.4	Problèmes d'intersection	59
5.4.1	Intersection d'un plan quelconque et d'une droite verticale	59
5.4.2	Intersection d'une droite quelconque et d'un plan vertical	59
5.4.3	Intersection d'une droite et d'un plan quelconques	59
5.4.4	Intersection de deux plans quelconques	60
5.4.5	Remarque	60
5.5	Recherche de vraies grandeurs, problèmes métriques	61
5.5.1	Segment de droite	61
5.5.2	Angle d'inclinaison d'une droite	62
5.5.3	Angle d'inclinaison d'un plan	62
5.5.4	Figure plane	63
5.6	Compléments	64
5.6.1	Introduction d'un nouveau plan de projection	64
5.6.2	Affinité entre les deux projections d'une figure plane	65
6	Perspective	67
6.1	Introduction	67
6.2	Concepts de base	68
6.2.1	Définitions	68
6.2.2	Image perspective d'un objet spatial	70
6.3	Construction d'une perspective : méthode radiale	71
6.3.1	Choix du plan de dessin	71
6.3.2	Construction de l'image perspective P' d'un point P	71
6.3.3	Translation du tableau Π	73
6.3.4	Exemple	74
7	Méthode des points de fuite	77
7.1	Points de fuite	77
7.1.1	Observations	77
7.1.2	Définitions	77

7.2	Image perspective d'une droite	79
7.2.1	Généralités	79
7.2.2	Droite horizontale	79
7.2.3	Droite en position générale	80
7.2.4	Cas particuliers	82
7.2.5	Angle formé par deux droites horizontales	83
7.3	Image perspective d'un objet spatial	84
7.3.1	Démarche générale	84
7.3.2	Image perspective d'un point isolé	85
7.3.3	Remarques	86
7.3.4	Perspective inverse	87
7.4	Vue d'angle et vue de front	88
7.5	Disposition différente des projections d'un objet	89
8	Problèmes métriques en perspective	91
8.1	Introduction	91
8.2	Division proportionnelle d'un segment de droite	93
8.2.1	Segment de droite dans Π_1	93
8.2.2	Cas particulier : construction du milieu d'un segment de droite dans Π_1	94
8.2.3	Autres positions d'un segment de droite	95
8.3	Application à la construction de reflets	96
8.3.1	Loi de la réflexion	96
8.3.2	Reflet dans un miroir vertical	97
8.3.3	Reflet dans un plan d'eau	99
8.4	Vraie longueur d'un segment de droite	100
8.4.1	Segment de droite dans Π_1	100
8.4.2	Exemple	101
8.4.3	Segment de droite en position verticale	102
8.4.4	Généralisation	103
8.5	Vraie grandeur d'un angle	104
8.5.1	Angle horizontal	104
8.5.2	Angle vertical	104
8.5.3	Angle en position quelconque	105
9	Problèmes divers en perspective	107
9.1	Déformations en perspective	107
9.2	Espace du terrain et espace virtuel	108
9.3	Problèmes d'ombres	110
9.3.1	Introduction	110
9.3.2	Ombres en lumière artificielle	110

9.3.3	Ombres en lumière solaire	112
9.4	Points de fuite inaccessibles	114
9.5	Problèmes de restitution	116
9.5.1	Introduction	116
9.5.2	Notions de base	117
9.5.3	Exemples	118
9.5.4	Choix de la ligne de terre	120
9.5.5	Compléments	121
9.6	Perspective directe	122
9.6.1	Concepts de base	122
9.6.2	Exemple	123
9.6.3	Remarque	124
9.7	Perspective et vision humaine	124
10	Perspective plafonnante et plongeante	125
10.1	Introduction	125
10.2	Notions de base	127
10.3	Exemples	129
10.3.1	Perspective plafonnante	129
10.3.2	Perspective plongeante	132
II	Représentation de surfaces courbes	135
11	Généralités sur les surfaces courbes	137
11.1	Introduction	137
11.2	Modes de génération de surfaces courbes	139
11.3	Concepts de base	143
11.3.1	Définition et classification des surfaces courbes	143
11.3.2	Plan tangent	144
11.4	Représentation plane d'une surface courbe	145
11.4.1	Introduction	145
11.4.2	Contours d'une surface courbe	145
11.4.3	Courbes remarquables sur une surface	147
11.4.4	Ombres et contours apparents	149
12	Surfaces de révolution en projection parallèle	151
12.1	Introduction	151
12.2	Axonométrie aérienne et cavalière	152
12.2.1	Tour cylindrique	152
12.2.2	Cylindre en axonométrie aérienne	153
12.2.3	Cône en axonométrie cavalière	154

12.2.4	Sphère en axonométrie aérienne	155
12.3	Méthode de Monge	156
12.3.1	Cône de révolution	156
12.4	Problèmes d'ombres	157
12.4.1	Lumière solaire	157
12.4.2	Lumière artificielle	160
12.5	Intersection de surfaces	161
12.5.1	Introduction	161
12.5.2	Méthode de construction générale	162
12.5.3	Cas particulier : section plane d'une surface courbe	163
13	Surfaces de révolution en perspective	165
13.1	Introduction	165
13.2	Représentation elliptique de cercles horizontaux	165
13.3	Représentation d'objets comprenant des cercles horizontaux	168
13.4	Représentation d'objets comprenant des cercles verticaux	170
13.5	Image perspective du cercle	171
13.6	Représentation perspective de la sphère	173
13.7	Problèmes d'ombre	174
13.8	Quelques constructions relatives aux coniques	176
13.9	Complément	178
14	Surfaces réglées	179
14.1	Généralités	179
14.1.1	Définition	179
14.1.2	Classification des surfaces réglées	180
14.1.3	Quadriques	182
14.1.4	Surfaces développables	182
14.2	Paraboloïde hyperbolique (p.h.)	183
14.2.1	Généralités	183
14.2.2	Le paraboloid hyperbolique comme surface de couverture	184
14.2.3	Sections planes d'un paraboloid hyperbolique	185
14.3	Hyperboloïde de révolution à une nappe	186
III	Annexes : rappels de géométrie plane et spatiale	189
A	Ellipse	191
A.1	Définitions et propriétés principales	191
A.2	Constructions d'ellipses	193
A.2.1	Généralités	193

A.2.2	Ellipse donnée par ses axes	194
A.2.3	Ellipse donnée par deux diamètres conjugués	195
A.2.4	Autres constructions	197
B	Coniques	199
B.1	Introduction	199
B.2	Définitions	199
B.3	Sections planes d'une surface conique	201
B.4	Démonstration pour le cas elliptique	202
B.5	Application à un problème d'ombre	203
B.6	Constructions relatives aux coniques	204
B.7	Images perspectives des coniques	206
C	Géométrie analytique	211
C.1	Introduction	211
C.2	Le paraboloïde hyperbolique	213
C.3	L'hyperboloïde de révolution à une nappe	214
	Bibliographie	217
	Index	219