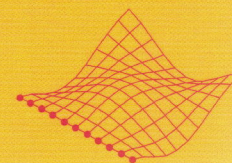
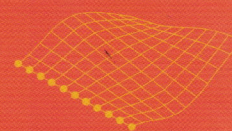
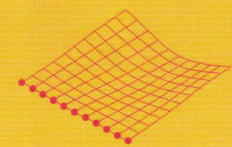
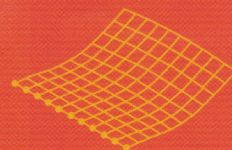
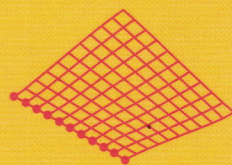
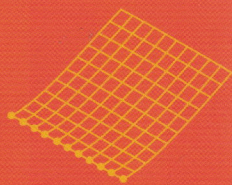


JEAN-CHARLES CRAVEUR

# MODÉLISATION DES STRUCTURES, CALCUL PAR ÉLÉMENTS FINIS AVEC PROBLÈMES CORRIGÉS

2<sup>e</sup> édition

MASSON 





Ce logo a pour objet d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, tout particulièrement dans le domaine universitaire, le développement massif du « photocopillage ».

Cette pratique, qui s'est généralisée, notamment dans les établissements d'enseignement, provoque une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons que la reproduction et la vente sans autorisation, ainsi que le recel, sont passibles de poursuites. Les demandes d'autorisations de photocopier doivent être adressées à l'éditeur ou au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays.

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur, est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4. L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle).

© Masson, Paris, 1997

ISBN : 2-225-83235-8



# TABLE DES MATIERES

Avant-propos .....	XI
--------------------	----

## Première partie : Mécanique des milieux continus et éléments finis

<b>1 Rappels de mécanique</b> .....	1
1.1 Vecteur des contraintes .....	1
1.2 Tenseur des contraintes .....	2
1.3 Equations d'équilibre .....	3
1.4 Tenseur des déformations .....	7
1.5 Relations de compatibilité .....	8
1.6 Relations contraintes-déformations .....	9
1.7 Problèmes d'élasticité .....	11
<b>2 Critères de limite élastique</b> .....	13
2.1 Problème .....	13
2.2 Critères .....	13
2.2.1 Critères mono-axiaux .....	13
2.2.2 Critère de Tresca .....	13
2.3.3 Critère de Von Mises .....	14
<b>3 Problèmes particuliers d'élasticité</b> .....	17
3.1 Etat plan de contrainte .....	17
3.2 Etat plan de déformation .....	18
3.3 Axisymétrie .....	19
3.4 Thermo-élasticité .....	20
<b>4 Approche variationnelle</b> .....	23
4.1 Définitions .....	23
4.1.1 Conditions aux limites .....	23
4.1.2 Champ de déplacement cinématiquement admissible .....	23
4.1.3 Méthodes d'approximation .....	24
4.1.4 Energie potentielle totale .....	25
4.1.5 Méthode de Ritz et éléments finis .....	27
4.2 Exemples .....	27
4.2.1 Résolution analytique .....	28
4.2.2 Solutions numériques approchées .....	29
<b>5 Formulation d'un élément</b> .....	33
5.1 Introduction .....	33
5.2 Famille de Lagrange .....	35
5.3 Famille de Serendip .....	36
5.4 Eléments isoparamétriques .....	38
5.5 Intégration numérique .....	39
5.6 Triangles ou quadrangles ? .....	41
5.7 Matrice de raideur .....	44

<b>6 Déroulement d'un calcul statique linéaire</b> .....	49
6.1 Introduction.....	49
6.2 Déroulement du calcul.....	50
6.2.1 Traduction des données utilisateur en données éléments finis.....	50
6.2.2 Génération des matrices élémentaires.....	50
6.2.3 Assemblage.....	51
6.2.4 Inversion et traitement des fixations.....	52
6.2.5 Détermination des déplacements.....	54
6.2.6 Calcul des contraintes.....	54
<b>7 Validation des résultats</b> .....	55
7.1 Vérifications élémentaires.....	55
7.2 Conditionnement numérique.....	56
7.3 Pivots nuls et fixations.....	57
7.3.1 Introduction.....	57
7.3.2 Pivots nuls.....	59
7.4 Pivots négatifs.....	64
7.5 Equilibre.....	64
<b>8 Les contraintes</b> .....	67
8.1 Introduction.....	67
8.2 Contraintes moyennes ou extrapolées ? Discontinues ou lissées ?.....	68
8.3 Outils de post-traitement.....	71
<b>Deuxième partie : Bibliothèque d'éléments finis</b>	
<b>9 Eléments de barre</b> .....	75
9.1 Introduction.....	75
9.2 Élément fini de barre.....	76
<b>10 Eléments de membrane</b> .....	79
10.1 Introduction.....	79
10.2 Eléments finis de membrane.....	81
10.3 Premier exemple.....	82
10.4 Deuxième exemple.....	83
<b>11 Eléments axisymétriques</b> .....	91
11.1 Introduction.....	91
11.2 Eléments finis axisymétriques.....	92
11.2.1 Volumes.....	93
11.2.2 Coques.....	93
11.2.3 Autres éléments.....	94
11.3 Premier exemple.....	94
11.4 Deuxième exemple.....	95
<b>12 Eléments de coque</b> .....	97
12.1 Introduction.....	97
12.2 Hypothèses de la théorie des coques.....	98
12.3 Relations moments-courbures.....	102
12.4 Equations d'équilibre et conditions aux limites.....	104
12.5 Hypothèses cinématiques.....	106
12.6 Eléments finis de coque.....	108
12.6.1 Eléments de Kirchhoff.....	109

12.6.2	Eléments de Mindlin.....	110
12.6.3	Connexion de coques.....	111
12.6.4	Coques planes, coques gauches.....	112
12.7	Post-traitement.....	114
<b>13</b>	<b>Eléments de poutre.....</b>	<b>117</b>
13.1	Introduction.....	117
13.2	Eléments finis de poutre.....	120
13.2.1	Poutres élancées, non déformables à l'effort tranchant.....	124
13.2.2	Poutres peu élancées, déformables à l'effort tranchant.....	125
13.2.3	Poutres « universelles ».....	126
13.3	Modélisation.....	128
<b>14</b>	<b>Eléments de volume.....</b>	<b>131</b>
14.1	Introduction.....	131
14.2	Eléments finis de volume.....	132
14.3	Exemple.....	134
<b>Troisième partie : Modélisations et techniques particulières</b>		
<b>15</b>	<b>Raccords d'éléments.....</b>	<b>137</b>
15.1	Introduction.....	137
15.2	Raccord membrane-membrane.....	137
15.3	Raccord poutre-coque.....	140
15.4	Raccord poutre-coque perpendiculaires.....	141
15.4.1	Maillages indépendants.....	141
15.4.2	Maillages adaptés.....	142
15.5	Raccord coque-volume.....	144
<b>16</b>	<b>Techniques de réduction.....</b>	<b>147</b>
16.1	Introduction.....	147
16.2	Modèle et maillage.....	148
16.3	Super-éléments.....	149
16.4	Technique de Fourier.....	149
16.5	Symétrie cyclique.....	150
16.6	Conditions de symétrie.....	150
<b>17</b>	<b>Non linéarités.....</b>	<b>153</b>
17.1	Introduction.....	153
17.2	Jeux et contacts.....	155
17.3	Raideur géométrique.....	156
<b>18</b>	<b>Structures composites.....</b>	<b>159</b>
18.1	Introduction.....	159
18.2	Relations contraintes-déformations.....	161
18.3	Eléments finis « composites ».....	162
18.4	Homogénéisation.....	163
18.5	Calcul et post-traitement.....	166
18.6	Marges de sécurité.....	167
18.7	Modélisation.....	168
18.8	Matériau sandwich.....	172
18.9	Contraintes de cisaillement dans les coques.....	175

<b>19 Analyse modale</b> .....	177
19.1 Introduction.....	177
19.2 Modes propres et fréquences propres.....	178
19.3 Orthogonalité des modes propres.....	179
19.4 Modes rigides.....	180
19.5 Matrices de masse .....	181
19.6 Inertie en rotation et énergie cinétique.....	185
19.7 Vibrations transversales des poutres élancées.....	186
19.8 Éléments déformables à l'effort tranchant .....	189
19.9 Assemblage de la matrice de masse .....	190
19.10 Exemple .....	191
<b>20 Résolution du problème aux valeurs propres</b> .....	193
20.1 Introduction.....	193
20.2 Méthode de Jacobi .....	195
20.3 Méthodes de la puissance et de multi-itération .....	195
20.4 Méthodes de Lanczos et de Lanczos par blocs .....	197
20.5 Condensation de Guyan .....	198
20.6 Raideur infinie .....	203
<b>21 Réponse dynamique</b> .....	205
21.1 Introduction.....	205
21.2 Amortissement structural .....	206
21.3 Réponse transitoire par superposition modale .....	207
21.3.1 <i>Equations normales</i> .....	207
21.3.2 <i>Hypothèse de Rayleigh</i> .....	208
21.3.3 <i>Hypothèse de Basile</i> .....	209
21.3.4 <i>Résolution des équations normales</i> .....	210
21.3.5 <i>Troncature de la base modale</i> .....	210
21.3.6 <i>Choix du pas de temps</i> .....	211
21.4 Réponse transitoire par intégration directe.....	212
21.4.1 <i>Principe et schémas d'intégration</i> .....	212
21.4.2 <i>Schéma de Newmark</i> .....	214
21.4.3 <i>Stabilité du schéma</i> .....	215
21.4.4 <i>Choix du pas de temps</i> .....	216
21.4.5 <i>Méthode <math>\alpha</math></i> .....	216
21.5 Réponse harmonique.....	217
21.6 Excitation par les supports .....	218
<b>22 Super-éléments</b> .....	221
22.1 Introduction.....	221
22.2 Statique linéaire.....	222
22.2.1 <i>Création</i> .....	222
22.2.2 <i>Utilisation</i> .....	223
22.2.3 <i>Restitution</i> .....	223
22.2.4 <i>Exemple</i> .....	223
22.3 Analyse modale.....	225
22.3.1 <i>Méthode de Guyan</i> .....	225
22.3.2 <i>Signification des modes contraints</i> .....	226
22.3.3 <i>Méthode des modes composants</i> .....	227

## Cinquième partie : Problèmes corrigés

<b>23 Problèmes de barres</b> .....	231
23.1 Données du problème .....	231
23.2 Modèles équivalents.....	233
23.3 Résultats et interprétation.....	235
23.4 Commentaire.....	236
23.5 Autres problèmes du même type.....	236
<b>24 Problèmes de liaison Barres-Poutres</b> .....	239
24.1 Données du problème .....	239
24.2 Premier modèle .....	240
24.3 Deuxième modèle .....	242
24.4 Troisième modèle.....	242
24.5 Câble .....	242
24.6 Autres problèmes .....	244
<b>25 Problème de compression d'une tôle</b> .....	247
25.1 Problème de la tôle appuyée .....	247
25.2 Choix de l'élément.....	248
25.3 Conditions aux limites et mise en charge.....	249
25.4 Pivots nuls.....	251
25.5 Contraintes .....	253
25.6 Problème de la tôle encastrée.....	255
<b>26 Problème de la plaque trouée</b> .....	259
26.1 Données du problème .....	259
26.2 Modèle .....	260
26.3 Chargement et contraintes.....	261
26.4 Maillages.....	263
26.4.1 Maillage transfini.....	263
26.4.2 Mailleurs triangulaires.....	265
26.4.3 Mailleurs mixtes en surfacique.....	265
26.4.4 Lissage.....	266
26.5 Résultats .....	266
<b>27 Problème de joint torique</b> .....	271
27.1 Données du problème .....	271
27.2 Modèle axisymétrique.....	271
27.2.1 Modèle.....	271
27.2.2 Résultats .....	272
27.3 Modèle tridimensionnel .....	274
<b>28 Problème avec précontrainte</b> .....	277
28.1 Données du problème .....	277
28.2 Modèle axisymétrique.....	278
28.3 Calcul linéaire .....	279
28.4 Calcul non linéaire .....	279
28.5 Autres problèmes .....	282
<b>29 Problème du réglel dans le champ de gravité</b> .....	283
29.1 Données du problème et modèle.....	283
29.2 Résultats et interprétation.....	284
29.3 Hypothèses linéaires .....	285

<b>30 Problème de flexion d'un panneau composite</b> .....	289
30.1 Préliminaire et données du problème.....	289
30.2 Modèles et résultats.....	289
30.2.1 Solutions analytiques pour les poutres.....	289
30.2.2 Modèle poutre.....	290
30.2.3 Modèle coque.....	292
30.3 Panneau composite.....	292
30.3.1 Solution analytique.....	293
30.3.2 Modèles.....	294
30.3.3 Matrice de Hooke.....	298
<b>31 Problème de panneau raidi</b> .....	301
31.1 Données du problème et modèles.....	301
31.2 Etat plan de contrainte.....	302
31.3 Volumes.....	303
31.4 Coques.....	305
31.5 Coques et volumes.....	306
31.6 Coques et poutres.....	307
<b>32 Problème thermomécanique</b> .....	309
32.1 Introduction.....	309
32.2 membrane appuyée.....	311
32.2.1 Charge thermique seule.....	311
32.2.2 Charge thermique et compression.....	312
32.2.3 Charge thermique et traction.....	313
32.2.4 Tôle encastree.....	313
32.2.5 Température non uniforme.....	314
32.3 Autres problèmes.....	315
<b>Bibliographie</b> .....	317
<b>Index</b> .....	321