

LES GRANDS CLASSIQUES GAUTHIER-VILLARS

Émile BOREL

LEÇONS
SUR LES
SÉRIES DIVERGENTES

DEUXIÈME ÉDITION



ÉDITIONS
JACQUES GABAY

TABLE DES MATIÈRES

| | Pages. |
|--|--------|
| PRÉFACE DE LA DEUXIÈME ÉDITION..... | V |
| PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION..... | VI |
| INDEX..... | VII |
| INTRODUCTION. — <i>Historique et généralités</i> | 1 |
| Les séries divergentes avant Abel et Cauchy..... | 1 |
| Les travaux de Cauchy..... | 10 |
| Les séries divergentes depuis Cauchy..... | 12 |
| CHAPITRE I. — <i>Les séries asymptotiques</i> | 21 |
| Cauchy et la série de Stirling..... | 21 |
| La théorie de H. Poincaré..... | 23 |
| Extension au champ complexe..... | 34 |
| Applications aux équations différentielles..... | 36 |
| CHAPITRE II. — <i>Les fractions continues et la théorie de Stieltjes</i> | 54 |
| La conversion des séries divergentes en fractions continues..... | 54 |
| Le Mémoire de Stieltjes..... | 63 |
| La généralisation de la théorie de Stieltjes..... | 72 |
| CHAPITRE III. — <i>La théorie des séries sommables</i> | 87 |
| Quelques remarques préliminaires..... | 87 |
| Incursion dans la théorie des séries trigonométriques..... | 88 |
| Méthodes basées sur les moyennes : sommations de Cesàro et de Hölder..... | 92 |
| Étude comparée de diverses méthodes de sommation par moyennes..... | 112 |
| La méthode de sommation exponentielle..... | 122 |
| Application aux équations différentielles..... | 148 |
| CHAPITRE IV. — <i>Les séries sommables et le prolongement analytique</i> | 152 |
| Le polygone de sommabilité..... | 152 |
| Les généralisations simples de la méthode exponentielle..... | 161 |
| La recherche des points singuliers..... | 168 |
| CHAPITRE V. — <i>Les développements en séries de polynômes</i> | 189 |
| Le théorème de Mittag-Leffler..... | 189 |
| L'emploi de l'intégrale de Cauchy..... | 197 |
| Les développements de Mittag-Leffler et la théorie générale des séries divergentes. — Conclusions..... | 209 |

| | |
|--|-----|
| CHAPITRE VI (Appendice). — <i>Le développement moderne de la théorie des séries divergentes</i> | 216 |
| Le principe des facteurs de convergence..... | 216 |
| Les séries de Dirichlet et la méthode de M. Marcel Riesz..... | 227 |
| Les séries de facultés, l'intégrale de Laplace-Abel et la sommation exponentielle..... | 234 |
| Les fonctions quasi-analytiques et les séries divergentes..... | 245 |
| NOTES..... | 251 |
| Sur l'efficacité comparée des méthodes de sommation par moyennes au point de vue du prolongement analytique. — Note de M. Georges Bouligand..... | 251 |
| Exercices et résultats divers par M. Georges Bouligand.... | 255 |





ÉDITIONS JACQUES GABAY

RÉIMPRESSIONS

Collection
« LES GRANDS CLASSIQUES
GAUTHIER-VILLARS »

Paul APPELL

- *Traité de Mécanique rationnelle*
- Tome I, Statique - Dynamique du point*
- Tome II, Dynamique des systèmes*
Mécanique analytique
- Tome III, Équilibre et mouvement des milieux continus*
- Tome IV, I, Figures d'équilibre d'une masse homogène*
en rotation
- II, Les figures d'équilibre d'une masse hétérogène*
en rotation
Figures de la Terre et des planètes
- Tome V, Éléments de calcul tensoriel*
Applications géométriques et mécaniques

Ludwig BOLTZMANN

- *Leçons sur la théorie des gaz*

Emile BOREL

- *Leçons sur les séries divergentes*

Louis de BROGLIE

- *Ondes et mouvements*

Elie CARTAN

- *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*
- *Leçons sur la géométrie projective complexe*
- *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*
- *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle, traitées par la méthode du repère mobile*

Camille JORDAN

- *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique (3 vol.)*
- *Traité des substitutions et des équations algébriques.*

Henri LEBESGUE

- *Leçons sur les constructions géométriques*
- *Les Coniques*

James Clerk MAXWELL

- *Traité d'Électricité et de Magnétisme*

Julius PETERSEN

- *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de géométrie*

Henri POINCARÉ

- *Calcul des probabilités*
- *La Mécanique nouvelle*
Conférence (1909), Mémoire (1905) et Note (1905) sur
la Théorie de la Relativité
- *Théorie du potentiel newtonien*
- *Théorie des tourbillons*
- *Théorie mathématique de la lumière*
- Tome I,*
- Tome II, Nouvelles études sur la diffraction*
Théorie de la dispersion de Helmholtz
- *Figures d'équilibre d'une masse fluide*
- *Électricité et Optique*

Paul TANNERY

- *Pour l'histoire de la science hellène*
- *La géométrie grecque*

François TISSERAND

- *Traité de Mécanique céleste*
Tome I, Perturbation des planètes d'après la méthode
de la variation des constantes arbitraires
- Tome II, Théorie de la figure des corps célestes et de leur*
mouvement de rotation
- Tome III, Exposé d'ensemble des théories relatives au*
mouvement de la Lune
- Tome IV, Théorie des satellites de Jupiter et de Saturne*
Perturbations des petites planètes
- *Leçons sur la détermination des orbites,*
avec une préface de H. Poincaré

Hors collection

Léon BRILLOUIN

- *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*
- *La science et la théorie de l'information*

Augustin-Louis CAUCHY

- *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*
Analyse algébrique

Joseph FOURIER

- *Théorie analytique de la chaleur*

Jacques HADAMARD

- *Leçons de géométrie élémentaire (2 vol.)*

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- *Textes d'Ampère, Cauchy, Lagrange, Laplace,*
Legendre, Monge, Poisson ...

Stephen C. KLEENE

- *Logique mathématique*

Trajan LALESCO

- *La géométrie du triangle*

A. LIAPOUNOFF

- *Problème général de la stabilité du mouvement*

André LICHNEROWICZ

- *Éléments de calcul tensoriel*

Ernst MACH

- *La Mécanique*
Exposé historique et critique de son développement

John von NEUMANN

- *Les fondements mathématiques de la Mécanique*
quantique

Henri POINCARÉ

- *Cours d'Astronomie générale de l'École Polytechnique*

George POLYA

- *Comment poser et résoudre un problème*

Erwin SCHRÖDINGER

- *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire*

Diffusion-Distribution : JACQUES GABAY

151 bis, rue Saint-Jacques 75005 PARIS

Téléphone : (1) 43 54 64 64 - Télex : 203 521 F

ISBN 2-87647-009-8

ISSN 0989-0602