

Xavier Picamoles

# Fondamentaux de mathématiques appliquées

pour ingénieurs et techniciens



**La côte de l'ouvrage : 2-510-224**

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Généralités : problèmes différentiels et modélisation</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Généralités sur les problèmes différentiels</b>	<b>3</b>
1	Quelques généralités sur les équations différentielles . . . . .	3
1.1	Forme générale d'une équation différentielle ordinaire . . . . .	3
1.2	Forme résolue d'une équation différentielle . . . . .	3
1.3	Lien entre E.D.O. résolue d'ordre $n \geq 2$ et E.D.O. résolue d'ordre 1 . . .	4
1.4	Lien entre système différentiel d'ordre 1 et E.D.O. résolue d'ordre 1 . .	5
1.5	Problème de Cauchy et théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	6
2	Solveur numérique de <i>Scilab</i> . . . . .	7
2.1	Solveur ode . . . . .	7
2.2	Application 1 : un problème d'éolienne face au vent . . . . .	8
2.3	Application 2 : équation de Van der Pol . . . . .	11
2.4	Application 3 : système différentiel de Lokta-Volterra . . . . .	12
3	Quelques généralités sur les E.D.P. . . . .	14
3.1	E.D.P. du premier ordre . . . . .	14
3.2	E.D.P. du second ordre . . . . .	16
3.3	Conditions aux limites et conditions initiales . . . . .	18
3.4	Problème bien posé au sens de Hadamard . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Modélisation de quelques problèmes physiques conduisant à des E.D.P.</b>	<b>23</b>
1	L'équation de transport . . . . .	23
1.1	Origine de l'équation . . . . .	23
1.2	L'équation . . . . .	26
1.3	Phénomène de transport de la solution le long des caractéristiques . .	26
1.4	Solution analytique en domaine non borné . . . . .	28
1.5	Exemple de solution en domaine non borné . . . . .	28
1.6	Solution analytique en domaine borné . . . . .	29
2	L'équation de la chaleur . . . . .	30
2.1	Origine de l'équation . . . . .	30
2.2	L'équation . . . . .	33
2.3	Solution analytique en domaine non borné . . . . .	34

2.4	Solution analytique en domaine borné . . . . .	35
2.5	Exemple de solution en domaine borné . . . . .	39
3	L'équation des cordes vibrantes . . . . .	40
3.1	Origine de l'équation . . . . .	40
3.2	L'équation . . . . .	42
3.3	Lien entre l'équation des ondes et l'équation de transport . . . . .	44
3.4	Solution analytique en domaine non borné . . . . .	45
3.5	Exemple de solution en domaine non borné . . . . .	48
3.6	Solution analytique en domaine borné . . . . .	49
3.7	Exemple de solution en domaine borné . . . . .	53
4	Les équations de Laplace et de Poisson . . . . .	54
4.1	Origine de l'équation de Laplace . . . . .	54
4.2	Un exemple de problème conduisant à l'équation de Poisson . . . . .	55
4.3	Les équations . . . . .	58
4.4	Solution analytique de l'équation de Laplace sur le disque unité . . . . .	59
4.5	Solution analytique de l'équation de Poisson sur le carré unité . . . . .	62
5	L'équation des barres . . . . .	63
5.1	Origine de l'équation . . . . .	63
5.2	L'équation . . . . .	66
6	L'équation des poutres en flexion pure et statique . . . . .	66
6.1	Origine de l'équation . . . . .	66
6.2	L'équation . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Notions élémentaires liées à l'analyse numérique matricielle</b>	<b>71</b>
1	Quelques généralités sur les matrices . . . . .	71
1.1	Notations . . . . .	71
1.2	Matrices creuses, matrices « bandes » . . . . .	72
1.3	Matrices symétriques et symétriques définies positives . . . . .	72
2	Normes vectorielles et matricielles . . . . .	74
2.1	Définition d'une norme . . . . .	75
2.2	Normes vectorielles sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	76
2.3	Normes sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . . . . .	76
2.4	Normes matricielles subordonnées . . . . .	77
2.5	Norme subordonnée à la norme $\ \cdot\ _\infty$ . . . . .	79
2.6	Cas particulier des matrices symétriques . . . . .	82
3	Méthode directe de résolution d'un système linéaire . . . . .	82
3.1	Problématique . . . . .	82
3.2	Conditionnement d'une matrice . . . . .	83
3.3	Décomposition « LU » et de Cholesky . . . . .	86
3.4	Factorisation de Cholesky . . . . .	88
3.5	Résolution d'un système linéaire à matrice creuse avec <i>Scilab</i> . . . . .	88

<b>II</b>	<b>Méthode des différences finies et applications</b>	<b>91</b>
<b>4</b>	<b>Introduction à la méthode des différences finies pour quelques E.D.O.</b>	<b>93</b>
1	Introduction à la méthode des différences finies . . . . .	93
1.1	Notations et vocabulaire . . . . .	93
1.2	Formule de Taylor-Lagrange . . . . .	94
2	Schéma numérique d'Euler . . . . .	95
2.1	Approche par quotient aux différences finies . . . . .	95
2.2	Approche par quadrature . . . . .	98
3	Schéma numérique du point milieu . . . . .	100
3.1	Approche par quotient aux différences finies . . . . .	100
3.2	Approche par quadrature . . . . .	102
3.3	Les formules de Runge-Kutta . . . . .	103
4	Deux variantes du schéma d'Euler . . . . .	104
4.1	Un schéma numérique implicite à un pas . . . . .	104
4.2	Un schéma numérique explicite à deux pas . . . . .	106
5	Aspects théoriques pour les schémas explicites à un pas . . . . .	107
5.1	Objectifs . . . . .	107
5.2	Définition d'un schéma numérique explicite à un pas . . . . .	108
5.3	Erreur de consistance . . . . .	109
5.4	Précision ou ordre d'un schéma . . . . .	111
5.5	Consistance . . . . .	114
5.6	Une condition suffisante de consistance . . . . .	114
5.7	Stabilité . . . . .	117
5.8	Convergence . . . . .	119
5.9	Lien entre consistance, stabilité et convergence . . . . .	119
6	Application : un problème d'éolienne face au vent . . . . .	121
6.1	Rappel du problème . . . . .	121
6.2	Schémas numériques . . . . .	121
6.3	Algorithmes . . . . .	122
6.4	Simulations numériques dans le cas d'un vent constant . . . . .	123
6.5	Simulations numériques dans le cas d'une rafale de vent . . . . .	128
<b>5</b>	<b>Introduction à la méthode des différences finies pour quelques E.D.P.</b>	<b>129</b>
1	Introduction . . . . .	129
1.1	Objectifs . . . . .	129
1.2	Discretisation du domaine : le maillage . . . . .	130
1.3	Discretisation des dérivées partielles : quotients aux différences finies . . . . .	131
2	Différences finies pour l'équation de transport . . . . .	135
2.1	Le problème . . . . .	135
2.2	Maillage du domaine . . . . .	136
2.3	Schéma numérique décentré à droite en espace . . . . .	136
2.4	Schéma décentré à gauche en espace . . . . .	140
2.5	Diffusion numérique pour le schéma décentré à gauche . . . . .	145
2.6	Schéma numérique de Lax-Wendroff . . . . .	148

2.7	Comportement des schémas avec une condition initiale non continue . . . . .	152
3	Différences finies pour l'équation de la chaleur . . . . .	152
3.1	Le problème . . . . .	152
3.2	Le maillage du domaine . . . . .	153
3.3	Construction d'un schéma numérique explicite . . . . .	154
3.4	Simulations numériques pour le schéma explicite . . . . .	158
3.5	Schéma numérique implicite . . . . .	160
3.6	Schéma semi implicite de Crank-Nicolson . . . . .	163
3.7	Schéma <i>saute-mouton</i> . . . . .	165
4	Différences finies pour l'équation des cordes vibrantes . . . . .	166
4.1	Le problème . . . . .	166
4.2	Le maillage du domaine . . . . .	166
4.3	Construction d'un schéma numérique explicite . . . . .	166
4.4	Autre approche de construction d'un schéma numérique . . . . .	168
5	La méthode de Newmark . . . . .	169
5.1	Les problèmes concernés . . . . .	169
5.2	Principe de la méthode de Newmark . . . . .	169
5.3	Schéma implicite de Newmark classique . . . . .	171
5.4	Propriétés du schéma . . . . .	171
6	Aspects théoriques . . . . .	171
6.1	Forme générale d'un schéma numérique à un pas . . . . .	171
6.2	Consistance, stabilité, convergence . . . . .	173
6.3	Lien entre stabilité, consistance et convergence : théorème de Lax . . . . .	176
7	Étude théorique des schémas pour l'équation de transport . . . . .	177
7.1	Schéma de Lax-Wendroff . . . . .	177
7.2	Schéma explicite décentré à gauche . . . . .	183
8	Étude théorique des schémas pour l'équation de la chaleur . . . . .	184
8.1	Le schéma explicite . . . . .	185
8.2	Le schéma implicite . . . . .	190
8.3	Le schéma de Crank-Nicolson . . . . .	192
<b>III Méthode des éléments finis et applications</b>		<b>195</b>
<b>6</b>	<b>Introduction à la méthode des éléments finis : aspects théoriques</b>	<b>197</b>
1	Introduction . . . . .	197
1.1	Historique . . . . .	197
1.2	Notations . . . . .	198
2	Introduction à la formulation faible pour un problème elliptique . . . . .	199
2.1	Exemple d'une barre en traction-compression . . . . .	199
2.2	Exemple d'une poutre en flexion pure . . . . .	203
2.3	Exemple d'une membrane en tension . . . . .	206
3	Existence et unicité d'une solution faible . . . . .	208
3.1	Le théorème de Lax-Milgram . . . . .	208
3.2	Problème de la barre . . . . .	209

3.3	Problème de la poutre . . . . .	216
3.4	Problème de la membrane . . . . .	217
4	Méthode de Galerkin : formulation faible et discrétisation . . . . .	219
4.1	Méthode de Galerkin . . . . .	219
4.2	Discrétisation du problème faible . . . . .	219
4.3	Convergence de la méthode de Galerkin . . . . .	221
4.4	Espaces d'approximation . . . . .	223
4.5	Interpolation de Lagrange et de Hermite . . . . .	224
4.6	Le problème de l'intégration numérique . . . . .	225
4.7	Quelques mots à propos du maillage . . . . .	226
5	Étude de l'erreur . . . . .	227
5.1	Lemme de Céa . . . . .	228
5.2	Ordre de convergence dans le cas d'intégration exacte . . . . .	229
5.3	Ordre de convergence dans le cas d'intégration numérique . . . . .	229
6	Exemple : résolution du problème de la barre (interpolation de degré 1) . . . . .	230
6.1	Rappel du problème . . . . .	230
6.2	Espaces d'approximation . . . . .	230
6.3	Forme discrétisée de la formulation faible . . . . .	234
6.4	Résolution du problème discrétisé . . . . .	236
6.5	Lien avec la méthode des différences finies . . . . .	236
6.6	Algorithme et application numérique . . . . .	237
7	Exemple : résolution du problème de la barre (interpolation de degré 2) . . . . .	239
7.1	Espaces d'approximation . . . . .	239
7.2	Forme discrétisée de la formulation faible . . . . .	242
7.3	Algorithme et application numérique . . . . .	244
8	Exemple : résolution du problème de la poutre (interpolation de degré 3) . . . . .	246
8.1	Rappel du problème . . . . .	246
8.2	Espaces d'approximation . . . . .	246
8.3	Forme discrétisée de la formulation faible . . . . .	249
<b>7</b>	<b>La méthode des éléments finis : aspects pratiques</b> . . . . .	<b>251</b>
1	Stratégie locale de discrétisation et éléments finis . . . . .	251
1.1	Définition d'un élément fini et exemples . . . . .	251
1.2	Relations élémentaires . . . . .	254
1.3	Assemblage des relations élémentaires . . . . .	255
1.4	Prise en compte des conditions aux limites essentielles . . . . .	255
2	Description de quelques éléments finis . . . . .	256
2.1	Éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange (1D) . . . . .	256
2.2	Éléments finis $\mathbb{P}_2$ de Lagrange (1D) . . . . .	257
2.3	Éléments finis $\mathbb{P}_3$ de Hermite (1D) . . . . .	261
2.4	Élément fini $\mathbb{T}_3$ de Lagrange (2D) . . . . .	264
2.5	Éléments finis $\mathbb{Q}_4$ de Lagrange (2D) . . . . .	266
2.6	Notion d'isoparamétrie . . . . .	267
3	Exemple d'utilisation d'éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange : problème de la barre . . . . .	269
3.1	Construction des éléments finis . . . . .	270
3.2	Calcul des relations élémentaires . . . . .	273

3.3	Assemblage des relations élémentaires . . . . .	276
3.4	Ce qu'il faut retenir des relations élémentaires . . . . .	280
3.5	Prise en compte des conditions aux limites et résolution . . . . .	280
3.6	Interpolation de la solution approchée . . . . .	281
4	Exemple d'utilisation d'éléments finis $\mathbb{P}_2$ de Lagrange : problème de la barre . . . . .	281
4.1	Construction des éléments finis . . . . .	282
4.2	Calcul des relations élémentaires . . . . .	283
4.3	Assemblage des relations élémentaires . . . . .	286
4.4	Prise en compte des conditions aux limites et résolution . . . . .	287
5	Exemple d'utilisation d'éléments finis $\mathbb{P}_3$ de Hermite : problème de la poutre . . . . .	288
6	Exemple d'utilisation d'éléments finis $\mathbb{T}_3$ de Lagrange : problème de la membrane . . . . .	288
6.1	Simplification du modèle et construction des éléments . . . . .	288
6.2	Calcul des relations élémentaires . . . . .	290
6.3	Assemblage des relations élémentaires . . . . .	294
6.4	Prise en compte des conditions aux limites et résolution . . . . .	296
<b>8</b>	<b>Quelques applications de la méthode des éléments finis</b> . . . . .	<b>297</b>
1	Éléments finis « barre » et application aux treillis plans . . . . .	297
1.1	Description d'une barre en mécanique . . . . .	297
1.2	Forme discrétisée . . . . .	298
1.3	Modélisation éléments finis d'une barre . . . . .	300
1.4	Exemple d'une barre soumise à son poids propre . . . . .	305
1.5	Élément « barre » en deux dimensions . . . . .	309
1.6	Application aux treillis plans . . . . .	313
1.7	Exemple d'application à un problème de thermique . . . . .	318
2	Éléments finis « poutre », application aux portiques plans . . . . .	321
2.1	Description d'une poutre en flexion pure . . . . .	321
2.2	Forme discrétisée . . . . .	322
2.3	Modélisation éléments finis d'une poutre . . . . .	324
2.4	Exemples . . . . .	329
2.5	Prise en compte de la traction compression dans le modèle . . . . .	337
2.6	Application aux portiques plans . . . . .	340
2.7	Élément « poutre » de Timoshenko . . . . .	344
3	Éléments de généralisation en dimensions 2 et 3 . . . . .	346
3.1	Généralités . . . . .	346
3.2	L'exemple simple des contraintes planes en dimension deux . . . . .	348
<b>9</b>	<b>Méthode des éléments finis appliquée aux problèmes dynamiques</b> . . . . .	<b>351</b>
1	La méthode des éléments finis en dynamique . . . . .	351
1.1	Généralités . . . . .	351
1.2	Discrétisation partielle en espace . . . . .	352
1.3	Exemple de l'équation de la chaleur . . . . .	353
2	Exemple d'étude des vibrations libres d'un système non amorti . . . . .	355
2.1	Généralités : réponse harmonique et pulsations propres . . . . .	355
2.2	Exemple d'une barre . . . . .	357

<b>10 Aspects pratiques liés à la mise en œuvre de la méthode</b>	<b>359</b>
1 Motivations . . . . .	359
2 Différents types d'éléments de structure et de thermique . . . . .	360
2.1 Éléments linéiques . . . . .	360
2.2 Éléments surfaciques . . . . .	361
2.3 Éléments volumiques . . . . .	363
3 Simplifications de modèle . . . . .	364
3.1 Motivations . . . . .	364
3.2 Symétrie plane . . . . .	365
3.3 Symétries de révolution : axisymétrie . . . . .	366
3.4 Hypothèse des contraintes planes . . . . .	366
3.5 Hypothèse des déformations planes . . . . .	367
3.6 Deux exemples de simplification de modèles en thermique . . . . .	368
4 Un exemple de modélisations multiples . . . . .	369
4.1 Modélisation 3D . . . . .	370
4.2 Modélisation 2D . . . . .	371
4.3 Modélisation 1D . . . . .	373
4.4 Commentaires . . . . .	373
5 Exemple d'utilisation d'un logiciel libre . . . . .	374
5.1 Le logiciel FreeFem++ . . . . .	374
5.2 Un exemple d'utilisation . . . . .	374
<b>11 Formulaire éléments finis</b>	<b>377</b>
1 Formulation faible abstraite et exemples . . . . .	377
2 Éléments finis . . . . .	378
3 Bases nodales sur $[0, L]$ . . . . .	379
4 Matrices de rigidité élémentaires . . . . .	380
<b>IV Traitement du signal et applications</b>	<b>383</b>
<b>12 Les distributions</b>	<b>385</b>
1 Introduction et historique . . . . .	385
2 Insuffisance de la notion de fonction . . . . .	386
3 Définition d'une distribution et premiers exemples . . . . .	389
3.1 Définition . . . . .	389
3.2 Premiers exemples . . . . .	391
4 Distributions régulières et singulières . . . . .	393
4.1 Distributions régulières . . . . .	393
4.2 Exemples de distributions régulières . . . . .	395
4.3 Distributions singulières . . . . .	396
5 Opérations sur les distributions . . . . .	397
5.1 Mise au point sur les notations . . . . .	397
5.2 Opérations élémentaires . . . . .	397
5.3 Égalité de deux distributions . . . . .	398
5.4 Support d'une distribution . . . . .	399
5.5 Distributions périodiques . . . . .	400



5.6	Produit d'une distribution par une fonction . . . . .	401
5.7	Dérivée d'une distribution . . . . .	402
5.8	Propriétés de la dérivation . . . . .	406
5.9	Valeur principale de $\frac{1}{x}$ . . . . .	410
5.10	Partie finie de $\frac{1}{x}$ . . . . .	412
6	Convergence des suites de distributions . . . . .	413
6.1	Convergence en norme $L^1$ , en norme $L^2$ . . . . .	413
6.2	Convergence faible d'une suite de fonctions . . . . .	413
6.3	Lien entre convergence en norme et convergence faible . . . . .	413
6.4	Convergence d'une suite de distributions . . . . .	414
6.5	Approximation de l'impulsion de Dirac . . . . .	414
7	Généralisation en dimension deux et trois . . . . .	415
8	Distributions tempérées . . . . .	415
8.1	Définition . . . . .	416
8.2	Exemples de distributions tempérées . . . . .	417
9	Convolution des distributions . . . . .	421
9.1	Extension du produit de convolution aux distributions . . . . .	421
9.2	Deux conditions suffisantes d'existence . . . . .	423
9.3	Propriétés élémentaires . . . . .	424
9.4	Le rôle fondamental de la distribution de Dirac . . . . .	424
10	Algèbre de convolution . . . . .	426
10.1	Introduction . . . . .	426
10.2	Inverse de convolution . . . . .	426
10.3	Algèbre de convolution . . . . .	426
10.4	Solution élémentaire . . . . .	427
10.5	Deux exemples simples . . . . .	428
<b>13</b>	<b>Les transformations de Fourier</b> . . . . .	<b>431</b>
1	Origine des transformations de Fourier à temps continu et discret . . . . .	431
2	Transformation de Fourier à temps continu . . . . .	433
2.1	Transformée et transformation de Fourier . . . . .	433
2.2	Une condition suffisante d'existence . . . . .	433
2.3	Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . . . . .	433
2.4	Transformation sur $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	434
2.5	Exemples de transformées de Fourier . . . . .	435
2.6	Transformation de Fourier inverse . . . . .	437
3	Principales propriétés de la transformation de Fourier . . . . .	438
3.1	Linéarité et continuité . . . . .	438
3.2	Formules de translation « en $t$ » et « en $q$ » . . . . .	438
3.3	Formule de « dilatation » . . . . .	438
3.4	Formule de dérivation « en $t$ », « en $q$ » et régularité de $\hat{s}$ . . . . .	438
3.5	Régularité de $\hat{s}$ . . . . .	440
3.6	Limite en $-\infty$ et $+\infty$ . . . . .	441
3.7	Formule d'échange . . . . .	442
3.8	Convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . . . . .	442
3.9	Spectre d'amplitude, spectre de phase . . . . .	443

3.10	Énergie d'un signal . . . . .	443
4	Transformation de Fourier des distributions tempérées . . . . .	444
4.1	Prolongement de la transformation à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . . . . .	444
4.2	Transformation de Fourier inverse . . . . .	445
4.3	Formules de dérivation et de « retard » . . . . .	445
4.4	Convolution . . . . .	447
4.5	Transformée de Fourier d'une distribution à support compact . . . . .	447
4.6	Exemples de transformées de Fourier au sens des distributions . . . . .	447
5	Transformation de Fourier à temps discret . . . . .	450
5.1	Définition . . . . .	450
5.2	Condition suffisante d'existence . . . . .	451
5.3	Propriétés élémentaires . . . . .	451
5.4	Inversion de la transformation de Fourier à temps discret . . . . .	451
6	Transformation de Fourier discrète . . . . .	452
6.1	Définition . . . . .	452
6.2	Transformation inverse . . . . .	452
7	Inconvénients de la transformation de Fourier . . . . .	454
8	Principe d'incertitude . . . . .	455
<b>14</b>	<b>Développement en série de Fourier</b> . . . . .	<b>459</b>
1	Origine et importance des séries de Fourier . . . . .	459
2	Développement en série de Fourier des fonctions périodiques . . . . .	460
2.1	Forme exponentielle du développement . . . . .	460
2.2	Conditions suffisantes d'existence . . . . .	460
2.3	Lien avec la transformation de Fourier . . . . .	462
2.4	Forme trigonométrique et forme polaire du développement . . . . .	463
2.5	Puissance et énergie d'un signal périodique, formule de Parseval . . . . .	464
2.6	Spectre d'amplitude, spectre de phase . . . . .	465
2.7	Principales propriétés des coefficients de Fourier . . . . .	467
2.8	Exemples de développements en séries de Fourier . . . . .	469
2.9	Développement en série de Fourier d'une fonction non périodique mais à support borné . . . . .	471
3	Développement en série de Fourier des fonctions périodiques d'énergie finie . . . . .	475
3.1	Aspects « géométriques » . . . . .	475
3.2	Théorème de projection . . . . .	478
3.3	Interprétation des coefficients et des sommes partielles de Fourier . . . . .	480
3.4	Convergence des sommes partielles en norme quadratique . . . . .	481
4	Développement en série de Fourier des distributions tempérées . . . . .	483
4.1	Un résultat général . . . . .	483
4.2	Application : développement en série de Fourier du peigne de Dirac . . . . .	484
<b>15</b>	<b>Les transformations de Laplace et en <math>Z</math></b> . . . . .	<b>485</b>
1	Origine des transformations de Laplace et en $Z$ . . . . .	485
2	Transformation de Laplace des fonctions . . . . .	486
2.1	Transformée et transformation de Laplace . . . . .	486
2.2	Lien avec la transformation de Fourier . . . . .	487

2.3	Quelques conditions suffisantes d'existence . . . . .	487
2.4	Ensemble des « originaux » . . . . .	488
2.5	Exemples de transformées de Laplace . . . . .	489
2.6	Transformation de Laplace inverse . . . . .	490
2.7	Détermination pratique d'un inverse . . . . .	491
2.8	Principales propriétés de la transformation de Laplace . . . . .	492
3	Transformation de Laplace des distributions . . . . .	496
3.1	Définition . . . . .	496
3.2	Exemples de transformées au sens des distributions . . . . .	498
3.3	Quelques propriétés . . . . .	500
4	Quelques applications de la transformation de Laplace . . . . .	501
4.1	Résolution d'un problème de Cauchy . . . . .	501
4.2	Système linéaire « entrée-sortie » et fonction de transfert . . . . .	502
4.3	Calcul symbolique . . . . .	503
5	Transformation en $Z$ . . . . .	504
5.1	Transformée et transformation en $Z$ . . . . .	504
5.2	Quelques conditions suffisantes d'existence . . . . .	505
5.3	Ensemble des « originaux » . . . . .	506
5.4	Exemples de transformées en $Z$ . . . . .	507
5.5	Transformation en $Z$ inverse . . . . .	509
5.6	Détermination pratique d'un inverse . . . . .	510
5.7	Quelques propriétés de la transformation en $Z$ . . . . .	511
6	Application à la résolution d'une équation aux différences . . . . .	513
<b>16</b>	<b>Notions de filtrage linéaire</b> . . . . .	<b>515</b>
1	Signaux analogiques, numériques, causals . . . . .	516
1.1	Signaux analogiques et numériques . . . . .	516
1.2	Échantillonnage et quantification . . . . .	516
1.3	Chaîne d'acquisition de données numériques . . . . .	517
1.4	Causalité et signaux causals . . . . .	517
2	Filtrage linéaire . . . . .	518
2.1	Action d'un filtre sur un signal . . . . .	518
2.2	Réponse indicielle et impulsionnelle . . . . .	520
2.3	Filtres analogiques et numériques . . . . .	521
2.4	Modélisation mathématique d'un filtre . . . . .	521
3	Caractérisation des filtres linéaires invariants . . . . .	522
3.1	Relation « entrée-sortie » en termes d'équation différentielle ou d'équation aux différences finies . . . . .	522
3.2	Relation « entrée-sortie » en termes de réponse impulsionnelle et de convolution . . . . .	523
3.3	Fonction de transfert . . . . .	524
4	Filtres causals, stables, réalisables . . . . .	527
4.1	Filtre stable . . . . .	527
4.2	Filtre causal . . . . .	527
4.3	Filtre réalisable . . . . .	527
5	Classification des filtres numériques . . . . .	527

5.1	Filtres numériques à réponse impulsionnelle finie . . . . .	528
5.2	Filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie . . . . .	528
6	Réponse en fréquence, gain et phase d'un filtre . . . . .	529
6.1	Filtres analogiques . . . . .	529
6.2	Filtres numériques . . . . .	530
7	Exemple d'étude de quelques filtres simples . . . . .	531
7.1	Un filtre numérique non récursif (à réponse impulsionnelle finie) . .	531
7.2	Un filtre numérique récursif (à réponse impulsionnelle infinie) . . . .	534
7.3	Un filtre analogique . . . . .	537
<b>17</b>	<b>Analyse spectrale des signaux et calcul approché du spectre</b>	<b>541</b>
1	Spectre d'un signal analogique non périodique . . . . .	541
2	Spectre d'un signal analogique et périodique . . . . .	541
2.1	Spectre et spectre d'amplitude . . . . .	541
2.2	Lien avec les séries de Fourier . . . . .	543
2.3	Généralisation . . . . .	544
3	Spectre d'un signal numérique non périodique . . . . .	544
4	Spectre d'un signal numérique et périodique . . . . .	545
5	Spectre d'un signal analogique échantillonné : formule de Poisson . . . . .	546
5.1	Échantillonnage d'un signal analogique . . . . .	546
5.2	Formule de Poisson . . . . .	547
5.3	Spectre d'amplitude d'un signal échantillonné . . . . .	548
6	Recouvrement de spectre et fréquence critique d'échantillonnage . . . . .	548
6.1	Fréquence critique d'échantillonnage . . . . .	548
6.2	Conséquence néfaste du recouvrement de spectre . . . . .	549
6.3	Exemple d'un signal cosinusoïdal amorti . . . . .	549
7	Reconstruction d'un signal analogique échantillonné : théorème de Shannon	550
8	Spectre d'un signal « fenêtré » . . . . .	551
8.1	Conséquence du fenêtrage pour un signal quelconque . . . . .	551
8.2	Conséquence du fenêtrage pour un signal périodique . . . . .	552
8.3	Exemple d'un signal analogique périodique . . . . .	553
8.4	Exemple d'un signal analogique non périodique . . . . .	554
9	Calcul approché du spectre . . . . .	555
9.1	Problématique . . . . .	555
9.2	Algorithme de transformation de Fourier rapide (fft) . . . . .	556
9.3	Mise en œuvre pratique avec <i>Scilab</i> . . . . .	557
9.4	Cas d'un signal analogique périodique . . . . .	557
9.5	Cas d'un signal analogique non périodique . . . . .	561
9.6	Gestion du domaine fréquentiel exploré et de la résolution fréquentielle . . . . .	562
9.7	Exemples et mise en œuvre pratique . . . . .	563

<b>18</b>	<b>Formulaire de traitement du signal</b>	<b>571</b>
1	Convolution et distributions . . . . .	571
2	Transformations de Fourier . . . . .	573
3	Développement en série de Fourier . . . . .	574
4	Formules de Parseval . . . . .	574
5	Transformation de Laplace . . . . .	575
6	Transformation en Z . . . . .	576
7	Analyse spectrale . . . . .	577
<b>19</b>	<b>De la transformation de Fourier aux transformations en ondelettes</b>	<b>579</b>
1	Introduction . . . . .	579
2	La transformation à fenêtre glissante et la transformation de Gabor . . . . .	580
2.1	La transformation de Fourier à fenêtre glissante . . . . .	580
2.2	La transformation de Gabor . . . . .	582
3	La transformation en ondelettes continue . . . . .	585
3.1	Une adaptation de la transformation de Gabor . . . . .	585
3.2	Transformation en ondelettes continue et formule d'analyse . . . . .	589
3.3	Formules de reconstruction ou de synthèse . . . . .	590
3.4	Exemple : l'ondelette de Haar . . . . .	590
<b>20</b>	<b>Transformations en ondelettes discrètes</b>	<b>593</b>
1	Des transformations en ondelettes continues aux transformations discrètes	593
2	Exemple de l'ondelette de Haar . . . . .	595
2.1	L'ondelette de Haar dans un cas particulier . . . . .	595
2.2	Décomposition en ondelettes de Haar . . . . .	598
2.3	Relations à deux échelles . . . . .	599
2.4	Interprétation en termes de filtres . . . . .	602
2.5	Mise en œuvre pratique de la décomposition . . . . .	603
2.6	Interprétation matricielle de la transformation . . . . .	606
3	Analyse multi-résolution et ondelettes orthogonales . . . . .	610
3.1	Analyse multi-résolution de $L^2$ . . . . .	610
3.2	Espaces d'approximation et fonction d'échelle . . . . .	610
3.3	Ondelette orthogonale et espaces de détail . . . . .	610
3.4	Décomposition en ondelettes . . . . .	611
3.5	Interprétation géométrique . . . . .	612
3.6	Relations à deux échelles . . . . .	612
4	Décomposition et reconstruction d'un signal . . . . .	613
4.1	Décomposition d'un signal . . . . .	613
4.2	Reconstruction d'un signal . . . . .	615
4.3	Interprétation en termes de filtres . . . . .	615
5	Ondelettes orthogonales . . . . .	618
5.1	Un choix pléthorique . . . . .	618
5.2	Quelques critères caractérisant une ondelette . . . . .	618
5.3	Deux grandes familles d'ondelettes . . . . .	618
6	Ondelettes biorthogonales . . . . .	621
7	Algorithme pyramidal et mise en œuvre pratique . . . . .	622

7.1	Généralités et illustration . . . . .	622
7.2	Le problème du calcul sur des suites finies . . . . .	623
8	Mise en œuvre pratique avec Scilab . . . . .	624
8.1	Les fonctions <code>wavedec</code> et <code>waverec</code> . . . . .	624
8.2	Les fonctions <code>dwt</code> et <code>idwt</code> . . . . .	626
9	Applications . . . . .	627
9.1	Panorama de quelques applications . . . . .	627
9.2	Les évolutions des ondelettes . . . . .	628
9.3	Application au « débruitage » d'un signal mono-dimensionnel . . . . .	629
9.4	Application à la détection de singularités . . . . .	631
9.5	Application à la compression de données . . . . .	632
<b>21</b>	<b>Notions de traitement élémentaire des images</b> . . . . .	<b>635</b>
1	Généralités sur les images . . . . .	635
1.1	Description mathématique des images . . . . .	635
1.2	Utilisation du logiciel <i>Scilab</i> pour manipuler des images . . . . .	635
2	Transformation en ondelettes d'une image . . . . .	637
2.1	Adaptation aux image . . . . .	637
2.2	Interprétation matricielle pour l'ondelette de Haar . . . . .	639
3	Utilisation du logiciel <i>Scilab</i> . . . . .	641
3.1	Décomposition en ondelettes sur un niveau puis reconstruction . . . . .	642
3.2	Décomposition en ondelettes multi-niveaux puis reconstruction . . . . .	644
4	Application à la compression des images . . . . .	648
4.1	Principe de la compression par seuillage . . . . .	648
4.2	Exemple de mise en œuvre de compression par seuillage . . . . .	648
4.3	Comparaison de plusieurs ondelettes . . . . .	649
5	Quelques transformations élémentaires d'images . . . . .	650
5.1	Détection des contours : approche « gradient » . . . . .	650
5.2	Détection des contours : approche alternative . . . . .	654
5.3	Détection des contours : filtres de Sobel ou Prewitt . . . . .	654
5.4	Suppression du bruit par moyenne locale . . . . .	655
<b>V</b>	<b>Analyse de données : régression linéaire et méthodes factorielles</b> <b>659</b>	
<b>22</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>661</b>
<b>23</b>	<b>Régression linéaire</b> . . . . .	<b>663</b>
1	Régression linéaire simple . . . . .	663
1.1	Notations et objectifs . . . . .	663
1.2	La méthode des moindres carrés . . . . .	666
1.3	Qualité de la régression . . . . .	668
1.4	Interprétation . . . . .	673
1.5	Aspects probabilistes du modèle de la régression linéaire simple . . . . .	676
2	Régression linéaire multiple . . . . .	677
2.1	Notations et objectifs . . . . .	677
2.2	Coefficient de détermination ajusté . . . . .	682

2.3	Exemple d'interprétation . . . . .	684
<b>24</b>	<b>A.C.P. : aspects théoriques</b>	<b>687</b>
1	Approche intuitive de l'A.C.P. : objectifs et intérêt . . . . .	687
2	Notations et conventions . . . . .	692
2.1	Notations liées à l'A.C.P. . . . .	692
2.2	Notations liées aux calculs de statistique élémentaire . . . . .	692
2.3	Inertie d'un nuage de points . . . . .	693
2.4	Choix d'une origine : centrage des données . . . . .	694
2.5	Le problème des unités : réduction des données . . . . .	695
2.6	A.C.P. normée et matrice des corrélations . . . . .	696
3	Projections du nuage des individus . . . . .	698
3.1	Inertie totale du nuage des individus . . . . .	698
3.2	Inertie selon un axe du nuage des individus . . . . .	699
3.3	Inertie du nuage des individus par rapport à un plan . . . . .	702
3.4	Axes et plans factoriels ou principaux . . . . .	702
3.5	Inertie expliquée par rapport à un axe ou un plan . . . . .	703
3.6	Contribution des axes à l'inertie . . . . .	703
3.7	Projections du nuage des individus . . . . .	703
3.8	Qualités de représentation des projections . . . . .	704
3.9	Contributions d'un individu à la formation d'un axe factoriel . . . . .	707
4	Projections du nuage des variables . . . . .	709
4.1	Distance entre variables . . . . .	709
4.2	Conséquence de la réduction sur les variables . . . . .	710
4.3	Lien entre la proximité géométrique et la corrélation . . . . .	710
4.4	Projections du nuage des variables . . . . .	711
4.5	Définition des composantes principales . . . . .	712
<b>25</b>	<b>Analyse en composantes principales</b>	<b>713</b>
1	Conseils généraux pour l'interprétation . . . . .	713
1.1	Nombres de plans factoriels à étudier . . . . .	713
1.2	Les variables et l'effet taille . . . . .	714
1.3	Les individus . . . . .	715
1.4	Individus et variables supplémentaires . . . . .	717
2	Étude d'un exemple . . . . .	717
2.1	Les données . . . . .	717
2.2	Les valeurs propres et le choix du nombre d'axe factoriel . . . . .	718
2.3	Études des variables et des composantes principales . . . . .	720
2.4	Étude des individus . . . . .	723
<b>26</b>	<b>Analyse factorielle des correspondances</b>	<b>727</b>
1	Introduction . . . . .	727
1.1	Les données et le champ d'application . . . . .	727
1.2	Le test d'indépendance . . . . .	728
2	Aspects théoriques . . . . .	731
2.1	La transformation des données . . . . .	732
2.2	Interprétation géométrique et métrique utilisée . . . . .	732

2.3	Le rôle de l'A.C.P . . . . .	734
3	Aspects pratiques : aide à l'interprétation . . . . .	735
3.1	Généralités . . . . .	735
3.2	Les représentations graphiques . . . . .	736
3.3	Les valeurs propres . . . . .	737
3.4	Les contributions et les $\cos^2$ . . . . .	737
3.5	Interprétation des proximités . . . . .	738
4	Exemple . . . . .	739
4.1	Les données et le contexte . . . . .	739
4.2	Le test d'indépendance . . . . .	740
4.3	Les valeurs propres et le nombre d'axes factoriels . . . . .	741
4.4	Les qualités de représentation et les contributions relatives . . . . .	741
4.5	Les représentations graphiques . . . . .	741
<b>27</b>	<b>Analyse des correspondances multiples</b>	<b>745</b>
1	Introduction, les données et le champ d'application . . . . .	745
2	Quelques aspects théoriques . . . . .	746
2.1	La transformation des données . . . . .	746
2.2	Le rôle de l'analyse factorielle des correspondances . . . . .	748
3	Aspects pratiques : aide à l'interprétation . . . . .	748
3.1	Généralités . . . . .	748
3.2	Inertie du nuage des points colonnes (les modalités) . . . . .	748
3.3	Les valeurs propres . . . . .	749
3.4	Représentations simultanées des modalités et des individus . . . . .	749
4	Exemple . . . . .	750
4.1	Les données et le contexte . . . . .	750
4.2	Les valeurs propres et le nombre d'axes factoriels . . . . .	750
4.3	Les qualités de représentation et les contributions relatives . . . . .	751
4.4	Étude du premier plan factoriel . . . . .	753
<b>VI</b>	<b>Annexes et bibliographie</b>	<b>759</b>
<b>A</b>	<b>Notions de calcul différentiel</b>	<b>761</b>
1	Notions de calcul différentiel pour les champs scalaires . . . . .	761
1.1	Champ scalaire . . . . .	761
1.2	Développement limité à l'ordre 1 . . . . .	762
1.3	Dérivées partielles premières . . . . .	764
1.4	Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	765
1.5	Dérivées partielles secondes . . . . .	765
1.6	Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ . . . . .	766
1.7	Théorème de Schwarz . . . . .	766
1.8	Plan tangent . . . . .	766
1.9	Gradient d'un champ scalaire . . . . .	766
2	Divergence et rotationnel d'un champ vectoriel . . . . .	770
2.1	Champ vectoriel . . . . .	770
2.2	Divergence d'un champ de vecteurs . . . . .	770



2.3	Rotationnel d'un champ vectoriel . . . . .	770
3	Normale à un domaine et dérivée normale . . . . .	771
4	Théorème de Green-Ostrogradski ou formule de la divergence . . . . .	772
5	Opérateurs différentiels . . . . .	773
6	Une formule d'intégration issue de la formule de la divergence . . . . .	774
<b>B</b>	<b>Espaces fonctionnels</b> . . . . .	<b>775</b>
1	Espace de fonctions à décroissance rapide, à croissance lente . . . . .	775
1.1	Espace de fonctions à <i>décroissance rapide</i> . . . . .	775
1.2	Espaces de fonctions à <i>croissance lente</i> . . . . .	776
2	Espaces de fonctions régulières au sens classique . . . . .	776
2.1	Espaces de classe $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$ . . . . .	776
2.2	Inclusions entre les espaces $\mathcal{C}^k$ . . . . .	776
2.3	Espace des fonctions test $\mathcal{D}$ et espace de Schwartz $\mathcal{S}$ . . . . .	776
2.4	Espace des fonctions test $\mathcal{D}$ . . . . .	777
2.5	Espace de Schwartz $\mathcal{S}$ . . . . .	777
3	Espaces de fonctions a priori sans régularité . . . . .	778
3.1	Introduction . . . . .	778
3.2	Fonctions intégrables, localement intégrables et de carré intégrable . . . . .	779
3.3	Fonctions égales <i>presque partout</i> . . . . .	779
3.4	Espaces de Lebesgue . . . . .	780
3.5	Exemple de fonctions de $L^1$ , $L^1_{loc}$ et $L^2$ . . . . .	781
3.6	Lien entre les éléments des espaces $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	781
4	Espaces de fonctions régulières au sens faible . . . . .	782
4.1	Dérivation au sens faible . . . . .	782
4.2	Digression historique . . . . .	783
4.3	Espaces de Sobolev . . . . .	783
<b>C</b>	<b>Espaces euclidiens</b> . . . . .	<b>787</b>
1	Produit scalaire . . . . .	788
1.1	Définition . . . . .	788
1.2	Produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ , $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . . . . .	788
1.3	Autres produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ , $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . . . . .	789
2	Norme euclidienne . . . . .	789
3	Distances . . . . .	790
4	Angle orienté entre deux vecteurs non nuls . . . . .	791
5	Projection sur une droite vectorielle . . . . .	791
<b>D</b>	<b>Structure hilbertienne</b> . . . . .	<b>793</b>
1	Espace vectoriel de Hilbert . . . . .	793
1.1	Complétude . . . . .	793
1.2	Définition d'un espace de Hilbert . . . . .	794
1.3	Base hilbertienne . . . . .	794
2	Espaces de Hilbert utiles . . . . .	794
3	Espaces de Lebesgue et fonctions égales <i>presque partout</i> . . . . .	796

---

<b>E</b>	<b>Convolution</b>	<b>797</b>
1	Convolution des suites . . . . .	797
1.1	Définition . . . . .	797
1.2	Propriétés élémentaires . . . . .	797
1.3	Quelques conditions d'existence . . . . .	798
1.4	Expression du produit de deux séries numériques . . . . .	798
2	Convolution des fonctions . . . . .	798
2.1	Définition . . . . .	798
2.2	Exemple . . . . .	799
2.3	Propriétés élémentaires . . . . .	800
2.4	Quelques conditions suffisantes d'existence . . . . .	801
2.5	Expression du produit de deux intégrales . . . . .	802
<b>F</b>	<b>Principe des travaux virtuels</b>	<b>803</b>
<b>G</b>	<b>Formule d'inversion pour la transformation de Fourier</b>	<b>805</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>809</b>
	<b>Index</b>	<b>812</b>