

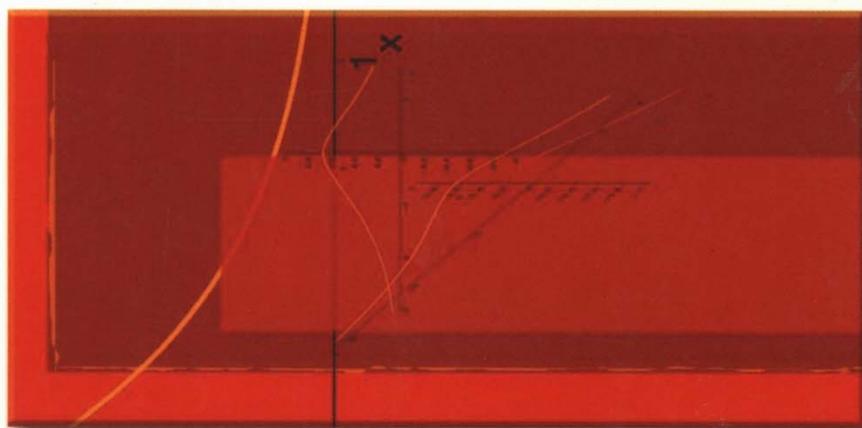
Guy Roos

2^e CYCLE • ÉCOLES D'INGÉNIEURS • AGRÉGATION

Analyse et géométrie

Méthodes hilbertiennes

Cours et exercices corrigés



DUNOD

Table des matières

AVANT-PROPOS	IX
NOTATIONS ET CONVENTIONS	XI
CHAPITRE 1 • PRODUITS SCALAIRES RÉELS ET COMPLEXES	1
1.1 Produits scalaires réels	1
1.1.1 Définition	1
1.1.2 La positivité et ses conséquences	2
1.1.3 Exemples	4
1.1.4 Orthogonalité	6
1.2 Produits scalaires hermitiens	8
1.2.1 Définition et exemples	8
1.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz et norme hermitienne	10
1.2.3 Orthogonalité	12
Exercices	12
CHAPITRE 2 • ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS	15
2.1 Orthonormalisation de Gram-Schmidt	15
2.2 Projecteurs orthogonaux	19
2.3 Isomorphismes d'espaces euclidiens	20
2.4 Représentation des formes linéaires	21

2.5	Le groupe orthogonal	22
2.5.1	Isométries d'un espace euclidien	22
2.5.2	Matrices orthogonales	24
2.5.3	Les groupes $SO(2)$ et $O(2)$	25
2.5.4	Sous-espaces invariants	27
2.5.5	Les groupes $SO(3)$ et $O(3)$	29
2.6	Endomorphismes symétriques	31
	Exercices	33
CHAPITRE 3 • ESPACES HERMITIENS		41
3.1	Orthonormalisation	41
3.2	Projecteurs orthogonaux	43
3.3	Adjoint d'un endomorphisme	44
3.4	Réduction des opérateurs normaux	45
3.5	Le groupe unitaire	46
	Exercices	48
CHAPITRE 4 • ESPACES PRÉHILBERTIENS, ESPACES DE HILBERT		53
4.1	Espaces préhilbertiens réels et complexes	53
4.2	Inégalité de Bessel et identité de Parseval	54
4.3	Séparabilité	57
4.4	Espaces de Hilbert	58
4.5	Projection orthogonale sur les sous-espaces fermés	62
4.6	Le théorème de représentation de Riesz	64
4.7	Familles sommables	65
	Exercices	71
CHAPITRE 5 • SÉRIES DE FOURIER DES FONCTIONS		73
5.1	Espaces de fonctions périodiques	73
5.2	Coefficients de Fourier	76
5.3	Les noyaux de Dirichlet	79
5.4	Les noyaux de Fejér	85
5.5	Théorème d'approximation de Weierstrass	90
5.6	Convergence en moyenne quadratique	91
5.7	Exemples et applications	92
	Exercices	95
CHAPITRE 6 • SÉRIES DE FOURIER DES DISTRIBUTIONS		99
6.1	Distributions périodiques	99
6.2	Convolution périodique	109
	Exercices	111

CHAPITRE 7 • ESPACES L^2	113
7.1 L'intégrale de Lebesgue dans \mathbb{R}^n	113
7.1.1 La mesure de Lebesgue	113
7.1.2 Fonctions intégrables	115
7.1.3 Théorème de Fubini	119
7.1.4 Changement de variables	120
7.2 Espaces L^1, L^2, L^∞	122
7.3 Séries de Fourier des fonctions L^2	125
Exercices	129
CHAPITRE 8 • FAMILLES ORTHOGONALES DE POLYNÔMES	133
8.1 Approximation par des polynômes	133
8.2 Polynômes de Legendre	134
8.3 Polynômes de Tchebychev	135
8.4 Polynômes de Gegenbauer	136
8.5 Polynômes de Jacobi	137
8.6 Polynômes de Laguerre	138
8.7 Polynômes d'Hermite	138
CHAPITRE 9 • TRANSFORMATION DE FOURIER	141
9.1 Transformation de Fourier des fonctions	141
9.1.1 Transformée de Fourier d'une fonction intégrable	141
9.1.2 L'espace \mathcal{S}	144
9.1.3 La transformation de Fourier inverse	146
9.1.4 Convolution	148
9.1.5 Continuité des opérations dans \mathcal{S}	149
9.2 Distributions tempérées	151
9.2.1 L'espace \mathcal{S}'	151
9.2.2 Opérations sur les distributions tempérées	153
9.2.3 Convolution	156
9.3 Transformation de Fourier dans \mathbb{R}^n	159
9.3.1 Les espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	160
9.3.2 Transformation de Fourier dans \mathbb{R}^n	162
Exercices	166
CHAPITRE 10 • ESPACES DE SOBOLEV	177
10.1 Distributions associées aux fonctions L^2	177
10.1.1 Sous-espaces denses de L^2	177
10.1.2 Transformation de Fourier L^2	180
10.2 Espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$	181
10.2.1 L'espace H^1	181
10.2.2 Espaces H^s	183
Exercices	187

CHAPITRE 11 • THÉORIE SPECTRALE	193
11.1 Opérateurs dans un espace de Hilbert	193
11.1.1 Opérateurs bornés	193
11.1.2 Opérateurs hermitiens	194
11.1.3 Opérateurs positifs	196
11.1.4 Projecteurs orthogonaux	197
11.2 Opérateurs compacts	200
11.2.1 Opérateurs compacts	200
11.2.2 Opérateurs de Hilbert-Schmidt	204
11.3 Théorie spectrale	206
11.3.1 Spectre d'un opérateur	206
11.3.2 Réduction des opérateurs hermitiens compacts	208
11.3.3 Théorie spectrale des opérateurs hermitiens	211
Exercices	216
CHAPITRE 12 • ESPACES DE HILBERT DE FONCTIONS HOLOMORPHES	225
12.1 Fonctions holomorphes	225
12.2 Noyau de Bergman	232
12.3 Noyaux reproduisants	240
12.4 L'espace de Hardy du disque	245
Exercices	246
CHAPITRE 13 • ONDELETTES	249
13.1 Bases invariantes par translations	249
13.2 Filtration par des sous-espaces fermés	255
13.3 Régularité	258
13.4 Bases d'ondelettes	267
SOLUTIONS DES EXERCICES	275
Chapitre 1	275
Chapitre 2	277
Chapitre 3	283
Chapitre 4	289
Chapitre 5	290
Chapitre 6	294
Chapitre 7	297
Chapitre 9	299
Chapitre 10	317
Chapitre 11	322
Chapitre 12	329
INDEX	335