

21 Mathématiques & Applications 23

Marie Duflo

# Algorithmes stochastiques



MAI



Springer

## TABLE DES MATIERES

### Chapitre 1. MODELES MARKOVIENS

#### *Tension et stabilité*

I. Introduction	3
II. Stabilité de modèles linéaires	3
II.1. Convergence en loi sur un espace polonais	3
II.2. Rayon spectral	5
II.3. Modèle autorégressif et fractale	6
Exercices 1.II	9
III. Tension de modèles non linéaires	11
III.1. Martingale discrète	11
III.2. Borne supérieure des maxima	14
III.3. Contraction conditionnelle	15
Exercices 1.III	17
IV. Chaînes de Markov stables	18
IV.1. Chaîne de Markov	18
IV.2. Probabilité invariante	20
IV.3. Chaîne de Markov stable	22
IV.4. Vitesse de convergence vers une loi stationnaire	25
IV.5. Récurrence	29
Exercices 1.IV	30
V. Diffusions stables	33
V.1. Mouvement Brownien	33
V.2. Equation différentielle stochastique (EDS)	35
V.3. Diffusion homogène	37
V.4. Probabilité invariante d'une diffusion homogène	38
V.5. Diffusion géométriquement récurrente	39
Exercices 1.V	43
Références du chapitre 1	44

### Chapitre 2. DES ALGORITHMES STOCHASTIQUES : POURQUOI ? COMMENT ?

#### *Exemples et outils de base*

I. De l'analyse numérique aux algorithmes stochastiques	47
I.1. Passages à un niveau et minima	47
I.2. Passage d'une fonction à un niveau fortement attractif	48
I.3. Minima d'un potentiel	53
II. Premiers résultats déterministes de convergence	54
II.1. Théorème de Robbins-Siegmund déterministe	54
II.2. Algorithme déterministe à pas décroissant	55
II.3. Moyennisation de la perturbation	57
Exercices 2.II	58
III. Méthode de Robbins-Monro	59
III.1. Théorème de Robbins-Siegmund	59
III.2. Algorithme stochastique à pas décroissant	60
III.3. Méthode de Robbins-Monro	61
Exercices 2.III	63



IV. Estimation et prédiction	64
IV.1. Estimateurs du minimum de contraste	64
IV.2. Estimateurs récursifs	65
IV.3. Estimateurs du minimum de contraste approchés	67
V. Neurones	73
V.1. Des neurones humains aux réseaux logiques	73
V.2. Utilisation du principe des sommes pondérées	74
V.3. Apprentissage selon Kohonen	77
Exercices 2.V	80
Références du chapitre 2	81

### Chapitre 3. CONVERGENCE D'ALGORITHMES A PAS DECROISSANTS

#### *Propriétés presque sûres - La méthode de l'EDO*

I. Introduction	86
I.1. Cadre étudié	86
I.2. Attraction, répulsion, cycle	87
I.3. Méthode de Lyapounov pour l'EDO	91
I.4. Flot et attracteur	93
II. Critères de Lyapounov de stabilisation presque sûre	96
II.1. Un critère déterministe de Lyapounov	96
II.2. Stabilisation d'un algorithme stochastique	97
III. La méthode de l'équation différentielle ordinaire	99
III.1. Description de la méthode	99
III.2. Retour sur Robbins-Monro	102
III.3. Enchaînement des valeurs d'adhérence	103
III.4. Accompagnement de l'algorithme par l'EDO	109
Exercices 3.III	115
IV. Pièges	116
IV.1. Comment une excitation aléatoire évite les pièges	116
IV.2. Suite régressive	117
IV.3. Piège répulsif	120
IV.4. Piège régulier général	124
IV.5. Quelques pièges plus compliqués	126
Exercices 3.IV	129
V. Perturbation markovienne	131
V.1. Petite perturbation markovienne	131
V.2. Perturbation par une chaîne sur un espace fini	132
V.3. Estimation d'un modèle de Gibbs paramétrique	136
Références du chapitre 3	139

### Chapitre 4. CIBLES ATTRACTIVES

#### *Vitesses de convergence en loi - La méthode de l'EDS*

I. Tension	144
I.1. Stabilisation d'une suite réelle	144
I.2. Pas réguliers	145
I.3. Critères de tension	146
Exercice 4.I	149
II. La méthode de l'équation différentielle stochastique	150
II.1. Convergence en loi de processus continus	150

II.2. Méthode de l'EDS pour un algorithme fortement perturbé	151
III. Vitesse de convergence vers une cible attractive	160
III.1. Cible attractive presque régulière	160
III.2. Efficacité	165
III.3. Moyennisation de l'algorithme	168
Exercices 4.III	171
Références du chapitre 4	173

## Chapitre 5. VITESSES EN GRANDES DEVIATIONS

Introduction	176
I. Principe de grandes déviations	177
I.1. Taux et principes de grandes déviations	177
I.2. Grandes déviations pour des lois de Gibbs	179
I.3. Propriétés simples des grandes déviations	181
I.4. Fonctions de taux usuelles sur $\mathbb{R}^d$	183
I.5. Fonctions de taux usuelles pour les processus cad-lag	186
Exercices 5.I	189
II. Tension exponentielle	191
II.1. Critère de compacité en grandes déviations	191
II.2. Grandes déviations sur $\mathbb{R}^d$	197
II.3. Grandes déviations pour des processus continus	198
II.4. Grandes déviations pour des processus cad-lag	202
II.5. Principe de grande déviations uniformes	206
III. Diffusions faiblement perturbées	208
III.1. Mouvement Brownien	208
III.2. Diffusions à petites perturbations	208
IV. Grandes déviations pour des algorithmes	215
IV.1. PGD pour une suite régressive	215
IV.2. PGD pour un algorithme à pas fixe ou décroissant	219
IV.3. Convergence vers un attracteur asymptotiquement stable	223
Exercices 5.IV	225
Références du chapitre 5	227

## Chapitre 6. RECUIT SIMULE SUR UN ESPACE FINI

I. Algorithmes markoviens et recuit sur un espace fini	231
I.1. Loi de Gibbs	231
I.2. Chaînes de Markov avec effet moyen de Gibbs	233
I.3. Machine de Boltzmann	237
I.4. Algorithmes génétiques	241
Exercices 6.I	244
II. Etude précise des chaînes de Markov sur un espace fini	246
II.1. Algèbre linéaire et chaînes de Markov	246
II.2. Graphes et chaînes de Markov	247
II.3. Distances entre probabilités	249
II.4. Chaîne de Markov récurrente réversible	250
II.4. Chaînes réversibles associées à une chaîne récurrente	253
Exercices 6.II	254
III. Famille exponentielle de chaînes de Markov	255
III.1. Famille exponentielle irréductible	255

III.2. Famille exponentielle réversible ou réversibilisée	258
III.3. Exemples	262
Exercices 6.III	263
IV. Recuit simulé	264
IV.1. Présentation	264
IV.2. Recuit simulé par étapes	267
IV.3. Modèle markovien exponentiel à paramètre croissant	268
Exercices 6.IV	271
Références du chapitre 6	272

## CHAPITRE 7. RECUIT SIMULE VECTORIEL

I. Algorithme vectoriel markovien	277
Exercices 7.I.	279
II. Diffusion du gradient	280
II.1. Potentiel et loi de Gibbs	280
II.2. Diffusion à grande dérive	282
II.3. Grandes déviations pour l'EDS du gradient à petite perturbation	282
III. Recuit simulé en temps continu	287
III.1. Diffusion du gradient à perturbation lentement décroissante	287
III.2. Tension	289
III.3. Diffusion de dérive lentement croissante	290
III.4. Gradient stochastique avec recuit	292
III.5. Vitesse de convergence en loi du recuit simulé	295
Exercice 7.III	300
IV. Algorithme du gradient avec recuit (temps discret)	301
Exercices 7.IV	308
Références du chapitre 7	309

## NOTATIONS ET CONVENTIONS

311

## INDEX

313



La Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), fondée en 1983, s'est fixé comme objectif la promotion des mathématiques appliquées. Dans cet esprit, la SMAI a créé une collection d'ouvrages Mathématiques & Applications, dont voici un nouveau numéro.

Le but de cette collection est d'édition des textes de niveau 3ème cycle universitaire ou de dernière année d'école d'ingénieurs. Les lecteurs concernés sont donc des étudiants, mais également des chercheurs et ingénieurs qui veulent s'initier aux méthodes et aux résultats des mathématiques appliquées. Certains ouvrages auront ainsi une vocation purement pédagogique alors que d'autres pourront constituer des textes de référence.

La principale source des manuscrits réside dans les très nombreux cours qui sont enseignés en France, compte tenu de la variété des Diplômes d'Études Approfondies (D.E.A.), des Diplômes d'Études Supérieures Spécialisées (D.E.S.S.) ou des options de mathématiques appliquées dans les écoles d'ingénieurs. Mais ce n'est pas l'unique source: certains textes pourront avoir une autre origine.

Parmi les sujets que la collection souhaite aborder, figurent les suivants:

Analyse numérique – Analyse stochastique – Probabilités appliquées – Équations aux dérivées partielles – Automatique – Optimisation – Recherche opérationnelle – Statistique et analyse des données – Modélisation (en mécanique, en économie...) – Infographie et Traitement d'images – Codage et cryptographie – Calcul formel – Calcul parallèle...

*Marie Duflo*

## **Algorithmes stochastiques**

Au cours des dernières années, les algorithmes stochastiques se sont beaucoup développés tant sur le plan de l'analyse mathématique que vers diverses applications: automatique, images, neurones, statistique...

Ce livre présente les divers types d'algorithmes stochastiques, illustrés par des exemples: algorithmes à pas décroissant, algorithmes markoviens, recuit simulé. Un large panorama des outils mathématiques requis et de leurs progrès récents est exploré.

Ingénieurs à la recherche d'un éclairage mathématique sur leur pratique et mathématiciens intéressés par un terrain où les problèmes ouverts restent nombreux découvriront la variété et l'actualité de ce sujet. Mais ce livre est avant tout destiné à attirer vers ce domaine quelques apprentis chercheurs.



9 783540 606994

ALGORITHMES STOCHA

028/2000

00270

280700

0001

ISBN N 3-540-60699-8



9 783540 606994

ISBN 3-540-60699-8