

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



UNIVERSITE DE BLIDA

INSTITUT D'AÉRONAUTIQUE

DÉPARTEMENT CONSTRUCTION

OPTION : STRUCTURE AÉRONAUTIQUE

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGÉNIEUR D'ÉTAT EN AÉRONAUTIQUE

THEME

SIMULATION NUMERIQUE
D'UN ECOULEMENT
COMPRESSIBLE NON VISQUEUX
DANS UNE TUYERE
CONVERGENTE-DIVERGENTE

Réalisé par : TIRANE Mohamed Cherif.
BENNAMIA Ismail

Promoteur : N. BEKKA

Promotion : 1998/2001

REMERCIEMENTS

Le travail qui a fait l'objet de ce mémoire, a été réalisé à l'**Institut d'Aéronautique** de **BLIDA**, sous la direction de Mr. **BEKKA Nadir**.

On tient tout d'abord à remercier vivement notre promoteur Monsieur **BEKKA Nadir**, d'avoir consacré une partie de son temps précieux en acceptant de diriger ce travail malgré ses divers engagements ainsi que pour son encadrement efficace et pour ses conseils clairs dont il n'a pas hésité tout au long de cette étude.

Nos remerciements s'adressent également à Messieurs **HENNI Mansour**, chargé de cours à l'**Institut d'Aéronautique**, pour les conseils qu'il nous a prodigués.

Nous remercions tous ceux qui ont fait partie de la saisie du présent mémoire, ainsi que tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

On témoigne notre amitié sincère à tous ceux qui nous ont soutenu et encouragé durant toutes ces années.

Arrivé à ce stade de notre formation, nos remerciements, pour tous les professeurs remarquables qui nous ont enseignés de l'**Institut d'Aéronautique** en particulier Messieurs **BERGHEL, REZOUG, AMTOUT, CHEGRANI, ZEBBICHE, HENNI, BOUNADER** et Mme. **HAMADOUCHE**.

On ne peut omettre de remercier tous les membres de la famille **TIRANE**, et **BENNAMIA**.

DEDICACES

Je dédie les fruits de ce modeste travail :

- A la mémoire de ma grand-mère : **Hadja FATIMA**
- A mes **très chers parents** à qui je dois tout
- A mes frères : **MOURAD, YUCEF, FAYCAL**
- A ma sœur **LYNDA**, ainsi que ma cousine **SARAH**
- A toute ma **famille**
- A tous les membres du Club d'Astronomie **EL-BAÏRUNI**
- A tous ceux qui ont contribué à ma formation
- J'associe enfin à ces remerciements mes amis : **L. FARID, OUSSAMA, MEHDI, SAMIR, DJOUNAÏ, TOUFIK, mon Binôme, AÏSSAM, YUCEF, NABIL, B.NABIL NAÏMA HOURIA...**

MOHAMED CHERIF

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail a :

- la mémoire de ma **mère**
- Mon **père**, Ma **belle mère**, Ma **grand mère**, ainsi que **Mes frères et sœurs**
- La familles de mon binôme : **TIRANE**
- Mon amie et frère **MOUNIR**
- Mon binôme **Cherif**
- Tout **Mes amis** de la cité universitaire : Assam, Lotfi, K.yacine, Lazhar, Reda, Saad, B.yacine, Haroune, Salim, Aboulkacem, ainsi mes amis **du belda**: Lakhdar, Maamer, Abdelkader.

ismail

RESUME

Le but de ce présent travail est d'élaborer un code de calcul pour la simulation numérique des écoulements compressibles non visqueux dans une tuyère convergente-divergente en bidimensionnel avec une méthode de génération de maillage adéquate

Nous avons appliqué le schéma de MacCormack en bidimensionnel pour résoudre le système d'équations d'Euler après avoir formulé mathématiquement le problème posé.

Ainsi nous avons appliqué l'approche unidimensionnelle pour estimer la position de l'onde de choc et accélérer le schéma numérique utilisé.

Afin de montrer l'efficacité et la robustesse de notre code, on a testé plusieurs configurations des tuyères (planes et axisymétriques).

Mots clés : tuyère, Ecoulement bidimensionnel, transsonique, stationnaire, simulation numérique, génération de maillage – viscosité artificielle .

ABSTRACT

The purpose of this present work is to elaborate a numerical approach ^{for} simulate the internal inviscid compressible flow in two dimensions nozzle configuration with an appropriate grid generation method.

We have applied the MacCormack scheme to solve the system of Euler equations after the formulation of mathematical model.

In order to show the efficiency of the present simulation, several configurations of nozzles are tested.

Key words : nozzle, 2d, transonic flow, steady flow, numerical simulation, grid generation, artificial viscosity.

SOMMAIRE

Dédicaces	
Remerciement	
Résumé	
Sommaire	
Nomenclature	
CHAPITRE I : INTRODUCTION	
I.1 Objectifs.....	01
I.2 Motivations.....	01
I.3 Plan du mémoire.....	03
CHAPITRE II : Etude théorique des tuyères	
II.1 Introduction.....	05
II.2 Ecoulement unidimensionnel dans une tuyère	05
II.3 Ecoulement dans une tuyère simple.....	07
II.3.1 Généralités.....	07
II.3.2 Régimes d'écoulement.....	11
II.3.2.1 Ecoulement subsonique.....	11
II.3.2.2 Ecoulement sonique adapté.....	11
II.3.2.3 Ecoulement sonique non adapté.....	12
II.3.2.4 Débit-Masse	12
II.4 Ecoulement dans une tuyère de Laval	16
II.4.1 Régimes d'écoulement	17
II.4.1.1 Ecoulement subsonique	17
II.4.1.2 Ecoulement sonique adaptée.....	17
II.4.1.3 Ecoulement sonique non adaptée.....	18
II.4.1.1 Ecoulement supersonique adaptée.....	19
II.4.1.1 Ecoulement subsonique.....	19
II.4.2 Débit-Masse	21
II.4.3 Tuyère de longueur infinie : (cas particulier).....	24
II.5 L'étude théorique d'une tuyère avec l'onde de choc dans le divergent	26
II.5.1 Les équations appliquées.....	26
II.5.2 Relations entre les quantités caractéristiques à travers l'onde de choc droite.....	27
II.5.3 Relations entre les paramètres du fluide en amont et en aval de l'onde de choc.....	29
II.5.3.1 Expressions des paramètres en fonction des nombres de Mach amont et aval de l'onde de choc.....	29
II.5.3.2 Relations entre les nombres de Mach amont et Aval de l'onde de choc.....	30
II.5.3.3 Expression des paramètres en fonction du nombre de Mach	31

amont.....	32
II.5.4 Variation de l'entropie d'une onde de choc droite.....	32
II.5.5 Equation de Hugoniot.....	34
II.5.6 Relation de Prandtl.....	34
CHAPITRE III : formulation mathématique des équations d'Euler	
III.1 Introduction.....	36
III.2 Hypothèses.....	36
III.3 Formulation mathématique d'équations d'Euler.....	37
III.3.1 Formulation conservative.....	37
III.3.2 Formulation quasi-linéaire.....	39
III.3.2.1 Les matrices jacobiennes pour les variables conservatives.....	39
III.3.2.2 Les matrices jacobiennes pour le variables primitives.....	40
III.3.2.3 Les matrices de passage entre les variables conservatives et les	42
variables non conservatives.....	44
III.3.3 Formulation caractéristique	44
III.4 Conditions aux limites.....	48
III.4.1 Condition aux limites à l'entrée.....	51
III.4.1.1 Entrée subsonique.....	51
III.4.1.2 Entrée supersonique.....	52
III.4.2 Conditions aux limites à la sortie.....	53
III.4.2.1 Sortie supersonique.....	53
III.4.2.2 Sortie subsonique; cas d'un convergent (tuyère simple).....	53
III.4.2.3 condition au limite à la paroi.....	54
III.4.4 Conditions aux limites sur l'axe de la tuyère.....	55
CHAPITRE IV : Résolution numérique des équations d'Euler	
IV.1 Introduction.....	56
IV.2 Schéma de MacCormack en monodimensionnel.....	58
IV.3 Extension du schéma de MacCormack au cas 2D bidimensionnel.....	59
IV.4 Critère de stabilité du schéma de MacCormack.....	60
IV.5 Traitement des conditions aux limites.....	61
IV.5.1 Traitement des nœuds à l'entrée.....	61
IV.5.1.1 Régime d'entrée supersonique.....	62
IV.5.1.2 Régime d'entrée subsonique.....	62
IV.5.2 Traitement des nœuds à la sortie.....	63
IV.5.2.1 Sortie supersonique.....	64
IV.5.2.2 Sortie subsonique.....	64
IV.5.3 Traitement des nœuds à la paroi.....	64
IV.5.4 Traitement des nœuds sur l'axe de la tuyère (tuyère axisymétrique)...	65
IV.6 Transformation des équations d'Euler en coordonnées généralisées.....	65
IV.7 La viscosité artificielle.....	67
IV.8 Description de la méthode de génération de maillage.....	68
CHAPITRE V : Résultats et interprétations	
V.1 Le code de calcul.....	71

V.2 Résultats et interprétations.....	71
V.2.1 Le maillage.....	71
V.2.2 Résultats du code.....	72
Conclusion	
Bibliographie	
Annexe A	
Annexe B	

Nomenclature

Symbole	Signification	Unité
Q	Quantité de chaleur	J
f	Force de frottement	N
F	Force extérieure	N
Z	Altitude	Km
\dot{M}	Débit massique	Kg/s
p	Pression	kpa
t	température	°K
ρ	densité	Kg/m ³
u,v	Vitesses axiale et radiale	m/s
\vec{V}_n	Vitesse normale	m/s
a	Célérité du son	m/s
h	enthalpie	KJ/Kg
S	entropie	KJ/Kg
e	Energie interne	KJ/Kg
E	Energie spécifique totale	KJ/Kg
t	temps	s
v	Volume massique	m ³ /kg
F,G	Flux convectifs	Kg.m ⁻² .s ⁻¹
Cp	Chaleur spécifique à pression constante	KJ/kg.°k
Cv	Chaleur spécifique à volume constant	KJ/kg.°k
(x,y)	Coordonnées cartésiennes	
(ξ,η)	Coordonnées généralisées	
U	Vecteur des variables conservatives	
V	Vecteur des variables primitives	
W	Vecteur des variables caractéristiques	
γ	Coefficient isentropique	
r	Constante des gaz parfaits	
j	Le jacobien	
M	Nombre de Mach	
Cr	Nombre de Crocco	

λ	Valeur propre	
d	Viscosité artificielle	
\mathcal{E}	Coefficient non linéaire	
λ	Valeur propre	

Indices :

i, j : position des nœuds

ξ, η, x, y : dérivés primaires

$\xi\xi, \eta\eta$: dérivés secondaires

n : accroissement du temps

0 : totale

L : critique (Laval)

Liste des tableaux

Chapitre III

III.1. conditions physiques et numériques pour un écoulement monodimensionnel.....	50
---	----

Chapitre IV :

IV.1. Schémas numériques pour la résolution des équations d'Euler.....	57
--	----

Chapitre V :

V.1. les rapports des pressions caractéristiques	71
V.2. poussée et débit masse pour une tuyère axisymétrique.....	74
V.3. poussée et débit masse pour une tuyère plane.....	74

Liste des Figures

Chapitre II :

II.1. une tuyère simple	06
II.2a. écoulement dans une tuyère simple	08
II.2b. écoulement subsonique et sonique dans une tuyère simple	14
II.2c. écoulement sonique non adaptée dans une tuyère simple	15
II.2d. Variation de $\frac{\dot{M}}{P_0}$ en fonction de $\frac{P_A}{P_0}$, pour une tuyère simple	16
II.3. tuyère de Laval	16
II.4a. écoulement d'un gaz dans une tuyère de Laval	20
II.4b. transformations thermodynamiques	21
II.5. . Variation de $\frac{\dot{M}}{P_0}$ en fonction de $\frac{P_A}{P_0}$, pour une tuyère de Laval	22
II.6 Relation entre les nombres de Mach de l'écoulement à l'amont et à l'aval d'une onde de choc	31
II.7: compression par onde de choc droite (Hugoniot)	33

II.8: Rapport de température en fonction de rapport de pression	34
---	----

Chapitre III :

III.1 : Relations entre les trois types de variables : Conservatives U, primitives V et caractéristiques W	46
III.2 Les lignes caractéristiques dans le cas monodimensionnel.	48
III.3: Conditions aux limites pour un écoulement monodimensionnel non visqueux.	49
III.4 surface frontière: entrée subsonique	51
III.5a: surface frontière: entrée supersonique dans le cas d'un divergent	52
III.5b: surface frontière: Entrée supersonique dans le cas bidimensionnel	52
III.6: Surface frontière: Sortie supersonique dans le cas bidimensionnel	53
III.7: Surface frontière: Sortie subsonique Cas d'un convergent (tuyère simple)	54
III.8. Surface frontière : Paroi d'obstacle dans le cas bidimensionnel	55

Chapitre IV :

IV.1. Cellule d'intégration C_i pour le schéma de MacCormack	60
IV.2: Systèmes de coordonnées cartésiennes et généralisées	66
IV.3 Plan physique et plan numérique	69
IV.4 Technique de deux parois	70

CHAPITRE

Introduction

1.1 Objectifs :

Le problème d'écoulement dans les conduites, dont le domaine d'application est très variée, est un sujet qui intéresse à la fois le physicien, le thermicien et l'industriel.

Dans le cadre du présent travail, nous nous sommes attachés à simuler l'écoulement interne d'un fluide compressible non visqueux dans une tuyère convergente-divergente (cv-dv) dont le but principal est de calculer les différentes caractéristiques physiques de l'écoulement.

Une telle simulation nécessite non seulement la connaissance des éléments fondamentales de l'aérodynamique interne mais aussi ceux des turbomachines et leurs performances.

Les tuyères constituent, un des éléments les plus importants dans les turbomachines et les turboréacteurs. La tuyère doit être composée d'abord d'une section convergente qui comprime le gaz allant de la chambre de combustion jusqu'à la section la plus étroite qui est le col, où la vitesse du son est atteinte, puis d'une seconde section le divergent qui forme la partie visible de la tuyère. Sachant que le diamètre de sortie peut atteindre quatre à cinq fois que celui de la chambre de combustion, le flux rapide des gaz brûlés en frottant contre les parois de la tuyère, pose l'épineux problèmes du transfert de chaleur, surtout si le temps de combustion doit dépasser quelques minutes au lieu de quelques secondes. Ce problème est encore plus critique près du col où un refroidissement dit régénératif est souvent employé dans les moteurs-fusées qui évoluent dans des conditions proches de celles du vide, nécessitent des tuyères de grande dimension pour accélérer les gaz issus de la chambre de combustion afin d'augmenter la vitesse d'éjection à la sortie et par conséquent créer par réaction la force de propulsion.

1.2 Motivations :

Le développement du domaine aéronautique dans ces dernières décennies, et le besoin d'atteindre des vitesses supersoniques, comme les décollages où des atterrissages presque verticaux (dans le domaine militaire), requiert l'utilisation des grands rapports de pression, d'où le calcul des caractéristiques aérodynamiques des tuyères est devenu primordial. Cependant l'écoulement dans la tuyère, plus exactement dans le convergent, la vitesse de l'écoulement

croît inversement à la pression, puis une détente dans le divergent, cela peut provoquer une onde de choc due aux changements brusques de la pression et même les phénomènes visqueux due à la présence de la couche limite au niveau des parois internes de la tuyère.

Souvent, les phénomènes physiques rencontrés en mécanique des fluides s'expriment sous forme d'équations différentielles aux dérivées partielles en utilisant différents types des variables : conservatives, primitives ou caractéristiques.

Notre étude consiste à résoudre le système d'équations d'Euler gouvernant le problème non visqueux en tenant compte les différentes conditions aux limites et initiales imposés par la nature du phénomène physique considéré.

Cependant, avant de résoudre un tel problème par des méthodes numériques, il faut générer le maillage. Ce dernier peut être réalisé par différentes méthodes basées sur les schémas aux différences finies en résolvant des équations aux dérivées partielles qui se différencient par leur caractère: elliptique, hyperbolique ou parabolique.

Une autre méthode de génération de maillage dite "**algébrique**" est souvent introduite pour générer le vecteur initial utilisé dans les méthodes numériques relatives à la génération de maillage peut être satisfaisante s'il s'agit des configurations simples.

Le premier article fondamental sur la **C.F.D** (Computational Fluid Dynamic), a été présenté en **1910** par **L.F.RICHARDSON** à la 'Royal Society'.

L'une des premières résolutions pour un problème d'un écoulement non visqueux bidimensionnel a été formulée par **LAX** et **WENDROFF** et étendue à un problème axisymétrique par **BURSTEIN**.

Durant, les années 1960, les méthodes numériques étaient le meilleur moyen et un outil essentiel dans le domaine de l'analyse des contraintes. Car dans la même année, la méthode des panneaux apparaît et devient un outil très utilisable, dans le calcul des écoulements subsonique non visqueux autour des configurations relativement complexes. Cette méthode est basée sur la résolution des équations de LAPLACE pour le potentiel de vitesse en distribuant des singularités (sources, puits et vortex).

Vers les années 1970 et afin de simuler les écoulements complexes, l'attention est tournée vers la résolution des écoulements compressibles, dont la méthode des différences finies explicite figurée par **MacCormack** ; elle est dite explicite lorsqu'elle fait intervenir seulement les valeurs au temps précédent pour calculer celles du futur, mais elle est simple et directe. Cependant elle utilise des pas du temps petits vu que les schémas explicites sont conditionnellement stable et le processus vers l'état stationnaire devient long. Contrairement aux schémas implicites dérivés par la factorisation de l'équation non linéaire obtenus par **Holst** et **Baker**, sont inconditionnellement stable, ce qui permet d'utiliser des pas des temps grands.

Le problème de localisations de l'onde de choc a été traité de différentes façons. **J.Mc.Guirk** et **G.j.Page** ont proposé une méthode numérique appelée "pressure correction method". **Parameswaran** a utilisé un algorithme développé pour des écoulements stationnaires et incompressibles, quand à **Patankar** et **Spalding** ont proposé une méthode analytique qui permet de déterminer la position de l'onde de choc en monodimensionnel.

1.3 Plan du mémoire:

Notre travail, consiste en une étude numérique, du comportement d'un fluide compressible et non visqueux le long d'une tuyère supersonique.

Le mémoire est divisé en cinq chapitres. Dans le premier chapitre nous avons cité l'importance des tuyères ainsi les objectifs principaux avec les motivations de notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude théorique des tuyères y' compris en détail celle relative à l'approche monodimensionnelle des tuyères.

L'établissement de modèle mathématique qui sert à gouverner le phénomène physique d'un écoulement compressible non visqueux est le sujet de chapitre III.

La résolution numérique du problème, ainsi que la représentation du schéma numérique utilisé sera développé dans le quatrième chapitre.

Enfin, les principaux résultats et leur interprétation seront présentés dans le cinquième chapitre.

Enfin, une conclusion résumera les principaux résultats auxquels nous avons abouti dans cette étude avec quelques perspectives ultérieures sera tirée.

CHAPITRE I

Etude théorique des tuyères

II.1 Introduction :

Une tuyère est un organe mécanique passif qui met en communication deux réservoirs à des pressions différentes et dont le profil doit permettre un écoulement adiabatique réversible (au moins théoriquement).

Si la pression par exemple varie dans la tuyère de la valeur p_0 à une valeur nulle dans le sens de l'écoulement, il faut que le profil soit convergent, puis divergent et que la section de sortie soit infinie, la section d'entrée sera elle-même infinie si la vitesse d'entrée est nulle.

II.2 Ecoulement unidimensionnel dans une tuyère :

Étudions la forme à donner aux tuyères de détente destinées à transformer en énergie cinétique, l'énergie de pression d'un fluide compressible. Nous admettons que l'écoulement se fait sans dissipation, et nous formulons quelques hypothèses qui sont les suivantes :

- Ecoulement adiabatique $\delta Q = 0$ (où Q est quantité de chaleur)
- Ecoulement sans dissipation $\delta f = 0$ (où f est la force de frottement donc l'écoulement est isentropique).
- Ecoulement unidimensionnel.
- Ecoulement horizontal $dZ = 0$.
- La tuyère est fixée.

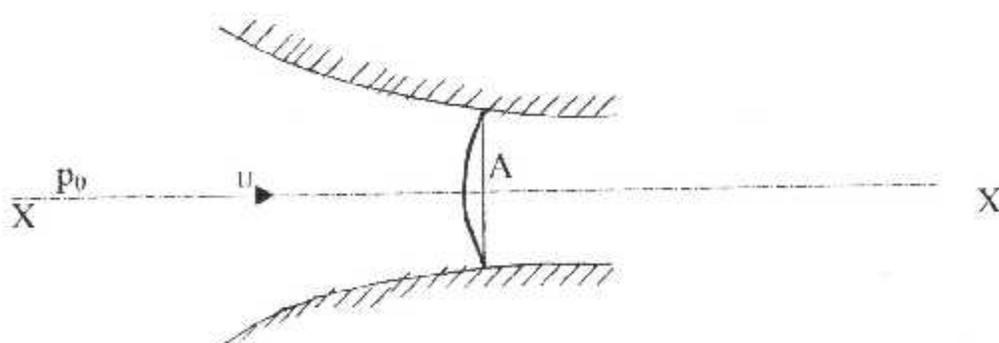


Fig.II.1: Une tuyère simple

a) L'équation de continuité :

L'équation de continuité s'écrit :

$$\dot{M} = \rho \cdot u \cdot A = \text{Cste} \quad (\text{II.1a})$$

Ou bien sous forme différentielle :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (\text{II.1b})$$

où :

- ρ : la masse volumique du fluide
- u : la vitesse
- A : la section

b) L'équation de quantité de mouvement :

Dans l'écoulement monodimensionnel, l'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$u du + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (\text{II.2})$$

c) L'équation d'énergie :

On peut écrire l'équation de l'énergie dans le régime monodimensionnel sous la forme :

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p} \quad (\text{II.3})$$

où :

- T_0 : est la température totale
- C_p : capacité thermique massique à pression constante

d) La célérité du son :

On peut définir la célérité du son par la relation :

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \quad (\text{sous forme différentielle})$$

S est l'entropie

$$a^2 = (\gamma p / \rho) = \gamma r.T \quad (II.4)$$

e) Relations d'Hugoniot :

1^{ère} relation : $\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \quad (II.5)$

2^{ème} relation : $\frac{dA}{A} = (1 - M^2) \frac{dp}{\rho u^2} \quad (II.6)$

On analyse la relation (II.5), deux cas sont possibles :

- a) $M < 1$: l'écoulement est subsonique, pour obtenir une augmentation de vitesse ($du > 0$), il faudra réaliser une diminution progressive de section ($dA < 0$) : Tuyère convergente.
- b) $M > 1$: l'écoulement est supersonique, ce sont des augmentations progressives de section ($dA > 0$), qui donnent des accroissements de vitesse ($du > 0$) : Tuyère divergente.
- c) $M = 1$: C'est implique que $dA = 0$, ce qui conduit que la vitesse du fluide ne peut être que égale à la vitesse locale du son ($M = 1$) qui est une section où l'aire présente un extremum ($dA = 0$). Cet extremum ne peut être que minimum, puisque d'après les deux cas précédents, on ne peut passer du subsonique ou supersonique au sonique qu'en diminuant la section.

Les conclusions tirées précédemment en partant de l'analyse faite ci-dessus constituent le théorème d'Hugoniot.

II.3 Ecoulement dans une tuyère simple :

II.3.1 Généralité :

Aux hypothèses énoncées dans la paragraphe précédent on considère en outre que le gaz est supposé parfait .

La tuyère est alimentée par un réservoir amont 0, supposé de dimension infinie,

dont la pression p_0 , la température T_0 , et la vitesse $u_0 = 0$ sont les conditions génératrices.

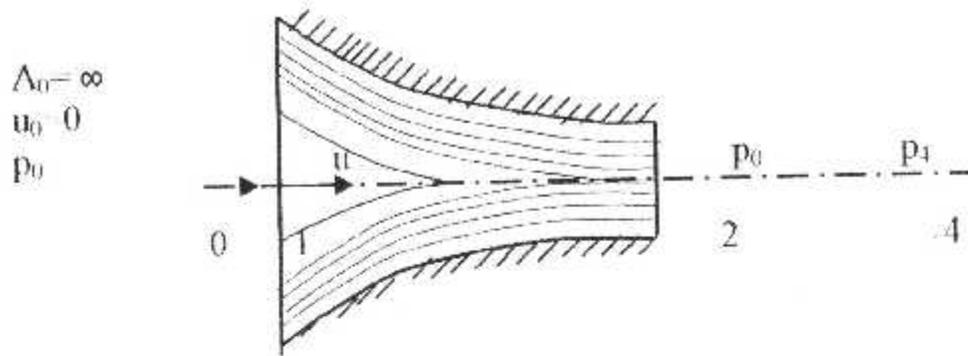


Fig.II.2a Ecoulement dans une tuyère simple

Elle débite dans un réservoir aval 4, supposé également infini, dont la pression p_1 peut varier de façon paramétrique.

Analyse :

L'écoulement étant dans un canal fixe, adiabatique, l'enthalpie totale se conserve. Entre deux points le point 0 et un point de la tuyère on a :

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} \implies u^2 = 2Cp \Delta T \quad (\Delta h = Cp \Delta T)$$

Alors :

$$u^2 = 2Cp T_0 \left(1 - \frac{T}{T_0}\right) \tag{II-7}$$

La transformation étant isentropique : $p/\rho^\gamma = Cste$

On obtient :

$$u = \left(2Cp T_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right)^{1/2} \tag{II-8}$$

On définit le nombre de Mach par : $M = \frac{u}{a}$

Où : (a) est la vitesse locale du son ($a^2 = \gamma p / \rho$)

Alors :

$$M^2 = \frac{u^2}{a^2} = \frac{2c_p T_0}{\gamma T} \left[1 - (p/p_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

On obtient :

$$M = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[(p/p_0)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right]} \quad (\text{II-9})$$

On définit le nombre de Laval par le quotient de la vitesse de l'écoulement u et la vitesse de Laval a_L (ou vitesse critique)

$$L_a = \frac{u}{a_L} \quad (\text{II.10a})$$

dont :

$$a_L = \sqrt{\frac{2c_p T_0}{K}} \quad (\text{II.10b})$$

où $K = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$ (voir annexe A)

$$L_a^2 = \frac{u^2}{a_L^2} = \frac{2c_p T_0}{2c_p T_0} K \left[1 - (p/p_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

On obtient :

$$L_a = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[1 - (p/p_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (\text{II.10c})$$

La vitesse u atteindra la vitesse du son a_L lorsque le nombre de Mach M et le nombre de Laval L_a (L_a est une vitesse réduite) atteignent la valeur 1, et la pression P atteint la valeur p_L .

Le rapport de pression correspondant, appelé rapport de pression de Laval (ou rapport de pression critique)

$$\frac{p_L}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (\text{II.11a})$$

Le rapport de la température est donné par :

$$\frac{T_L}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1} \quad (\text{II.11b})$$

ainsi de même pour le rapport de la masse volumique :

$$\frac{\rho_L}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (\text{II.11c})$$

(voir annexe A)

Les variables au col d'une tuyère souvent appelées pression, température, masse volumique de Laval.

On voit que les rapports ci-dessus ne dépendent pas de la géométrie du canal, ils ne dépendent que de nature du gaz ($\gamma = C_p/C_v$)

Le débit-masse est, selon la relation (II.8) qui donne u :

$$\dot{M} = \rho \cdot A U = \frac{A U}{v} = \frac{A}{v} \sqrt{2 C_p T_0 \left[1 - (p/p_0)^\gamma \right]} = \text{Cste} \quad (\text{II.12})$$

où v est le volume par unité de masse.

En tenant compte de l'équation d'état des gaz parfaits $p v = r T$, et de la relation $C_p = \frac{r \gamma}{\gamma - 1}$, on peut transformer (II.12) et la mettre sous forme :

$$\dot{M}^2 = \frac{A^2}{v^2} \cdot 2 \cdot C_p \cdot T_0 \left[1 - (p/p_0)^\gamma \right]$$

Sachant d'autre part que $v = v_0 (p/p_0)^{-\frac{1}{\gamma}}$

On obtient après transformation la relation :

$$\dot{M} = A \cdot p_0 \sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma-1)rT_0} (p/p_0)^{2/\gamma} \left[1 - (p/p_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} = cste \quad (II-13)$$

Ce résultat fournit aussi la relation entre la section **A** et la pression **p**, pour un régime d'écoulement déterminé, caractérisé par le débit-masse \dot{M} constant.

II.3.2 Régimes d'écoulement :

Si on fait diminuer progressivement la pression **p₄** de l'enceinte aval au dessous de la pression génératrice **p₀** du réservoir supposée constante, on obtient trois régimes d'écoulements particuliers :

II.3.2.1 Ecoulement subsonique : (p₀ > p₄ = p₂ > p_L)

Lorsque la pression **p₄** reste supérieure à la pression de Laval (ou critique) **p_L**, l'écoulement est dit subsonique. L'évolution de la pression et de la vitesse **u**, ainsi que la transformation thermodynamique du gaz, sont représentées dans la figure (II.2b).

Comme le débit masse \dot{M} est constant, la famille des courbes de Fanno, tracée dans le diagramme (h-S), donne la relation entre la section **A** et l'état thermodynamique du gaz.

Au col de la tuyère, la pression **p₂** atteint la valeur minimale **p₄** et la vitesse **u₂** atteint une valeur maximale.

En aval de la section **2**, l'énergie cinétique $\frac{u_2^2}{2}$ est retransformée en enthalpie au sein du réservoir **4**, en raison de phénomène dissipatif de frottement visqueux.

II.3.2.2 Ecoulement sonique adapté : (p₄ = p₂ = p_L)

Lorsque la pression **p₄** est descendue jusqu'à la valeur **p_L** l'écoulement est

dit **sonique adapté**. Dans ce cas, l'évolution du gaz est analogue à celle représentée dans la figure (II.2b).

A la différence que, le point 2 atteint le point remarquable de Laval L . Au col de la tuyère p_2 atteint la valeur minimale $p_2=p_L$ et la vitesse u_2 atteint la vitesse du son a_L . Ensuite, l'énergie cinétique est retransformée en enthalpie, comme précédemment.

II.3.2.3 Ecoulement sonique non adapté : ($p_4 < p_2 = p_L$)

Lorsque la pression p_4 devient inférieure à la pression de Laval p_L , l'écoulement est **sonique non adapté**. L'évolution du gaz est représentée dans la figure (II.2.c).

L'écoulement dans la tuyère ne subit plus aucune modification il devient sensible à la baisse de la pression p_4 et reste rigoureusement identique à l'écoulement **sonique adapté**. C'est le phénomène de **blocage sonique**.

Comme la pression p_2 reste égale à la valeur p_L , la détente de $p_2=p_L$ à $p_4 < p_L$ se fait à l'aval du col de la tuyère dans le réservoir p_4 . Cette détente fait intervenir le phénomène bruyant et brutal d'onde de détente. Ensuite, aussi bien l'énergie acoustique que l'énergie cinétique sont transformées en enthalpie.

II.3.2.4 Débit-Masse :

Examinons maintenant la variation du débit massique \dot{M} en fonction des pressions p_0 et p_4 des réservoirs amont et aval.

Si nous considérons la section A_2 au col de la tuyère, le débit massique \dot{M} est donné selon la relation (II.13) par :

$$\frac{\dot{M}}{p_0} = A \sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma-1)rT_0} (p_2/p_0)^{2/\gamma} \left[1 - (p_2/p_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (II-14)$$

Cette relation montre que, pour les pressions p_0 et p_2 déterminées, le débit massique \dot{M} est proportionnel à $\sqrt{1/T_0}$.

La variation de $\frac{\dot{M}}{\rho_0}$ en fonction du rapport (p_4/p_0) est donnée par la courbe de la figure (II.2d).

Nous distinguons bien les trois régimes d'écoulement décrits ci-dessous :

- La branche de droite de la courbe correspond à l'écoulement subsonique réalisé lorsque $p_4 > p_L$. Cette courbe ayant l'allure d'un quart d'ellipse.
- Le point L correspond à l'écoulement sonique adapté réalisé lorsque $p_4 = p_L$. En introduisant le rapport de pression de Laval donnée par l'équation (II.11a) dans la relation (II.13), nous obtenons le débit massique sonique \dot{m}_L :

$$\dot{M}_L = A_2 p_0 \left[\frac{2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma + 1)rT_0}} \quad (II.15)$$

\dot{M}_L : débit maximal

La dérivée par rapport à p_2/p_0 donnée par (II.14) s'annule précisément pour le rapport de Laval (p_L/p_0) de sorte qu'au point L, la tangente à la courbe est horizontale.

La branche de gauche de la courbe donnée par la relation (II.14) ne correspond à aucune réalité physique. C'est pourquoi elle est tracée en traits pointillés. Nous savons qu'à partir de L intervient le blocage sonique, de sorte que la courbe réelle correspond à l'écoulement sonique non adapté est un tronçon de droite horizontal.

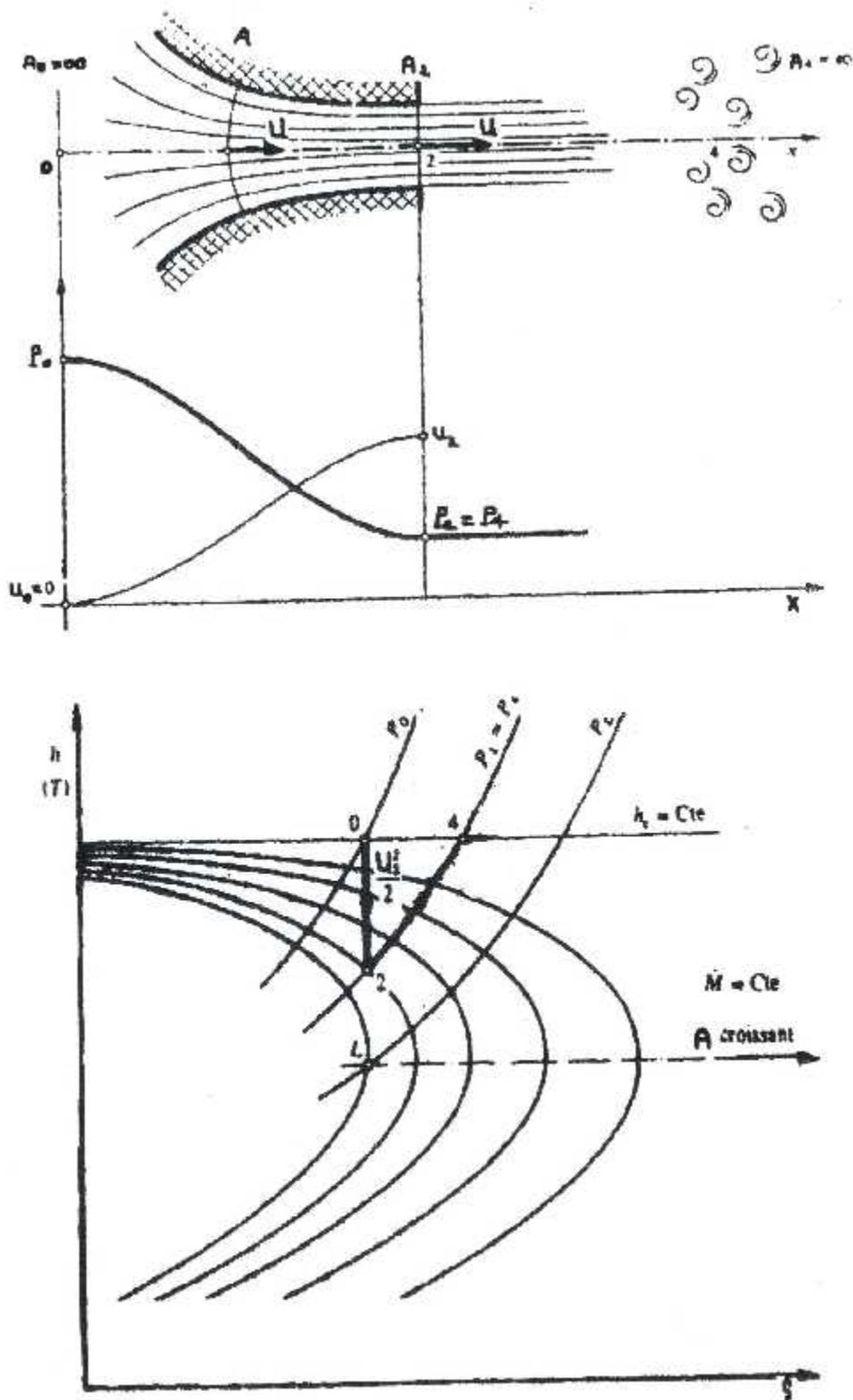


Fig:II.2b: Ecoulement subsonique d'un gaz parfait dans une tuyère simple

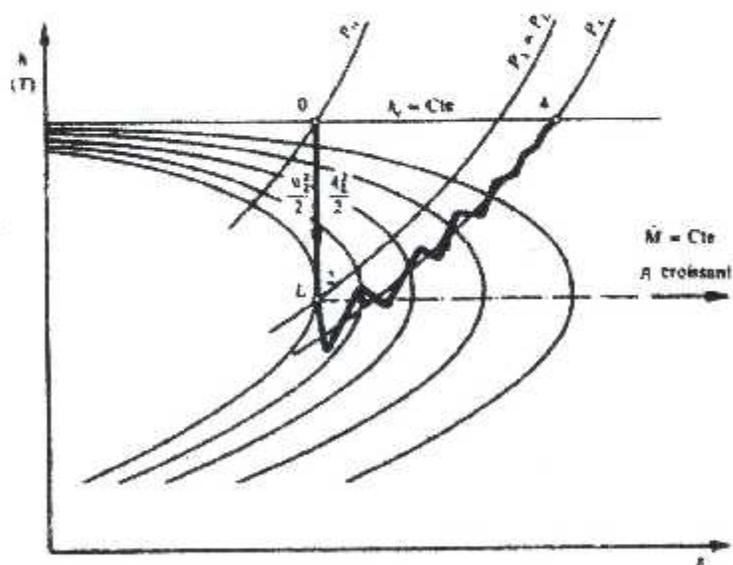
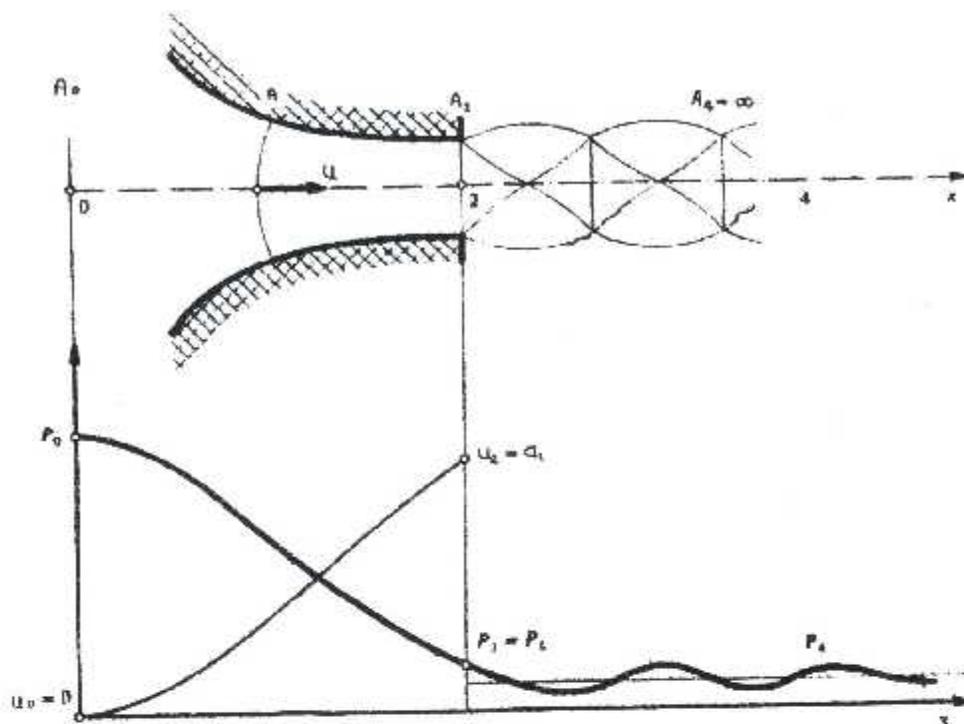


Fig II.2c Ecoulement sonique non adaptée dans une tuyère simple

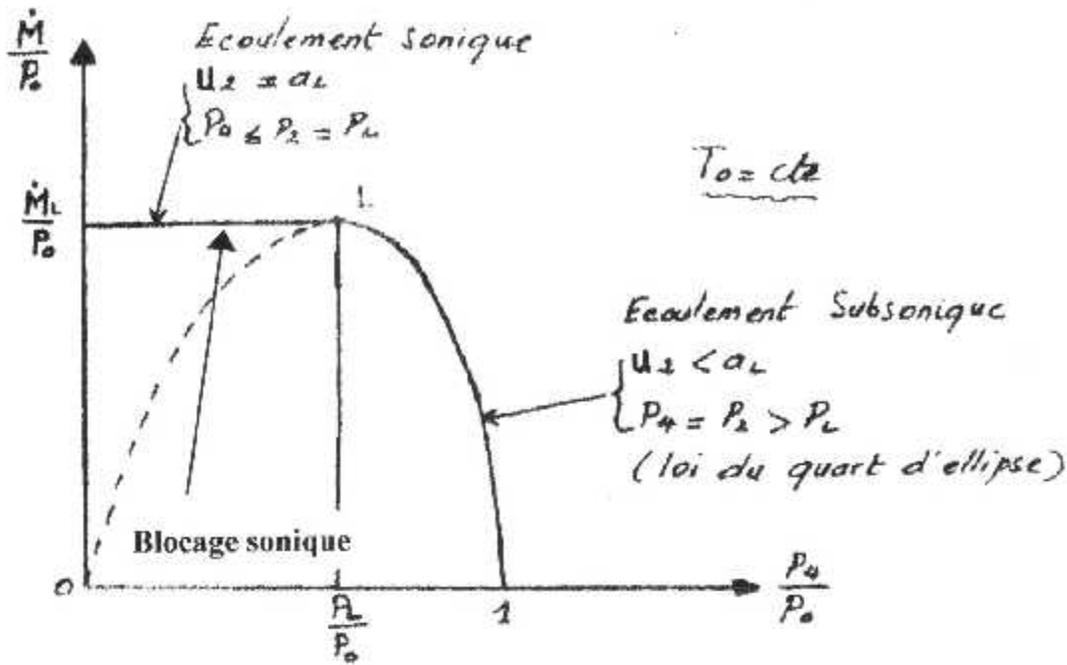


Fig.II.2d: Variation de $\frac{\dot{M}}{P_0}$ en fonction de $\frac{P_4}{P_0}$, pour une tuyère simple

II.4 Ecoulement dans une tuyère de Laval :

La figure (II.3) représente un canal convergent-divergent, qu'on désigne sous l'appellation de "tuyère de Laval", formée d'un tronçon convergent identique à celui d'une tuyère simple, suivi d'un tronçon divergent identique à un diffuseur conique.

La tuyère de Laval est placée entre deux réservoirs 0 et 4.

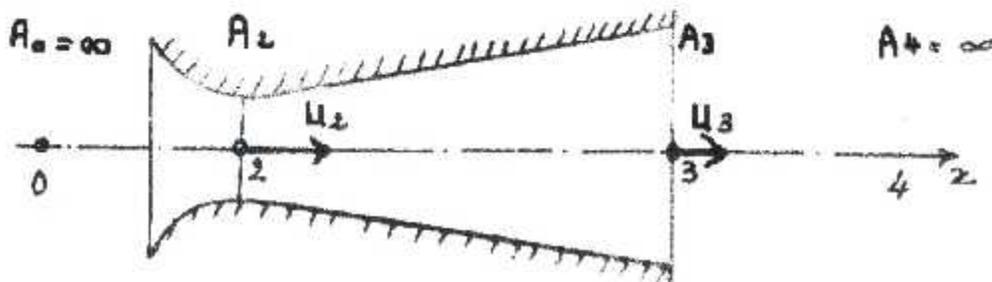


Fig.II.3: Tuyère de Laval

Hypothèses : On utilisera les mêmes hypothèses citées dans le paragraphe précédent relatives au tuyère simple.

Il en résulte que les relations (II.2),(II.9),(II.10),(II.1(a,b,c)) et (II.13) donnant respectivement : la vitesse u , le nombre de Mach M , le nombre de Laval L_a , les rapports critiques et le débit massique \dot{M} (en fonction de $\frac{p}{p_0}$) restent encore valables.

II.4.1 Régimes d'écoulement :

En abaissant progressivement la pression p_4 du réservoir aval au dessous de la pression p_0 du réservoir amont supposée constante, on met en évidence cinq régimes particuliers d'écoulement.

II.4.1.1 Ecoulement subsonique : $p_0 > p_4 = p_3 > p_3^*$

Lorsque la pression p_4 reste supérieure à la pression p_3^* qui sera représentée ultérieurement, l'écoulement dans toute la tuyère est entièrement **subsonique**.

La pression p et la vitesse u sont représentées par le graphe Fig.(II.4a) et la transformation thermodynamique est représentée dans le deuxième graphe Fig.(II.4b) par les courbes « **oab** ». Au col de la tuyère (A_2) la pression p passe par une valeur minimal (p_2) et, corrélativement, la vitesse u passe par une valeur maximale (u_2).

Le tronçon divergent de la tuyère fonctionne comme un diffuseur (canal décélérateur)($p \uparrow, u \downarrow$). Ensuite, l'énergie cinétique $\frac{u_3^2}{2}$ est retransformée en enthalpie qu'au sein du réservoir 4 comme pour la tuyère simple.

II.4.1.2 Ecoulement sonique adapté : $p_4 = p_3 = p_3^*$

Lorsque la pression p_4 atteint la valeur p_3^* , l'écoulement est dit **sonique adapté**. L'évolution du gaz est représentée par les courbes « **Ocd** » de la figure (II.4). L'évolution est analogue à celle du cas précédent sauf que cette fois-ci, le point 2 atteint le point remarquable de Laval **L**. Au col de la tuyère, la pression

p_2 atteint la valeur p_L et la vitesse u_2 atteint la vitesse du son a_L , comme dans une tuyère simple. Le tronçon divergent travaille toujours comme canal décélérateur (diffuseur).

II.4.1.3 Ecoulement sonique non adaptée : $p_3 > p_4 = p_3 > p_3^{**}$

Si on continue à abaisser la pression p_4 plus bas que p_3^* , tout en la garde supérieure à une certaine valeur p_3^{**} que nous définissons plus loin, l'écoulement sera **sonique non adaptée**.

La pression, la vitesse et la transformation thermodynamique sont représentées par les courbes « **ocfeg** » (Fig. II.4a-b)

L'écoulement dans le tronçon convergent ne subit plus aucune modification, il devient sensible à la baisse de la pression p_4 et reste rigoureusement identique à l'écoulement sonique adaptée. C'est le phénomène de **blocage sonique**.

L'écoulement dans le tronçon divergent est le siège d'un phénomène d'**onde de choc**.

La détente du gaz ayant lieu dans le tronçon convergent poursuit au-delà du col et, corrélativement, la vitesse continue à augmenter de sorte que l'écoulement correspondant aux tronçons de courbe « **ce** » est supersonique et que le tronçon divergent fonctionne comme un canal accélérateur.

Au cours de l'onde choc, la pression augmente brusquement en subissant un saut de **e** à **f**, corrélativement, la vitesse diminue brusquement en subissant également un saut de **e** à **f**.

Après le choc, théoriquement la pression remonte et, corrélativement la vitesse diminue, selon le tronçon **fg**. L'écoulement est à niveau subsonique et le tronçon divergent fonctionne comme canal décélérateur.

En réalité, les phénomènes liés à l'onde de choc sont beaucoup plus complexes. D'une part, il ne s'agit plus d'une onde de choc à front droit, mais d'une onde de choc à front oblique. Pour une valeur de p_4 légèrement inférieure

à p_3 , l'onde de choc a lieu peu après le col, elle est encore presque à front droit et ne donne lieu qu'à une faible perturbation. Pour des valeurs décroissantes de p_4 , l'onde de choc s'éloigne du col, elle est à front de plus en plus oblique et donne lieu à une perturbation de plus en plus grande.

En réalité, à cause des frottements, dont nous n'avons pas tenu compte, il se produit à la paroi du divergent un décollement brusque de la couche limite, avec apparition d'une zone morte d'écoulement, de sorte que la pression ne remonte pas et la vitesse ne diminue pas exactement selon la théorie simplifiée, car l'écoulement ne peut plus être unidimensionnel.

II.4.1.4 Ecoulement supersonique adapté : $p_4 = p_3 = p_3^{}$**

Lorsque la pression p_4 est égale à la pression p_3^{**} , l'écoulement est dit **supersonique adapté**. L'évolution du gaz est représentée par les courbes « och ».

L'écoulement dans le tronçon convergent est toujours rigoureusement identique à l'écoulement sonique adapté.

Dans le tronçon divergent l'écoulement est maintenant entièrement supersonique et ce tronçon divergent fonctionne totalement comme un canal accélérateur. Le phénomène d'onde de choc a disparu.

II.4.1.5 Ecoulement supersonique non adapté : $p_4 < p_3 = p_3^{}$**

Si on continue à abaisser p_4 plus bas que le niveau p_3^{**} , l'écoulement sera **supersonique non adapté**. L'évolution du gaz est encore représentée par les courbes « och ».

L'écoulement dans l'ensemble de la tuyère de Laval ne subit plus aucune modification. Il devient insensible à la baisse de la pression p_4 est resté rigoureusement identique à l'écoulement supersonique adapté.

Comme la pression p_3 reste égale à p_3^{**} , la détente de la pression $p_3 < p_3^{**}$, se fait à l'aval de la tuyère dans le réservoir 4. Cette détente fait intervenir le phénomène des ondes de détente, décrit précédemment. Ces ondes de détente comportent des lignes caractéristiques assez complexes comme cela est esquissé

sur la figure (II.4) (de même que pour les ondes de choc).

Remarque :

En réalité, l'écoulement se fait avec dissipation, de sorte que l'entropie augmente. Il en résulte du fait de cette dissipation :

- La vitesse au col de la tuyère de Laval est légèrement inférieure à la vitesse du son.
- La vitesse du son est atteinte dans une section un peu en aval du col.

Pour terminer, il convient de préciser que lorsqu'on tient compte de la dissipation c'est-à-dire de la viscosité du fluide, l'analyse de l'écoulement devient plus complexe, car l'hypothèse de l'écoulement non visqueux n'est plus valable.

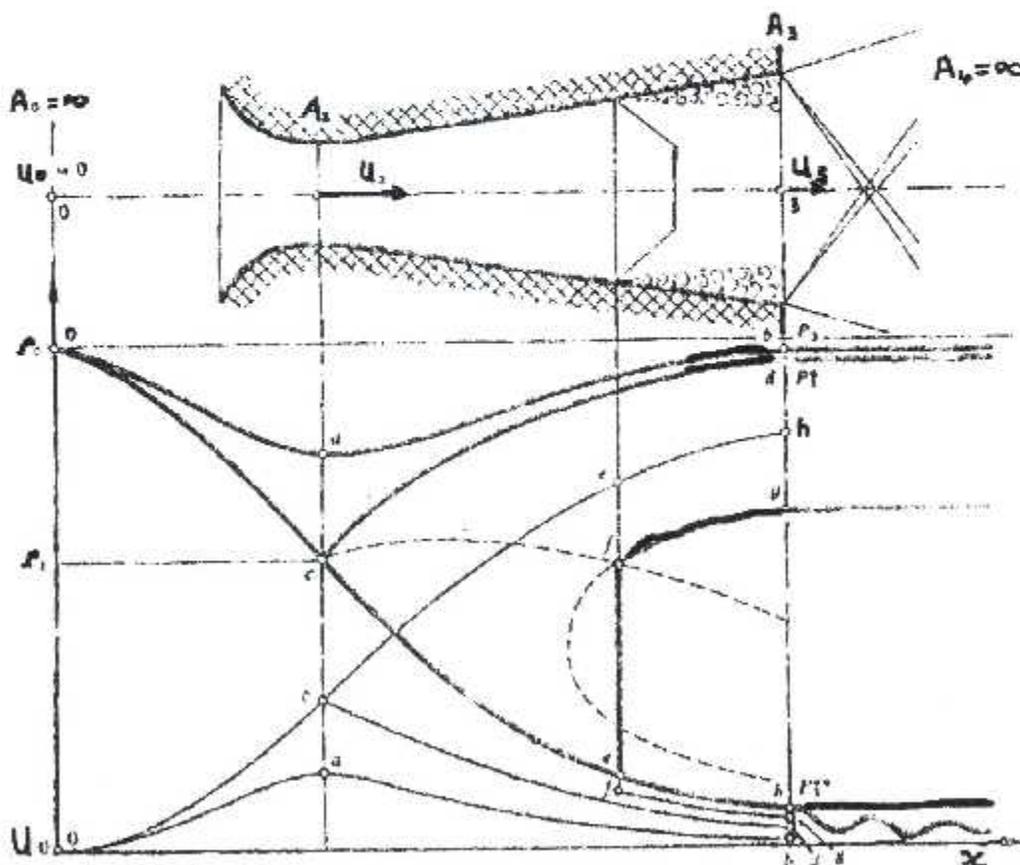


Fig.II.4a Ecoulement d'un gaz dans une tuyère de Laval

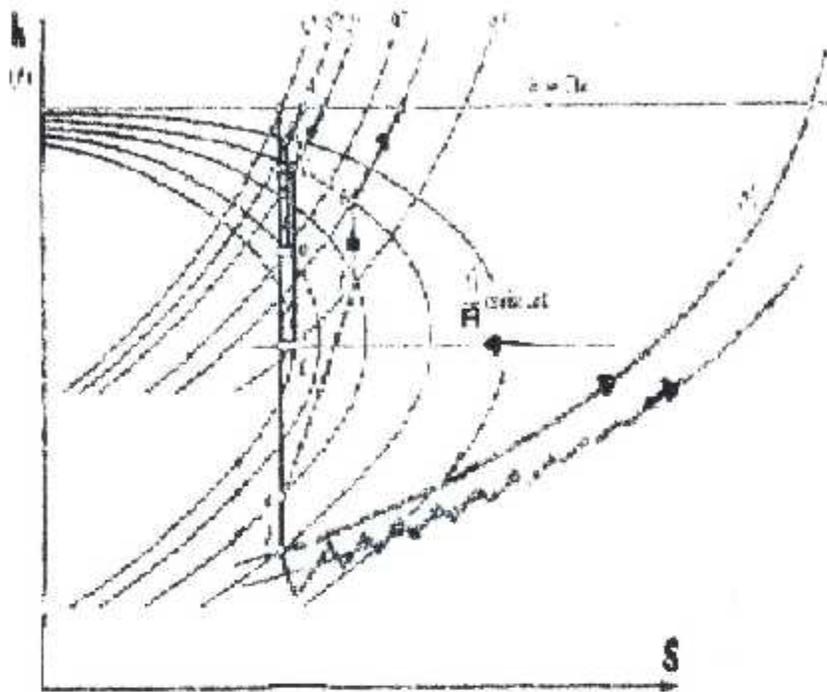


Fig.II.4b Transformation thermodynamique dans une tuyère de Laval

II.4.2 Débit-Masse :

Examinons maintenant la variation du débit masse \dot{M} en fonction des pressions amont p_0 et aval p_4 , la relation déjà établie s'écrit :

$$\frac{\dot{M}}{p_0} = A \sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma - 1)r T_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \quad (II.16a)$$

Si nous appliquons cette relation dans la section A_2 du col et dans la section A_3 à l'extrémité de la tuyère, le débit massique sera :

$$\frac{\dot{M}}{p_0} = A_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{(\gamma-1)r.T_0} \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \quad (\text{II.16b})$$

$$\frac{\dot{M}}{p_0} = A_3 \cdot \sqrt{\frac{2}{(\gamma-1)r.T_0} \left(\frac{p_3}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \quad (\text{II.16c})$$

La variation de $\frac{\dot{M}}{p_0}$ en fonction de rapport $\frac{p_4}{p_0}$ est donnée par la figure (II.5).

Nous distinguons bien les cinq régimes d'écoulement d'écrits ci-dessus.

Nous remarquons que dès que p_4 atteint la valeur p_3^* intervient le blocage sonique et le débit atteint sa valeur maximale \dot{M}_L .

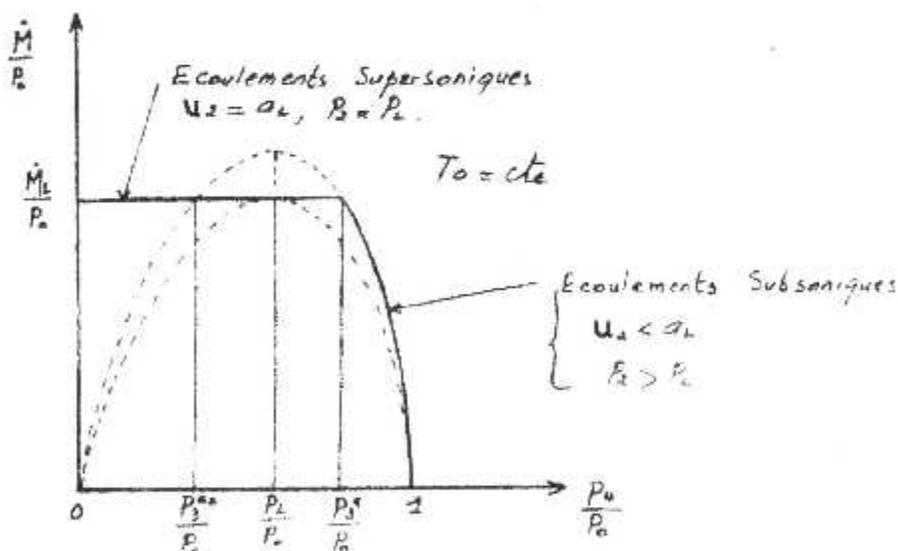


Fig.II.5: Variation de $\frac{\dot{M}}{p_0}$ en fonction du rapport de pression $\frac{p_4}{p_0}$ pour la tuyère de Laval

Remarques :

Pour les écoulements soniques et supersoniques adaptés, on sait que $p_2 = p_L$ (La pression au col est égale à la pression de Laval).

Les relations (II.16) ci-dessus donnent :

$$A_3 \sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma-1)r.T_0} \left(\frac{p_3}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} = A_2 \sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma-1)r.T_0} \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

on déduit :

$$\left(\frac{p_3}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] = \left(\frac{A_2}{A_3}\right)^2 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \quad (II.17)$$

Or pour les écoulements subsoniques et supersoniques adaptés $p_2 = p_L$ et $\frac{p_2}{p_0} = \frac{p_L}{p_0}$, il s'agit du rapport critique (ou de Laval) donné par la relation (II.11) on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_2}{A_3}\right)^2 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] &= \left(\frac{A_2}{A_3}\right)^2 \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \left[1 - \frac{2}{\gamma+1}\right] \\ &= \left(\frac{A_2}{A_3}\right)^2 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \end{aligned}$$

(II.17) devient

$$\left(\frac{p_3}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] = \left(\frac{A_2}{A_3}\right)^2 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (II.18)$$

La résolution de (II.18) donne les pressions caractéristiques p_3^* et p_3^{**} .

II.4.3 Tuyère de longueur infinie : (cas particulier)

Pour terminer, examinons le cas limite d'une tuyère de Laval dont le tronçon divergent serait de longueur infinie, c'est à dire se terminerait par une section infinie. En introduisant la valeur $A_3 = \infty$ dans l'équation (II.18) nous obtenons

$$\left(\frac{p_3}{p_0}\right)^\gamma \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] = 0$$

qui conduit aux deux solutions suivantes :

- $p_3 = p_3^* = p_0$: Ecoulements subsonique et sonique adaptés, tel que le tronçon divergent retransforme intégralement l'énergie cinétique en enthalpie .
- $p_3 = p_3^{**} = 0$: Ecoulement supersonique, caractérisé par une détente totale jusqu'à une pression nulle.

Dans ce dernier cas les relations :

$$\frac{v}{v_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \quad \text{et} \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \text{montrent que}$$

$$p_3^{**} \rightarrow 0 \Rightarrow v_3^{**} \rightarrow \infty, \quad T_3^{**} \rightarrow 0$$

La relation

$$u = \sqrt{2C_p T_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad \text{montre que}$$

$$u_3^{**} = \sqrt{2C_p T_0} \quad (\text{II.19})$$

Nous constatons que, contrairement à l'utilisation, la détente totale du gaz ne conduit pas à une vitesse infinie. La vitesse maximale qu'il est possible

d'atteindre avec une tuyère de Laval de section terminale infinie est théoriquement égale à

$$u_{\max} = \sqrt{2C_p T_0}$$

Cette vitesse est désignée sous l'appellation de vitesse de Crocco u_{\max} .
Sachant d'autre part que :

$$a_L = \sqrt{\frac{2C_p T_0}{k}}$$

on obtient une relation entre u_{\max} et a_L .

$$u_{\max} = \sqrt{2C_p T_0} \quad \text{et} \quad a_L = \sqrt{\frac{2C_p T_0}{k}}$$

$$\Rightarrow u_{\max} = a_L \sqrt{k}$$

$$u_{\max} = a_L \sqrt{k} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} a_L \quad (11.20)$$

On définit aussi le nombre de Crocco Cr , comme le rapport entre la vitesse u de l'écoulement et la vitesse du Crocco u_{\max}

$$Cr = \frac{u}{u_{\max}} \quad (11.21)$$

Sachant que $a = \sqrt{\gamma r T}$

si $T \rightarrow T_3^{**}$, $a \rightarrow 0$

On peut dire que la détente totale du gaz dans une tuyère de Laval de section terminale infinie conduit à un nombre de Crocco égale à 1, mais à un nombre de Mach infini.

$$1^{\circ}) \text{ si } p^{**} \rightarrow 0 \Rightarrow T_3^{**} \rightarrow 0 \Rightarrow u = u_{\max} = \sqrt{2C_p T_0}$$

$$\text{et } Cr = \frac{u}{u_{\max}} = \frac{u_{\max}}{u_{\max}} = 1 \quad Cr=1$$

$$2^{\circ}) \quad M_a = \frac{M}{a}, \text{ comme } a \rightarrow 0 \text{ (quand } T^{**} \rightarrow 0) \text{ donc}$$

$$M_a \rightarrow \infty$$

Alors c'est la détente totale.

II.5 L'étude théorique d'une tuyère avec l'onde de choc dans le divergent :

Une onde de choc droite correspond à une zone d'écoulement de très faible épaisseur, qui fait la transition entre l'amont où la vitesse est supersonique et l'aval où elle est subsonique. Dans le même espace, la pression est subie une très forte augmentation.

Ainsi, les particules du fluide lors de leurs traversées de l'onde de choc subissent une décélération extrêmement forte qui peut atteindre 10^9 à 10^{10} m/s².

C'est cet impact violent produisant un vertical choc sur les particules qui est à l'origine du nom donné à cette zone de transition.

Il existe des ondes de choc droites (planes), des ondes de choc obliques et coniques.

On ne s'intéresse que à l'onde de choc droite qui se développe à l'intérieur de la tuyère.

Les hypothèses sont les mêmes que pour la tuyère sans onde de choc, sauf l'hypothèse de l'isentropie ni plus valable.

II.5.1 Les équations appliquées :

a) Calcul de la température statique :

Sachant que le nombre de Mach est donné par $M = \frac{u}{a}$

En combinant avec l'équation d'énergie on obtient :

$$T = T_0 \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-1} \quad (\text{II.22})$$

b) Calcul de la pression statique :

Si l'écoulement est isentropique, c'est-à-dire que $\frac{p}{\rho^\gamma} = cste$

En combinant avec l'équation de continuité on aura :

$$p = p_0 \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{II.23})$$

c) Calcul de la densité totale :

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (\text{II.24})$$

d) Calcul de rapport des sections en fonction de nombre de Mach :

Si on considère que la section A^* est la section au col, alors , on peut définir le rapport d'une section à la section au col par la relation (II.25) en fonction du nombre de Mach.

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M^2 \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{II.25})$$

II.5.2 Relations entre les quantités caractéristiques à travers l'onde de choc droite :

Considérons une onde de choc droite stationnaire. Au côté amont de l'onde de choc l'écoulement est caractérisé par p_1, ρ_1 et la vitesse u_1 , tandis que l'autre

côté en aval du choc l'écoulement est caractérisé par une pression p_2 plus grande que p_1 , ρ_2 et la vitesse u_2 .

Les températures sont désignées par T_1 et T_2 . Ces équations sont reliées par l'équation de continuité, l'équation de mouvement, l'équation de l'énergie et l'équation d'état.

L'équation de continuité s'écrit : $\dot{M}_1 = \dot{M}_2$

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad \text{où} \quad A_1 = A_2$$

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (\text{II.26})$$

Le théorème de quantités de mouvement donne:

$$\sum \vec{F} = \dot{M}(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) = \vec{R}$$

ou bien : $\dot{M}(u_2 - u_1) = p_1 A_1 - p_2 A_2$

On obtient :

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (\text{II.27})$$

L'expression $(p + \rho u^2)$ est appelée «impulsion» .

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$h + \frac{u^2}{2} = \text{cste} \quad (\text{II.28})$$

Dans le cas d'un gaz calorifiquement parfait ($h=C_p.T$) l'équation d'énergie s'écrit :

$$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (\text{II.29})$$

Avec l'équation des gaz parfaits donnée par la relation :

$$p = \rho.r.T \quad (\text{II.30})$$

II.5.3 Relations entre les paramètres du fluide en amont et en aval de l'onde de choc:

La combinaison des équations de base des ondes de choc permet de trouver des relations entre les pressions, les températures et les vitesses de part et d'autre de l'onde de choc.

II.5.3.1 Expressions des paramètres en fonction des nombres de Mach amont et aval de l'onde de choc :

(a) Rapport des pressions des températures statiques:

L'équation (II.27) nous donne avec l'équation d'état

$$p + \rho u^2 = p \left(1 + \frac{u^2}{r.T} \right) = Cste = p(1 + \gamma.M^2)$$

$$\text{où } M^2 = \frac{u^2}{\gamma r.T}$$

l'équation (II.27) s'écrit :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma.M_1^2}{1 + \gamma.M_2^2} \quad (\text{II.31})$$

De même pour l'équation (II.29) en compte tenu de l'équation d'état devient :

$$CpT_1 + \frac{u_1^2}{2} = CpT_1 \left(1 + \frac{u_1^2}{2CpT_1} \right) = CpT_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \quad (\text{II.32})$$

b) Rapport des masses volumiques :

D'après l'équation d'état, le rapport des masses volumiques est donné par :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left[\frac{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_2^2}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_1^2} \right] * \left[\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right] \quad (\text{II.33})$$

II.5.3.2 Relations entre les nombres de Mach amont et Aval de l'onde de choc :

L'équation de continuité nous donne :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1 A_1}{M_2 A_2}$$

En utilisant l'équation d'état, et l'expression du vitesse du son :

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} &= \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \\ \text{soit:} \quad \frac{p_2}{p_1} &= \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

La combinaison des équation (II.31) et (II.32) avec (II.34) permet de trouver une relation entre les nombres de Mach à l'amont et à l'Aval de l'onde de choc :

$$\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma+1}{2} M_2^2}}$$

La résolution de cette équation se fait en élevant les deux membres au carré, puis en notant que elle est symétrique en M_1 et M_2 .

$M_1^2 = M_2^2$ est donc la 1^{ère} solution de cette équation du deuxième degré, la seconde solution est :

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \left[\frac{2}{\gamma-1} \right]}{\left[\frac{2\gamma M_1^2}{\gamma-1} \right] - 1} \quad (II.35)$$

Cette relation entre M_2 et M_1 est représentée sur la figure (II.6)

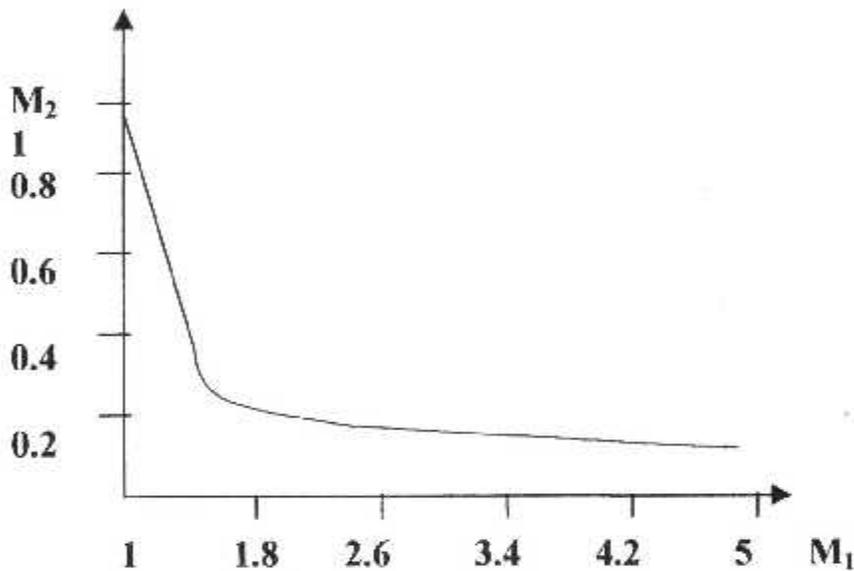


Fig:II.6 Relation entre les nombres de Mach de l'écoulement à l'amont et à l'aval d'une onde de choc

II.5.3.3 Expression des paramètres en fonction du nombre de Mach amont :

La relation (II.35) permet d'exprimer les rapports des divers grandeurs en fonction que du nombre de Mach amont M_1 .

a) Rapport des pressions :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (II.36)$$

b) Rapport des températures :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2} \right) \quad (\text{II.37})$$

c) Rapport des masses volumiques :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \quad (\text{II.38})$$

II.5.4 Variation de l'entropie d'une onde de choc droite :

L'une des expressions générales de la variation d'entropie pour un gaz parfait est :

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right]$$

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2} \right)^\gamma \right] \quad (\text{II.39})$$

En remarquant que cette variation d'entropie devient négative si $M_1 < 1$, ce qui n'a aucune signification physique.

Alors l'onde de choc ne peut donc exister que si $M_1 > 1$.

II.5.5 Equation de Hugoniot :**(Relation de Rankine-Hugoniot pour les ondes de choc de droites)**

La relation de Rankine-Hugoniot lie les pressions amont et aval aux masses volumiques amont et aval. Elle remplace l'équation de Laplace ($p_1 v_1^\gamma = p_2 v_2^\gamma$). La loi de compressibilité dans le cas d'une onde de compression par une onde

de choc de droite est appelée aussi loi de l'**adiabatique dynamique**.

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) \left(\frac{p_2}{p_1} \right) - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1) \left(\frac{p_2}{p_1} \right)} \quad (11.40)$$

La courbe obtenue en portant, $\frac{v_2}{v_1}$ en abscisse et $\frac{p_2}{p_1}$ en ordonnée est une hyperbole équilatérale, c'est l'adiabatique dynamique suivant l'expression d'Hugoniot opposée aussi à l'adiabatique statique ou isentropique.

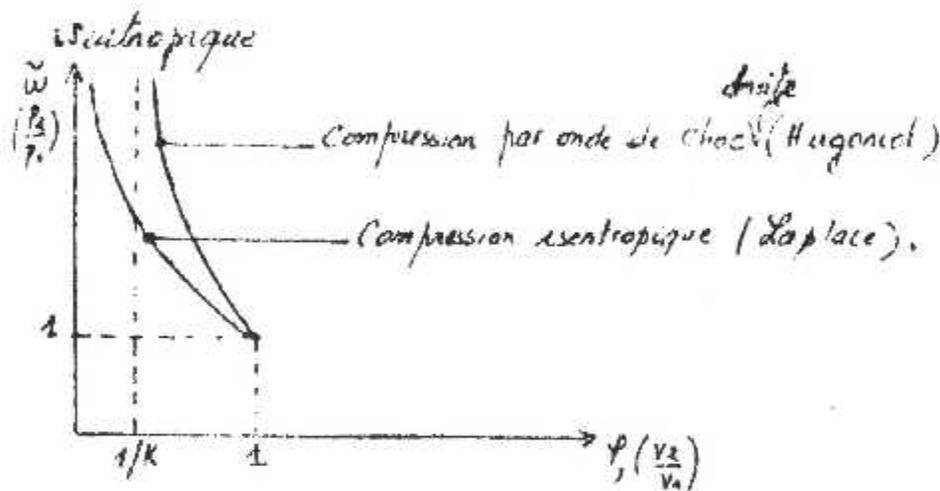


Fig.II.7: compression par onde de choc droite(Hugoniot)

- Dans la compression isentropique, l'asymptote est l'axe vertical cependant dans la compression par onde droite l'asymptote est égale à : $\frac{1}{K} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$
- Le rapport $\frac{p_2}{p_1}$ croît plus vite que pour une compression isentropique de même rapport $\frac{v_2}{v_1}$, ce qui laisse prévoir une augmentation plus rapide de la température.

En effet : $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$

On a :
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}}{\frac{p_1}{p_2} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (\text{II.41})$$

au lieu de $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\gamma$ pour l'isentropique.

La courbe obtenue en portant $\frac{T_2}{T_1}$ en ordonnée et $\frac{p_2}{p_1}$ en abscisse est :

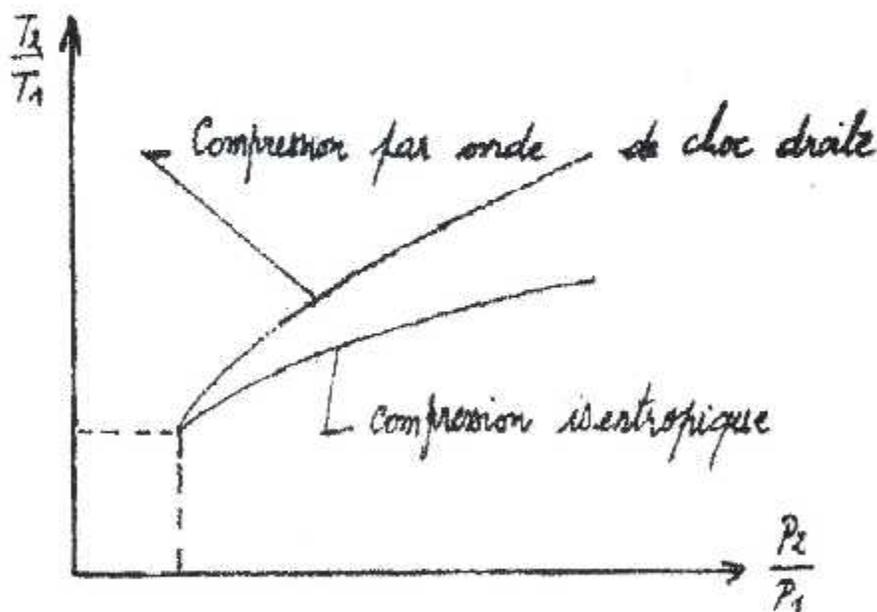


Fig:II.8: Rapport de température en fonction de rapport de pression

II.5.6 Relation de Prandtl :

Nous allons maintenant montrer que l'écoulement en aval d'une onde de choc droite dans la direction de l'écoulement est nécessairement subsonique.

Pour cela, reprenons l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2}$$

En partant de l'équation de continuité et de quantités de mouvement et en introduisant la vitesse de Laval on obtient :

$$a_L^2 = u_1 \cdot u_2 \quad (\text{II.42})$$

Cette dernière relation (II.4.2) est connue sous le nom de relation de **Prandtl**.

Si on introduit la vitesse réduite, $L_a = \frac{u}{a_L}$.

$$L_{a1} = \frac{u_1}{a_{L_1}} \quad \text{et} \quad L_{a2} = \frac{u_2}{a_{L_2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = L_{a1} \cdot a_{L_1} \\ u_2 = L_{a2} \cdot a_{L_2} \end{cases}$$

On obtient :

$$L_{a1} \cdot L_{a2} = 1 \quad (\text{II.43})$$

Remarque :

L'écoulement est supersonique en amont de l'onde de choc droite ($M_1 > 1$) ce qui entraîne $L_{a1} < 1$, la relation (II.43) donne $L_{a2} < 1$. Ce qui entraîne qu'en aval de l'onde de choc normale $M_2 < 1$ et par conséquent le régime est subsonique.

CHAPITRE III

Formulation mathématique
des équations d'Euler

III.1 Introduction :

L'ensemble des équations et des conditions aux limites utilisées pour décrire mathématiquement les problèmes de mécanique des fluides , est appelé « **MODELE MATHEMATIQUE** » qui sert à gouverner le phénomène physique étudié.

L'utilisation d'un modèle mathématique simplifié sous certains hypothèses valables pour une classe donnée d'écoulements présente un double intérêt ; tout d'abord, l'établissement du modèle simplifié oblige à bien distinguer les phénomènes physiques qui sont importants et ceux que l'on peut négliger.

Cette compréhension des phénomènes physiques est très utile et indispensable pour la mise au point d'une méthode de résolution.

A hautes altitudes où le libre parcours moyen est plus grand que la longueur caractéristique, le régime d'écoulement est dit « **moléculaire libre** » et le milieu devient discontinu. Par conséquent, l'équation de continuité n'est plus valide. Dans ce cas le phénomène physique est gouverné par l'équation de **Boltzmann** qui est très complexe à résoudre que celles de **Navier-Stockes**.

Ces dernières, sont issues de l'équation de Boltzmann en introduisant l'hypothèse de continuité de fluide et qui restent toujours complexes à résoudre. Dans notre étude, on s'intéresse au phénomène physique bidimensionnel gouverné par le modèle d'équations d'Euler obtenu à partir des équations de Navier-Stockes en posant l'hypothèse d'un fluide non visqueux.

III-2 Hypothèses :

Pour étudier le comportement d'un fluide compressible le long d'une tuyère, nous allons admettre les hypothèses suivantes :

- 1- Fluide compressible ($\rho \neq \text{Constante}$)
- 2- Fluide non visqueux ($\mu = 0$)
- 3- Ecoulement bidimensionnel (2-D)
- 4- Ecoulement stationnaire
- 5- Ecoulement adiabatique
- 6- Gaz parfait ($p = \rho \cdot r \cdot T$)
- 7- Forces de gravité négligeables

III.3 Formulation mathématique d'équations d'Euler :

Le comportement physique d'un écoulement non visqueux dont le caractère convectif et dominant est décrit complètement par la résolution numérique du système d'équations d'Euler en partant d'une formulation mathématique adéquate.

Selon le choix de variables utilisées (conservatives, primitives ou caractéristiques), diverses formulations peuvent être obtenues. En effet, à l'aide des matrices jacobiniennes et les matrices de passage, la connaissance d'une variante permet d'obtenir d'autres variantes équivalentes.

L'analyse de caractère du système d'équations d'Euler par rapport à l'espace prend différentes natures selon le régime d'écoulement : subsonique, transsonique ou supersonique. En effet, la nature des équations d'Euler est elliptique pour un nombre de Mach ($M < 1$), parabolique pour ($M = 1$) et hyperbolique dans le cas supersonique ($M > 1$).

Sachant, que le choix de la méthode de résolution est imposé par la connaissance de la nature du système d'équations d'Euler, l'écoulement interne dans une tuyère supersonique convergente-divergente est caractérisé par la présence des trois régimes d'écoulement possibles. A l'entrée dans le convergent de la tuyère l'écoulement est subsonique et dans le divergent est supersonique après avoir été transsonique en passant par la région du col. Ce changement du caractère d'une région à une autre rend la résolution numérique très difficile en ajoutant la difficulté rencontrée dans le schéma numérique approprié à chaque région.

Pour remédier à ce problème, l'analyse du caractère du système d'équations d'Euler sera faite par rapport au temps afin de garder une seule nature. Cette dernière est hyperbolique en introduisant la variation selon le temps $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$.

III.3.1 Formulation conservative :

La forme conservative des équations de l'écoulement compressible est donnée par COURANT et FRIEDRECHS (1948) mais LAX (1954) était le

premier qui a utilisé cette forme pour accomplir réellement un schéma en différences finies, nécessaires pour un calcul correct des intensités de discontinuités. Pour un écoulement bidimensionnel et dans un système de coordonnées cartésiennes les équations d'Euler d'un écoulement compressible inerte s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) + \frac{\partial}{\partial y} G(U) = 0 \quad (\text{III-1})$$

le système (III.1) est hyperbolique non linéaire couplé

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (\text{III-2})$$

U est le vecteur de « quantités conservatives » qui possède quatre composantes :

ρ est la masse volumique

u, v sont les composantes cartésiennes de la vitesse

p est la pression

E est l'énergie spécifique totale

$$F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix} \quad G(U) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho E + p) \end{bmatrix} \quad (\text{III-3})$$

F(U) et G(U) sont les flux convectifs dans les directions x,y respectivement .

L'énergie interne est reliée à l'énergie spécifique totale par :

$$e = E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (\text{III-4})$$

Dans le cas d'un gaz calorifiquement parfait, on a :

$$p = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot e = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot \left[E - 0.5(u^2 + v^2) \right] \quad (\text{III-5})$$

III.3.2 Formulation quasi-linéaire :

Afin d'illustrer les propriétés mathématiques pour le système d'équations d'Euler, il convient nécessaire, d'obtenir un système d'équations du premier ordre en terme de vecteur des quantités conservatives U.

III.3.2.1 Les matrices jacobiennes pour les variables conservatives :

En introduisant les deux matrices jacobiennes A et B, la formulation quasi-linéaire s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-6})$$

avec:

$$A = \frac{\partial F}{\partial U} \quad ; \quad B = \frac{\partial G}{\partial U} \quad (\text{III-7})$$

Les matrices A et B ont les expressions suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 + \frac{\gamma-1}{2}v^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & (\gamma-1) \\ -uv & v & u & 0 \\ -\gamma \cdot u \cdot E + (\gamma-1)u\bar{u}^2 & \left[\gamma \cdot E - \frac{\gamma-1}{2}(v^2 + 3u^2) \right] & -(\gamma-1)uv & \gamma u \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & (\gamma-1) \\ -\gamma E + (\gamma-1)v\vec{u}^2 & -(\gamma-1)uv & \left(\gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + 3v^2)\right) & \gamma v \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

\vec{u} est le vecteur vitesse de composantes u, v dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y) .

III.3.2.2 Les matrices jacobiennes pour le variables primitives :

Vue l'importance des valeurs propres dans l'étude numérique du système d'équations d'Euler, il est plus commode d'obtenir ces valeurs en partant d'une formulation non conservative basée sur le vecteur de variables primitives V . Ce dernier, est généralement imposé par les conditions aux limites physiques.

$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

En l'absence de la conduction et sources de chaleur, de plus, les forces extérieures sont négligées, les équations d'Euler peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) E + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} p) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

La dernière équation (conservation d'énergie) peut être transformée à une équation pour la pression p . Afin d'obtenir cette équation, on introduit l'hypothèse "d'écoulements isentropique" à travers les relations :

$$e=e(p,s)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = a^2$$

(a): est la célérité du son.

$$\delta e = \left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s \delta p$$

La dérivée isentropique $\left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s$ peut être déduite à partir des relations thermodynamiques

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

La condition d'isentropie, conduit à écrire :

$$\left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_s = \frac{1}{\rho}$$

$$\left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s = \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_s - \frac{1}{\rho} + \frac{p}{\rho^2} \left(\left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s \right) = \frac{p}{\rho^2 a^2}$$

et :
$$dp = a^2 d\rho$$

Donc le système (III.11) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) p + \rho a^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{(III.12)}$$

Avec le vecteur de variables primitives V ,

$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ (\gamma-1)\rho[E-0.5(u^2+v^2)] \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Ainsi, la formulation quasi-linéaire (III.6) s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \tilde{B} \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.14})$$

Les matrices jacobiennes \tilde{A} et \tilde{B} ont de expressions simples que celles des matrices A et B :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & \cdot & \cdot \\ \cdot & u & \cdot & \frac{1}{\rho} \\ \cdot & \cdot & u & \cdot \\ \cdot & \rho a^2 & \cdot & u \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} v & \cdot & \rho & \cdot \\ \cdot & v & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & v & \frac{1}{\rho} \\ \cdot & \cdot & \rho a^2 & v \end{bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

III.3.2.3 Les matrices de passage entre les variables conservatives et les

variables non conservatives :

La matrice jacobienne de passage de variables conservatives aux variables non conservatives est définie par :

$$M = \frac{\partial U}{\partial V} \quad (\text{III.17})$$

par suite, on trouve :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ u & \rho & \cdot & \cdot \\ v & \cdot & \rho & \cdot \\ \frac{\bar{u}^2}{2} & \rho u & \rho v & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Puisque le déterminant de $M = \frac{\rho}{\gamma-1} \neq 0$ ($\gamma > 1$), il existe une matrice inverse M^{-1} .

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & \cdot & \cdot \\ -\frac{v}{\rho} & \cdot & \frac{1}{\rho} & \cdot \\ \frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2) & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

$$\det M^{-1} = \frac{\gamma-1}{\rho} > 0$$

L'identification entre les deux formulations (III.6) et (III.14) (après quelques développements) nous donne :

$$\begin{cases} \tilde{A} = M^{-1} . A . M \\ \tilde{B} = M^{-1} . B . M \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} A = M . \tilde{A} . M^{-1} \\ B = M . \tilde{B} . M^{-1} \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Si on considère \tilde{A} comme un vecteur matrice a pour composantes les matrices jacobiennes \tilde{A} et \tilde{B} , aussi même chose pour le vecteur matrice \tilde{A} de composantes A et B, on peut écrire :

$$\tilde{K} = \tilde{A} . \tilde{k} \quad \text{et} \quad K = \tilde{A} . \tilde{k}$$

Avec $\bar{k} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$ indique une direction arbitraire de propagation des caractéristiques.

La matrice K a les mêmes valeurs propres que la matrice \tilde{K} à travers la relation de similarité suivante

$$\tilde{K} = M^{-1} K M \quad (\text{III.21})$$

Pour cela, il est plus pratique d'analyser les valeurs propres du système d'équations d'Euler en utilisant la matrice \tilde{K} basée sur les variables primitives.

III.3.3 Formulation caractéristique :

La formulation mathématique des équations est dominée par le caractère hyperbolique (par rapport au temps) d'équations d'Euler.

Du fait que les phénomènes de base sont de nature convective ou de propagation, les caractéristiques du système d'équations d'Euler et leurs propriétés jouent un rôle essentiel dans la description mathématique et aussi dans plusieurs techniques numériques de discrétisation, en particulier dans l'étude des conditions aux limites physiques et numériques. Cependant, une telle analyse nécessite la connaissance des valeurs propres et les vecteurs propres associés.

Pour le cas monodimensionnel, les équations d'Euler s'écrivent sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.22})$$

Le cas multidimensionnel et particulièrement, le cas bidimensionnel dont la matrice \tilde{K} se réduit à la matrice \tilde{A} .

λ_j désigne les valeurs propres de la matrice \tilde{A} obtenues à partir de :

$$\det |\lambda I - \tilde{A}| = 0 \quad (\text{III.23})$$

$$\text{ou} \quad \begin{vmatrix} u - \lambda & \rho & 0 \\ 0 & u - \lambda & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho a^2 & u - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III.24})$$

Un calcul direct donne

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Λ est la matrice diagonale de toutes les valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u \\ \lambda_2 &= u+a \\ \lambda_3 &= u-a \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

Du fait du caractère **hyperbolique** de l'équation (III.22), les valeurs propres de la matrice \tilde{A} sont réelles. La matrice \tilde{A} peut être écrite sous la forme :

$$\tilde{A} = L \Lambda L^{-1} \quad (\text{III.27})$$

L^{-1} désigne la matrice de vecteurs propres gauches associés à chaque valeur propre λ_j et qui nous permet de définir une nouvelle ensemble des variables en partant de variables conservatives U ou de variables primitives V à l'aide des matrices de passage P et L :

$$\delta W = L^{-1} \delta V \quad (\text{III.28})$$

$$\delta W = P^{-1} \delta U$$

où l'indice δ indique une variation temporelle $\frac{\partial}{\partial t}$ ou spatiale $\frac{\partial}{\partial x}$; et W : le vecteur des variables caractéristiques.

La figure (III.1) ci-dessous, résume les relations mathématiques entre les trois différents groupes de variables :

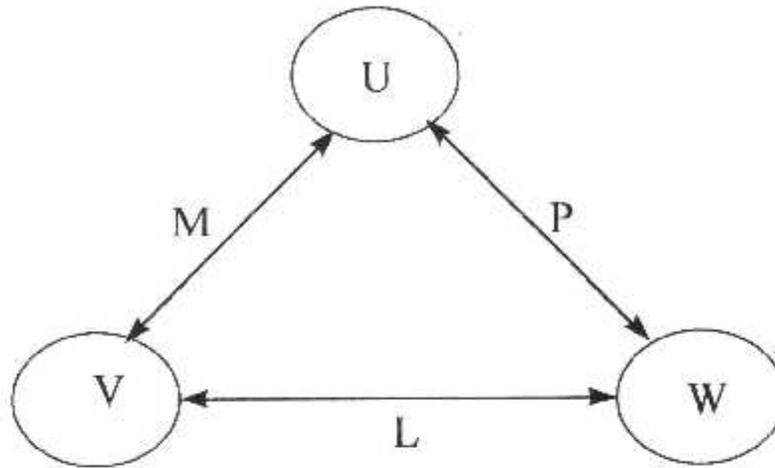


Fig.III.1 : Relations entre les trois types de variables :
Conservatives U, primitives V et caractéristiques W

Ainsi, après développement, on obtient les différentes matrices de passage :

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho a} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\rho a} \end{bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{a} & \frac{-\rho}{2a} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{ac}{2} & \frac{-\rho a}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Les matrices P et P^{-1} en variables conservatives jouent un rôle similaire à celui de L et L^{-1} en variables primitives respectivement ; elles diagonalisent la matrice A ($A=PA P^{-1}$).

$$P^{-1} = L^{-1} M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u^2}{a^2} & (\gamma-1) \frac{u}{a^2} & -\frac{(\gamma-1)}{a^2} \\ \left(\frac{\gamma-1}{2} \frac{u^2}{a^2} - ua\right) \frac{1}{\rho a} & \frac{1}{\rho a} [a - (\gamma-1)u] & \frac{\gamma-1}{\rho a} \\ -\left(\frac{\gamma-1}{2} \frac{u^2}{a^2} + ua\right) \frac{1}{\rho a} & \frac{1}{\rho a} [a + (\gamma-1)u] & -\frac{(\gamma-1)}{\rho a} \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

$$P = L \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2a} & -\frac{\rho}{2a} \\ u & \frac{\rho}{2a}(u+a) & -\frac{\rho}{2a}(u-a) \\ \frac{u^2}{2} & \frac{\rho}{2a} \left[\frac{u^2}{2} + ua + \frac{a^2}{\gamma-1} \right] & -\frac{\rho}{2a} \left[\frac{u^2}{2} - ua + \frac{a^2}{\gamma-1} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

Le vecteur des variables caractéristiques (ou les variables de **Riemann**) s'écrit :

$$\delta W = \begin{bmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \rho - \frac{1}{a^2} \delta \varphi \\ \delta u + \frac{1}{\rho a} \delta \varphi \\ \delta u - \frac{1}{\rho a} \delta \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

Les trois composantes de vecteurs δW (en bidimensionnel : quaternaire (04) composantes) se propagent respectivement le long des caractéristiques C_0 , C_+ et C_- avec des vitesses de propagation associées u , $u+a$ et $u-a$ (sont les valeurs propres du système) (Fig. III.2)

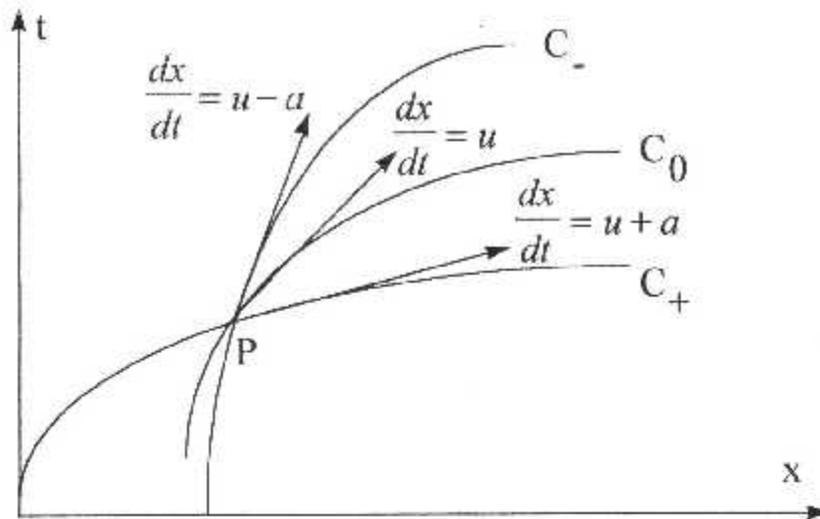


Fig III.2 Les lignes caractéristiques dans le cas monodimensionnel.

L'intérêt pratique de variables caractéristiques réside essentiellement dans l'étude des conditions aux limites selon le régime d'écoulement : subsonique ou supersonique (le nombre de conditions physiques à imposer à l'entrée ou à la sortie du domaine de calcul).

III.4 Conditions aux limites :

Le traitement des conditions aux limites est un problème crucial. Il existe différentes catégories de conditions aux limites, telles que conditions aux surfaces frontières et à la paroi.

Un tel schéma numérique destiné à la résolution d'équations d'Euler, nécessite un traitement spécial des conditions aux limites et de savoir adapter convenablement ces dernières au problème posé. La diversité des conditions aux limites à imposer dépend essentiellement de la nature d'écoulement entrant ou sortant à travers les surfaces frontières. Afin de concevoir une idée globale et précise sur l'adaptation des conditions aux limites au l'un de deux cas possibles d'état d'écoulement : subsonique ou supersonique à travers les frontières limitant le domaine de calcul, on considère le cas unidimensionnel schématisé par la figure (III.3).

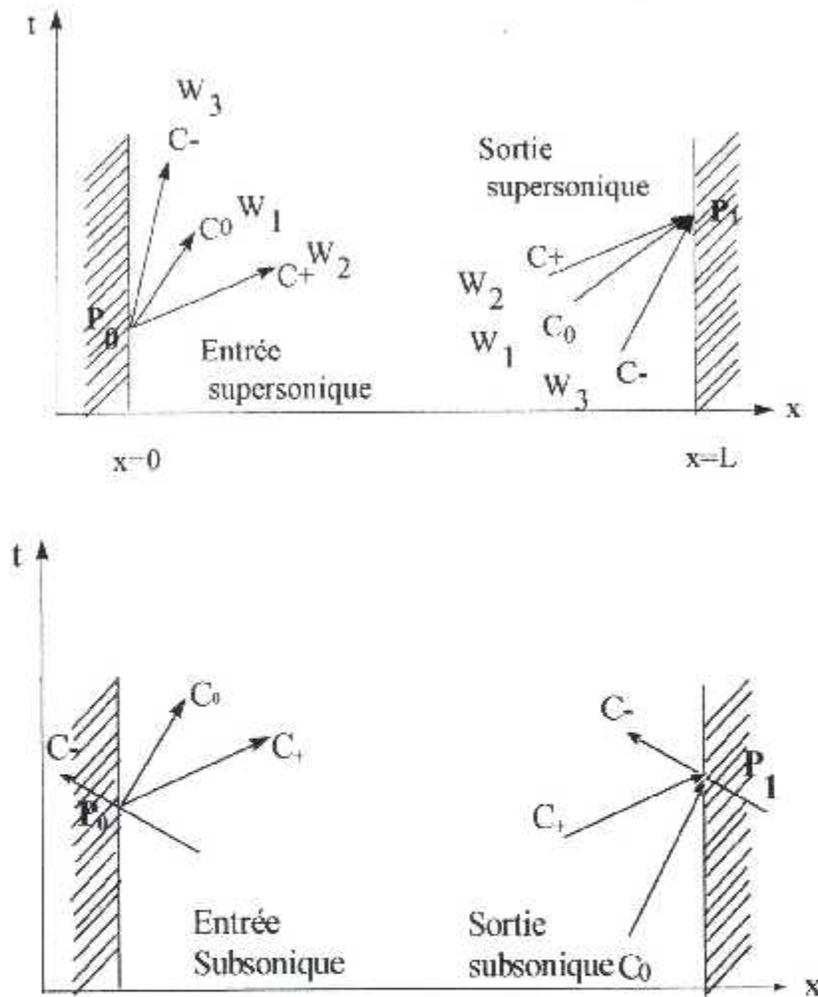


Fig:III.3: Conditions aux limites pour un écoulement monodimensionnel non visqueux.

les variables caractéristiques et par suite les directions des lignes caractéristiques (C_+ , C_0 , C_-) jouent un rôle prépondérant dans l'étude des conditions aux limites. Cependant, les directions des lignes caractéristiques sont déterminées par les vitesses d'ondes de propagation (les valeurs propres de la matrice jacobienne : λ_j) du fait de la nature hyperbolique des équations d'Euler.

A cet effet, chaque direction joue le rôle d'un transporteur d'information exprimée comme étant une combinaison de variables conservatives ou primitives de l'intérieur du domaine computationnel vers la frontière externe.

Selon les valeurs propres de la matrice jacobienne $\{u, u \pm a\}$ qui définissent les directions caractéristiques, on peut classifier les conditions aux limites imposées aux frontières en deux catégories:

Conditions physiques:

Le nombre de conditions physiques à imposer dépend de la nature d'écoulement: subsonique ou supersonique à l'entrée ou à la sortie. A l'entrée ce nombre est déterminé par les valeurs propres positives (l'information se propage de la surface frontière vers l'intérieur du domaine computationnel). Cependant à la sortie du domaine computationnel, ce nombre est déterminé par les valeurs propres négatives.

Conditions numériques :

Leur nombre est lié étroitement au nombre total de la première catégorie. A l'entrée du domaine computationnel, ce nombre est déterminé par les valeurs propres négatives(caractéristiques sortantes). Pour cela, l'information se propage de l'intérieur du domaine computationnel vers les surfaces frontières sur les quelles l'état d'écoulement est déterminé numériquement et considéré comme étant une partie de la solution final.

Cependant à la sortie, le nombre des conditions numériques est égal à celui des valeurs propres positives.

Dans le cas d'écoulement monodimensionnel, le nombre de variables indépendantes égal à trois et par conséquent le nombre des conditions physiques ou numériques se propage entre zéro et trois (quatre dans le cas bidimensionnel). Les différents cas possibles sont résumés dans la table(III.1)

	Subsonique	Supersonique
Entrée	Condition physiques : w_1, w_2	w_1, w_2, w_3
	Condition numérique : w_3	—
Sortie	Condition physique: w_3	—
	Conditions numériques : w_1, w_2	w_1, w_2, w_3

Table III.1: conditions physiques et numériques pour un écoulement monodimensionnel.

L'analyse précédente des conditions aux limites dans le cas monodimensionnel reste valable dans le cas bidimensionnel en remplaçant la composante de la vitesse unidimensionnelle u par la composante normale de la vitesse v_n . A cet effet, les valeurs propres sont v_n qui définit la composante normale de la vitesse et les deux valeurs $v_n \pm a$

III.4.1 Condition aux limites à l'entrée :

III.4.1.1 Entrée subsonique:

Le régime de l'écoulement est subsonique dans la direction normale à la surface frontière Fig(III.4). Dans ce cas, deux valeurs propres sont positives (v_n, v_n+a), et les deux caractéristiques se dirigent de la frontière vers l'intérieur du domaine, cela entraîne d'imposer deux conditions physiques (par exemple pression totale et température totale).

L'utilisation des invariants de Riemann permet de calculer toutes les variables non spécifiées en intégrant les variables caractéristiques.

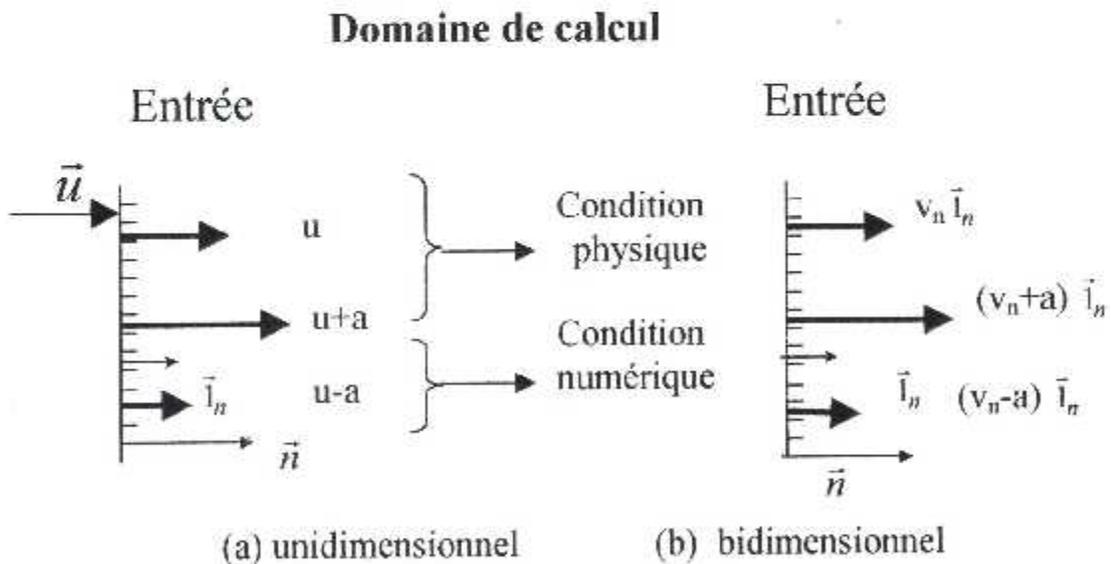


Fig.III.4 surface frontière: entrée subsonique

Remarque:

\vec{n} : vecteur normal à la surface frontière, le vecteur \vec{n} est dirigé vers l'intérieur du domaine computationnel .

\vec{i}_n : vecteur unitaire normal associé $\left(\vec{i}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right)$

III.4.1.2 Entrée supersonique:

Ce cas peut avoir lieu dans un écoulement supersonique dans le divergent de la tuyère Fig(III.5.a). Sachant que toutes les valeurs propres sont positives et toute les lignes caractéristiques se dirigent vers l'intérieur du domaine computationnel, cela entraîne d'imposer toutes les conditions comme étant des conditions aux limites physiques.

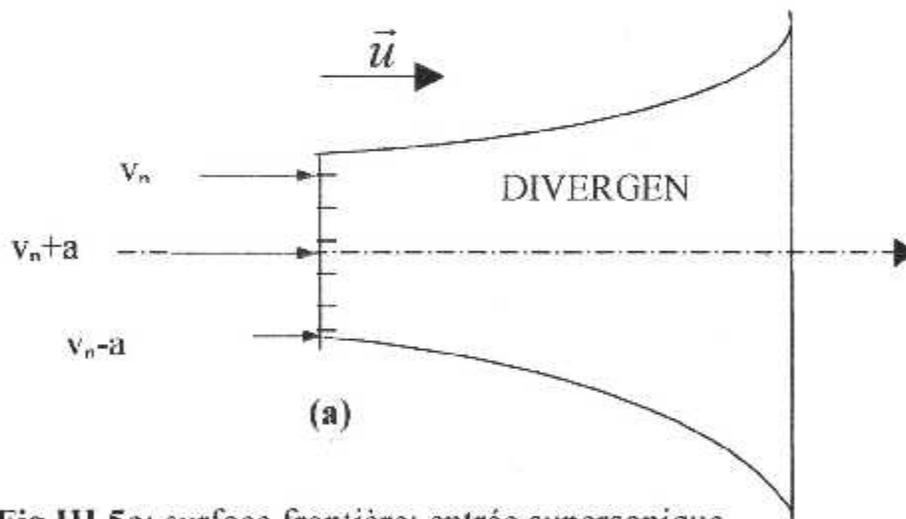
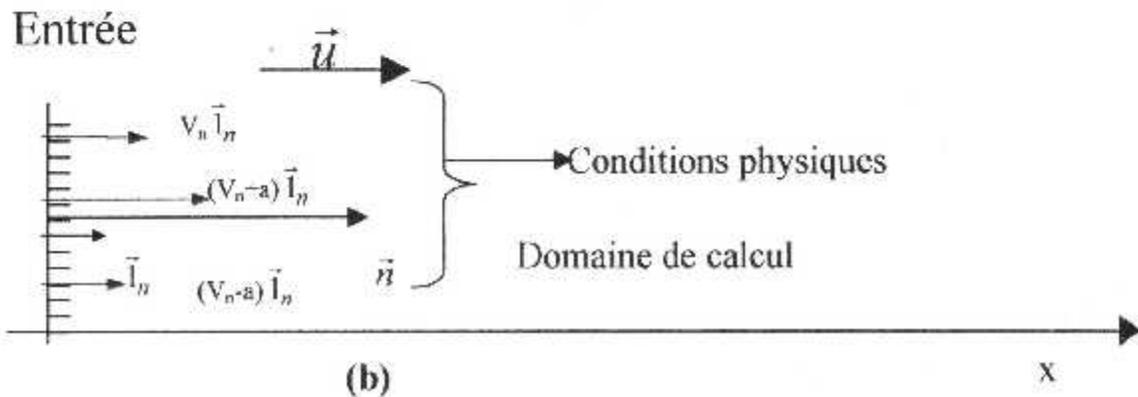


Fig.III.5a: surface frontière: entrée supersonique dans le cas d'un divergent



FigIII.5b: surface frontière: Entrée supersonique dans le cas bidimensionnel

III.4.2 Conditions aux limites à la sortie:

III.4.2.1 Sortie supersonique:

Dans ce cas, toutes les lignes caractéristiques se dirigent de l'intérieur vers la surface frontière Fig.III-6. A cet effet on n'impose aucune condition physique; l'état d'écoulement sur la frontière, est lié numériquement (sortante) aux états des mailles internes adjacentes (conditions aux limites numériques).

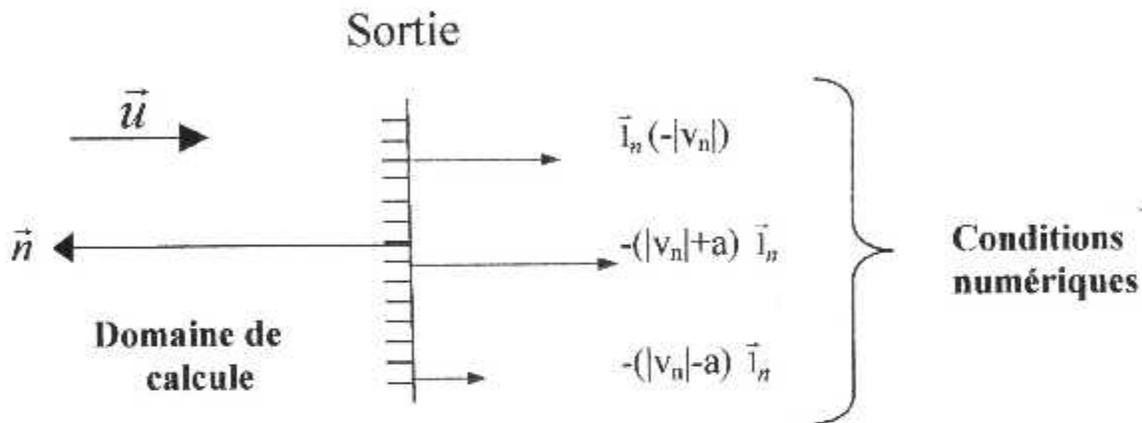


Fig.III.6: Surface frontière: Sortie supersonique dans le cas bidimensionnel.

Les conditions externes n'ont aucune influence sur l'écoulement interne à la tuyère, d'où l'utilisation de l'extrapolation pour le calcul des conditions aux limites à la sortie.

Les paramètres à déterminer sont la vitesse axiale u , radiale v , la pression p , et la densité ρ .

III.4.2.2 Sortie subsonique: cas d'un convergent (tuyère simple)

Ce cas peut avoir lieu dans un écoulement isentropique subsonique dans une tuyère convergente-divergente ou un écoulement dans une tuyère simple (convergent seulement).

Deux valeurs propres sont positives ($|v_n|, |v_n| + a$) et une valeur est négative ($|v_n| - a$). Ainsi deux caractéristiques se dirigent vers l'extérieur et

seulement une seule caractéristique se dirige vers l'intérieur, cela entraîne d'imposer une seule condition physique à la sortie .

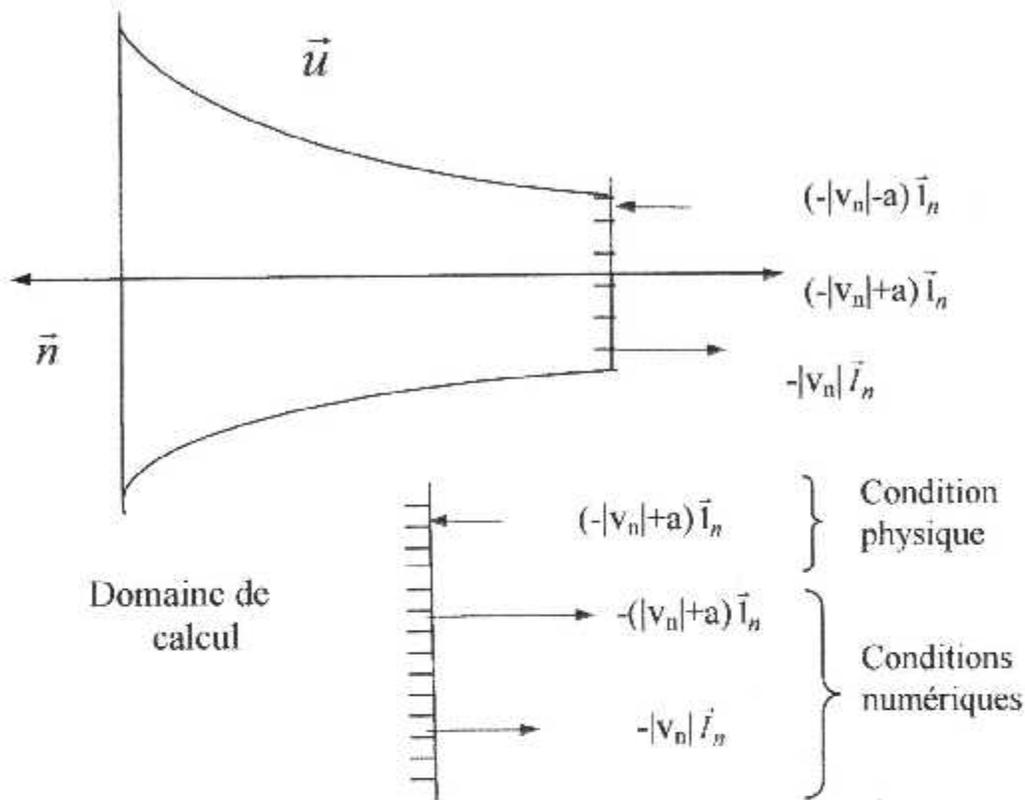


Fig.III.7: Surface frontière: Sortie subsonique
Cas d'un convergent (tuyère simple)

III.3.4.3 condition au limite à la paroi :

Une seule condition physique à imposer: la vitesse normale à la paroi est nulle ($v_n=0$). Cette dernière est traduite par une seule ligne caractéristique qui se dirige de la paroi vers l'intérieur du domaine computationnel .

Les variables manquantes définissant l'état d'écoulement à la paroi, en particulier: la pression et la vitesse tangentielle sont déterminées numériquement en partant de celles de mailles internes adjacentes.

Du fait que la vitesse normale v_n à la paroi est nulle, toutes les composantes du flux convectif à travers la paroi s'annulent et la composante normale du vecteur flux se réduit à l'expression :

$$\vec{F} \cdot \vec{l}_n = (F\vec{i} + G\vec{j}) \cdot \vec{l}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-34})$$

où: \vec{F} est le vecteur flux, et n_x , n_y les composantes du vecteur normal unitaire dans un système de coordonnées cartésiennes.

On constate que à la paroi, seule la contribution de la pression est considérée.

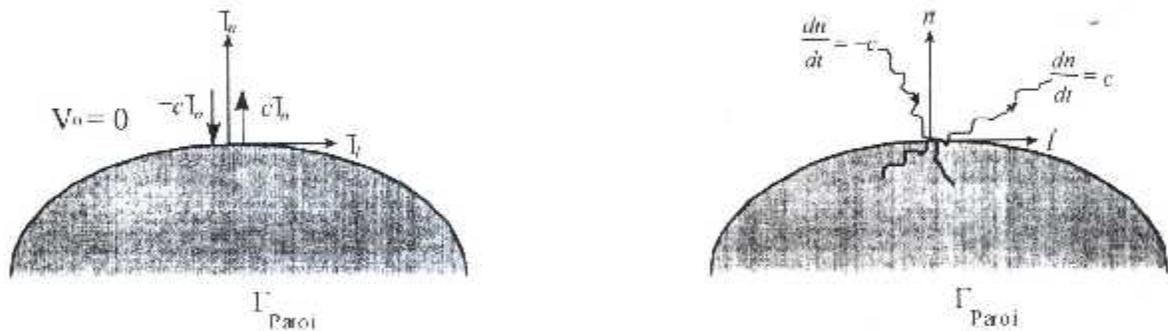


Fig.III.8. Surface frontière : Paroi d'obstacle dans le cas bidimensionnel

III.4.4 Conditions aux limites sur l'axe de la tuyère :

S'il s'agit d'un problème axisymétrique on doit ajouter les conditions appropriées sur l'axe de la tuyère.

Dans ce cas, les conditions à imposer sont:

Vitesse radiale $v=0$, car l'écoulement est parallèle à l'axe de la tuyère ainsi dans le plans des coordonnées généralisées (ξ, η) , les dérivées de toutes les paramètres u, p et ρ par rapport à η , sont égales à zéro pour raison de symétrie.

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{III-35})$$

CHAPITRE IV

Résolution numériques des
équations d'Euler

IV. 1 Introduction:

Ce chapitre s'insère dans le cadre du développement d'un schéma numérique pour la simulation d'écoulements bidimensionnels non visqueux et compressibles à l'intérieur d'une tuyère supersonique.

Le système (III-1) des équations d'Euler est hyperbolique non linéaire. On s'intéresse aux solutions stationnaires que l'on obtient par intégration en temps à partir d'une condition initial arbitraire. Cet artifice est utilisé pour le calcul d'écoulements contenant des régions subsoniques (la partie convergente d'une tuyère supersoniques Mach < 1) dans les quelles le système stationnaire est elliptique.

L'intégrations en temps est donc utilisée pour construire un processus itératif convergeant vers la solution stationnaire. En effet , à l'heure actuelle on peut cité plusieurs approches numériques. La table (IV-1) nous donne une classification simplifiée de différents schémas numériques importantes et largement utilisée en suivant la chronologie historique.

Discrétisation couplée: espace-temps	Discrétisation découplée espace-intégration en temps
<u>Schémas explicites</u>	<u>Schémas explicites:</u>
Schéma de Lax-Friedrichs (1954) d'ordre 1	Schémas de Runge-Kutta: Jameson, Schmidt et Turkel (1981)
Schéma de Lax-Wendroff (1960) d'ordre 2	
Schémas à deux pas (deux étapes):	
Richtmyer et Morton (1967)	
Schémas centrés (1969)	MacCormack
	Lerat et Peyret (1974)
<u>Schémas implicites:</u>	<u>Schémas implicites :</u>
MacCormack (1981); Casier, Deconinck et Hirsch (1983)	Briley et McDonald (1975) Beam et Warming (1976)

Lerat (1979, 1983)

0Décomposition des flux

Courant, Isaacson et Reeves (1952)- schéma décentré d'ordre 1

Moretti (1979) -Schémas non

conservatifs + méthode

**Schémas décentrés
fitting)**

d'ajustement du choc (shock

Steger et Warming (1981)

Van Leer (1982)

Méthodes de type Godunov-Solveurs de
Riemann

Solution exacte du problème de Riemann:

Godunov (1959) - d'ordre 1

Van Leer (1979) - d'ordre 2

Woodward et Colella (1984); Ben-Artzi
et Falcovitz (1984)

Solveurs de Riemann approchés:

Roe (1981)

Engquist et Osher (1980); Osher (1982)

Harten, Lax et Van Leer (1983)

Schémas TVD explicites décentrés

Boris et Book (1973); Van Leer
(1974,1979)

Harten (1983, 1984)

Osher (1984); Osher et

Schémas de haute résolution Chakravarthy (1984)

TVD

(Schémas non linéaires)

Schémas TVD implicites décentrés

Yee et Harten (1985)

Schémas TVD (implicites ou
explicites) centrés

Davis (1984); Roe (1985); Yee
(1985, 1987)

Table IV.1. Schémas numériques pour la résolution d'équations d'Euler

IV.2 Schéma de MacCormack en monodimensionnel :

Le schéma de MacCormack (1969) est le schéma le plus populaire parmi ceux qui appartiennent à la famille des Schémas dite "de Lax-Wendroff à deux pas". Ce schéma aux différences finies a été développé par Robert MacCormack à la NASA et publié en 1969. c'est un schéma centré à deux pas selon la discrétisation couplée (voire la table (IV-1))

Afin d'illustrer les caractéristiques du schéma utilisé, on considère ici le cas monodimensionnel.

Le schéma de MacCormack contient deux étapes principales dans la séquence : prédicteur-correcteur.

Les valeurs prédictives sont définies à $(n+1)$ au point "i" suivies par l'étape de correction où :

le temps: $t^n = n\Delta t$

et l'abscisse : $x_i = i\Delta x$

En désignant par \bar{U}_i le vecteur des variables conservatives lors de prédiction et par $\bar{\bar{U}}_i$ lors de correction; le système des équations d'Euler (IV.22) s'écrit:

$$\text{Prédicteur : } \quad \bar{U}_i = U_i^n - \tau (F_{i+1}^n - F_i^n) \quad (\text{IV.1a})$$

$$\text{Correcteur : } \quad \bar{\bar{U}}_i = U_i^n - \tau (\bar{F}_i^n - \bar{F}_{i-1}^n) \quad (\text{IV.1b})$$

$$\text{Solution finale : } \quad U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{U}_i + \bar{\bar{U}}_i) \quad (\text{IV.1c})$$

avec :

$$\bar{F}_i = F(\bar{U}_i), \quad \tau = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

L'étape de prédiction est une discrétisation progressive en espace d'ordre 1, instable dans les zones supersoniques (valeurs propres positives de la matrice

jacobienne A). Par contre, la deuxième étape (correction) est une discrétisation régressive en espace d'ordre 1, instable dans les zones subsoniques (valeurs propres négatives de la matrice jacobienne A). Cependant, les erreurs de troncature s'annulent à chaque pas de prédiction-corréction et le schéma global devient stable, précis au second ordre.

Le schéma de MacCormack peut être écrit en terme de variation ΔU comme suit:

$$\Delta U_i = \frac{1}{2}(\Delta \bar{U}_i + \Delta \bar{\bar{U}}_i) = -\frac{\tau}{2}[F_{i+1}^n - F_i^n + \bar{F}_i^n - \bar{F}_{i-1}^n] \quad (\text{IV.2})$$

où :

$$\Delta \bar{U} = \bar{U} - U^n \text{ (variation prédictive);}$$

$$\Delta \bar{\bar{U}} = \bar{\bar{U}} - U^n \text{ (variation corrective);}$$

$$\Delta U = U^{n+1} - U^n \text{ (variation totale).}$$

IV.3 Extension du schéma de MacCormack au cas 2D bidimensionnel :

Les approximations dans le cas bidimensionnel sont obtenues comme extension du cas monodimensionnel (1D). L'approximation spatiale nécessite sept points pour construire une cellule d'intégration C_i (Fig.IV.1). Du fait que le schéma de MacCormack combine deux versions de discrétisation: directe et inverse lors de prédiction et correction séparément, on peut obtenir quatre schémas différents en combinant les diverses discrétisations possibles sur les deux composantes du flux convectif F et G (Fig.IV.1).

Selon la version directe-directe citée dans le paragraphe précédant, le schéma de MacCormack pour le système d'équations d'Euler (2D) (Eq.III.1) s'écrit:

$$\text{Prédiction} \quad \bar{U}_{ij} = U_{ij}^n - \tau_x (F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n) - \tau_y (G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n) \quad (\text{IV.3a})$$

$$\text{Correction :} \quad \bar{\bar{U}}_{ij} = U_{ij}^n - \tau_x (\bar{F}_{i,j} - \bar{F}_{i-1,j}) - \tau_y (\bar{G}_{i,j} - \bar{G}_{i,j-1}) \quad (\text{IV.3b})$$

$$\text{Solution finale:} \quad U_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2}(\bar{U}_{ij} + \bar{\bar{U}}_{ij}) \quad (\text{IV.3c})$$

variation totale :
ou :

$$\Delta U_{ij} = U^{n+1}_{ij} - U^n_{ij}$$

(IV-

$$\Delta U_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta \bar{U}_{ij} + \Delta \bar{\bar{U}}_{ij})$$

3d)
et :

$$\tau_x = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{et} \quad \tau_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}$$

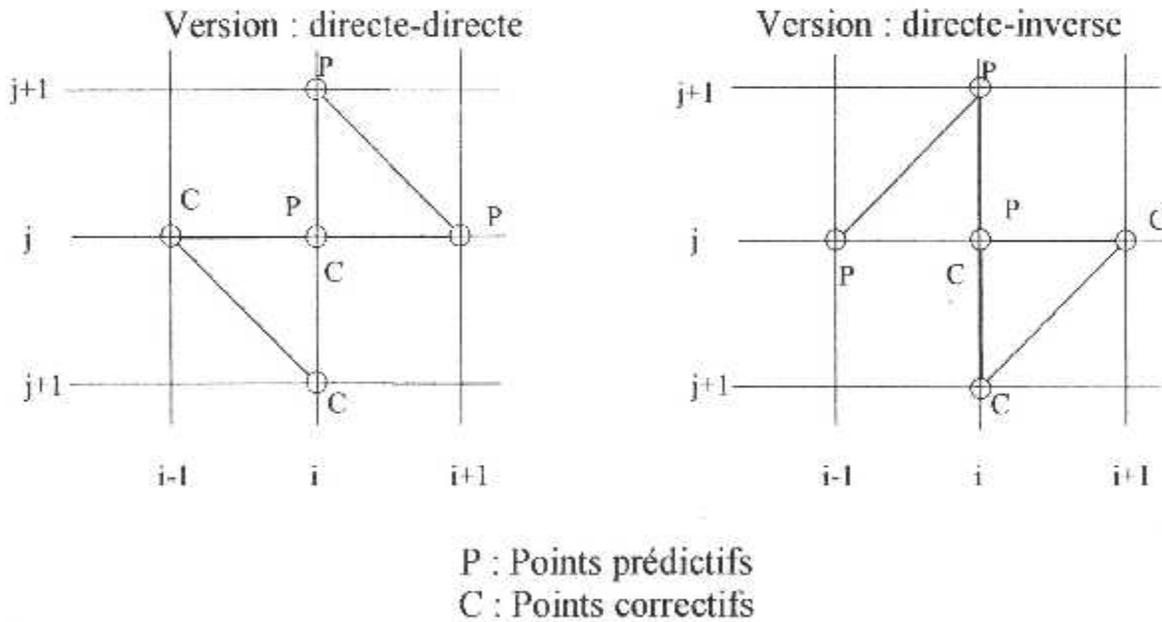


Fig.IV.1. Cellule d'intégration C_i pour le schéma de MacCormack

IV.4 Critère de stabilité du schéma de MacCormack:

Le schéma de Mac Cormack est un schéma explicite et par suite il est conditionnellement stable.

On dit qu'un processus de calcul est stable, si les erreurs d'arrondis ne s'amplifient pas au fur et a mesure que les calculs progressent. Afin d'éviter tout instabilité, il faut vérifier selon Newmann le critère de stabilité déterminé

par le nombre de courant, ou C.F.L. (Courant-Fridrichs-Lewey) qui se traduit par le Δt (accroissement du temps).

$$\text{Ou: } \Delta t \leq \frac{\alpha - L}{|u| + a} \quad ; \quad \alpha = 0(1)$$

Ou' L est une longueur caractéristique.

u vitesse caractéristiques.

a vitesse du son.

Pour un système d'équations d'Euler en coordonnées cartésiennes, le critère de stabilité est donné par:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|u|+a}{\Delta x} + \frac{|v|+a}{\Delta y}} < \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{|u| \cdot \Delta y + |v| \cdot \Delta x + a \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

IV.5 Traitement des conditions aux limites :

Le traitement inexacte des conditions aux limites mènent à des erreurs sérieuses qui peuvent conduire à l'instabilité de schéma numérique.

À cet effet des conditions aux limites et très importantes dans toute étude numérique et il est nécessaire de traiter convenablement ces conditions et de savoir les adapter au problème posé .

Dans notre cas, la tuyère étudiée est transsonique; on peut distinguer :

- Traitement des nœuds à l'entrée.
- Traitement des nœuds à la sortie.
- Traitement des nœuds à la paroi.
- Traitement des nœuds sur l'axe de la tuyère, s'il s'agit d'une tuyère axisymétrique.

IV.5.1 Traitement des nœuds à l'entrée :

En générale, deux types des conditions aux limites à l'entrée sont à traiter alors on distingue :

- Régime d'entrée supersonique
- Régime d'entrée subsonique

IV.5.1.1 Régime d'entrée supersonique

Par ce qu'on a le cas bidimensionnel alors le nombre des conditions physiques à imposer est quatre, ces conditions sont :

La vitesse axiale : $u_{1,j} = u_{entrée}$

La vitesse radiale : $u_{1,j} = V_{entrée}$

La pression statique : $p_{1,j} = p_{entrée}$

La masse volumique : $\rho_{1,j} = \rho_{entrée}$

La température statique est évaluée à partir de l'équation d'état des gaz parfaits :

$$T_{1,j} = \frac{p_{1,j}}{\rho_{1,j} \cdot r}$$

IV.5.1.2 Régime d'entrée subsonique :

En utilisant la formulation quasi-linéaire développée dans le chapitre III, les variables caractéristiques correspondent aux caractéristiques sortantes où sont déterminées par extrapolation à partir de domaine intérieur, ainsi les conditions aux limites non spécifiées sont évaluées d'une manière consistante avec les conditions imposées à l'entrée.

Cette technique est utilisée par plusieurs auteurs (Fottlib, Turkel, Gustafsson et Oliger).

Comme on l'a vu dans le paragraphe (III.3.3), le vecteur des variables caractéristiques en bidimensionnel peut avoir aussi la forme suivante :

$$w = \begin{bmatrix} \rho - a^2 \rho \\ V_t \\ \rho - \rho_p a_p V_n \\ \rho_p + \rho_p a_p V_n \end{bmatrix}$$

avec :

l'indice "p" est relatif aux valeurs calculées au temps précédent.
 v_n et v_t sont les composantes de la vitesse normale et tangentielle.

Si on désigne par les indices "ext", "ent" respectivement aux valeurs extrapolées à partir de l'intérieur et valeurs imposées à l'entrée, on obtient le système d'équation suivant :

$$p - a_p^2 \rho = p_{ent} - a_p^2 \rho_{ent} \quad (\text{IV.5.a})$$

$$V_t = V_{tent} \quad (\text{IV.5.b})$$

$$p - \rho_p a_p V_n = p_{ent} - \rho_p a_p V_{nent} \quad (\text{IV.5.c})$$

$$p + \rho_p a_p V_n = p_{ext} + \rho_p a_p V_{next} \quad (\text{IV.5.d})$$

on déduit :

$$p = \frac{1}{2}(p_{ext} + p_{ent} + \rho_p a_p (V_{next} - V_{nent}))$$

$$V_n = V_{nent} + \frac{p - p_{ent}}{\rho_p a_p}$$

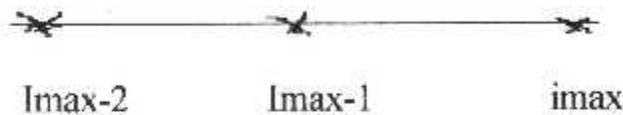
la masse volumique peut être obtenue à partir de (IV.5.a) .

IV.5.2 Traitement des nœuds à la sortie:

Le traitement des nœuds à la sortie dépend aussi du régime d'écoulement (subsonique ou supersonique).

IV.5.2.1 Sortie supersonique :

Les conditions aux externes n'ont aucune influence sur l'écoulement interne à la tuyère d'où l'utilisation de l'extrapolation pour le calcul des conditions aux limites à la sortie.



$$u_{i_{\max},j} = 2u_{i_{\max}-1,j} - u_{i_{\max}-2,j}$$

$$V_{i_{\max},j} = 2V_{i_{\max}-1,j} - V_{i_{\max}-2,j}$$

$$p_{i_{\max},j} = 2p_{i_{\max}-1,j} - p_{i_{\max}-2,j}$$

$$\rho_{i_{\max},j} = 2\rho_{i_{\max}-1,j} - \rho_{i_{\max}-2,j}$$

IV.5.2.2 Sortie subsonique :

A la sortie, une seule condition doit être posée :

$$p = p_{\text{sortie}} \quad (p_{\text{sortie}} = p_{\text{atmosphérique}}) \text{ pour une tuyère adaptée}$$

les composantes de la vitesse et l'énergie sont extrapolées à partir de l'intérieur de domaine computationnel.

IV.5.3 Traitement des nœuds à la paroi:

Sachant que l'écoulement est non visqueux, c'est à dire il n'y a pas de frottement sur la paroi, donc l'écoulement va être parallèle à la paroi, ce qui conduit à l'hypothèse de ($v_n = 0$) à la paroi.

Dans ce cas seule la force de pression exercé sur la paroi solide, dont son gradient normal à la paroi est donné par la formule de Rizzi.

$$p_\eta = \frac{(X_\xi X_\eta + Y_\xi Y_\eta) p_\xi + \rho (Y_\eta u - X_\eta v) (v X_{\xi\xi} + u Y_{\xi\xi})}{(X_\xi^2 + Y_\xi^2)}$$

IV.5.4 Traitement des nœuds sur l'axe de la tuyère (tuyère axisymétrique):

La même méthode est appliquée pour déterminer les paramètres sur l'axe de la tuyère, sauf que la vitesse radiale est nulle sur cet axe à cause de l'écoulement va être parallèle à cet axe.

On obtient $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow u_{i,1} = u_{i,2}$ Raison de symétrie.

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = p_{i,1} = p_{i,2} \quad \text{Raison de symétrie.}$$

$V_{i,1} = 0$ l'écoulement est parallèle à l'axe de la tuyère.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \rho_{i,1} = \rho_{i,2} \quad \text{Pour raison de symétrie.}$$

IV.6 Transformation des équations d'Euler en coordonnées généralisées

Souvent, avant d'appliquer les algorithmes de résolution, le système des équations d'Euler doit être transformé du domaine physique de coordonnées (x, y) vers le domaine computationnel (de calcul) de coordonnées généralisées (ξ, η) (Fig.IV.2).

La raison principale de ce changement du domaine est l'adaptation du maillage aux méthodes de différences finies qui se basent dans leur implémentation sur des mailles rectangulaires. Ainsi de transformer des surfaces à géométries complexes à des lignes de coordonnées constantes.

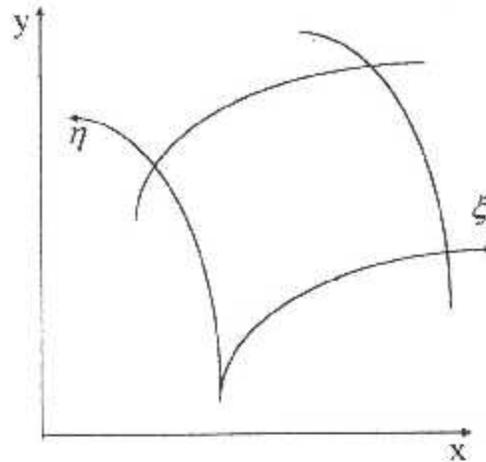


Fig.IV. 2: Systèmes de coordonnées cartésiennes et généralisés

Dans le cas bidimensionnel, le système d'équations d'Euler (III.1) écrit dans un système de coordonnées cartésiennes (x,y) peut être transformé à celui de coordonnées généralisées (ξ, η) comme suit :

$$\frac{\partial U'}{\partial \xi} + \frac{\partial U'}{\partial \eta} + \frac{\partial G'}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{IV.6})$$

où :

$$U' = \frac{\xi_x F + \xi_y G}{J}$$

$$G' = \frac{\eta_x F + \eta_y G}{J}, \quad U' = \frac{U}{J}$$

avec J est la jacobienne de la transformation de système de coordonnées (x,y) au système (ξ, η) .

Les sous indices désignent la dérivation partielle.

Tenant compte des relations :

$$\eta_x = J\xi_x, \quad \eta_y = -J\xi_y, \quad \xi_y = -J\eta_x, \quad \xi_x = J\eta_y$$

et $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1}$, le système (IV.6) est bien défini et similaire à celui de (III.1). Ainsi, tous les aspects physiques et mathématiques présentés précédemment (conditions aux limites, viscosité artificielle) restent valables.

IV.7 La viscosité artificielle :

Le calcul des ondes de choc pose un problème difficile, mais essentiel, qui a trouvé une solution tout à fait générale grâce à l'idée de la viscosité artificielle due à Von Neumann et Richtmyer (1950). Cette méthode consiste à modifier les équations du fluide parfait en y introduisant un terme jouant le rôle d'une viscosité artificielle, construite de façon à être négligeable en dehors des ondes de choc, et à donner à celles-ci une structure visqueuse artificielle sur une épaisseur de quelques mailles. Cette approche est très puissante car elle permet une "capture" automatique des chocs, quel que soit leur nombre "Shock Capturing Method".

Tenant compte de l'équation (IV-2), le flux numérique avec la dissipation visqueuse (flux numérique modifié) s'écrit :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{\text{mod}} = F_{i+\frac{1}{2}}^* - d_{i+\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.7})$$

avec :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2} (\bar{F}_i^n + F_{i+1}^n)$$

et d est la viscosité artificielle de 2^{ème} et 4^{ème} ordre, qui a l'expression suivante :

$$d_{i+\frac{1}{2}} = \varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} (U_{i+1} - U_i) - \varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(4)} (U_{i+2} - 3U_{i+1} + 3U_i - U_{i-1}) \quad (\text{IV.8})$$

le coefficient non linéaire $\varepsilon^{(2)}$ est calculé par :

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} = \frac{1}{2} (\varepsilon_i^{(2)} + \varepsilon_{i+1}^{(2)}) \quad (\text{IV.9})$$

ou :

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} = \max(\varepsilon_i^{(2)}, \varepsilon_{i+1}^{(2)})$$

avec :

$$\varepsilon_i^{(2)} = \alpha^{(2)} (|u| + a)_i \frac{|p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}|}{p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1}} \quad (\text{IV.10})$$

p est la pression.

Le coefficient d'ordre élevé $\varepsilon^{(4)}$ est défini par :

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(4)} = \max \left[0, \left(\alpha^{(4)} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} / (u+a)_{i+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (\text{IV.11})$$

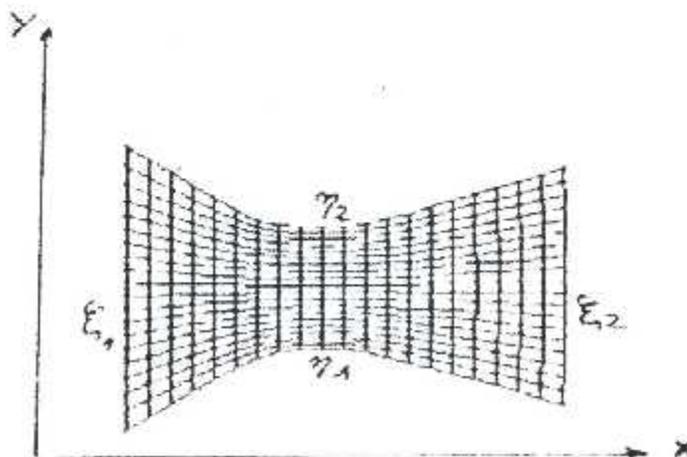
Les valeurs typiques des coefficients $\alpha^{(2)}$ et $\alpha^{(4)}$ sont :

$$\alpha^{(2)} \approx \frac{1}{4} \qquad \alpha^{(4)} \approx \frac{1}{256} \quad (\text{IV.12})$$

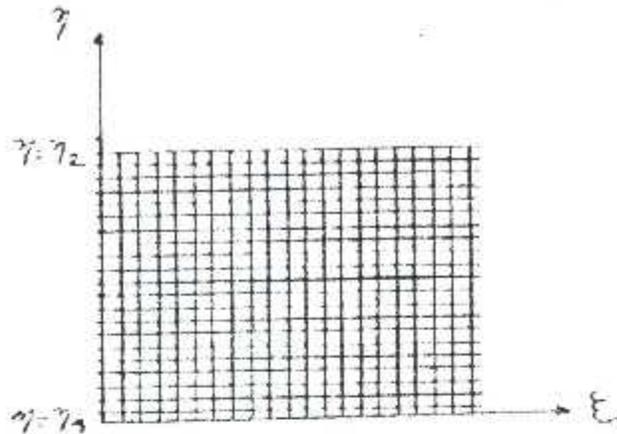
IV.8 Description de la méthode de génération de maillage :

La technique de génération de maillage, est basée sur le calcul des coordonnées (x,y) des points de maillage, à partir d'un système de coordonnées curvilignes déterminant le champ de calcul, où toutes les équations physiques du problème seront exprimées dans ce champ .

Le maillage est construit par deux réseaux de lignes, le premier réseau de lignes $\xi(x,y)$ égale à une constante sensiblement normale à la paroi de la tuyère, et le second réseau de lignes $\eta(x,y)$, qui égale à une constante longeant le contour de la tuyère (**fig.IV.3**)



Plan physique



Plan transformé

Fig IV.3 Plan physique et plan numérique

Le maillage peut être aussi généré de manière à concentrer les lignes à coordonnées curvilignes dans le plan physique, dans les régions de forte gradients. pour ce but, un grand nombre de méthodes de génération de maillage a été développé pour contrôler la distribution des lignes de coordonnées on utilise les fonctions de contrôle (stretching functions).

Dans notre problème on a choisi une méthode simple pour générer le maillage à l'intérieur de la tuyère avec la configuration du type en "H" qu'est bien adaptée au ce type des problèmes. Cette dernière est appelée "**Technique de deux parois**". la simplicité de la méthode utilisée nous a permet de développer un schéma robuste et maniable pour la génération de maillage.

Le raffinement de maillage dans les régions sensibles est possible grâce aux fonctions de condensations .

Ces dernières sous leur forme classique permettent la concentration de maillage au voisinage des surfaces frontières (à l'intérieur, à la sortie ou à la paroi).

Pour une tuyère convergente-divergente la zone la plus sensible est la région du col. Il est très pratique d'avoir un maillage fin dans cette région pour améliorer l'efficacité des schémas numériques utilisées. Pour cela on introduit une nouvelle technique dite "Raffinement automatique". Cette dernière est liée au changement brutal au niveau de la géométrie étudiée.

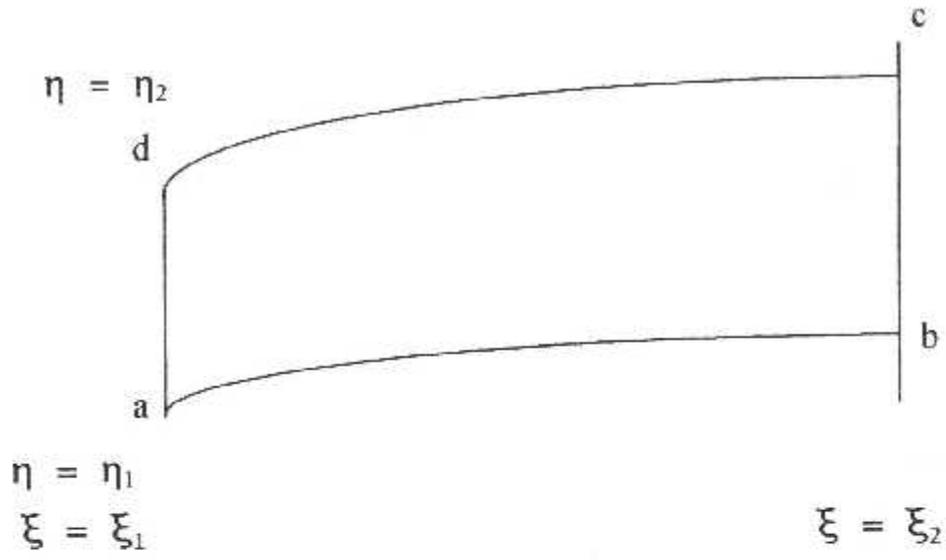


Fig IV.4 Technique de deux parois

CHAPITRE V

Resultats et Interprétation

V.1 Le code de calcul :

Tenant en compte des caractéristiques du problème posé précédemment et de modèle mathématique avec son schéma numérique qu'on a lui associé pour la résolution, le but principal de notre travail consiste à l'élaboration d'un code de calcul capable de faire les simulations numériques nécessaires du problème considéré.

Dans ce but, on a développé un programme informatique édité en Fortran 90.

L'algorithme du code est le suivant :

- 1) Initialisation de certains paramètres .
- 2) Lectures des données.
- 3) Calcul des différents paramètres géométriques.
- 4) Calcul de la solution monodimensionnelle.
- 5) Initialisation de la boucle du temps t.
- 6) Calcul du Δt_{min} à partir de la condition de stabilité de C-F-L.
- 7) Calcul de la solution bidimensionnelle par prédiction.
- 8) Calcul de la solution bidimensionnelle par correction.
- 9) Détermination du nouveau Δt .
- 10) Si la condition de convergence est vérifiée, sortir et imprimer les Résultats, sinon reprendre les calculs à partir de (6).

V.2. Résultats et interprétations :

V.2.1. Le maillage :

La méthode de génération de maillage est applicable pour différentes géométries données à la tuyère (axisymétrique **fig.V.1** tuyère plane **fig.V.7**, divergent axisymétrique **fig.V.8.**)

Ainsi, on peut obtenir un maillage fin Fig. V.1. et épars Fig.V.2.

Souvent, le raffinement des maillages peut jouer un rôle très important dans la résolution des problèmes physiques. Dans ce but on a présenté différents résultats au raffinement du maillage à l'entrée Fig.V.3., à la sortie de la tuyère Fig. V.4., et au voisinage de col Fig.V.6.. Ce dernier est utilisé pour gouverner la région mixte au niveau du col .

De plus, la Fig.V.5. montre que le raffinement de maillage à la paroi est possible pour un calcul éventuel de la couche limite.

V.2.2. Résultats du code :

Plusieurs tests ont été effectués en utilisant le programme établi.

Les rapports de pression caractéristique donnés par le programme sont :

Table V.1 Les rapports de pression caractéristiques $\left(\frac{P_{sortie}}{P_{l'entrée}} \right)$

	rpsonique	rpchoc	rpsuper
Tuyère plane	8.683935 10⁻¹	6,286496 10⁻¹	1,737913 10⁻¹
Tuyère axisymétrique	8,880316 10⁻¹	6,064776 10⁻¹	1,516594 10⁻¹

où :

rpsonique : c'est le rapport pour lequel la tuyère est sonique.

rpchoc : c'est le rapport pour lequel la tuyère est supersonique non adaptée. (formation de l'onde de choc dans le divergent)

rpsuper : c'est le rapport pour lequel la tuyère est supersonique adaptée

1 - Une tuyère axisymétrique :

Pour un rapport de pression supérieur à $r_{p\text{sonique}}$, l'écoulement est subsonique et la répartition de nombre de Mach et de rapport de pression donnée par la **Fig. V.9**.

La **figure V.10** représente les répartitions de nombre de Mach et de rapport de pression le long de l'axe de la tuyère pour le cas sonique (rapport = $r_{p\text{sonique}}$).

La **Fig.V.11** nous montre la répartition de Mach et de rapport de pression pour une tuyère supersonique adaptée où le rapport de pression égal à $r_{p\text{super}}$.

Le choc situé à la sortie de la tuyère pour un rapport de pression égal à $r_{p\text{choc}}$ est représenté par la **figure V.12**.

Pour localiser le choc à l'intérieur du divergent, on prend un rapport de pression entre $r_{p\text{sonique}}$ et $r_{p\text{choc}}$.

L'avantage de l'utilisation du programme de la solution monodimensionnelle nous permet d'accélérer la convergence et de mieux capter le choc.

2. Tuyère plane :

Les mêmes types d'écoulement précédents sont envisagés pour cette tuyère. (**Table V.1**).

Ainsi les figures **Fig.V.14 - Fig.V.15** et **Fig. V.16** représentent les répartitions du nombre de Mach et de rapport de pression dans les cas sonique, supersonique et avec choc à l'intérieur de divergent respectivement.

Tableau V.2 : poussée et débit masse pour une Tuyère axisymétrique:

	Débit massique			Poussée N
	Entrée	Col	Sortie	
Subsonique $r_s = 0.90$	$1,155166 \cdot 10^{-4}$	$1,155166 \cdot 10^{-4}$	$1,155166 \cdot 10^{-4}$	1848.847
Sonique	$1,213536 \cdot 10^{-4}$	$1,213536 \cdot 10^{-4}$	$1,213536 \cdot 10^{-4}$	2067.292
Supersonique	$1,213536 \cdot 10^{-4}$	$1,213536 \cdot 10^{-4}$	$1,213536 \cdot 10^{-4}$	15687.73

Où :

 r_s est le rapport de pression de la sortie sur la pression de l'entrée**Tableau V.3** : poussée et débit masse pour une Tuyère bidimensionnel

	Débit massique			Poussée N
	Entrée	Col	Sortie	
Subsonique $r_s = 0.90$	$2,864 \cdot 10^{-3}$	$2,863 \cdot 10^{-3}$	$2,864 \cdot 10^{-3}$	45838.39
Sonique	$3,222707 \cdot 10^{-3}$	$3,222707 \cdot 10^{-3}$	$3,222707 \cdot 10^{-3}$	60326.29
Supersonique	$3,222707 \cdot 10^{-3}$	$3,222707 \cdot 10^{-3}$	$3,222707 \cdot 10^{-3}$	378720.6

V.2.3 La poussée et débit masse :

Le débit masse est constant le long de la tuyère .

Pour une tuyère axisymétrique, le rapport de pression r_s subsonique , relève des poussées inférieures par rapport au cas sonique, ce pendant, elle est maximale dans le régime supersonique adaptée, donc la tuyère a les meilleures performances aérodynamiques.

La tuyère plane donne des poussées supérieures du cas précédant dans tout les régimes voir le tableau V.2 et tableau V.3.

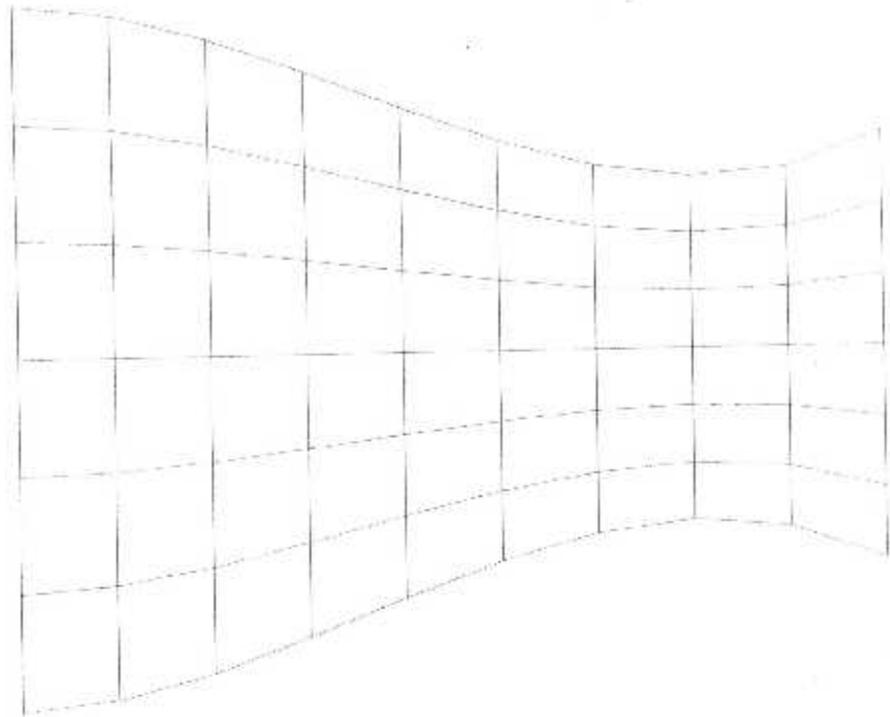


Fig.V.1 Maillage éparse 10x7 à l'intérieur d'une tuyère axisymétrique avec un maillage uniforme ($P_{ab}=P_{cd}=P_{ad}=P_{bc}=1$)

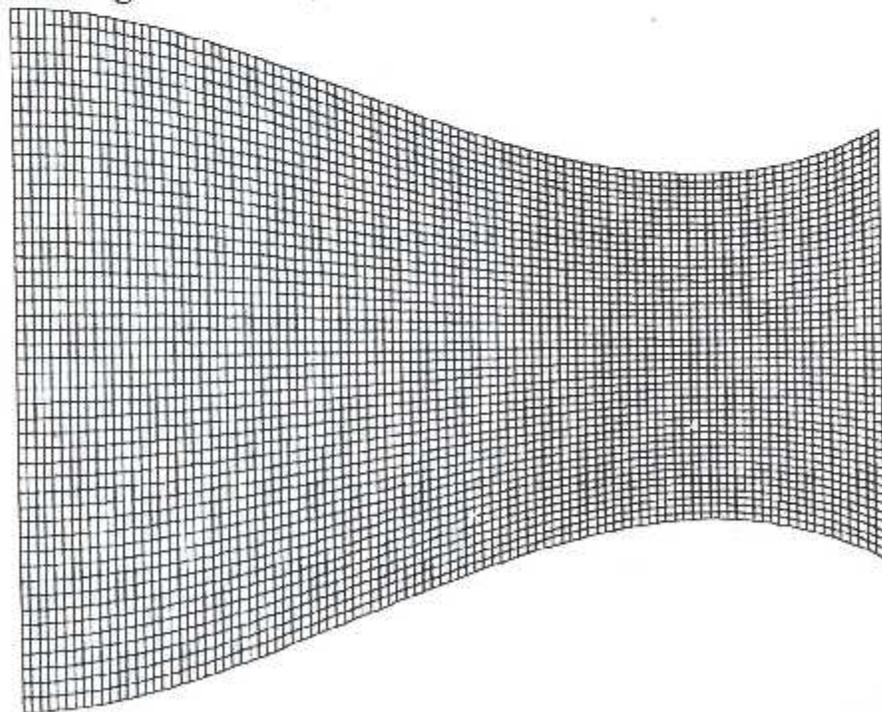


Fig .V.2 Maillage fin 100x49 à l'intérieur d'une tuyère axisymétrique avec un maillage uniforme ($P_{ab}=P_{cd}=P_{ad}=P_{bc}=1$)

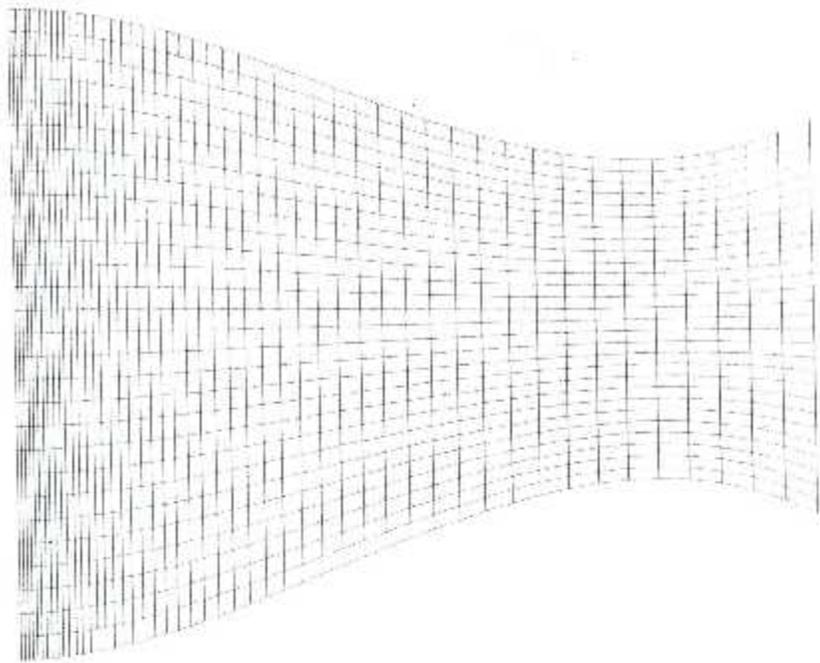


Fig.V.3 Raffinement de maillage à l'entrée 50x29 dans une tuyère axsymétrique ($P_{ab}=P_{cd}=0.1$, $P_{ad}=P_{bc}=1$)

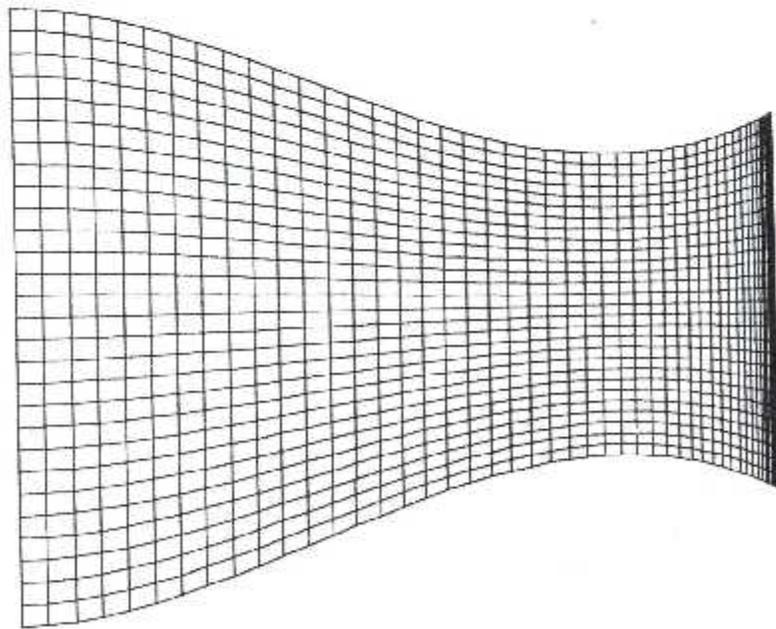


Fig.V.4 Raffinement de maillage à la sortie 50x29 dans une tuyère axisymétrique ($P_{ab}=P_{cd}=1.9$, $P_{ad}=P_{bc}=1$)

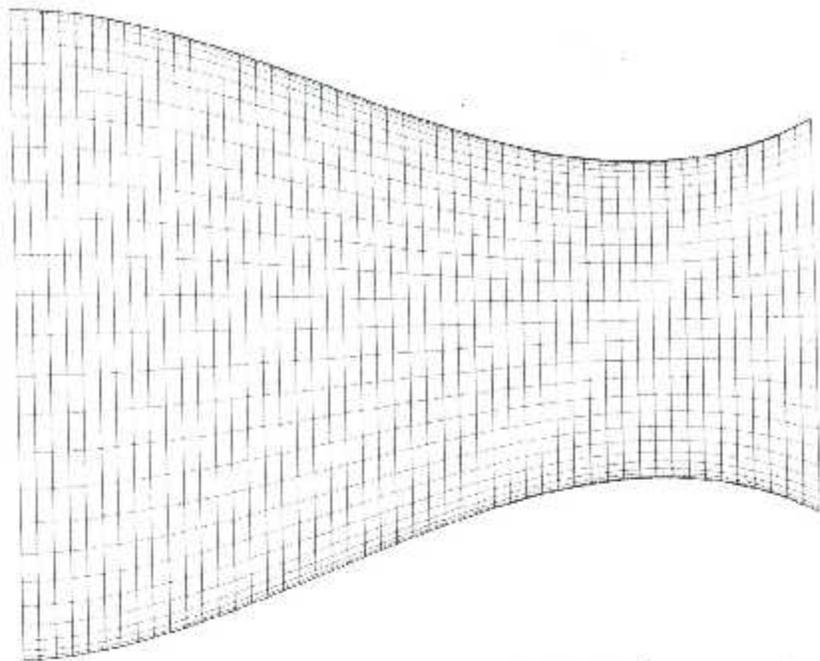


Fig.V.5 Raffinement de maillage à la paroi 50x29 dans une tuyère axisymétrique ($P_{ab}=P_{cd}=1$, $P_{ad}=P_{bc}=1.9$)

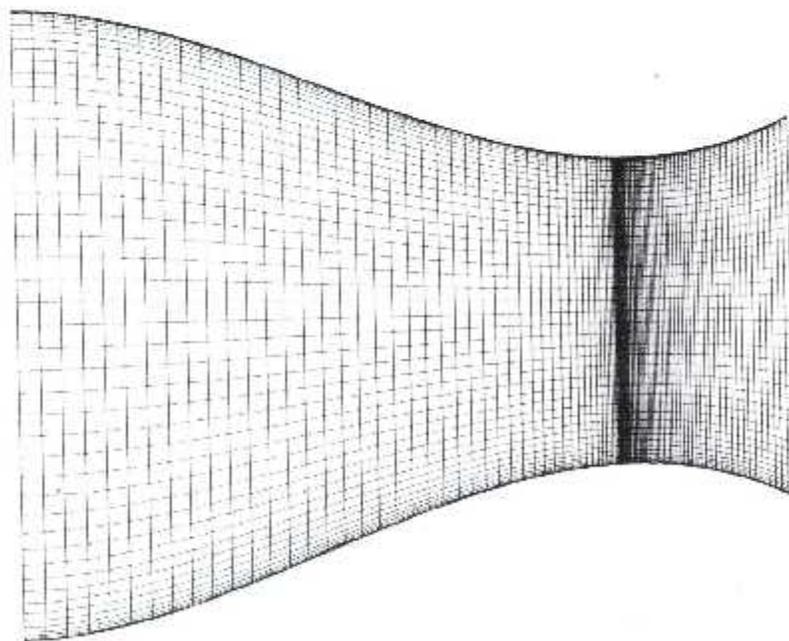


Fig .V.6 Raffinement de maillage à la paroi et au col 100x49 dans une tuyère axisymétrique