

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA



INSTITUT D'AERONAUTIQUE ET DES ETUDES SPATIALES  
MEMOIRE DE FIN D'ETUDES POUR L'OBTENTION DU DIPLOME  
MASTER EN AERONAUTIQUE.

OPTION: PROPULSION

THEME

---

CALCUL DE L'ECOULEMENT SUPERSONIQUE DANS LA TUYERE A  
DETENTE CENTREE BIDIMENSIONNELLE ET AXISYMETRIQUE  
SUR L'HYPOTHESE A HAUTE TEMPERATURE

---

FAIT PAR :

LEBDI HAMZA

BOUTALEB AMINA HADJIRA

DIRIGE PAR :

PR ZEBBICHE TOUFIK : PROMOTEUR

ANNEE UNIVERSITAIRE 2012/2013

# ملخص

في هذا المشروع، نريد تطوير برنامج رقمي يسمح بتصحيح التدفق داخل البوق (فوهة) ما فوق الصوتي ذو التمدد المركزي ثنائي البعد وذو التناظر المركزي تحت تطبيق فرضية ونموذج الغاز المثالي حيث  $C_p$  و  $\gamma$  ثابتين باستخدام طريقة الانسجام والمميزات (الخصائص) عند درجة حرارة مرتفعة، وبدرجة حرارة أقل من درجة حرارة الانحلال الجزئيات، حيث شكل البوق معطى. حيث يمكننا الحصول باستعمال طريقة المميزات على تدفق منتظم وموازي مقطع الخروج.

الهدف من هذا العمل هو اثبات أن النموذج المستعمل والمطبق عند استعمال طريقة الانسجام وطريقة المميزات (الخصائص) هو نموذج درجة الحرارة المرتفعة، وأن التدفق عند مقطع الخروج غير منتظم وموازي عند نموذج الغاز المثالي. النتائج المتحصل عليها إذا، التغير في القطر، لكل عدد ماك عند مقطع الخروج، أيضا عند عبور جدار المجرى وطول المجرى التناظري للمجرى، نفس التغير المتحصل عليه عند الضغط، درجة الحرارة، الكثافة (الكتلة الحجمية)، والتصحيح في الدفع. كل هذه الخصائص والمعالم التي نتحصل عليها بدلالة رقم ماك عند مقطع الخروج و  $\gamma$  في الغاز باستعمال نموذج الغاز المثالي، وبدلالة الحرارة البدائية في نموذج درجة الحرارة المرتفعة.

## كلمات المفتاحية:

تدفق فوق صوتي، درجة الحرارة المرتفعة، غاز كالوري كولي غير مثالي، ربط النقاط، معادلة برنتل ماير، طريقة المميزات، البوق ذو التمدد المركزي ثنائي البعد وذو التناظر المركزي، معالم فوق صوتي.

# RÉSUMÉ

Dans ce projet, on veut développer un programme numérique permettant de faire la correction de l'écoulement dans une tuyère supersonique à détente centrée (MLN) bidimensionnelle et axisymétrique dimensionnée sur la base des hypothèses d'un gaz parfait (GP) à  $C_p$  et  $\gamma$  constante en utilisant le modèle des équation de compatibilité et de caractéristique à haut température (HT), inférieur au seuil de dissociation des molécules. La forme de tuyère est donnée. Elle est déterminée en utilisant la méthode des caractéristiques afin de donner un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie.

Le but de ce travail est consisté à prouver que si la méthode de calcul utilisé pour les équations de compatibilité et caractéristique est celui le HT, l'écoulement à la sortie de la tuyère MLN à haut température ne sera plus uniforme à la section de sortie pour la tuyère dimensionnée sur la base de modèle GP. De même l'écoulement à travers la tuyère sera complètement modifié en comparaison avec celui donné par le modèle GP.

Les résultats à trouver sont donc, la variation par le long de rayon, de nombre de Mach dans la section de sortie, ainsi qu'à travers la paroi de la tuyère et le long de l'axe longitudinale de la tuyère. Même variation sera déterminée pour la pression, température, masse volumique. La correction à la poussée sera faite.

Tous ces paramètres et autres peuvent être déterminés en fonction de nombre de Mach  $M_s$  de la section de sortie et le rapport des chaleurs spécifique  $\gamma$  du gaz utilisé pour le modèle GP et en fonction de la température génératrice pour le modèle HT.

## **Mots clés :**

Écoulement supersonique, Haute Température, gaz calorifique imparfait, interpolation, fonction de Prandtl Meyer, Méthode des caractéristiques, Tuyère à Détente Centrée bidimensionnelle et axisymétrique, paramètres supersoniques.

# ABSTRACT

In this project, we want to develop a numerical program allowing to make the correction of the flow in a supersonic Minimum Length Nozzle Design (MLN) two-dimensional dimensioned on the base of assumption of a perfect gas (GP) with constant  $C_p$  and  $\gamma$  by using the model of the equation of compatibility and characteristic at high temperature (HT), lower than the threshold of dissociation of molecules. The shape of conduit is given. It is given by using the method of characteristics in order to give a flow uniform and parallel in the section of exit.

The goal of this work is consisted with proof that if the method of calculating used for the equations of compatibility and characteristic is that the HT, the flow at the exit of conduit MLN at high temperature will not be uniform any more with the section of exit for the conduit dimensioned on the basis of model GP. In the same way the flow through the conduit will be completely modified in comparison with that given by model GP.

The results with found are thus, the variation along ray, of Mach number in the section of exit, like through the wall of the conduit and along the axis longitudinal of the conduit. Even variation will be given for the pressure, temperature, density. The correction with the push will be made.

All these parameterized and others can be given according to Mach number  $M_s$  of the section of exit and the ratio of the specific heats  $\gamma$  of gas used for model GP and according to the generating temperature for model HT.

## **Key Words:**

Supersonic Flow, High Temperature, Calorically Imperfect Gas, Interpolation, Prandtl Meyer Function, Method of Characteristics, Two-dimensional and Axisymmetric Minimum Length Nozzle, Supersonic Parameters.

# REMERCIEMENTS

Avant tout nous tenons à remercier Dieu tout puissant de nous avoir donné cette foi et cette confiance en nous, ainsi que cette volonté et ce courage, pour atteindre cette étape importante de notre vie.

Nous adressons également nos remerciements à notre encadreur Mr ZEBBICHE TOUFIK pour son soutien, ses conseils pertinents et son aide précieuse, ainsi que la confiance qu'il nous a toujours témoignée tout au long de notre projet.

J'exprime mes remerciements aux membres du jury de nous avoir honoré en acceptant de juger notre travail.

Nous tenons à remercier à travers ces quelques lignes les nombreuses personnes qui ont contribué au succès de notre stage et qui, par la confiance, la patience et l'amitié qu'ils ont manifestées à notre égard, nous ont permis d'apprécier pleinement ces deux mois au sein de la base technique (Tassili Airlines).

Nous tenons aussi à témoigner notre sincère gratitude à tous ceux qui nous ont assistés de près ou de loin, par leurs encouragements, leurs conseils et leurs critiques.

MERCI A TOUS MES AMIS DE PROMOTION 2013

**HAMZA & AMINA HADJIRA**

# *Dédicaces*

*D'abord, Je tiens à remercier infiniment mon dieu*

*le tout puissant pour l'aide qu'il m'a apporté à réaliser ce modeste travail,  
ainsi que mon père ABD EL-Kader et ma mère KADIK Fatiha et Abd El-Rahman,*

*Hadjer, Chaima, Abd El-Rezzak, Zoula et Abd El-Rahim et toute ma famille pour le courage  
et le soutien morale durant cette période de réalisation de ce travail.*

*Egalement, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à tous les enseignants qui ont contribué à  
ma formation durant toute cette période de mes études universitaire au niveau de l'institut :*

*Mr.REZZOUG, Mr.BOUKRAA, Mr.AMTOUT, Mr.KIRAD, Mr.BEKA, Mr.HENNI,*

*Mr.CHGRANI, Mr.NECHE, Mr. BERGHEL, Mr. HERTSI, Mr.BENOUDA, Mr.*

*AZZAZEN, Mr.BENTRAD, Mr.KBAB, Mr.ABADA, Mr.RENAN, Mr.ALLOUCHE,*

*Mr.GUERROUZ, Mr. KHALI, Mr.OULDBESSI, Mr.ALLALI, Mr.BEN*

*CHOUBAN, Mr. BADR EL DIN.*

*Mes remerciements vont aussi à l'égard de toute personne ayant contribué de près*

*ou loin qui m'ont encouragé à faire ce travail.*

*Je remercie également tous mes amis : Aïcha, Oussama, MâmÖüüd, Youcef, Fadéla,*

*Rafika, Cherifa, Samia, Amina, Sabrina, Farida, mon binôme Hamza et*

*mes camarades de la promotion, je vous souhaite tous la réussite.*

*Boutaleb Amina Hadjira*

# Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à :*

- ✓ *Ma très chère mère qu'attend avec impatience ma soutenance comme elle attendait ma naissance et à qui je souhaite un prompt rétablissement, elle est la lumière et l'oxygène pour moi. que dieu la protège.*
- ✓ *A mon père que ALLAH ai pitié de son âme (رحمه الله).*
- ✓ *A mes chers frères, RADOUANE, FATAH, FAROUK,*
- ✓ *A mes sœurs, AÏCHA, RACHIDA, que j'aime très fort.*
- ✓ *A ma nièce BADRA et mon neveu FARES, le charme de ma famille.*
- ✓ *A toute ma famille sur tout, SAFA, SAMAH, RAYAN, DJAMILA, SALSABIL, MAHDI, DJAWAD, RAWIA, AÏMAN, MERYOUMA, DJOHAÏNA ET KARIM ZIANI, OMRANE, CHAÏMAÏ (Mon adorable).*
- ✓ *A mon cousin SAMI mon inspiration en courage.*
- ✓ *Mon binôme AMINA pour sa patience et sa compréhension.*
- ✓ *A mes amis Samir, Saddam, Oussama, Amine, Raouf, Mohamed, Tarak, Djaber,*
- ✓ *A mes camarades de la promo 2013*
- ✓ *A tous ceux qui me connaissent de près et de loin*



*Lebdi Hamza*

# LISTE DES FIGURES

## CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES TUYERES SUPERSONIQUES

<b>Figure I.1</b> : profils des Tuyères .....	4
<b>Figure I.2</b> : différents formes géométriques des Tuyères .....	4
<b>Figure I.3</b> : Tuyère d'une fusée.....	6
<b>Figure I.4</b> : Tuyère d'un avion de combat .....	7
<b>Figure I.5</b> : Tuyères d'orientations dans une navette spatiale .....	7
<b>Figure I.6</b> : Tuyère conique.....	10
<b>Figure I.7</b> : Tuyère à détente centrée.....	11
<b>Figure I.8</b> : Tuyère annulaire.....	12
<b>Figure I.9</b> : Tuyère type "Détente-Déviation".....	13
<b>Figure I.10</b> : Tuyère type à bouchon.....	14
<b>Figure I.11</b> : Tuyère à double galba.....	14
<b>Figure I.12</b> : effet de variation de section sur le régime de l'écoulement.....	16
<b>Figure I.13</b> : régime subsonique.....	17
<b>Figure I.14</b> : écoulement sonique adapté.....	17
<b>Figure I.15</b> : écoulement sonique non adapté.....	18
<b>Figure I.16</b> : régime supersonique adapté.....	19
<b>Figure I.17</b> : régime supersonique non adapté.....	19

## CHAPITRE II: PARAMETRES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE

<b>Figure II.1</b> : variation de la fonction $F_p(T)$ dans l'intervalle $[T_s, T_0]$ .....	31
<b>Figure II.2</b> : variation de la fonction $F_A(T)$ dans l'intervalle $[T_s, T^*]$ .....	31



### CHAPITRE III : METHODES DES CARACTERISTIQUES POUR LE CALCUL DE L'ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE.

<b>Figure III.1</b> : composantes du vecteur vitesse .....	42
<b>Figure III.2</b> : illustration de la relation entre $\mu$ et $M$ .....	42
<b>Figure III.3</b> : les caractéristiques $C^+$ et $C^-$ et les lignes de mach $\mu$ et $\xi$ .....	43
<b>Figure III.4</b> : solution de part et d'autre d'une courbe $C$ .....	44
<b>Figure III.5</b> : illustration du domaine de dépendance du point 3.....	45
<b>Figure III.6</b> : illustration de la région d'influence du point 4.....	45
<b>Figure III.7</b> : déviation de l'écoulement à travers une onde de mach correspondant à une compression ou une détente .....	47
<b>Figure III.8</b> : relation entre les lignes caractéristiques (mach) et les coordonnées cartésiennes....	48

### CHAPITRE IV : TUYERE À DETENTE CENTREE A HAUTE TEMPERATURE

<b>Figure IV.1</b> : différentes géométries de tuyères .....	53
<b>Figure IV.2</b> : présentation du champ de l'écoulement dans la tuyère à détente centrée .....	54
<b>Figure IV.3</b> : illustration des lignes caractéristiques et lignes de Mach .....	56
<b>Figure IV.4</b> : différents points de calcul.....	61
<b>Figure IV.5</b> : nœud sur une paroi rigide .....	64
<b>Figure IV.6</b> : processus du calcul des caractéristique dans la région de Kernel.....	67
<b>Figure IV.7</b> : différents type de dimensionnement de la tuyère à détente centrés .....	68
<b>Figure IV.8</b> : processus de détermination des points de la paroi de la tuyère MLN 2D. ....	70
<b>Figure IV.9</b> : paramètres de calcul du point $P_i$ ( $i=1, 2,3, \dots N$ ) de la paroi de la tuyère .....	71
<b>Figure IV.10</b> : processus de calcul des $C^-$ de région de transition de la tuyère axisymétrique .....	75
<b>Figure IV.11</b> : différents cas de l'intersection de la paroi avec les caractéristiques de la tuyère axisymétrique .....	76
<b>Figure IV.12</b> : passage d'une caractéristique à l'autre dans la de région de transition.....	76

## CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSION

<b>Figure V.1 :</b> Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN 2D avec $M_s=3.0$ , $N_j=0$ .....	82
<b>Figure V.2 :</b> Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN 2D avec $M_s=3.0$ , $N_j=10$ .....	83
<b>Figure V.3 :</b> Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN 2D avec $M_s=3.0$ , $N_j=50$ .....	85
<b>Figure V.4 :</b> Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN 2D avec $M_s=3.0$ , $N_j=200$ .....	86
<b>Figure V.5:</b> Variation de nombre de Mach le long de la paroi à travers la tuyère MLN 2D du modèle GP.....	88
<b>Figure V.6:</b> Variation de L'angle de déviation de l'écoulement le long de la paroi à travers la tuyère MLN 2D du modèle GP. ....	88
<b>Figure V.7:</b> Variation de Rapport des Températures le long de la paroi à travers la tuyère MLN 2D du modèle GP.....	89
<b>Figure V.8:</b> Variation de Rapport des Masses Volumiques le long de la paroi à travers la tuyère MLN 2D du modèle GP.....	90
<b>Figure V.9:</b> Variation de Rapport des Pressions le long de la paroi à travers la tuyère MLN 2D du modèle GP.....	91
<b>Figure V.10:</b> Variation de nombre de Mach dans la section de sortie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.....	92
<b>Figure V.11:</b> Variation de l'angle de déviation de l'écoulement dans la section de sortie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.....	93

<b>Figure V.12:</b> Variation de Rapport des Températures dans la section de sortie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.....	94
<b>Figure V.13:</b> Variation de Rapport des Masses Volumiques dans la section de sortie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.....	95
<b>Figure V.14:</b> Variation de Rapport des Pressions dans la section de sortie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.....	96
<b>Figure V.15:</b> Variation de Nombre de Mach dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.....	97
<b>Figure V.16:</b> Variation de Rapport des Températures dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.....	98
<b>Figure V.17:</b> Variation de Rapport des Masses Volumiques dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.....	99
<b>Figure V.18:</b> Variation de Rapport des Pressions dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.....	100
<b>Figure V.19:</b> Variation de CF de la tuyère à détente centrée 2D en fonction de $T_0$ lorsque $MS=3.00$ .....	101
<b>Figure V.20:</b> Courbes iso-Mach de la tuyère à détente centrée 2D.....	102
<b>Figure V.21:</b> Variation de CF de la tuyère à détente centrée 2D en fonction de $MS$ .....	103
<b>Figure V.22:</b> Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN axisymétrique avec $Ms=3.0$ , $Nj=0$ , avec $Nc=10$ .....	105
<b>Figure V.23:</b> Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN axisymétrique avec $Ms=3.0$ , $Nj=0$ , avec $Nc=50$ .....	105
<b>Figure V.24:</b> Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN axisymétrique avec $Ms=3.0$ , $Nj=50$ , avec $Nc=10$ .....	106

<b>Figure V.25:</b> Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN axisymétrique avec $M_s=3.0$ , $N_j=200$ , avec $N_c=10$ .....	106
<b>Figure V.26:</b> Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN axisymétrique avec $M_s=3.0$ , $N_j=200$ , avec $N_c=50$ .....	107
<b>Figure V.27:</b> Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN axisymétrique avec $M_s=3.0$ , $N_j=200$ , avec $N_c=200$ .....	107
<b>Figure V.28:</b> Variation de nombre de Mach le long de la paroi à travers la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	108
<b>Figure V.29:</b> Variation de L'angle de déviation de l'écoulement le long de la paroi à travers la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	109
<b>Figure V.30:</b> Variation de Rapport des Températures le long de la paroi à travers la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	110
<b>Figure V.31:</b> Variation de Rapport des Masses Volumiques le long de la paroi à travers la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	111
<b>Figure V.32:</b> Variation de Rapport des Pressions le long de la paroi à travers la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	112
<b>Figure V.33:</b> Variation de nombre de Mach dans la section de sortie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	113
<b>Figure V.34:</b> Variation de l'angle de déviation de l'écoulement dans la section de sortie de la Tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	114
<b>Figure V.35:</b> Variation de Rapport des Températures dans la section de sortie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	115
<b>Figure V.36:</b> Variation de Rapport des Masses Volumiques dans la section de sortie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	116

<b>Figure V.37:</b> Variation de Rapport des Pressions dans la section de sortie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	117
<b>Figure V.38:</b> Variation de Nombre de Mach dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	118
<b>Figure V.39:</b> Variation de Rapport des Températures dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	119
<b>Figure V.40:</b> Variation de Rapport des Masses Volumiques dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	120
<b>Figure V.41:</b> Variation de Rapport des Pressions dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.....	121
<b>Figure V.42:</b> Variation de CF de la tuyère à détente centrée axisymétrique en fonction de $T_0$ lorsque $MS=3.00$ .....	122
<b>Figure V.43:</b> Courbes iso-Mach de la tuyère à détente centrée axisymétrique.....	123
<b>Figure V.44:</b> Variation de CF de la tuyère à détente centrée axisymétrique en fonction de $MS$ ..	124

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau II.1:</b> table de variation de $C_p(T)$ et $\gamma(T)$ avec la température pour l'aire.....	28
<b>Tableau II.2:</b> coefficients du polynôme $C_p(T)$ .....	29

## LISTE DES SYMBOLES

$M$	Nombre de Mach.
$x$	Abscisse d'un point.
$y$	Rayon d'un point.
$a$	Vitesse du son.
$V$	Vitesse de l'écoulement.
$u, v$	Composantes horizontale et verticale de vecteur vitesse.
$A$	Aire d'une section de la tuyère.
$P$	Pression.
$T$	Température.
$m$	Débit massique critique.
$L$	Longueur de la Tuyère.
$l$	Unité de profondeur de la tuyère bidimensionnelle.
$r$	Constante thermodynamique de l'air.
$H$	Enthalpie à un constant pré (Enthalpie dynamique).
$C_p$	Chaleur spécifique à pression constante.
$F_x$	Force de pression exercée sur la paroi interne de la tuyère.
$N_i$	Nombre des caractéristiques descendantes insérées dans la région de Kernel.
$C_{Force}$	Coefficient de la force de pression.
$C_y$	Coefficient de l'interpolation de l'ordonnée $y$ .
$C_\theta$	Coefficient de l'interpolation du paramètre $\theta$ .
$C_T$	Coefficient de l'interpolation du paramètre $T$ .
$b_1, b_2$	Coefficients de la fonction de condensation [voir équation (II.42)].
$\mu$	Angle de Mach.
$v$	Fonction de Prandtl Meyer.
$\theta$	Déviation du vecteur vitesse.
$\gamma$	Rapport des chaleurs spécifiques.
$\rho$	Masse volumique.
$\Delta$	Coefficient de la fonction de condensation [équation (IV.50) du chapitre IV].
$\Delta x$	Pas non-dimensionnel ( $\Delta x/y^*$ ) pour le calcul dans la région de transition.
$\delta$	Géométrie de la tuyère. $\delta=0$ cas 2D. $\delta=1$ cas axisymétrique.
$\xi, \eta$	Lignes de Mach descendante et montante respectivement.
$\varepsilon$	Tolérance de calcul (précision voulue)

## **Abréviations**

<i>MLN</i>	Minimum Length Nozzle (tuyère à détente centrée).
<i>HT</i>	Haute Température.
<i>GP</i>	Gaz Parfait.
$C^+$	caractéristique montante.
$C^-$	caractéristique descendante.

## **Indices**

<i>13</i>	valeur moyenne entre les points <i>1</i> et <i>3</i> .
<i>23</i>	valeur moyenne entre les points <i>2</i> et <i>3</i> .
<i>GP</i>	valeur moyenne entre les points <i>G</i> et <i>P</i> .
<i>GD</i>	valeur moyenne entre les points <i>G</i> et <i>D</i> .
<i>3</i>	concernant la valeur au point <i>3</i> .
*	condition critique.
<i>S</i>	section de sortie.
<i>d</i>	détente de Kernel.
<i>(j)</i>	tronçon.
<i>j</i>	nœud.
<i>W</i>	paroi.

## **Exposant**

*	valeur au col juste après la détente.
<i>K</i>	itération.
<i>Iso</i>	courbe iso-valeurs.
-	valeur en un point sur la caractéristique descendante.
+	Valeur en un point sur la caractéristique montante

# Table des Matières

**Résumé**

**Remerciements**

**Liste des illustrations, Graphiques et Tableaux**

**Liste des Symboles**

**Introduction Générale**

## **CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES TUYERES SUPERSONIQUES**

Introduction .....	3
I.1. Définition de la tuyère .....	4
I.2. Rôle et utilisation de la tuyère .....	5
I.2.1. Moteur fusée .....	5
I.2.2. Moteurs Avions .....	5
I.2.3. Soufflerie.....	6
I.3. Les différents configurations des tuyères supersoniques .....	8
I.3.1. Tuyères conique .....	9
I.3.2. Tuyères à détente centrée .....	10
I.3.3. Tuyères annulaire.....	11
I.3.4. Tuyères auto ajustable.....	12
I.3.5. Tuyères à double galbe .....	14
I.4. Fonctionnement des tuyères .....	15
I.4.1. Effets des variations de section sur l'écoulement.....	15
I.4.2. Les différents régimes de fonctionnement d'une tuyère.....	16



I.4.2.1.Ecoulement subsonique.....	16
I.5.2.2.Ecoulement sonique adapté .....	17
I.5.2.3.Ecoulement sonique non adapté.....	18
I.5.2.4.Ecoulement supersonique adapté.....	18
I.5.2.5.Ecoulement supersonique non adapté.....	19
Conclusion.....	20

**CHAPITRE II : PARAMETRES D’UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE.**

Introduction.....	21
II.1.Formulation mathématique du problème.....	22
II.1.1.Equation adiabatique.....	22
II.1.2.Equation de la vitesse du son.....	23
II.1.3.Relation entre la vitesse et la température.....	24
II.1.4.Relation entre le nombre de mach et la température.....	24
II.1.5.Relation entre la masse volumique et la température.....	25
II.1.6.Relation entre la pression et la température.....	26
II.1.7.Relation entre la section et la température.....	26
II.1.8.Débit massique critique.....	27
II.2.Modèle du gaz parfait.....	27
II.3.Procédure du calcul.....	28
II.3.1.Polynômes d’interpolation de $C_p(T)$ .....	29
II.3.2.Intégration de la chaleur spécifique $C_p(T)$ .....	30
II.3.3.Calcul numérique des rapports thermodynamiques.....	30

II.4.Paramètres critiques au col correspondant à $T_0$ .....	32
II.5.Paramètres supersoniques correspondant à $T_0$ .....	34

**CHAPITRE III : METHODES DES CARACTERISTIQUES POUR LE CALCUL DE L'ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE.**

III.1.Hypothèses.....	36
III.2.Equation de l'écoulement.....	37
III.3.Propriétés des équations hyperboliques.....	40
III.4.Equations des caractéristiques.....	41
III.5 .Domaine de dépendance-région d'influence.....	44
III.6.Relations de comptabilité.....	45

**CHAPITRE IV : TUYERE À DETENTE CENTREE A HAUTE TEMPERATURE**

Introduction.....	52
IV.1.Formulation mathématique.....	56
IV.1.1.Equation et procédure pour un point interne.....	58
IV.1.2.Point interne particulier.....	61
IV.1.3.Equation pour un point sur l'axe de symétrie.....	62
IV.2.4.Noeud sur une paroi rigide.....	62
IV.1.5.Autres paramètres.....	65
IV.2.Procédure de calcul dans la tuyère.....	65
IV.2.1.Région de Kernel.....	65
IV.2.2.Contour de la paroi de la tuyère bidimensionnelle.....	69
IV.2.3.Région de transition et contour de la tuyère axisymétrique.....	72
IV.3.Courbes Iso-Mach.....	77

## **CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSION**

V.1. Résultats sur la tuyère à détente centrée bi-dimensionnelle (2D MLN).....81

V.2. Résultats sur la tuyère à détente centrée axisymétrique (Axisymmetric MLN).....104

**Conclusion Générale**

**Annexes A**

**Références**

# INTRODUCTION

La conception des engins aérospatiaux consiste à concevoir des tuyères générant des poussées réalisant des déplacements performants. Ils interviennent dans beaucoup de structures telles que les missiles [14], [33], [34], les moteurs d'avions et dans la fabrication des souffleries supersonique pour la modélisation et la réalisation expérimentale des écoulements supersoniques réels. Les concepteurs aérodynamiciens ont débuté les applications en 1935. A cette époque, toutes les études étaient basées sur les expériences. Le développement par ordinateur n'avait pas commencé [34].

A quelques années, en parallèle avec les développements expérimentaux et numériques, les concepteurs ont pensé à améliorer les performances des tuyères de propulsion. Ils ont remarqué que les tuyères coniques délivrent certes une poussée, mais une perte considérable, vu l'inclinaison de la portion supersonique. Si l'inclinaison de la tuyère à la section est nulle, la poussée délivrée par le moteur sera donc complètement utilisée pour la propulsion et sera par conséquent maximale [33], [14]. Ce problème sera donc réglé par la recherche d'une forme de tuyère donnant à la sortie un écoulement parallèle.

Le besoin et le souhait d'obtenir une forme de tuyère différente suivant son utilisation. Pour les applications des moteurs fusés, la conception est basée sur deux facteurs essentiels qui sont, l'obtention d'une poussée maximale avec un poids le plus petit possible de la tuyère (longueur minimale). Il est connu que la masse de la tuyère contient une grande portion de la masse totale des missiles [4], [5].

Les expériences en soufflerie ont permis aux concepteurs d'observer des lignes privilégiées dans le champ d'écoulement supersonique, appelées lignes caractéristiques, faisant un angle bien défini de part et d'autre du vecteur vitesse [5], [18]. La transformation mathématique des équations de conservation écrites dans le système de coordonnées cartésiennes suivant les lignes caractéristiques permet une simplification remarquable des équations de conservation [5], [28]. Ils ont appelé cette méthode la méthode des caractéristiques.

Dans les moteurs fusées, la tuyère constitue la partie essentielle, car elle permet d'accélérer les gaz à la sortie de la chambre de combustion jusqu'à une certaine vitesse pour obtenir une force de poussée comme une résultante de cette accélération.

Dans le cas d'un écoulement parallèle à la section de sortie de la tuyère, les pertes de poussée sont nulles. Par conséquent, la poussée délivrée par le moteur est complètement utilisée pour la propulsion. Si l'écoulement est uniforme à la section de sortie, les paramètres de l'écoulement sont constants et la variation de la quantité de mouvement est égale à  $m_s v_s$ . Pour ces deux applications essentielles, la tuyère doit fonctionner en régime adapté.

Le but de ce modeste travail est de démontrer que si le modèle de calcul utilisé pour les équations de compatibilité et caractéristiques est celui le HT, l'écoulement à la sortie de la tuyère MLN à haute température ne sera plus uniforme à la section de sortie pour la tuyère dimensionné sur la base de modèle GP. De même l'écoulement à travers la tuyère sera complètement modifié en comparaison avec celui donné par le modèle GP.

Pour arriver à notre but, on a réalisé ce travail composé par cinq chapitres essentiels :

Le premier chapitre est consacré pour la tuyère supersonique d'une manière générale accompagné par la présentation de quelques notions fondamentales indispensables pour l'étude de la conception d'une tuyère dans le domaine supersonique. Le deuxième chapitre présente les relations thermodynamiques et géométriques lorsque l'on tient compte de la température génératrice. Nous présentons aussi les techniques numériques de calcul de chaque paramètre avec une application dans une tuyère quasi unidirectionnelle. Le troisième chapitre présente d'une manière détaillée la méthode développée théoriquement, pour l'écoulement supersonique la méthode s'appelle la méthode des caractéristiques. Le quatrième chapitre présente la méthode de calcul et de conception de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle et axisymétrique, par la méthode des caractéristiques à haute température et les manières de calcul de l'écoulement dans la tuyère avec quelques nomenclatures utilisées. L'intégration des équations de compatibilité et des caractéristiques est faite par la méthode des différences finies [6], [34]. Le cinquième chapitre présente les divers résultats obtenus sur la correction de l'écoulement dans la tuyère et cela sous forme des graphes pour les tuyères à détente centrée bidimensionnelle et axisymétrique.

En fin on présente une conclusion générale sur le travail suivi par la proposition de quelques travaux de futur.

# Chapitre I

## Généralités sur les tuyères

## Introduction:

La poussée d'un moteur dépend principalement de la vitesse des produits de combustions à travers la section de sortie de la tuyère qui le propulse. Durant leur passage à travers une tuyère De Laval, les gaz d'échappement sont accélérés de vitesses subsoniques à des vitesses supersoniques.

Le passage de l'écoulement par ces différentes vitesses permet de visiter une tuyère convergente divergente en trois sections de convergent subsonique où l'écoulement passe d'une vitesse presque nulle à celle du son qu'il atteint au col pour enfin se détendre au sein du divergent supersonique.

Cette division est appropriée car d'une part elle permet la détermination de la poussée totale développée, et d'autre part elle permet d'analyse sont utilisées pour déterminer le champ d'écoulement dans chaque région.

L'optimisation du choix d'une tuyère de propulsion doit tenir compte en plus des calculs de dynamique des gaz qui nous intéressent tels que le matériau utilisé, le mode de fabrication de la paroi les exigences de refroidissement les limites admissibles de dimensionnement etc.

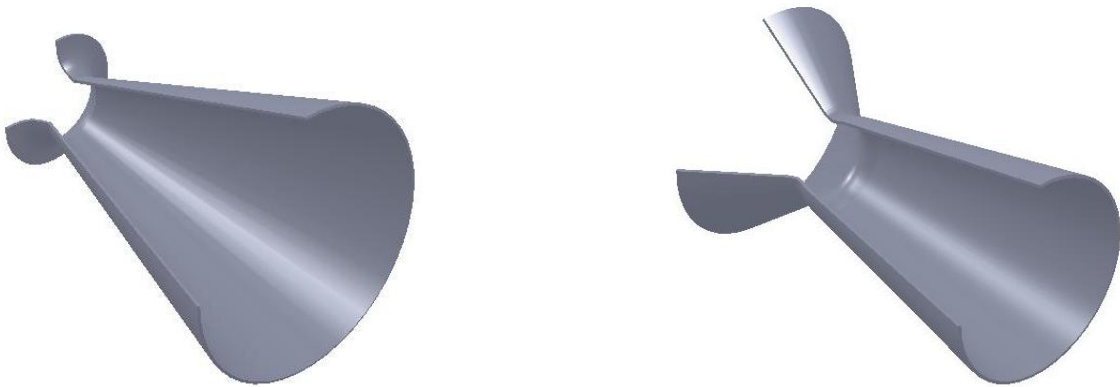
Les tuyères sont des canaux d'injection ayant pour le rôle principale de transformé l'énergie de pression "l'enthalpie" en énergie cinétique, les profils de ces tuyères sont tels qu'ils se confondent avec une ligne de courant, leur déterminations se fait généralement par la méthode de caractéristique.

En Général une tuyère se décompose en trois zones : le convergent, zone du col et le divergent encore appelé jupe de tuyère, éventuellement équipé de volets dits volets de tuyère. Du fait de tes températures élevées (environ 3500°C) et de l'obligation de conserver une section constante, le col de la tuyère est réalisé en matériau réfractaire (graphite, tungstène ..... etc.). Pour les divergents, on trouve des fabrications métalliques ou on utilise des matériaux résistants à la température; l'oxydation et aux hautes contraintes.

## I.1 Définition de la tuyère :

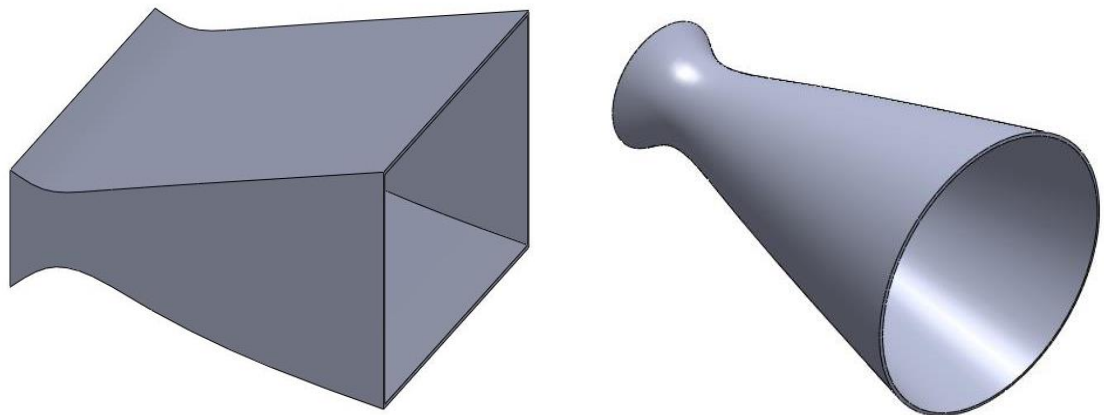
Une tuyère est un organe mécanique passif qui met en communication deux réservoirs à des pressions différentes, elle constitue un des éléments les plus importants dans les turbomachines et les turboréacteurs, d'ailleurs 40% de la poussée totale de ces derniers est produite par les tuyères.

Selon le taux de détente, les tuyères seront soit simplement convergente (Figure I.1.a) pour les taux de détente élevés, sinon seront convergente divergente [1] (Figure I.1.b), selon la géométrie on trouve les tuyères à géométrie plane (Figure I.2.a) où axisymétrique (Figure I.2.b) [40].



a) Tuyère simplement convergente

b) Tuyères convergente divergente (de-Laval)

**Figure I.1:** Profils des Tuyères

a) Tuyère Plane

b) Tuyère Axisymétrique

**Figure I.2.** Différents formes géométriques des tuyères [40].



## I.2. Rôle et utilisation de la tuyère:

Les tuyères supersonique interviennent dans beaucoup de structures l'aéronautique et l'aérospatiale telles que les moteurs fusée et missile, moteurs avions et dans la fabrication des souffleries supersonique pour la modélisation et la réalisation expérimentale des écoulements supersonique [2].

### I.2.1. Moteur Fusée:

Dans les moteurs fusées, l'organe tuyère constitue la partie essentielle, car elle permet d'accélérer les gaz à la sortie de la chambre de combustion jusqu'à une certaine vitesse dont le but d'obtenir une force de poussée comme une résultante de cette accélération. Notons ici que la structure d'un missile est constituée par la chambre de combustion et la tuyère et que cette dernière constitue environ 70% de la masse totale d'une chambre propulsive.

### I.2.2. Moteur Avions :

Le progrès majeur qui a été réalisé en aviation au cours de ce siècle, sans doute est l'avènement du vol supersonique, qui a ses debout n'a d'ailleurs pas provoqué un changement d'attitude immédiat chez les constructeurs, car le souci primordial pour les premiers avions supersonique militaires c'est d'assurer de bonne conditions de vol subsonique ou transsonique de sorte que l'emploi d'un divergent était pratiquement proscrit pour éviter les régimes de sur détente à ces vitesses modérées.

La rentabilité de tels projets n'est assurée que si les performances optimales sont obtenues de tous les éléments du moteur, dans tels projets le rôle assigné à la tuyère est définie de la façon suivante :

- doit assurer la détente optimale des gaz de combustion. C'est-à-dire, la poussée maximale du régime de la croisière. Ce problème est délicat, car la section de sortie doit être raccordée au maître couple du moteur; ou la structure de l'avion par carénage.

- La tuyère doit assurer le blocage de l'écoulement aux divers régimes de fonctionnement par la variation de la surface au col en fonction du débit et des conditions de températures et de pression des gaz à évacuer.
- Au régime du vol intermédiaire, la tuyère ne doit pas provoquer des pertes de pousse trop élevées du fait de son inadaptation.
- Elle doit contribuer au freinage de l'avion à la phase d'atterrissage et à l'atténuation de bruit.

### I.2.3. Soufflerie:

Une soufflerie permet de créer un courant d'air artificiel. Il existe plusieurs types de souffleries, mais d'une façon générale une soufflerie se compose de trois parties principales :

- ❖ Le collecteur ou le convergent
- ❖ La chambre d'expérience
- ❖ Le diffuseur ou divergent : que l'air traverse à sa sortie de la chambre d'expérience, en direction de ventilateur qui l'aspire et le rejette ensuite à l'extérieur. Le diffuseur à la forme d'un tronc de cône dont la section va en augmentant, ainsi la vitesse du courant d'air se réduit progressivement jusqu'à la pale de ventilateur mû par un moteur électrique.

Parmi les rôles d'une soufflerie, est de faire la simulation des écoulements réels mais sur des prototypes à échelles réduites. Pour arriver à ça, il faut modéliser l'écoulement à la sortie de la tuyère qui doit être uniforme et parallèle comme l'air libre de l'atmosphère [40].



**Figure I.3.** Tuyère d'une fusée.



Figure I.4. Tuyère d'un avion de Combat.

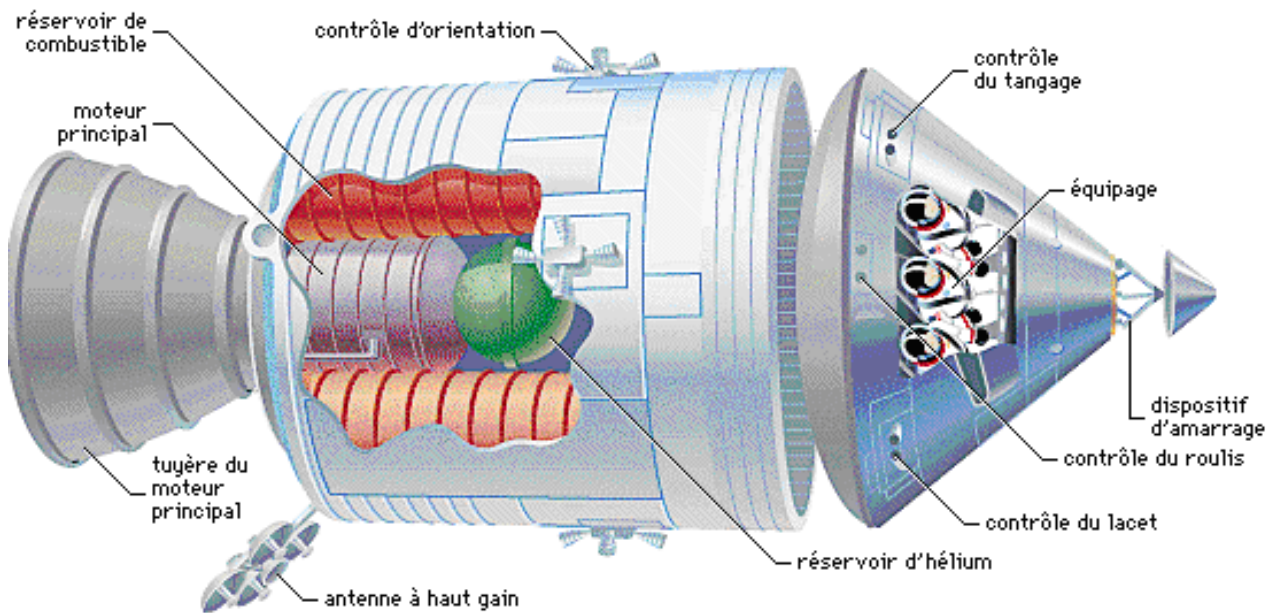


Figure I.5. Tuyères D'orientations dans une Navette Spatiale [40].

### **I.3. Les différentes configurations des tuyères supersoniques :**

La poussée des systèmes propulsifs dépend en premier lieu de la quantité des produits de combustion éjectés à travers une tuyère où l'écoulement dans son passage est continuellement accéléré d'un régime subsonique à un régime supersonique à travers une section sortie. L'organe tuyère constitue environ 70% de la masse de la structure. Cet organe lui-même est constitué de deux parties l'une est convergente et l'autre est divergente.

La partie convergente est indispensable et sert à faire liaison entre la chambre de combustion et la partie divergente de la tuyère afin de donner un écoulement sonique au col de la tuyère.

Cette forme est appropriée, car d'une part elle permet de déterminer le comportement de chaque section et de l'autre part évaluer la poussée développée par un système propulsif.

Différents méthodes d'analyses doivent être adaptées afin d'étudier l'écoulement séparément dans chaque partie de la tuyère.

La vitesse sonique atteinte au col par les gaz d'échappement est fixée par les conditions prévalant au sein de la chambre de combustion. L'écoulement se poursuit en accélération par l'expansion des gaz dans la partie divergente de la tuyère.

Cette augmentation de la vitesse dépend seulement de la configuration géométrique de la paroi du divergent et de la section sortie. Actuellement, un grand intérêt est porté à la conception de partie supersonique du divergent de la part des chercheurs afin d'atteindre des vitesses des sorties et de poussées de plus en plus importantes.

Le choix de la tuyère supersonique doit tenir compte des différents calculs concernant la dynamique des gaz, ainsi la science des matériaux joue un rôle important dans le choix du matériau adéquat, qui permet le refroidissement et les limites admissibles de dimensionnement structural. Sans oublier d'autres points qu'il faut vraiment faire attention dans leurs prises en charge.

En distingue plusieurs types de tuyères, parmi eux on peut citer :

### I.3.1. Tuyères Conique :

La forme géométrique la plus simple d'une tuyère est un cône comme le montre la figure (I.6) Bien que la vitesse de sortie des gaz de combustion d'une tuyère conique est essentiellement égale à sa valeur unidimensionnelle correspondant à un rapport de section donné, la direction de l'écoulement à la sortie n'est pas axiale. Par conséquent, une diminution de poussée due à la divergence de l'écoulement est engendrée.

Cette perte est prise en compte grâce à un facteur dépendant principalement de l'angle de divergence et il est défini par MALINA :

$$\lambda = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad (\text{I.1})$$

Avec :

$\alpha$ : Angle de divergence de la tuyère

Le coefficient de poussée de ce type de tuyères égal à [17] :

$$C_F = \frac{P_e A_e}{P_0 A_*} + \frac{(1 + \cos \alpha)}{2} \frac{\rho_e V_e^2 A_e}{P_e A_e} \quad (\text{I.2})$$

Avec :

$P_e$ : Pression à la sortie de la tuyère

$P_0$ : Pression Total

$A_e$ : Section de sortie de la tuyère

$A_*$ : Section au col de la tuyère

$\rho_e$ : Masse volumique des gaz d'éjections

Dans le cas de petits moteurs propulsifs, il est généralement plus pratique d'utiliser des tuyères coniques à cause particulièrement de leur simplicité de fabrication. Habituellement, le demi-angle du cône est pris égal à  $15^\circ$ . La longueur de ce type de tuyères est petite relativement à

celle de la tuyère idéale (dont l'écoulement est uniforme à la sortie). Le coefficient de poussée qu'elle développe est inférieur d'approximativement 1,7 % de celui du cas idéal.

Cette configuration est souvent utilisée comme base de comparaison en terme de poussée et de longueur.



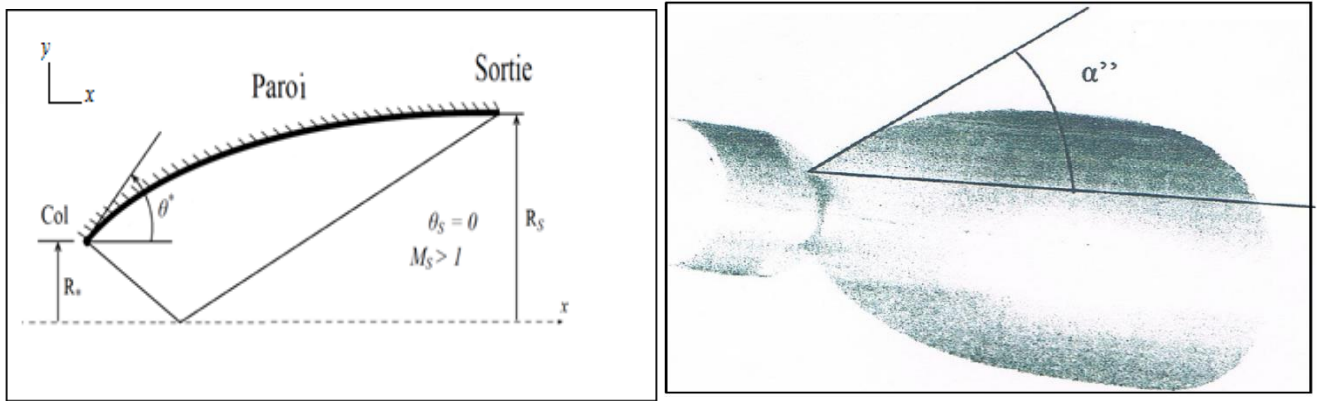
**Figure (I.6) :** Tuyère Conique

### **I.3.2. Tuyères à détente centrée :**

Les tuyères coniques délivrent une certaine poussée, mais néanmoins avec des pertes de charges considérables dues à la non-axialité de l'écoulement dans le divergent à la sortie à cause des angles de déviations spécialement utilisés pour la détente des gaz.

Et afin d'optimiser ces pertes-là, les chercheurs ont modélisé une forme de tuyères donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle et une réduction considérable des pertes de poussée.

Dans ce type de tuyères on peut donner une valeur relativement importante à l'angle de divergence située près du col allant de 20 à 30°, pour donner une importante détente sans gêner l'axialité de l'écoulement à la sortie. La deuxième partie divergente tend à faire suivre l'écoulement dans la direction uniforme et parallèle [2].



**Figure (I.7) :** Tuyère à détente centrée

Ces résultats sont ainsi justifiés numériquement par l'application de la méthode des caractéristiques en 1958, par Rao [16] qui a réussi à trouver une approche basée sur sa considération sur (la longueur de la tuyère, la pression ambiante ainsi les conditions d'écoulement au col) comme les paramètres pouvant donner une poussées maximale ainsi le contour de la paroi de la tuyère qui devra être défini.

Le coefficient de poussée est estimé comme suit, pour des tuyères à détente centrée :

$$C_f = \int \frac{P}{P_0 A_*} 2\pi r' dr' + \int \frac{\rho V_2 \cos \alpha''}{P_0} 2\pi r' dr' \quad (I.3)$$

### I.3.3. Tuyères Annulaire :

Cette tuyère est largement utilisée dans les turbomachines, elle est caractérisée par une section non normale à l'axe de la tuyère. Elle forme un espace annulaire obtenu à partir d'un bouchon central et une conduite divergente externe.

Sa perte de poussée due à la forme du divergent est moins considérable par rapport à une tuyère conique de même rapport de section et de longueur, ainsi l'optimisation de la forme géométrique de cette tuyère est difficile du fait qu'on doit réaliser une optimisation sur la partie interne et externe successivement. Et si le contour est conique, la poussée est réduite à un facteur  $C_f$  qui s'exprime par la relation suivante [2]:

$$C_f = \frac{\frac{1}{2}(\sin \alpha'' + \sin \beta)^2}{(\alpha'' + \beta) \sin \beta + \cos \beta - \cos \alpha''} \quad (\text{I.4})$$

Avec :

$\alpha''$  : C'est l'angle formé par l'axe de la tuyère et la paroi extérieure

$\beta$  : C'est l'angle formé par l'axe de la tuyère et la paroi intérieure du bouchon

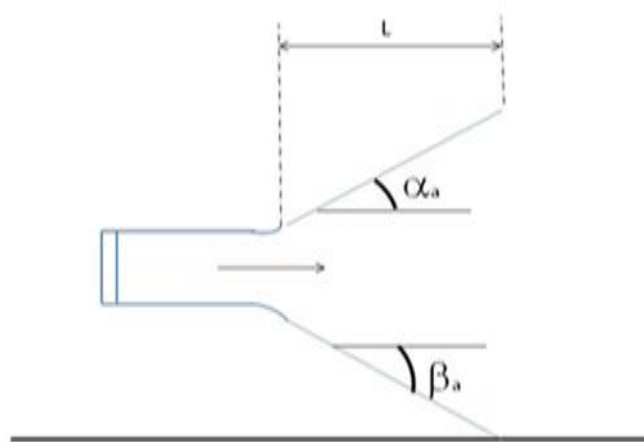


Figure (I.8) : Tuyère Annulaire

#### I.3.4. Tuyères Auto Ajustable :

Contrairement aux configurations présentées auparavant ou le processus de détente des gaz sont influencé par la forme du canal divergent, le processus de détente pour ce type de tuyères est directement ou indirectement régulé par la pression ambiante. L'écoulement de gaz dans ce cas s'ajuste lui-même pour être conforme à conditions extérieures.

Ces tuyères sont classées en deux catégories :

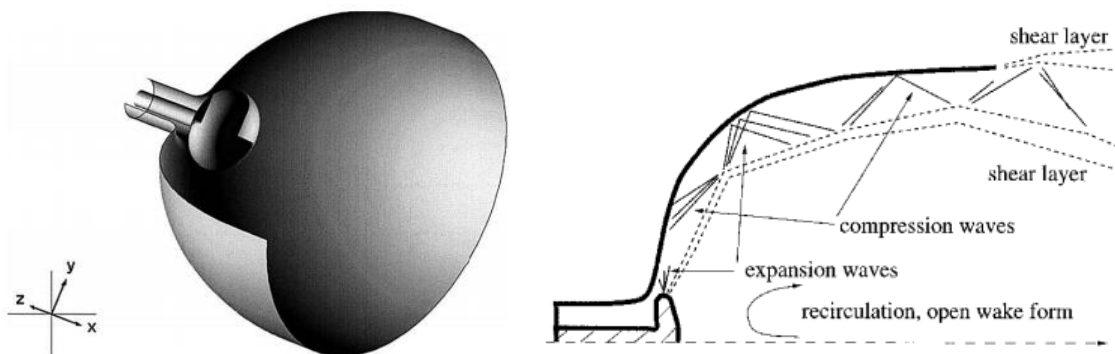
- ✚ Tuyère type bouchon (Plug Nozzle).
- ✚ Tuyère type détente-déviation (Expansion - déflexion type).



✓ Tuyère Type Détente - Déviation :

Ce type de tuyères est caractérisé par leurs chambres de combustion compacte et présente un col annulaire au voisinage de la ligne centrale. Dans ce cas, les gaz se dirigent dans la direction de l'épaule du bouchon central qui réalise une rotation de l'écoulement en expansion à une direction presque axiale, c'est pour ça qu'elle est qualifiée de la tuyère à détente-déviation. Cette conception permet l'obtention de très bonnes performances même pour les conditions aux dessous de celles pour lesquelles elle a été initialement conçue.

Les travaux expérimentaux sur de telles tuyères [3] ont montré qu'une utilisation d'angles de déviation d'une valeur aussi importante que  $40^\circ$  n'entraîne que des pertes minimales de poussées (une perte de 1% a été enregistrée pour un angle de  $30^\circ$ ).



**Figure (I.9)** Tuyère Type "Détente-Déviation".

✓ Tuyère de type Bouchon (Plug Nozzle) :

Pour ce type de tuyère, le col de ce type de tuyères possède la forme d'un anneau localisé au diamètre extérieur comme le montre la figure (I.10). L'écoulement est contrôlé par des ondes de détente provoquées par la déviation du bouchon dont la surface constitue le principal paramètre qui l'influence.

Les gaz d'échappement subissent une détente de la pression de la chambre de combustion  $P_t$  jusqu'à la pression ambiante  $P_a$ . La poussée de ce type de tuyères est identique à celle de la tuyère convergente-divergente [3].

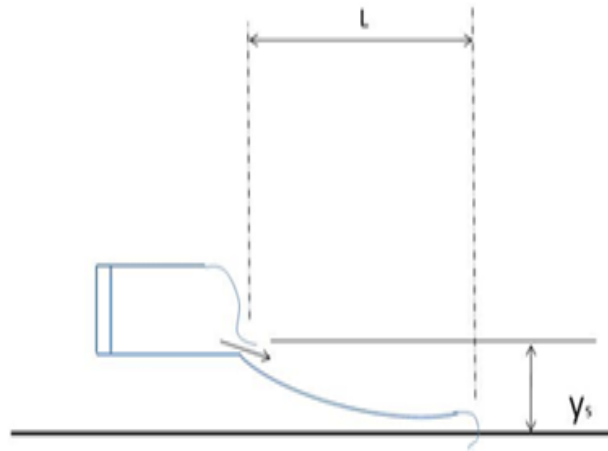


Figure (I.10) : Tuyère Type à Bouchon

### I.3.5. Tuyère à Double Galbe :

C'est l'une des tuyères innovantes utilisées généralement pour les navettes spatiales, leurs avantages c'est qu'elles s'adaptent facilement aux basses et aux hautes altitudes.

Comme son nom l'indique c'est une tuyère formée par une jonction de deux tuyères à simple galbe au niveau d'un point dit d'inflexion.

Ce type de tuyère est une nouvelle génération qui a récemment reçu l'attention des motoristes. Elle présente des performances très élevées du moment qu'elle s'adapte pour deux plages de fonctionnement, a des basses altitudes et a de très haute altitudes.

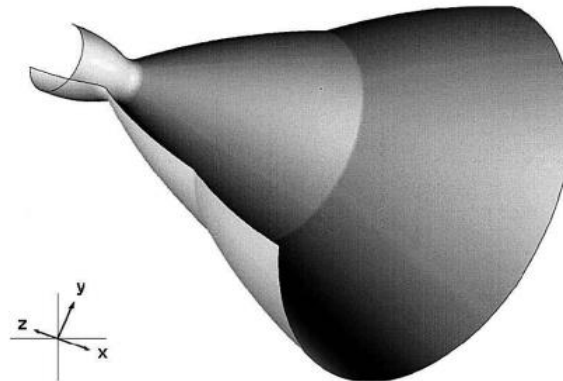


Figure (I.11) : Tuyère à double galbe

## I.4. Fonctionnement des tuyères :

D'après plusieurs chercheurs, le changement de pression et de la section à la sortie d'une tuyère à un effet considérable sur le régime et le type d'écoulement dans les tuyères supersonique. Cela est bien expliqué ci-dessous.

### I.4.1. Effet des variations de section sur l'écoulement :

Une des relations fondamentales que nous enseigne la théorie des écoulements monodimensionnels est la relation d'Hugoniot, qui exprime en absence de frottement, la variation de la vitesse  $V$  du fluide le long d'une tuyère de section  $S$  où le nombre de Mach est  $M$ :

$$\frac{dS}{S} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V} \quad (\text{I.5})$$

Avec:

$S$ : Section de la tuyère.

$V$ : Vitesse d'écoulement.

Deux cas à distinguer :

- Écoulement Subsonique :  $M < 1$  alors  $\frac{dS}{S}$  et  $\frac{dV}{V}$  soit de signes contraires, la vitesse croit quand la section diminue et inversement.
- Écoulement Supersonique :  $M > 1$  alors  $\frac{dS}{S}$  et  $\frac{dV}{V}$  sont de même signe.

La vitesse croit quand la section croit. Ainsi dans un divergent ou la vitesse d'entrée est égale à la vitesse du son, la vitesse continue à croître pour décroître dans un convergent (souffleries supersonique).

- Si  $M = 1$  alors  $dS = 0$ , donc la vitesse du son ne peut être atteinte que dans une section minimale. Voir la figure ci-dessous :

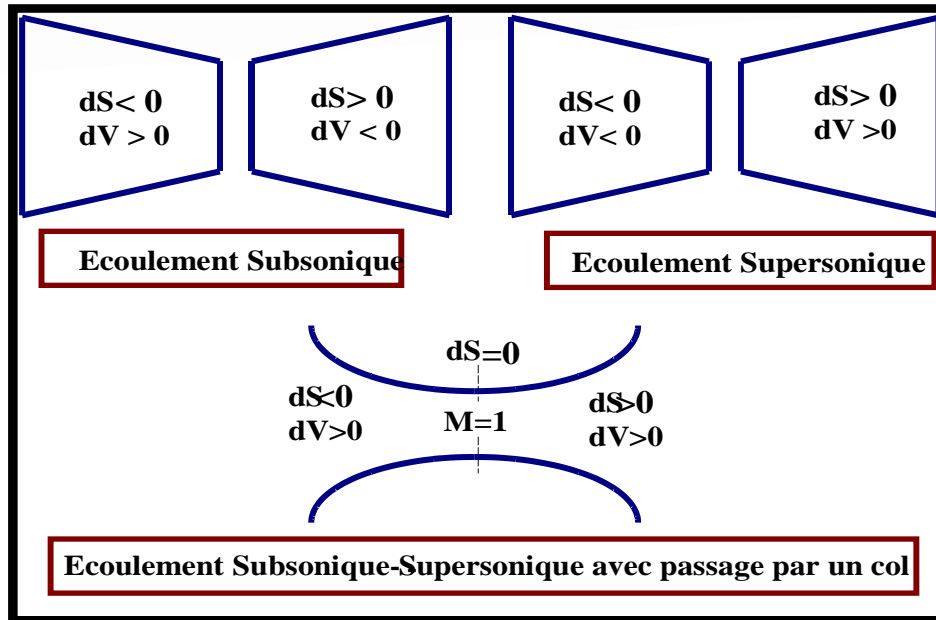


Figure (I.12) : Effet de variation de section sur le régime de l'écoulement

#### I.4.2. Les différents régimes de fonctionnement d'une Tuyère :

Considérons le système constitué d'une tuyère De-Laval. L'extrémité amont de la tuyère est en communication avec un réservoir contenant un gaz à une pression génératrice  $P_0$  que nous allons supposer fixe. Laval du divergent débouche dans une enceinte quasi infinie, dont on peut faire varier la pression statique  $P_a'$ .

Si la pression aval est égale à la pression d'arrêt, le fluide est entièrement au repos. On diminue progressivement la pression  $P_a'$  du réservoir aval au-dessous de la pression  $P_0$  supposé constante, on distingue cinq régimes particuliers d'écoulement [2].

##### I.4.2.1. Écoulement Subsonique :

Au début l'écoulement est subsonique dans toute la tuyère et ces caractéristiques sont les suivantes :

- ❖ Dans le convergent la vitesse augmente et la pression diminue jusqu'à une valeur minimale atteinte au col.

- ❖ Dans le divergent la vitesse diminue et la pression augmente jusqu'à la pression aval  $P_a'$ , la pression est donc minimale. L'évolution du gaz est représentée par la courbe (A) voir la figure (I.13) ci-dessous.

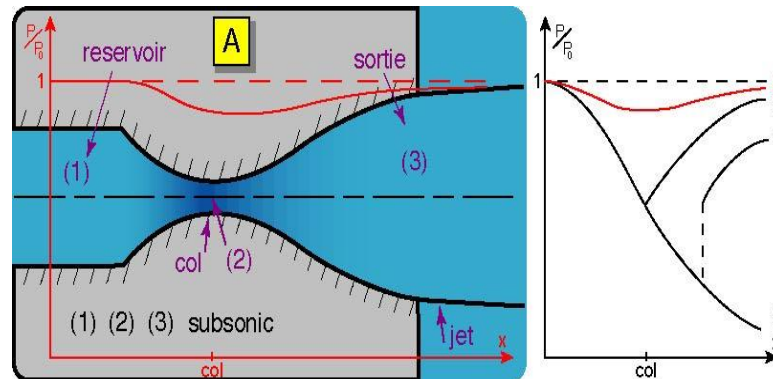


Figure (I.13): Régime Subsonique

#### I.4.2.2. Écoulement Sonique adapté :

Si  $P_a'$  continue à diminuer jusqu'à arrivé un moment ou le régime au col devient sonique. L'écoulement est dit sonique adapté.

Soit  $P_{cl}$  la pression aval pour laquelle ce phénomène se produit, partout tout au long de la tuyère le régime reste subsonique, à l'exception au niveau du col où la pression atteinte sa valeur minimale par contre la vitesse prend sa maximale qui est celle du son dans ce domaine. La figure suivante montre clairement l'évolution de la pression tout le long de la tuyère dans le régime cité ci-dessus.

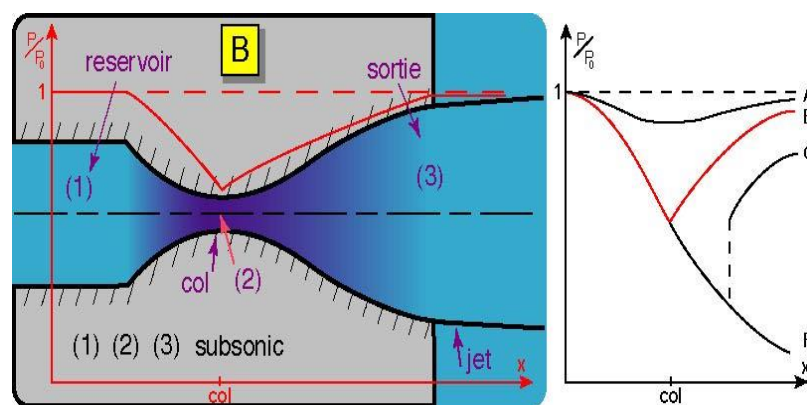


Figure (I.14): Écoulement Sonique Adapté.

### I.4.2.3. Écoulement Sonique Non Adapté :

Si  $P_a'$  diminue encore au dessous de  $P_{cl}$ , le col reste toujours sonique et les conditions sont critiques au col. Dans la partie divergente, une onde de choc prend place, ou elle engendre une augmentation brusque de la pression et un changement de régime de la vitesse du supersonique au subsonique. L'écoulement est dit sonique non adapté.

L'évolution du rapport de pression  $\left(\frac{p}{p_0'}\right)$  est représentée par la courbe (C) de la figure suivante.

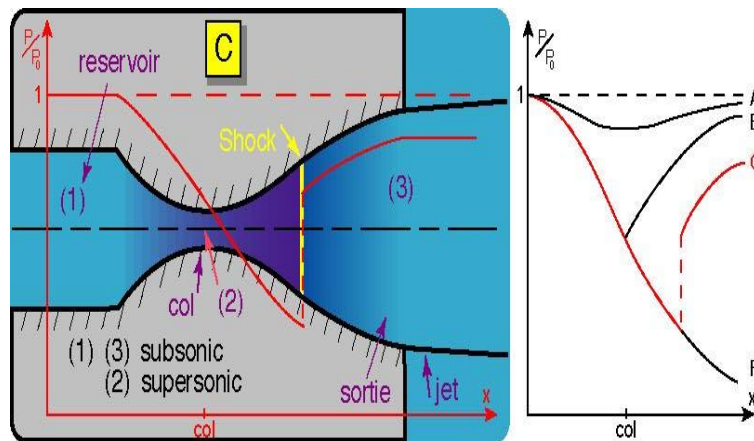


Figure (I.15): Écoulement Sonique Non Adapté.

### I.4.2.4. Écoulement Supersonique adapté :

Si  $P_a'$  continue à diminuer, il arrive un moment où l'écoulement est entièrement supersonique dans toute la tuyère. Le phénomène d'onde de choc disparaît et il n'y a plus de compression externe, alors la tuyère est parfaitement adaptée, l'évolution du rapport de pression représentée par la courbe (F) de la figure suivante. Soit  $P_{ac3}$  la pression aval pour laquelle ce phénomène se produit.

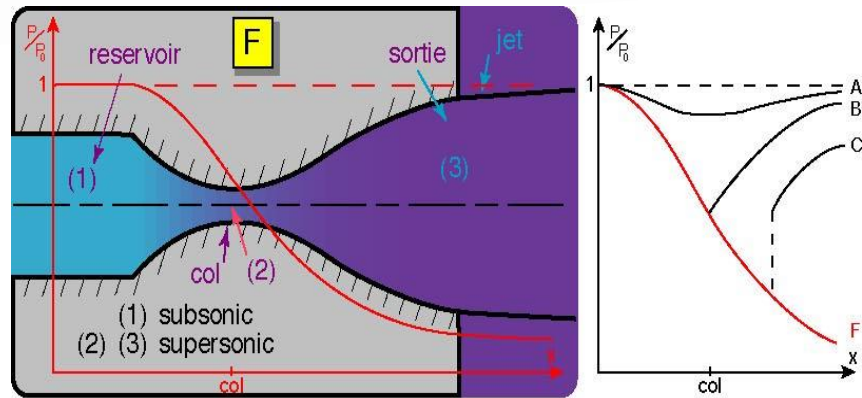


Figure (I.16): Régime Supersonique Adaptée.

#### I.4.2.5. Écoulement Supersonique Non Adapté :

Lorsque la pression  $P_a'$  devient inférieure à  $P_{ac3}$ , l'écoulement est dit supersonique non adapté, l'écoulement dans la tuyère de Laval ne subit aucune modification, la variation de la pression entre la tuyère et la pression aval doit se faire à l'extérieure de la tuyère, par l'intermédiaire d'une série d'ondes de détente obliques. Voir la figure (I.17).

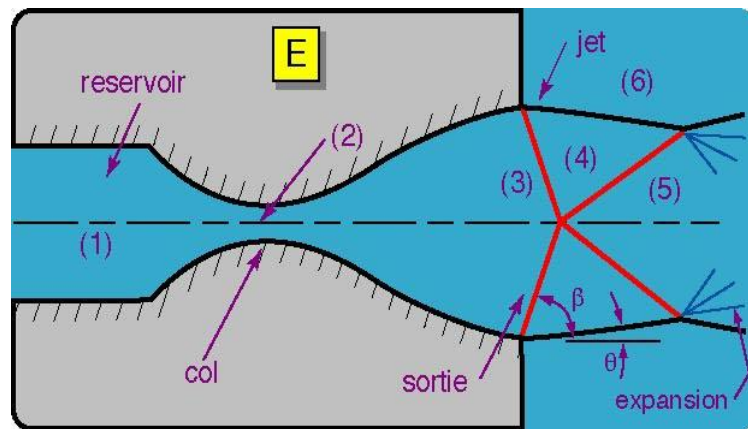


Figure (I.17): Régime Supersonique Non Adapté.

### **Conclusion :**

Une tuyère supersonique est l'organe principal d'un moteur fusée. Il ne fonctionne correctement que pour la seule valeur  $P_{ac3}/P_0$  du rapport des pressions amont en aval. Par conséquent elle est conçue pour s'adapter dans une plage de fonctionnement très réduit généralement prise proche du niveau de la mère. Et elle se retrouve en fonctionnement non adapté dans les autres plages de fonctionnement.



# Chapitre II

## PARAMETRES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE

## Introduction:

Les résultats obtenus d'un écoulement supersonique d'un gaz parfait présentés dans les références [4], [5] et [37] sont valables sous la base de quelques hypothèses. Parmi ces hypothèses, le gaz est considéré comme calorifiquement parfait, c'est-à-dire, les chaleurs spécifiques  $C_p$  et  $C_v$  sont constantes et ne dépendent pas de la température, ce qui n'est pas valable dans le cas réel lorsque la température croît [23] et [24]. Le but de ce chapitre est de présenter le modèle mathématique en ajoutant l'effet de variation de  $C_p$  avec la température. Dans ce cas, le gaz est nommé gaz calorifiquement imparfait ou gaz à Haute Température. On trouve dans la référence [14], une table contenant les valeurs de  $C_p$  et  $\gamma$  en fonction de la température pour l'air dans l'intervalle  $55\text{K}^\circ$  et  $3550\text{K}^\circ$ . Ici, on a fait une interpolation polynomiale [38] aux valeurs de la table afin de trouver une forme analytique de la fonction  $C_p(T)$ , vu qu'il existe une relation analytique entre  $C_p(T)$  et  $\gamma(T)$ . Les relations mathématiques présentées sont valables dans le cas général indépendamment de la forme d'interpolation et de la substance, mais les résultats seront illustrés par le choix d'une interpolation par un polynôme du 9<sup>ème</sup> degré [23] et [24]. Les relations mathématiques développées sont sous la forme des équations algébriques non linéaires et l'intégrale des fonctions analytiques complexes, où la procédure analytique est impossible. Alors, notre intérêt s'oriente vers la détermination des solutions numériques approchées. La méthode de dichotomie [23], [24], [35] et [38] est utilisée pour la résolution des équations algébriques non linéaires et l'algorithme de Simpson est utilisé pour l'intégration numérique des fonctions présentées [23], [24], [35] et [38]. Les fonctions à intégrer possèdent des gradients élevés aux extrémités de l'intervalle d'intégration. La quadrature de Simpson n'a pas constant demande une discrétisation très élevée pour avoir une précision convenable. La solution de ce problème est faite par introduction d'une procédure de condensation afin de raffiner les points à l'endroit où il y a un gradient élevé [23] et [24]. Les fonctions possèdent un gradient élevé au point supersonique. La formule de condensation choisie est celle de Robert, présentée dans la référence [15]. L'application sera pour l'air dans le domaine supersonique inférieur au seuil de dissociation des molécules, qui sera applicable si le nombre de Mach reste inférieur à 6.00 environ [6]. La comparaison est faite avec le modèle d'un gaz calorifiquement parfait à  $\gamma$  constant.

Dans le but de déterminer la limite d'application du modèle du gaz parfait, une étude sur l'erreur donnée par ce modèle par rapport à notre modèle à Haute Température sera présentée.

## II.1. Formulation Mathématique du problème

Le développement des relations thermodynamiques est basé sur l'utilisation des équations de conservations sous forme différentielle [36]. On rappelle que l'équation d'état d'un gaz parfait reste valable et elle donnée par:

$$P = \rho r T \quad (\text{II.1})$$

Avec  $r = 287.1029 \text{ J/ (Kg.K)}$ .

### II.1.1. Equation adiabatique

D'après les relations de la thermodynamique [36], on peut écrire pour un écoulement adiabatique, la relation suivante:

$$dq = C_v dT + l dV = 0 \quad (\text{II.2})$$

Avec  $l = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{rT}{v} \quad (\text{II.3})$

Et  $v = \frac{1}{\rho}$

D'où  $dv = - \frac{d\rho}{\rho^2} \quad (\text{II.4})$

Notre domaine d'étude est limité dans le régime supersonique pour un nombre de Mach  $M \in [1.0, 6.00]$ . Le rapport des chaleurs spécifiques donne la relation suivante:

$$C_v = \frac{C_p}{\gamma} \quad (\text{II.5})$$

Remplaçons les relations (II.3), (II.4) et (II.5) dans l'expression (II.2), on obtient:

$$\frac{C_p}{\gamma} dT - \frac{rT}{\rho} d\rho = 0$$

Nous pouvons vérifier à partir des résultats de la table que  $C_p$ ,  $C_v$  et  $\gamma$  vérifient entre elles la relation (II.5) et celle de Meyer  $C_p - C_v = r$  ou  $[\gamma(T) = C_p(T) / (C_p(T) - r)]$  pour un gaz parfait. Cette relation devient:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T[\gamma(T) - 1]} \quad (\text{II.6})$$

Alors, l'intégration de la relation (II.6) donne la relation adiabatique pour le gaz parfait à Haute Température.

### II.1.2. Equation de la vitesse du son

La vitesse du son, par définition, est donnée par [4] et [37]:

$$\alpha^2 = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_{s=\text{constante}} \quad (\text{II.7})$$

La différentielle de l'équation d'état du gaz parfait (II.1) donne

$$\frac{dP}{d\rho} = \rho r \frac{dT}{d\rho} + rT \quad (\text{II.8})$$

Remplaçons la relation (II.6) dans (II.8) et après réarrangement, on aura:

$$\alpha^2 (T) = \gamma(T) r T \quad (\text{II.9})$$

L'équation (II.9) prouve l'invariance de la relation de la vitesse du son, qui reste toujours valable pour le modèle à Haute Température, sauf, qu'il faut tenir compte de la variation du rapport  $\gamma(T)$ .

$$\frac{da}{a} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d[\gamma(T)]}{\gamma(T)} + \frac{dT}{T} \right] \quad (\text{II.10})$$

Cette relation présente la différentielle de la vitesse du son en termes de température pour le gaz à Haute Température.

### II.1.3. Relation entre la vitesse et la température

L'équation de conservation de l'énergie sous forme différentielle [4] et [36] s'écrit:

$$C_p dT + V dV = 0 \quad (\text{II.11})$$

D'où

$$V dV = -C_p dT \quad (\text{II.12})$$

Intégrant la relation (II.12) entre l'état générateur donné par ( $V_0 \approx 0$ ,  $T_0$ ) et un état quelconque donné par ( $V$ ,  $T$ ). On obtient:

$$\int_{V_0}^V V dV = - \int_{T_0}^T C_p(T) dV \quad (\text{II.13})$$

A la sortie de la chambre de combustion on a  $V_0 \approx 0$  et  $T_0$  donnée. Donc la relation (II.13) donne :

$$V^2 = 2 \int_{T_0}^T C_p(T) dV \quad (\text{II.14})$$

On pose

$$H(T) = - \int_{T_0}^T C_p(T) dV \quad (\text{II.15})$$

Donc

$$V^2 = 2 H(T) \quad (\text{II.16})$$

Divisons la relation (II.11) par  $V^2$  et remplaçons (II.16) dans le résultat obtenu, on aura:

$$\frac{dV}{V} = - \frac{C_p(T)}{2H(T)} dT \quad (\text{II.17})$$

L'expression (II.17) présente la forme différentielle de la vitesse de l'écoulement en fonction de la température.

### II.1.4. Relation entre le nombre de Mach et la température

Le nombre de Mach est défini par [4]

$$M = \frac{V}{a} \quad (\text{II.18})$$

Remplaçons la relation (II.9) dans (II.18) et élevons la relation au carré, ensuite substituons l'équation (II.17), on obtient:

$$M(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{a(T)} \quad (\text{II.19})$$

La relation (II.19) montre la variation du nombre de Mach en fonction de la température pour un gaz calorifiquement imparfait.

### II.1.5. Relation entre la masse volumique et la température

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement connue par l'équation de Bernoulli, sous forme différentielle, s'écrit [4] :

$$V dV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (\text{II.20})$$

Remplaçons la relation (II.7) dans la relation (II.20), on aura

$$V dV + \alpha^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (\text{II.21})$$

Figurant le nombre de Mach, en remplaçant la relation (II.18) dans la relation (II.21), on aura l'expression suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (\text{II.22})$$

Remplaçant les relations (II.16) (II.17), (II.18) et (II.19) dans la relation (II.22), on aura

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_p(T)}{\gamma(T)r \cdot T} dT \quad (\text{II.23})$$

On préfère l'écriture de la relation (II.23) sous la forme suivante

$$\frac{d\rho}{\rho} = F\rho(T) dT \quad (\text{II.24})$$

Avec 
$$F\rho(T) = \frac{C_p(T)}{a^2(T)} \quad (\text{II.25})$$

Le rapport des masses volumiques correspondant à la température  $T_0$  peut être obtenu en intégrant l'équation (II.26) entre l'état générateur  $(\rho_0, T_0)$  et l'état concerné donné par  $(\rho, T)$ , on obtient

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \text{Exp} \left( - \int_{T_0}^T F\rho(T) dT \right) \quad (\text{II.26})$$

### II.1.6. Relation entre la pression et la température

Le rapport des pressions est donné, en utilisant la relation (II.1) par

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \left(\frac{T}{T_0}\right) \quad (\text{II.27})$$

Prenons la différentielle de l'équation d'état des gaz parfait (II.1), ensuite remplaçons la relation (II.25) dans le résultat obtenu, on aura

$$\frac{dP}{P} = \left(F\rho(T) + \frac{1}{T}\right) dT \quad (\text{II.28})$$

Cette relation présente la différentielle de la pression en fonction de la température pour le gaz à Haute Température.

### II.1.7. Relation entre la section et la température

L'équation de conservation de la masse s'écrit [18]:

$$\rho V A = \text{constante} \quad (\text{II.29})$$

La différentielle de la relation (II.29) donne

$$\frac{dA}{A} = - \left\{ \frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} \right\} \quad (\text{II.30})$$

En remplaçant  $dV/V$  et  $d\rho/\rho$  par leurs expressions (II.17) et (II.24) respectivement,

On obtient la forme suivante:

$$\frac{dA}{A} = F_A(T) dT \quad (\text{II.31})$$

Avec

$$F_A(T) = C_P(T) \left[ \frac{1}{a^2(T)} - \frac{1}{2H(T)} \right] \quad (\text{II.32})$$

L'intégration de l'équation (II.31), entre l'état du col ( $A^*$ ,  $T^*$ ) et un état quelconque ( $A$ ,  $T$ ) du divergent, détermine le rapport des sections supersonique par

$$\frac{A}{A^*} = \text{Exp} \left( \int_T^{T^*} F_A(T) dT \right) \quad (\text{II.33})$$

Nous remarquons que pour calculer les paramètres  $\rho$  et  $A$ , nous avons besoin de calculer l'intégrale d'une certaine fonction où la procédure analytique est impossible, vu la complexité des fonctions à intégrer. Donc, notre intérêt s'oriente vers le calcul numérique. Tous les paramètres  $M$ ,  $\rho$  et  $A$  sont fonctions de la température.

### II.1.8. Débit massique critique

Le débit massique traversant une section A est donné par [4] et [14]:

$$\dot{m} = \int_A \rho V \cos \theta dA \quad (\text{II.34})$$

$\theta$ : est l'angle que fait le vecteur vitesse avec la normale à la section A. Si nous divisons la relation (II.34) par la quantité  $A^* \rho_0 a_0$ , pour rendre le calcul non-dimensionnel, nous aurons

$$\frac{\dot{m}}{A^* \rho_0 a_0} = \int_A \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \left( \frac{a}{a_0} \right) M \cos(\theta) \frac{dA}{A^*} \quad (\text{II.35})$$

Sachant que le débit critique est constant, on peut le calculer au niveau du col de la tuyère.

A cette section on  $\rho = \rho^*$ ,  $A = A^*$ ,  $a = a^*$ ,  $M = 1$  et  $\theta = 0$  (écoulement horizontal). Donc, la relation (II.35) se réduit à une relation plus simple:

$$\frac{\dot{m}}{A^* \rho_0 a_0} = \left( \frac{\rho^*}{\rho_0} \right) \left( \frac{a^*}{a_0} \right) \quad (\text{II.36})$$

La détermination du rapport des vitesses du son se fait par l'utilisation de la relation (II.9).

On obtient :

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{\gamma(T)}{\gamma(T_0)} \left[ \frac{T}{T_0} \right]} \quad (\text{II.37})$$

La relation (II.37) montre qu'il faut tenir compte de la variation du rapport  $\gamma(T)$  pour la détermination du rapport des vitesses du son.

## II.2. Modèle du gaz parfait

Pour faire une comparaison entre le cas à Haute Température et le cas d'un gaz parfait, on rappelle les relations thermodynamiques isentropiques d'un gaz parfait [4], [5], [6], [9],[10], [18]:

$$\frac{T}{T_0} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{P}{P_0} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{-1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad \frac{\dot{m}}{A^* \rho_0 a_0} = \left[ \frac{\gamma+1}{2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{II.38})$$



Les relations (II.38) donnant les paramètres  $T$ ,  $P$ ,  $\rho$ ,  $A$  et le débit sont reliées explicitement avec le nombre de Mach qui est la variable principale pour un gaz parfait. Pour notre modèle, la variable principale est la température à cause de l'équation (II.19), reliant  $M$  et  $T$ , où la détermination de l'expression analytique de son inverse est impossible.

### II.3. Procédure du calcul

On présente en premier lieu, la table de variation de la chaleur spécifique  $C_p$  et le rapport  $\gamma$ , pour l'air [14], voir le tableau II.1. Par contre, pour un gaz parfait, les valeurs de  $\gamma$  et  $C_p$  sont données à 298.15 K° par [4], [14] et [37], avec  $\gamma=1.402$ ,  $C_p=1001.28932 \text{ J / (Kg K)}$

**Tableau II.1** : Table de variation de  $C_p(T)$  et  $\gamma(T)$  avec la température pour l'air.

T (K°)	$C_p$ (J/(Kg K°))	$\gamma(T)$	T (K°)	$C_p$ (J/(Kg K°))	$\gamma(T)$	T (K°)	$C_p$ (J/(Kg K°))	$\gamma(T)$
55.538	1001.104	1.402	833.316	1107.192	1.350	2111.094	1256.813	1.296
.	.	.	888.872	1119.078	1.345	2222.205	1263.410	1.294
222.205	1001.101	1.402	944.427	1131.314	1.340	2333.316	1270.097	1.292
277.761	1002.885	1.401	999.983	1141.365	1.336	2444.427	1273.476	1.291
305.538	1004.675	1.400	1055.538	1151.658	1.332	2555.538	1276.877	1.290
333.316	1006.473	1.399	1111.094	1162.202	1.328	2666.650	1283.751	1.288
361.094	1008.281	1.398	1166.650	1170.280	1.325	2777.761	1287.224	1.287
388.872	1011.923	1.396	1222.205	1178.509	1.322	2888.872	1290.721	1.286
416.650	1015.603	1.394	1277.761	1186.893	1.319	2999.983	1294.242	1.285
444.427	1019.320	1.392	1333.316	1192.570	1.317	3111.094	1297.789	1.284
499.983	1028.781	1.387	1444.427	1204.142	1.313	3222.205	1301.360	1.283
555.538	1054.563	1.374	1555.538	1216.014	1.309	3333.316	1304.957	1.282
611.094	1054.563	1.370	1666.650	1225.121	1.306	3444.427	1304.957	1.282
666.650	1067.077	1.368	1777.761	1234.409	1.303	3555.538	1308.580	1.281
722.205	1080.005	1.362	1888.872	1243.883	1.300			
777.761	1093.370	1.356	1999.983	1250.305	1.298			

### II.3.1. Polynôme d'interpolation de $C_p(T)$

L'interpolation des valeurs de  $C_p$  en fonction de la température est réalisée par un polynôme du 9<sup>ème</sup> degré [23] et [24]. Ce choix est justifié par la petite valeur de l'erreur [39] obtenue entre les valeurs tabulées et les valeurs interpolées [15]. A titre d'information, plusieurs tests d'interpolations [39] ont été effectués afin de choisir la meilleure interpolation. En outre, on a utilisé le schéma de Horner [15] pour la présentation du polynôme  $C_p(T)$ . Alors

$$C_p(T) = a_1 + T(a_2 + T(a_3 + T(a_4 + T(a_5 + T(a_6 + T(a_7 + T(a_8 + T(a_9 + T(a_{10})))))))))) \quad (\text{II.39})$$

Les coefficients  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, 10$ ) sont présentés dans le tableau II.2 suivant

**Tableau II.2** : Coefficients du polynôme  $C_p(T)$

$i$	$a_i$	$i$	$a_i$	$i$	$a_i$	$i$	$a_i$	$i$	$a_i$
1	1001.1058	3	$-6.3376997 \cdot 10^{-4}$	5	$-4.0338459 \cdot 10^{-9}$	7	$-1.3509355 \cdot 10^{-15}$	9	$-4.8467531 \cdot 10^{-23}$
2	$4.0661289 \cdot 10^{-2}$	4	$2.7474759 \cdot 10^{-6}$	6	$3.0697736 \cdot 10^{-12}$	8	$3.472262 \cdot 10^{-19}$	10	$2.8411878 \cdot 10^{-27}$

Un petit problème se pose durant l'interpolation par la formule (II.39). Après une présentation graphique du polynôme de  $C_p(T)$  et une comparaison avec les valeurs données par le tableau II.1, on remarque une variation ondulée à basse température jusqu'à environ 240 K, au lieu d'avoir une fonction constante dans cette portion conformément aux valeurs de la table. A cet effet, une correction est introduite pour rapprocher les valeurs interpolées des valeurs du tableau II.1. Alors, Si  $T = \bar{T} = 240$  K, la relation (II.39) donne la valeur suivante :

$$\bar{C}_p = C_p(\bar{T}) = 1001.15868 \text{ J / (KgK)}$$

Donc, la correction est faite de la manière suivante

- Si  $T \leq \bar{T}$ , on utilise la correction suivante:  $C_p(T) = \bar{C}_p$
- Si  $T > \bar{T}$ , on utilise la formule (II.39).

Concernant la détermination de la forme analytique de la fonction  $C_p(T)$ , on peut avoir plusieurs formes de polynômes par plusieurs procédures et méthodes. Pour le choix de la bonne forme d'interpolation, il faut faire une étude sur les erreurs entre les valeurs du tableau II.1 et les valeurs données par la substitution dans l'équation analytique du polynôme d'interpolation. L'interpolation choisie donne une erreur meilleure à  $\epsilon = 10^{-3}$ .

### II.3.2. Intégration de la chaleur spécifique $C_P(T)$

Une fois que l'interpolation est faite, on détermine la fonction  $H(T)$  de la relation (II.15), par intégration de la fonction  $C_P(T)$  dans l'intervalle  $[T, T_0]$ . Alors,  $H(T)$  est une fonction à un paramètre  $T_0$  et elle est définie tant que  $T \leq T_0$ . Remplaçons la relation (II.39) dans la relation (II.15) et écrivons le résultat obtenu de l'intégration sous la forme du schéma de Horner, on aura :

$$H(T) = H_0 - [c_1 + T(c_2 + T(c_3 + T(c_4 + T(c_5 + T(c_6 + T(c_7 + T(c_8 + T(c_9 + T(c_{10})))))))))] \quad (\text{II.40})$$

$$\text{Avec } H_0 = T_0(c_1 + T_0(c_2 + T_0(c_3 + T_0(c_4 + T_0(c_5 + T_0(c_6 + T_0(c_7 + T_0(c_8 + T_0(c_9 + T_0(c_{10})))))))))) \quad (\text{II.41})$$

$$\text{et } c_i = a_i / i \quad (i=1, 2, 3, \dots, 10)$$

Vu la correction faite sur la fonction  $C_P(T)$ , la fonction  $H(T)$  prend la forme suivante:

- Si  $T_0 < \bar{T}$  alors:  $H(T) = \bar{C}_P (T_0 - T)$
- Si  $T_0 > \bar{T}$  on a deux cas :  $\begin{cases} \text{si } T > \bar{T} \text{ alors } H(T) = \text{relation (2.40)} \\ \text{si } T \leq \bar{T} \text{ alors } H(T) = \bar{C}_p (\bar{T} - T) + H(\bar{T}) \end{cases}$

### II.3.3. Calcul numérique des rapports thermodynamiques

La détermination des rapports des masses volumiques et des sections donnés par les formules (II.26) et (II.33), respectivement, demande l'intégration numérique des fonctions  $F_p(T)$  et  $F_A(T)$  dans les intervalles  $[T, T_0]$  et  $[T, T^*]$ . Notons que la fonction  $F_A(T)$  dépend du paramètre  $T_0$ . Pour avoir une idée sur la variation de chacune des deux fonctions précédentes, avant de prendre une décision sur le choix de la quadrature d'intégration, nous avons tracé leurs courbes de variations. Elles sont illustrées par les figures II.1 et II.2 respectivement. Nous pouvons conclure que les quadratures d'intégrations à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision vue la variation très rapide aux extrémités gauches de chaque intervalle ( $T=T_S$ ). Pour une bonne présentation à ces extrémités, le traçage des fonctions est choisi pour la température  $T_0=500$  K (basse température) et  $M_S=6.00$  (extrême supersonique). Nous remarquons que chaque fonction présente une dérivée très grande au voisinage de la température  $T_S$ . Une condensation des nœuds est alors nécessaire au voisinage de la température  $T_S$  pour les deux fonctions [24].

Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision très élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature.



$$\text{Avec} \quad z_i = \frac{i-1}{N-1} \quad 1 \leq i \leq N \quad (\text{II.43})$$

Après la détermination de la fonction de condensations, on peut déterminer la distribution des températures par:

$$T_i = s_i (T_D - T_G) + T_G \quad (\text{II.44})$$

La température  $T_D$  égale à  $T_0$  pour la fonction  $F_p(T)$ , et égale à  $T^*$  pour la fonction  $F_A(T)$ . La température  $T_G$  égale à  $T^*$  pour le paramètre critique, et égale à  $T_S$  pour le paramètre à une section supersonique. Si on prend une valeur de  $b_1$  proche de zéro ( $b_1=0.1$ ) et  $b_2=2.0$ , on peut condenser les nœuds vers l'extrémité gauche  $T_S$  de l'intervalle. Si on prend des valeurs de  $b_1$  proche de 2 (par exemple  $b_1=1.9$ ), on peut condenser les nœuds vers l'extrémité droite. Pour des sous intervalles de même longueur, on peut prendre  $b_1=1.0$ . La figure II.3 présente la distribution des nœuds suivant le choix de la valeur de  $b_1$ . Il faut noter que notre intérêt est de condenser les nœuds vers l'extrémité gauche  $T_S$  vu la variation des fonctions  $F_p(T)$  et  $F_A(T)$

## II.4. Paramètres critiques au col correspondant à $T_0$

L'état générateur est donné par le nombre de Mach nul ( $M=0$ ). Alors, les paramètres critiques ( $T^*$ ,  $P^*$ ,  $\rho^*$  et  $a^*$ ) correspondant à la température  $T_0$  et au nombre de Mach  $M=1$  (ce qui est le cas au col de la tuyère), peuvent être déterminés. Si on remplace dans la relation (II.19), les paramètres  $M$  et  $T$  par les conditions critiques, on obtient :

$$M^{*2} = 2 \frac{2 H(T^*)}{\gamma(T^*) \cdot r \cdot T^*} \quad (\text{II.45})$$

Comme  $M^*=1$ , alors, la relation (II.45) devient

$$F(T^*) = 2 H(T^*) - a^2(T^*) = 0 \quad (\text{II.46})$$

La détermination de la racine  $T^*$  de l'équation (II.46) se fait en utilisant l'algorithme de dichotomie [9] et [23]. Sachant que  $T^* < T_0$ , on peut choisir facilement un intervalle  $[T_1, T_2]$  contenant la température  $T^*$  et qui doit vérifier la condition  $F(T_1) \cdot F(T_2) \leq 0$ . On peut

prendre  $T_1=0 \text{ K}^\circ$  et  $T_2=T_0$ . Une fois que cet intervalle est déterminé, on peut calculer  $T_1$  avec une précision  $\varepsilon$ , et par suite le rapport  $T^* / T_0$  correspondant à la température  $T_0$ . La valeur  $T^*$  obtenue dépend de la précision  $\varepsilon$ . Le nombre de subdivisions  $K$  de l'intervalle  $[T_1, T_2]$  correspondant à la précision  $\varepsilon$  nécessaire pour déterminer la température  $T^*$  est donné par [10]

$$K = 1.4426 \text{ Log } (T_0 / \varepsilon) + 1 \quad (\text{II.47})$$

Si  $\varepsilon = 10^{-16}$ , le nombre de subdivisions  $K$  ne peut excéder 66.

Si nous remplaçons  $T=T^*$  dans la relation (II.26) et nous intégrons la fonction, dans l'intervalle  $[T^*, T_0]$ , en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche ( $T=T^*$ ), nous obtenons le rapport critique des masses volumiques suivant:

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \text{Exp} \left( \int_{T^*}^{T_0} F\rho(T) dT \right) \quad (\text{II.48})$$

Le rapport critique des pressions peut être déterminé en remplaçant ceux des températures et des masses volumiques dans la relation (II.27), on aura

$$\frac{P^*}{P_0} = \left( \frac{\rho^*}{\rho_0} \right) \left( \frac{T^*}{T_0} \right) \quad (\text{II.49})$$

Le rapport des vitesses critiques du son peut être obtenu en substituant la valeur de  $T^*$  dans la relation (II.37) par :

$$\frac{a^*}{a_0} = \left[ \frac{\gamma(T^*)}{\gamma(T_0)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{T^*}{T_0} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.50})$$

Pour trouver la valeur non-dimensionnelle du débit massique critique, il suffit de remplacer l'expression du rapport critique des masses volumiques (II.48), et celle des vitesses du son (II.50), dans l'expression (II.36).

## II.5. Paramètres Supersoniques correspondant à $T_0$

On procède maintenant à la détermination des rapports thermodynamiques et géométrique à une section quelconque du divergent de la tuyère correspondant à un nombre de Mach supersonique  $M_S$ . Cette section est caractérisée par  $\rho=\rho_S$ ,  $P=P_S$ ,  $A=A_S$  et  $T=T_S$ .

L'obtention du rapport des températures se fait en premier lieu par le remplacement de  $T=T_S$  et  $M=M_S$  dans la relation (II.19), on obtient:

$$M_S^2 = 2 \frac{H(T_S)}{\gamma(T_S) \cdot r \cdot T_S}$$

$$\text{Ou} \quad F(T_S) = 2H(T_S) - M_S^2 a^2(T_S) = 0 \quad (\text{II.51})$$

La détermination de la racine  $T_S$  de l'équation (II.51) se fait de la même manière que celle de  $T^*$  et avec la même démarche en utilisant l'algorithme de dichotomie [9] et [24], sauf ici, nous avons  $T_S < T^*$ . Une fois l'intervalle  $[T_1, T_2]$  déterminé, on peut facilement obtenir  $T_S$  avec une précision  $\varepsilon$  et par suite le rapport  $T_S/T_0$  correspondant à la température  $T_0$ . On peut prendre dans ce cas  $T_1 = 0 \text{ K}$  et  $T_2 = T^*$ . La valeur obtenue de  $T^*$  dépend de la précision  $\varepsilon$ .

Remplaçons  $T=T_S$  dans la relation (II.26) et intégrons la fonction  $F\rho(T)$  dans l'intervalle  $[T_S, T_0]$ , en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche, nous obtenons le rapport des masses volumiques.

$$\frac{\rho_S}{\rho_0} = \text{Exp} \left( - \int_{T_S}^{T_0} F\rho(T) dT \right) \quad (\text{II.52})$$

Le rapport des pressions supersoniques peut être déterminé en remplaçant ceux des températures et des masses volumiques dans la relation (II.27), nous aurons

$$\frac{P_S}{P_0} = \left( \frac{\rho_S}{\rho_0} \right) \left( \frac{T_S}{T_0} \right) \quad (\text{II.53})$$

Le rapport des vitesses du son peut être obtenu encore en remplaçant  $T$  par  $T_S$  dans la relation (II.37), nous obtenons

$$\frac{a_S}{a_0} = \left[ \frac{\gamma(T_S)}{\gamma(T_0)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{T_S}{T_0} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.54})$$

L'obtention du rapport géométrique des sections se fait par la substitution de  $T$  par  $T_S$  dans la relation (II.33), ensuite l'intégration de la relation obtenue dans l'intervalle  $[T_S, T_0]$  en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche  $T_S$ . On obtient :

$$\frac{A_S}{A^*} = \text{Exp} \left( \int_{T_S}^{T^*} F_A(T) dT \right) \quad (\text{II.55})$$

### Remarque

- A titre d'information, on peut calculer le débit à cette section en introduisant les paramètres nécessaires dans la relation (II.35) puis en intégrant, on obtient le résultat suivant:

$$\frac{\dot{m}}{A^* \rho_0 a_0} = \left( \frac{\rho^*}{\rho_0} \right) \cdot \left( \frac{a^*}{a_0} \right) \cdot M_S \cdot \left( \frac{\rho^*}{\rho_0} \right) \quad (\text{II.56})$$

Puisque le débit est constant à travers la tuyère, les relations (II.36) et (II.56) donnent le même résultat.

- La précision du résultat de l'intégration de (II.48), (II.52) et (II.55) dépend essentiellement des valeurs de  $N$ ,  $b_1$  et  $b_2$ .



# Chapitre III

METHODEE DES CARACTERISTIQUE  
POUR LE CALCUL L'EOULEMENT  
SUPERSONIQUE

### III.1. Hypothèses :

La résolution du problème d'écoulement dans les tuyères supersoniques consiste à résoudre simultanément les équations de conservations de la masse, quantités de mouvement axiale et radiale et de l'énergie. Notons que ces équations sont des équations différentielles aux dérivées partielles dont la résolution n'est pas connue a priori, vu le manque des conditions aux limites pour l'unicité de la solution, étant donné encore que le profil de la tuyère est lui-même inconnu et recherché. À ce titre, on a mentionné et considéré les hypothèses suivantes :

- 1- l'écoulement est entièrement établi (stationnaire).
- 2- les forces à distances, telle que, l'effet de la pesanteur, les interactions entre les particules du fluide sont négligées et les forces extérieures de source électriques et magnétiques sont absentes.
- 3- le gaz est parfait. Cependant, le volume occupé par les molécules du gaz est supposé nul, ce qui donne que l'effet de la viscosité est négligé.
- 4- le gaz est thermiquement parfait. Cependant, la variation ou l'augmentation de la température ne permet pas la dissociation des molécules.
- 5- le gaz est calorifiquement imparfait, ce qui donne  $C_p$  et  $\gamma$  restent constantes durant la détente du gaz et ne dépendent pas de la température.
- 6- l'écoulement est entièrement isentropique. Cette propriété est expliquée par l'absence de dissipation causée par la naissance des ondes de choc.
- 7- l'écoulement est idéal, le transfert de chaleur par conduction entre les différentes particules de gaz est négligé.
- 8- l'écoulement est irrotationnel. Cette hypothèse est vérifiée tant que l'entropie est invariable.
- 9- le transfert de chaleur forcé par convection ou rayonnement avec la paroi de la tuyère est absent.

### III.2. Equation de l'écoulement :

Dans un système de coordonnées cartésiennes, les équations de base de l'écoulement sont les suivantes :

1- équation de continuité :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + y^{-\delta} \frac{\partial(y^{\delta} \rho v)}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.1})$$

2- équation de conservation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.2})$$

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.3})$$

3- équation de conservation d'énergie :

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} \quad (\text{III.4})$$

avec  $v^2 = u^2 + v^2$

et  $a = \sqrt{\gamma r T}$

Cette équation est valable suivant une ligne de courant.

4- équation d'état d'un gaz parfait :

$$\frac{P}{P} = \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]^{\gamma}$$

$$\text{Ou} \quad P = \rho r T \quad (\text{III.5})$$

$$\text{Avec} \quad r = \frac{\mathfrak{R}}{m}$$

Ce système est constitué cinq équation avec cinq inconnus ( $\rho, u, v, T$ ).

Après des transformations mathématiques des équations (III.2), (III.3), (III.5), on peut obtenir une équation unique pour les composantes du vecteur vitesse de la forme suivante :

$$(a^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (a^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} - uv \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \delta a^2 \frac{v}{y} = 0 \quad (\text{III.6})$$

Avec  $\delta = 0$  ; Le cas plan.

$\delta = 1$  ; Le cas axisymétrique.

On obtient ainsi l'équation générale de la dynamique des gaz. Dans cette équation la vitesse du son est fonction de la vitesse  $v$  selon l'équation d'énergie (III.4).

Remarque :

Pour l'écoulement axisymétrique, la symétrie est suivant l'axe  $x$ . Cependant, la direction  $y$  dans les équations est celle la direction radiale. Comme l'écoulement est isentropique .l'entropie est invariable dans tout le champ d'écoulement selon le théorème de Crocco. L'écoulement est donc irrotationnel. Autrement:

$$\text{rot} \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \nabla \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.7})$$

Cette équation constitue une équation auxiliaire, dont son utilisation remplace l'une de cinq équations de base [41].

Cependant, le système d'équations de l'écoulement devient :

$$(a^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (a^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} - uv \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \delta a^2 \frac{v}{y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}$$

(III.8)

Avec :

 $\delta = 0$  ; le cas plan. $\delta = 1$  ; le cas axisymétrique

Il existe un potentiel de vitesse  $\Phi$ , tel que :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad ; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

l'équation (III.6) s'exprime alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left[ a^2 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left[ a^2 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \\ + \delta \frac{a^2}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad \text{(III.9)}$$

Observons que l'équation (III.9) représente une équation différentielle aux dérivées partielles de deuxième ordre .elle est non linéaire .les coefficients des termes de deuxième ordre contient les dérivées de première ordre de la fonction  $\Phi$ .L'équation (III.9) est de type hyperbolique, si le discriminant D est supérieur à zéro pour tout point du domaine d'écoulement .autrement :

$$D = B^2 - 4 A C > 0 \quad \text{(III.10)}$$

Avec

$$B = - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2 u v$$

$$A = a^2 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 = a^2 - u^2$$

$$C = a^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 = a^2 - v^2$$

La condition (III.10) se réduit à :

$$\frac{u^2+v^2}{a^2} > 1 \quad (\text{III.11})$$

Ou

$$M > 1$$

Les coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  sont généralement mal adaptées à une description de l'écoulement supersonique et les équations présentées précédemment ne peuvent donc utilisées directement. dans le plan  $(xy)$  il ya certaine direction pour lesquelles les dérivées des variables de l'écoulement telle que  $(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \text{etc.})$  sont indéterminées ou discontinues [41]. Cependant, ces directions sont appelées les caractéristiques qu'on les choisies comme de nouvelles coordonnées au système soit d'équations (III.8), on peut s'attendre à ce que ce système soit considérablement simplifié. La détermination de ces directions se fera dans le paragraphe (III-4).

### III.3. Propriétés des équations hyperboliques :

Sans entrer dans les détails de la théorie mathématique des équations hyperboliques, on peut mentionner les propriétés suivantes :

1. Une équation est de type hyperbolique, si une certaine relation est satisfaite par le coefficient de dérivée le plus grand, dans notre cas, cette condition est la relation (III.11).
2. La solution dans un point ne dépend que de l'état en amont à ce point.
3. Les équations hyperboliques de distinguent par une direction privilégiée dans le plan  $(xy)$ , ces directions sont appelées les caractéristiques .dans notre cas les caractéristiques sont les lignes de mach qui sont définies en chaque point ou le nombre de mach est  $M$ , tracées l'une vers le haut et l'autre vers le bas faisant un angle  $\mu$  avec le vecteur vitesse  $v$ .

Cependant dans le cas général il y a une différence entre ligne de mach et les lignes caractéristiques, ces dernières sont courbes et tangentes aux lignes de mach, les vitesses sont continués à travers les caractéristiques [41].

Sur les lignes caractéristiques, les variables d'états dépendantes obéissent à des relations dite relations de compatibilités .ces relations sont la base de la méthode numérique.

### III.4. Equations des caractéristiques :

Les équations des caractéristiques sont obtenues dans la première étape par la multiplication des équations (III.6) et (III.7) par des inconnues  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  .après la sommation on obtient :

$$\sigma_1(a^2 - u^2) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma_1(-2uv) - \sigma_2}{\sigma_2(a^2 - u^2)} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \sigma_2 \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sigma_1(a^2 - v^2)}{\sigma_2} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \sigma_1 \frac{\sigma a v^2}{y} = 0 \quad (\text{III.12})$$

Supposons que  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$  sont des fonctions continues. Cependant :

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad \frac{dv}{dy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}$$

Avec :

$$\lambda = \frac{dy}{dx} : \text{est la pente des caractéristiques courbes et sont égaux aux coefficients de } \frac{\partial u}{\partial y}$$

et  $\frac{dv}{dy}$  dans l'équation (III.12) par :

$$\lambda = \frac{\sigma_1(-2uv) - \sigma_2}{\sigma_2(a^2 - u^2)} \quad ; \quad \lambda = \frac{\sigma_1(a^2 - v^2)}{\sigma_2} \quad (\text{III.13})$$

a partir des équations précédentes, on obtient un système d'équation en  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  par :

$$\begin{cases} \sigma_1[(a^2 - u^2) \lambda + 2 u v] + \sigma_2[1] = 0 \\ \sigma_1[(a^2 - v^2) ] + \sigma_2[-\lambda] = 0 \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Le système (III.14) possède des solutions non triviales pour des inconnues  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  si le déterminant de ce système est égale à zéro, ce qui donne :

$$(a^2 - u^2) \lambda^2 + 2 u v \lambda + (a^2 - v^2) = 0 \quad (\text{III.15})$$

L'équation (III.15) donne deux solutions par :

$$\lambda^\pm = \left[ \frac{dy}{dx} \right]^\pm = \frac{uv \pm a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2} \quad (\text{III.16})$$

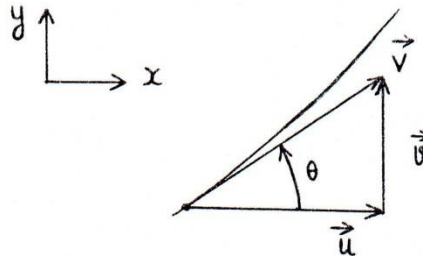


Figure III.1 : Composantes du vecteur vitesse.

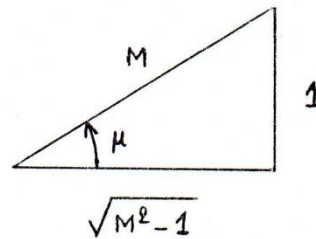
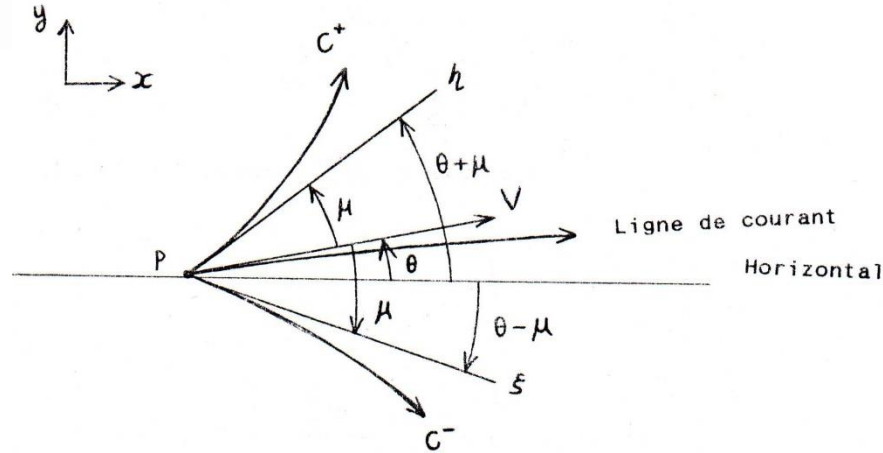


Figure III.2 : Illustration de la relation entre  $\mu$  et  $M$





**Figure III. 3** : Les caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$  et les lignes de mach  $\mu$  et  $\xi$ .

Ces deux solutions représentent deux courbes  $s$  dans le plan  $(xy)$  qui sont appelées les caractéristiques. Une forme très simplifiée de (III.16) est obtenue par introduction de  $u$  et  $v$  en termes de  $v$  et  $\theta$  et par  $M$  en terme de  $\mu$  par :

D'après la figure (III.1) on a :

$$\begin{cases} u = v \cos(\theta) \\ v = v \sin(\theta) \\ \theta = \arctg\left(\frac{v}{u}\right) \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

D'après la figure (III.2) on a :

$$\begin{cases} M = \frac{1}{\sin(\mu)} \\ \sqrt{M^2 - 1} = \cotg(\mu) \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Substituons les équations (III.17) et (III.18) dans (III.16) et après quelques transformations trigonométriques on aboutit à

$$\lambda^{\pm} = \left[ \frac{dy}{dx} \right]^{\pm} = \text{tg}(\theta \pm \mu) \quad (\text{III.19})$$

Cette équation est illustrée par la figure (III.3), telle que  $C^+$  et  $C^-$  représentent respectivement la caractéristique montante et descendante.

### III.5. Domaine de dépendance-région d'influence :

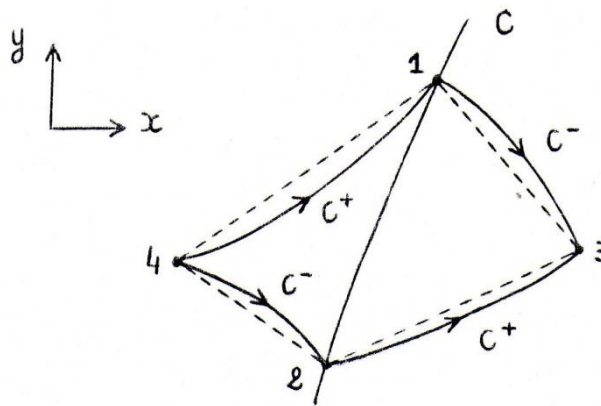
Considérons deux points 1 et 2 de la courbe  $c$  dans la figure(III.4). Il ya en effet deux solutions possibles :

- soit le point d'intersection 4 de la caractéristique  $C^-$  menée par le point 2 et l'autre  $C^+$  menée par le point 1.
- soit le point d'intersection 3 de la caractéristique  $C^+$  menée par le point 2 et l'autre  $C^-$  menée par le point 1.

Considérons un point 3 vers le quel convergent deux caractéristiques, une  $C^-$  et une  $C^+$ , figure (III.5).

L'état de l'écoulement en point 3 ne dépend que de l'état de l'écoulement dans la zone située entre les deux caractéristiques convergentes vers, c'est ce qu'on appelle le domaine de dépendance du point 3.

Considérons les deux caractéristiques  $C^-$  et  $C^+$  issues d'un point 4, figure (III.6).



**Figure III.4 :** Solution de part et d'autre d'une courbe  $C$ .

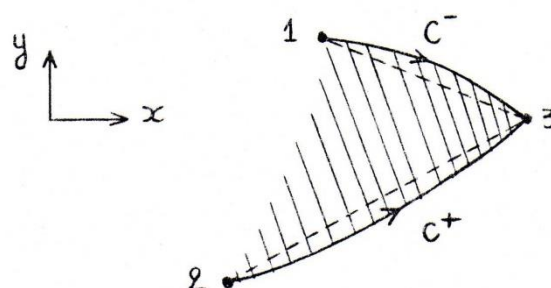


Figure III.5 : Illustration du domaine de dépendance du point 3.

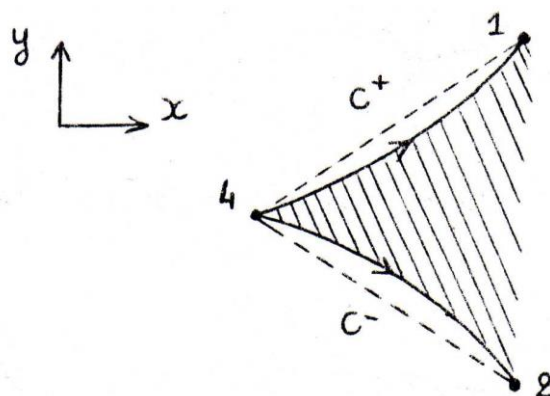


Figure III.6 : Illustration de la région d'influence du point 4.

### III.6. Relations de comptabilité :

Comme on a mentionné au paragraphe (III.2) que les équations obtenues (III.8) ne peuvent être utilisées directement et dans le paragraphe (III.4) on a déterminé les directions des caractéristiques dans le plan  $(xoy)$ . Les équations (III.19) découlent de la localisation géométrique des lignes  $\xi$  et  $\eta$  constante. Ces lignes ainsi définies sont en général des lignes courbées. Puisque  $\mu$  et  $\theta$  ont des valeurs locales dans le champ d'écoulement. Ces lignes ne sont pas connues a priori. Par conséquent. En introduisant les lignes  $\xi$  et  $\eta$  constantes comme nouvelles coordonnées dans les équations (III.6) et (III.7), on peut s'attendre à ce que ce système

soit considérablement simplifiée. Dans le plan  $(xy)$ , nous obtenons par cette transformation deux familles de courbes  $\xi(x,y)=\text{constante}$  et  $\eta(x,y)=\text{constante}$  qui prennent ainsi la fonction d'un nouveau réseau de coordonnées.

Cette transformation se révélera très utile pour la description d'un écoulement supersonique. Lors de la mise en forme des équations de base pour cette transformation on constate qu'il est avantageux de travailler à partir de (III.8) avec  $V$  et  $\theta$  comme variables dépendantes. D'après la figure (III.1) :

$$\begin{cases} u = v \cos(\theta) \\ v = v \sin(\theta) \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Les dérivées partielles deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos(\theta) - V \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin(\theta) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} \cos(\theta) - V \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\theta) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos(\theta) + V \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin(\theta) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} \cos(\theta) + V \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\theta) \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

Par substitution des relations (3.20) et (3.21) dans (3.6) et (3.7) on obtient à l'aide de définition de  $\eta$  selon (2.18) et après quelques manipulation mathématiques et réarrangement :

$$\sin(\mu) \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin(\theta) - \frac{\partial V}{\partial x} \cos(\theta) \right] + \frac{\cotg(\mu)}{V} \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial V}{\partial y} \sin(\theta) \right] \cos(\mu) - \delta \frac{\sin(\mu) \sin(\theta)}{y} = 0 \quad (\text{III.22})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\theta) + \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \sin(\theta) - \frac{\partial V}{\partial y} \cos(\theta) \right] = 0 \tag{III.23}$$

Par multiplication de (III.29) par  $\cos(\eta)$  et ensuite, soit par l'addition, soit par la soustraction de (III.22) on obtient après quelques transformations trigo métriques :

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\theta - \mu) \right] + \frac{\cotg(\mu)}{V} \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial V}{\partial y} \sin(\theta - \mu) \right] - \delta \frac{\sin(\mu) \sin(\theta)}{y} = 0 \tag{III.24}$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\theta + \mu) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\theta + \mu) \right] + \frac{\cotg(\mu)}{V} \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \cos(\theta + \mu) + \frac{\partial V}{\partial y} \sin(\theta + \mu) \right] - \delta \frac{\sin(\mu) \sin(\theta)}{y} = 0 \tag{III.25}$$

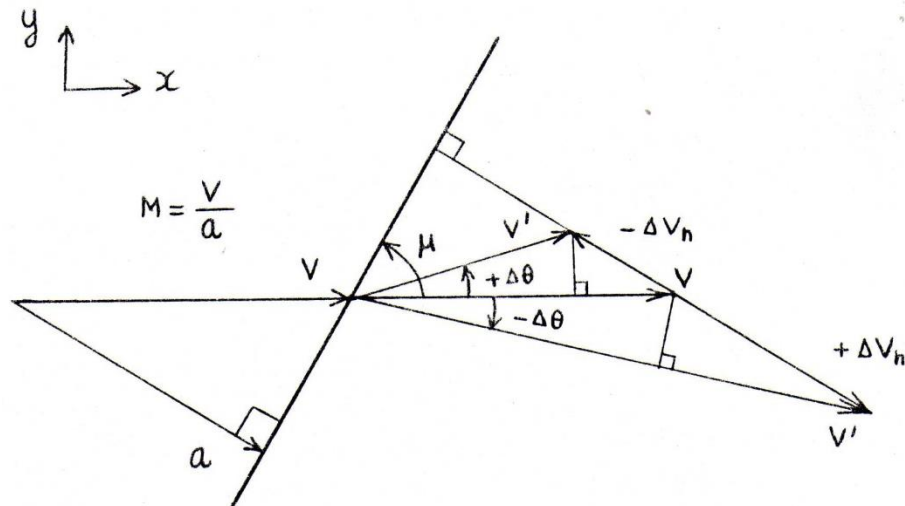
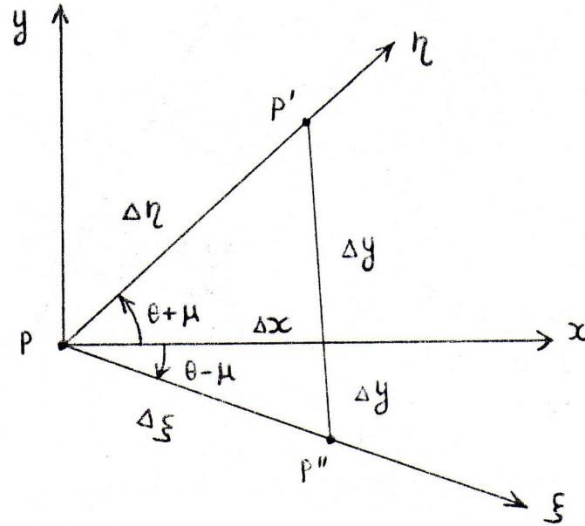


Figure III. 7 : Déviation de l'écoulement à travers une onde de mach correspondant à une compression ou une détente.



**Figure III. 8** : Relation entre les lignes caractéristiques (mach) et les coordonnées cartésiennes.

On introduit à cette étape les coordonnées  $\xi(x,y)$  et  $\eta(x,y)$ . D'après la figure (III.8), pour une fonction scalaire  $f$  arbitraire :

Si on se déplace de  $p$  à  $p'$  le long de la caractéristique  $\eta$ , on a :

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \eta} \Delta \eta \quad (\text{III.26})$$

Suivant  $x$ , puis suivant  $y$ , on a :

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \quad (\text{III.27})$$

Par identification de (III.26) et (III.27) :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\Delta \eta}{\Delta x} \quad (\text{III.28})$$

Cependant, d'après la même figure on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}(\theta + \mu) \quad (\text{III.29})$$

$$\frac{\Delta \eta}{\Delta x} = \frac{1}{\cos(\theta + \mu)} \quad (\text{III.30})$$

Remplaçant (III.29) et (III.30), ensuite multipliant par  $\cos(\theta + \mu)$  on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos(\theta + \mu) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\theta + \mu) = \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (\text{III.31})$$

De même, une relation entre la direction  $\xi$  et  $x, y$  cartésiennes, on allons de  $p$  à  $p''$  sur  $\xi$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\theta - \mu) = \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad (\text{III.32})$$

Par identification de (III.32) et (III.24) on peut écrire :

Le long de la ligne  $\eta = \text{cte}$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\cotg(\mu)}{V} \frac{\partial V}{\partial \xi} = -\delta \frac{\sin(\mu) \sin(\theta)}{y} \quad (\text{III.33})$$

De même, par identification de (III.31) et (III.25) on peut écrire :

Le long de la ligne  $\xi = \text{cte}$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\cotg(\mu)}{V} \frac{\partial V}{\partial \eta} = -\delta \frac{\sin(\mu) \sin(\theta)}{y} \quad (\text{III.34})$$

Ce résultat est particulièrement intéressant, puisque dans l'équation applicable le long de ligne  $\eta = \text{constante}$  n'interviennent que les dérivées dans la direction  $\xi$  et vice versa. Les lignes  $\xi$  et  $\eta$  constantes sont les lignes caractéristiques du système d'équation (III.33) et (III.34).

L'utilisation de cette propriété est évidente, puisque les deux équations peuvent être intégrées immédiatement le long des deux lignes de mach.

$$\frac{\partial(v + \theta)}{\partial \xi} = \delta \frac{\sin(\mu) \sin(\theta)}{y} \quad \text{suivant } \xi \quad (\text{III.35})$$

$$\frac{\partial(v - \theta)}{\partial \eta} = \delta \frac{\sin(\mu) \sin(\theta)}{y} \quad \text{suivant } \eta \quad (\text{III.36})$$

Pour le cas plan :

Les équations (III.35) et (III.36) se réduisent à :

$$\frac{\partial(v + \theta)}{\partial\xi} = 0 \quad \text{suivant } \xi$$

$$\frac{\partial(v - \theta)}{\partial\eta} = 0 \quad \text{suivant } \eta$$

Qui se simplifient à :

$v + \theta = Q^-$	$\text{suivant } \xi$	(III.37)
$v - \theta = Q^+$	$\text{suivant } \eta$	(III.38)

Avec :  $Q^-$  et  $Q^+$  : constantes appelées *invariantes de Riemann*.

Ces deux relations sont les relations de compatibilités entre  $v$  et  $\theta$  pour le cas d'un écoulement plan, elles donnent des résultats simples que  $(v - \theta)$  et  $(v + \theta)$  sont constantes le long des caractéristiques  $\eta$  et  $\xi$  respectivement indépendamment de la géométrie de l'écoulement. Cependant, les équations complètes sont données par (III.37), (III.38) et (III.19).

Pour le cas axisymétrique :

Les équations (III.35) et (III.36) deviennent :

$\frac{\partial(v + \theta)}{\partial\xi} = \frac{\sin(\mu) \sin(\theta)}{y}$	$\text{suivant } \xi$
$\frac{\partial(v - \theta)}{\partial\eta} = \delta \frac{\sin(\mu) \sin(\theta)}{y}$	$\text{suivant } \eta$



Ce résultat est différent à celui du cas plan du fait que l'intégration n'est pas simple, car la géométrie ( $y$ ) est prise en compte. Pour la résolution complète de l'écoulement il faut ajouter les équations des caractéristiques (III.19). La résolution est simultanée ou il faut tenir les positions des nœuds.

**Remarque :** Une fois le problème est résolu par  $v$  et  $\theta$ , on peut facilement obtenir les variations des autres paramètres, tel que  $(M, \lambda, P/P_0, T/T_0, \rho/\rho_0 \dots)$  à partir des équations appropriées.

# Chapitre IV

## TUYERE À DETENTE CENTREE A HAUTE TEMPERATURE

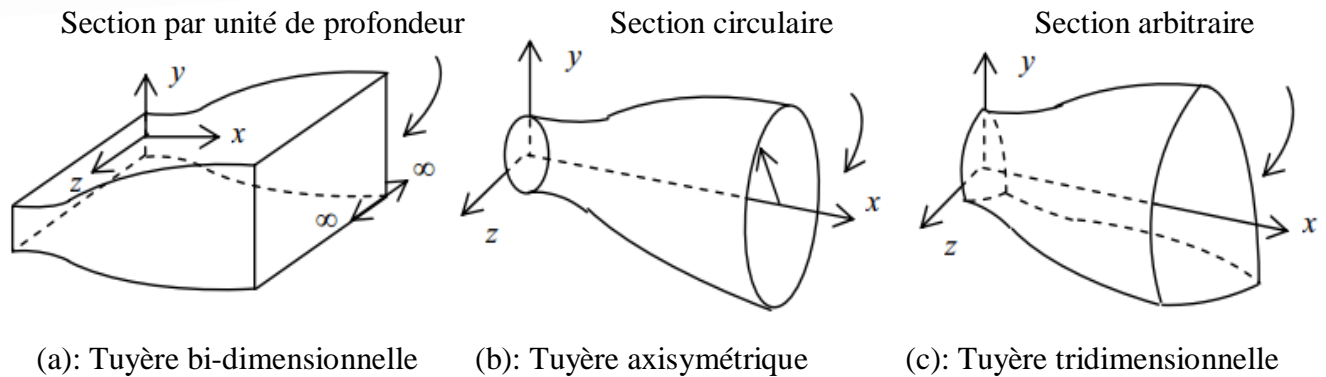
## Introduction :

La tuyère est un organe utilisée pour accélérer un écoulement supersonique jusqu'à un nombre de Mach supersonique, afin d'engendrer une force de poussée comme une résultante de cette accélération.

Dans ce chapitre, on va présenter la méthode de conception et dimensionnement des tuyères type à détente centrée, bidimensionnelle ou axisymétrique, en utilisant la méthode des caractéristiques, en ajoutant l'effet de variation de la chaleur spécifique  $C_p(T)$  et le rapport  $\gamma(T)$  en fonction de la température [21], [22] et [32]. Cette hypothèse est valable lorsque la température génératrice de la chambre de combustion est élevée, inférieur au seuil de dissociation des molécules.

La figure IV.1 présente les différentes géométries de tuyère supersoniques de propulsion ayant un écoulement horizontal au col et à la section de sortie. Les cas (a) et (b) respectivement de géométrie bi-dimensionnelle et axisymétrique sont le but de ce chapitre. Le cas (c) représente une tuyère tridimensionnelle de section de sortie arbitraire. Elle sera l'objet de travaux de futur. L'idée de base de sa conception est présentée dans l'appendice C.

Dans la réalité, la conception des tuyères se fait suivant la manière de son utilisation. Si la tuyère est utilisée pour la construction d'une soufflerie supersonique, notre intérêt est que la propulsion du gaz donne un écoulement froid à la sortie en plus d'être uniforme et parallèle. Cette condition a pour raison de faire des expériences et de conserver les outils de mesures, sans baser sur la longueur d'être minimale ou non. Mais si la tuyère est conçue pour l'application des missiles et avions supersoniques, on s'intéresse dans ce cas, d'avoir une tuyère ayant un poids le plus petit possible et une force de poussée élevée.



**Figure IV.1 :** Différentes géométries de tuyères

La tuyère supersonique est divisée en deux parties. Il est à noter que la portion supersonique est indépendante des conditions amont de la ligne sonique. On peut étudier cette partie indépendamment de la partie subsonique. Cette dernière est utilisée pour déterminer la ligne sonique au col de la tuyère. Dans cette classe, on va étudier un type de tuyère donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. Elle est nommée tuyère à détente centrée. Ce type de tuyère donne une longueur minimale par rapport aux autres types existants. Il existe deux catégories pour ce type de tuyères suivant la ligne sonique. Si la ligne sonique est une ligne droite, la paroi au col génère des ondes de détente centrées et divergentes. La deuxième catégorie possède une ligne sonique courbée; dans ce cas l'écoulement à l'intérieur de la tuyère possède des lignes de Mach non centrées. Ce type de tuyère est nommé Tuyère de longueur minimale avec ligne sonique courbée, ou tuyère à zone d'expansion. Chaque type existe pour un écoulement bi- dimensionnel et axisymétrique donnant au total quatre configurations possibles. La tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite est étudiée dans les références [5], [6]. La référence [9] a étudié la tuyère de longueur minimale axisymétrique avec ligne sonique droite. La référence [10] traite l'analyse complète de la tuyère de longueur minimale plane avec ligne sonique courbée. Les références [6], [10] présentent l'analyse de la tuyère de longueur minimale axisymétrique avec ligne sonique courbée.

Pour permettre d'étudier l'écoulement et faire la conception des tuyères ayant une ligne sonique courbée, vu que l'écoulement est tridimensionnel dans le cas réel, il faut déterminer la position de cette ligne sonique.

Cette courbe représente la limite des deux régions subsoniques du convergent et supersonique du divergent. Le nombre de Mach sur cette ligne est égal à l'unité. Alors, il faut étudier un écoulement transsonique à travers le col de la tuyère. De nombreux travaux ont été effectués dans ce contexte [18], [41].

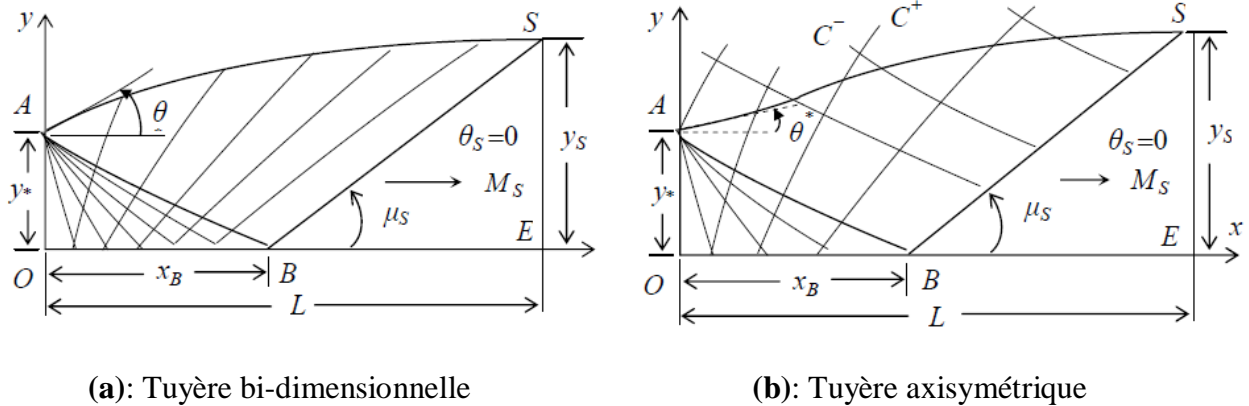
Dans notre étude, le rapport des sections (II.33) n'est plus valable pour valider les résultats numériques de conception de ce type de tuyère (ligne sonique courbée) mais peut quand même servir pour obtenir les résultats approchés.

La figure IV.2 illustre le schéma général de la tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite et présente les caractéristiques du champ d'écoulement dans différentes régions. Ce type de tuyère est nommé encore par tuyère à détente centrée. Cette nomination est valable pour le cas bi-dimensionnel et axisymétrique. L'écoulement entre le col  $OA$  et la région uniforme  $BES$  est divisé en deux régions. Pour les écoulements bi-dimensionnel et axisymétrique, la région  $OAB$ , appelée par région de Kernel, est une région d'ondes non simples. La région de transition  $ABS$  est une région d'onde simple si l'écoulement est bi-dimensionnel et la solution peut être obtenue analytiquement [5], [18] et [21]. Cependant, cette région est une région d'ondes non simples si l'écoulement est axisymétrique et dans ce cas la solution numérique est nécessaire [6],[32].

La région triangulaire  $BES$  est une région d'écoulement uniforme à nombre de Mach  $M_s$  de sortie. Dans ce contexte, la paroi, au col, est inclinée d'un angle  $\theta^*$ .

Une convention usuelle consiste à omettre de représenter les caractéristiques dans une région uniforme, de ne représenter que les caractéristiques rectilignes dans le cas d'une région d'ondes simples et de représenter les deux types de caractéristiques dans le cas de régime non simple. Une région uniforme est toujours limitée par des zones d'ondes simples et qu'elle n'est en contact avec une zone d'ondes non simple en un seul point [5].

L'application de la tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite est limitée pour la dynamique des gaz [5], [14] et [32], où seule la tuyère bidimensionnelle avec ligne sonique droite est utilisée. Cependant, pour les souffleries hypersoniques ainsi que les moteurs fusées, les concepteurs utilisent la tuyère axisymétrique [21] et [34]. L'étude dans ce chapitre est limitée pour le cas de la tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite.



(a): Tuyère bi-dimensionnelle

(b): Tuyère axisymétrique

**Figure IV.2** : Présentation du champ de l'écoulement dans la tuyère à détente centrée.

Les travaux discutés auparavant dans les références sont réalisés pour le cas du gaz parfait à CP et  $\gamma$  constants. Ces travaux sont limités pour des faibles températures génératrices, pour lesquelles on peut aller jusqu'à 1000 K environ pour des nombres de Mach de sortie qui ne dépassent pas  $M_s=2.0$ . Dans le cas réel, la chaleur spécifique CP et le rapport  $\gamma$  varient avec la température. Le but de ce chapitre c'est d'ajouter l'effet de variation en fonction de la température à la chaleur spécifique CP et le rapport  $\gamma$  sur la conception des tuyères supersoniques, inférieur au seuil de dissociation. Dans ce cas, les équations de conservation restent inchangées ; sauf l'équation d'énergie. Les nouvelles relations sur des rapports thermodynamiques à Haute Température sont présentées dans la référence [34], celle de la fonction de Prandtl Meyer est le but des références [22] et [26].

Les équations des caractéristiques présentées par le système (IV.1) et (IV.2) restent toujours valables sous cette forme. Ici, il faut insérer l'équation de Prandtl Meyer développée dans le système pour obtenir notre propre modèle mathématique valable lorsque l'effet de la haute température est pris en compte. Comme résultats, le modèle mathématique développé dans ce chapitre est une généralisation du modèle du gaz parfait à CP et  $\gamma$  constants. Généralement les résultats dans la dynamique des gaz sont acceptés avec une erreur inférieure à 5%.

### IV.1 Formulation mathématique

Pour un écoulement supersonique, irrotationnel, adiabatique d'un gaz parfait, la méthode des caractéristiques donne les équations suivantes, dites équations des caractéristiques et de compatibilités [5] et [32]:

Suivant  $\xi$  (1-3), voir figure IV.3:

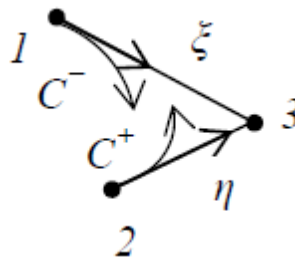
$$d(v + \theta) = \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\xi \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \mu) \quad (\text{IV.1})$$

Suivant  $\eta$  (2-3), voir figure IV.3:

$$d(v - \theta) = \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\eta \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \mu) \quad (\text{IV.2})$$

$\delta = 0$  pour le cas bi-dimensionnel,  $\delta = 1$  pour le cas axisymétrique

L'axe du col est nommé par  $y$  pour le différentiel avec la constante  $r$  du gaz. Les équations (IV.1) et (IV.2) sont valables respectivement sur les caractéristiques  $C^-$  et  $C^+$  comme le montre la figure IV.3. Dans le cas réel, les caractéristiques sont courbes, et si le maillage est fin de sorte que les points soient proches l'un de l'autre, on peut rapprocher la courbure par une ligne droite, le calcul sera sur les lignes de Mach nommées  $\xi$  sur la caractéristique  $C^-$  et par  $\eta$  sur la caractéristique  $C^+$  comme le montre la figure IV.3.



**Figure IV.3 :** Illustration des lignes caractéristiques et des lignes de Mach.

Dans les relations (IV.1) et (IV.2), la fonction de Prandtl Meyer de notre modèle à Haute Température est donnée par la relation suivante [21] et [22] :

$$dv = F_v = -\frac{cp(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT \quad (IV.3)$$

Avec [23] et [24]

$$M(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{a(T)} \quad (IV.4)$$

$$a(T) = \sqrt{\gamma(T) r T} \quad (IV.5)$$

$$\gamma(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{cp(T)-r} \quad (IV.6)$$

Les fonctions CP(T) et H(T) sont présentés dans le chapitre 1 par les relations (II.39) et (II.40). L'angle de Mach est donné par [4]:

$$\mu = \arcsin (1 / M) \quad (IV.7)$$

On peut exprimer les directions  $\xi$  et  $\eta$  des lignes de Mach en fonction des coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  par les relations suivantes [5] et [27]:

$$d\xi = \frac{dx}{\cos(\theta-\mu)} \quad , \quad d\eta = \frac{dy}{\cos(\theta+\mu)} \quad (IV.8)$$

Remplaçant les relations (IV.8) et (IV.3) dans le système (IV.1) et (IV.2) on obtient, le modèle mathématique à Haute Température de la méthode des caractéristiques :

Suivant  $\xi$  (1-3):

$$-\frac{cp(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT + d\theta = \delta \frac{\sin\theta \sin\mu}{\gamma \cos(\theta-\mu)} dx \quad (IV.9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \mu) \quad (IV.10)$$

Suivant  $\eta$  (2-3):

$$-\frac{cp(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT - d\theta = \delta \frac{\sin\theta \sin\mu}{\gamma \cos(\theta+\mu)} dy \quad (IV.11)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \mu) \quad (IV.12)$$



$M(T)$ ,  $a(T)$  et  $\mu(T)$  sont données respectivement par les relations (IV.4), (IV.5) et (IV.6). Comme la fonction  $H(T)$  dépend du paramètre  $T_0$ , [23] et [24], alors notre modèle mathématique dépend essentiellement de la température génératrice  $T_0$  de la chambre de combustion.

On a préféré une transformation entre  $\zeta$  et  $x$  et une transformation entre  $\eta$  et  $y$  présentées par les relations (IV.8). Le cas contraire donne un modèle différent de celui présenté par les équations (IV.9) et (IV.11). Le modèle mathématique développé est un système d'équations différentielles de quatre inconnues ( $x$ ,  $y$ ,  $T$ ,  $\theta$ ). Celui du gaz parfait est basé sur les variables  $x$ ,  $y$ ,  $M$  et  $\theta$ , A cause de l'équation implicite (IV.4) reliant  $M$  et  $T$  dont l'expression analytique inverse n'existe pas, on a considéré la variable  $T$  au lieu de  $M$ .

Comme les caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$  sont courbes, l'application de la méthode des caractéristiques nous oblige à introduire un maillage fin, afin d'approximer chaque caractéristique entre deux points par des segments de droite. Les propriétés ( $x$ ,  $y$ ,  $T$ ,  $\theta$ ,  $\rho$ ,  $P$ ) au point 3 de la figure IV.3 peuvent être déterminées à partir de celles des points 1 et 2 qui les relie. On approche dans ce cas la variation des paramètres  $y$ ,  $\theta$  et  $T$  le long les segments reliant les points 1 et 2 et les points 2 et 3 par les expressions suivantes [26] et [32] :

$$\theta_{13} = C_\theta \quad \theta_1 + (1 - C_\theta) \quad \theta_3 \quad ; \quad \theta_{23} = C_\theta \quad \theta_2 + (1 - C_\theta) \quad \theta_3 \quad (\text{IV.13})$$

$$T_{13} = C_T \quad T_1 + (1 - C_T) \quad T_3 \quad ; \quad T_{23} = C_T \quad T_2 + (1 - C_T) \quad T_3 \quad (\text{IV.14})$$

$$y_{13} = C_y \quad y_1 + (1 - C_y) \quad y_3 \quad ; \quad y_{23} = C_y \quad y_2 + (1 - C_y) \quad y_3 \quad (\text{IV.15})$$

$C_y$ ,  $C_\theta$  et  $C_T$  sont des coefficients d'interpolation appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ . Si ces coefficients sont égaux à 0.5, on obtient la valeur moyenne des paramètres.

### IV.1.1 Equation et procédure pour un point interne

Le schéma d'un point interne du champ d'écoulement est illustré dans la figure IV.4b. L'intégration des équations (IV.9), (10), (IV.11) et (IV.12) donne :

Suivant  $\zeta$  (1 – 3):

$$A_{13} (T_3 - T_1) + (\theta_3 - \theta_1) = \delta B_{13} (x_3 - x_1) \quad (\text{IV.16})$$

$$y_3 - y_1 = C_{13} (x_3 - x_1) \quad (\text{IV.17})$$

Suivant  $\eta$  (2 – 3):

$$A_{23} (T_3 - T_2) + (\theta_3 - \theta_2) = \delta B_{23} (x_3 - x_2) \quad (\text{IV.18})$$

$$y_3 - y_2 = C_{23} (x_3 - x_2) \quad (\text{IV.19})$$

Avec

$$A_{13} = -\frac{C_P(T_{13})}{2H(T_{13})} \sqrt{M_{13}^2 - 1} \quad , \quad A_{23} = -\frac{C_P(T_{23})}{2H(T_{23})} \sqrt{M_{23}^2 - 1} \quad (\text{IV.20})$$

$$B_{13} = \frac{\sin(\theta_{13})\sin(\mu_{13})}{y_{13} \cos(\theta_{13} - \mu_{13})} \quad , \quad B_{13} = \frac{\sin(\theta_{23})\sin(\mu_{23})}{y_{23} \sin(\theta_{23} + \mu_{23})} \quad (\text{IV.21})$$

$$C_{13} = \text{tg}(\theta_{13} - \mu_{13}) \quad , \quad C_{23} = \text{tg}(\theta_{23} + \mu_{23}) \quad (\text{IV.22})$$

ET

$$\mu_{13} = \arcsin(1/M_{13}) \quad , \quad \mu_{23} = \arcsin(1/M_{23}) \quad (\text{IV.23})$$

$$M_{13} = \frac{\sqrt{2H(T_{13})}}{a_{13}} \quad , \quad M_{23} = \frac{\sqrt{2H(T_{23})}}{a_{23}} \quad (\text{IV.24})$$

$$a_{13} = \sqrt{y_{13} r T_{13}} \quad , \quad a_{23} = \sqrt{y_{23} r T_{23}} \quad (\text{IV.25})$$

$$y_{13} = \frac{C_P(T_{13})}{C_P(T_{13}) - r} \quad , \quad y_{23} = \frac{C_P(T_{23})}{C_P(T_{23}) - r} \quad (\text{IV.26})$$

Les équations (IV.16), (IV.17), (IV.18) et (IV.19) constituent un système d'équations algébriques non linéaires à quatre inconnues ( $x_3$ ,  $y_3$ ,  $T_3$ ,  $\theta_3$ ). L'algorithme par itérations successives s'écrit [21], [26] et [32]:

$$x_3 = \frac{E_2 - E_1}{C_{13} - C_{23}} \quad (\text{IV.27})$$

$$y_3 = E_1 + C_{13} x_3 \quad (\text{IV.28})$$

$$T_3 = \frac{D_1 + D_2 + \delta[B_{23}y_3 + B_{13}x_3]}{A_{13} + A_{23}} \quad (\text{IV.29})$$

$$\theta_3 = D_1 + \delta B_{13} x_3 - A_{13} T_3 \quad (\text{IV.30})$$

$$\text{Avec} \quad E_1 = y_1 - C_{13} x_1 \quad , \quad E_2 = y_2 - C_{23} x_2 \quad (\text{IV.31})$$

$$D_1 = \theta_1 + A_{13} T_1 - \delta B_{13} x_1 \quad , \quad D_2 = -\theta_2 - \delta B_{23} y_2 + A_{23} \quad (IV.32)$$

Les relations (IV.27), (IV.28), (IV.29) et (IV.30) constituent un système d'équations par itérations pour un écoulement supersonique bidimensionnel et axisymétrique, permanent et irrotationnel pour notre *modèle à Haute Température*.

La résolution du système se fait par la procédure d'intégration numérique de prédicteur correcteur par différences finies [5], [6], [11], [13], [16], [20] et [26]. Pour l'algorithme de prédicteur d'Euler, les valeurs initiales de  $y_{i3}$ ,  $T_{i3}$  et  $\theta_{i3}$  ( $i=1,2$ ) à l'itération,  $K=0$ , sont données par :

$$T_{13} = T_1 \quad , \quad \theta_{13} = \theta_1 \quad , \quad y_{13} = y_1 \quad (IV.33)$$

$$T_{23} = T_2 \quad , \quad \theta_{23} = \theta_2 \quad , \quad y_{23} = y_2 \quad (IV.34)$$

Substituons les expressions (IV.33) et (IV.34) dans les relations (IV.20), (IV.21), (IV.22), (IV.23), (IV.24), (IV.25) et (IV.26) ainsi que dans les relations (IV.31) et (IV.32), ensuite remplaçons les résultats obtenus dans les relations (IV.27), (IV.38), (IV.39) et (IV.40) pour obtenir les valeurs prédites des paramètres ( $x_3^0$ ,  $y_3^0$ ,  $T_3^0$ ,  $\theta_3^0$ ) au point 3.

Pour l'algorithme de correcteur d'Euler, les valeurs des relations (IV.13), (IV.14) et (IV.15) sont utilisées et substituées dans les équations (IV.27), (IV.28), (IV.29) et (IV.30) pour obtenir les nouvelles valeurs des paramètres au point 3. Les valeurs corrigées sont ( $x_3^1$ ,  $y_3^1$ ,  $T_3^1$ ,  $\theta_3^1$ ).

L'algorithme de correcteur d'Euler sera répété jusqu'à obtenir à la précision  $\varepsilon$  voulue. Autrement dit, pour  $K$  itérations, il faut satisfaire la condition suivante pour assurer la convergence :

$$\text{Max} [ |y_3^K - y_3^{K-1}|, |\theta_3^K - \theta_3^{K-1}|, |T_3^K - T_3^{K-1}| ] < \varepsilon \quad (IV.35)$$

La variable  $x$  converge automatiquement avec la convergence de la condition (IV.35).

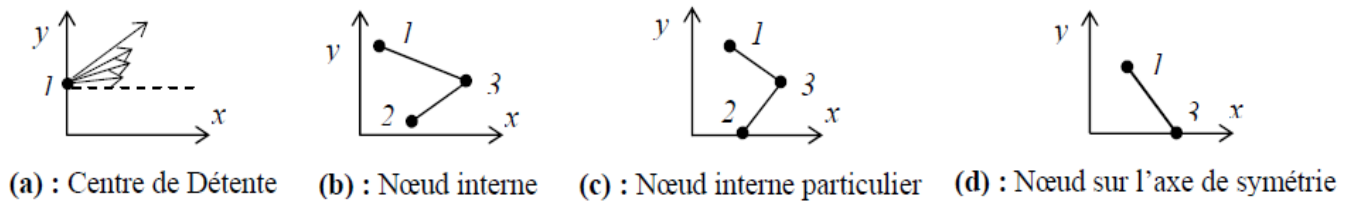


Figure IV.4 : Différents points de calcul.

### IV.1.2. Point interne particulier

On rencontre ce type de points comme le montre la figure IV.4c, lorsque le point 2 se trouve sur l'axe de symétrie pour le cas axisymétrique. Pour le cas bi-dimensionnel, ce type de point n'a pas de spécificité de calcul. L'utilisation de l'algorithme du point interne pour le cas axisymétrique pose un problème pour la détermination des propriétés de ce point particulier. Le terme  $B_{23}$  dans la relation (IV.21) est indéterminé pour la valeur prédictee, puisque, au point 2 on a  $y_2=0$ ,  $\theta_2=0$ . Comme le segment de la ligne de Mach montante est petit, le point 3 sera proche de l'axe de symétrie et dans ce cas, on peut rapprocher le numérateur du terme  $B_{23}$  par  $\sin(\theta_{23})=\sin(\theta_3)\approx\theta_3$  et le dénominateur par  $\sin(\theta_{23}+\mu_{23})\approx\sin(\mu_{23})$ . Le terme  $B_{23}$  se simplifie à:

$$B_{23} \approx \frac{\theta_3}{y_3} \quad (\text{IV.36})$$

L'équation (IV.18) ne reste plus valable, et sera remplacée par:

$$A_{23}(T_3-T_2) - (\theta_3 - \theta_2) = \theta_3 \quad (\text{IV.37})$$

Alors, la résolution de l'équation (IV.37) par rapport à  $\theta_3$  donne:

$$\theta_3 = \frac{A_{23}T_3 - A_{23}T_2 + \theta_2}{2} \quad (\text{IV.38})$$

Remplaçons l'équation (IV.38) dans la relation (IV.16) et résolvons l'équation obtenue par rapport à  $T_3$  on obtient:

$$T_3 = \frac{2[(D_1 + B_{13}x_3) + A_{23}T_2]}{2A_{13} + A_{23}} \quad (\text{IV.39})$$

Comme résultat, l'équation (IV.29) sera changée par l'équation (IV.39). Donc pour déterminer les propriétés  $(x_3, y_3, T_3, \theta_3)$  de ce type de point particulier, on utilise les équations (IV.27), (IV.28), (IV.29) et (IV.39).

### IV.1.3. Equations pour un point sur l'axe de symétrie

D'après la figure IV.4d, le point 3 se trouve sur l'axe de symétrie de la tuyère. Comme  $y_3=0, \theta_3=0$  en ce point, la procédure est simplifiée et une ligne de Mach  $\zeta$  joignant les noeuds 1 et 3 est employée. Les équations valables sur cette ligne de Mach sont à utiliser et  $x_3, T_3$  sont respectivement obtenues par la résolution des équations algébriques (IV.16) et (IV.17). On obtient:

$$x_3 = x_1 = \frac{y_1}{c_{13}} \quad (\text{IV.40})$$

$$T_3 = T_1 + \frac{\delta B_{13} (x_3 - x_1) + \theta_1}{A_{13}} \quad (\text{IV.41})$$

On peut considérer ce point comme étant un point interne si les propriétés au point 2 sont prises par:

$$x_2 = x_1 \quad y_2 = -y_1 \quad \theta_2 = -\theta_1 \quad T_2 = T_1$$

### IV.1.4. Nœud sur une paroi rigide

Comme le montre la figure (IV.5), le point 1 n'existe plus physiquement, parce qu'il se trouve à l'extérieur du champ d'écoulement. En conséquence, seulement ligne de Mach  $\eta$  joignant les nœuds 2 et 3 est employée. Les équations des caractéristiques et de compatibilité valables sur cette ligne sont utilisées pour déterminer la position et les propriétés de l'écoulement au point 3. Il nous manque de condition pour avoir une solution unique, puisque sur la ligne de Mach  $\eta$ , on peut écrire deux conditions. Cependant, sur la paroi, la direction du vecteur vitesse de l'écoulement doit être identique avec la pente de la paroi (condition de glissement) et que la réflexion de la ligne de Mach montante sur la paroi de la tuyère donne mathématiquement un point d'intersection entre la ligne (ligne de droite) et la courbe de la paroi. Alors, on peut écrire les deux conditions suivantes au point 3 de la figure (IV.5) :

$$y_3 = f(x_3) \quad (\text{IV.42})$$

$$\theta_3 = \arctg \left[ \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_3} \right] \quad (\text{IV.43})$$

Avec :  $f(x)$  est la fonction, sous forme explicite de la paroi rigide de la tuyère.

Les équations (IV.42) et (IV.43) constituent donc deux conditions additionnelles pour la détermination de la position et les propriétés du point 3 sur une paroi rigide et qui doivent être ajoutées aux équations [5], [6], [11], [13], [16], [20], [26] pour la résolution simultanée par la méthode des différences finies. Il nous reste de déterminer deux expressions analytiques permettant de corriger les valeurs de  $T_3$  et  $x_3$  pour fermer le processus d'itérations. Résolvons les équations [5], [6], [11], [13] par rapport à  $T_3$  et  $x_3$  donne :

$$T_3 = T_2 + \frac{\theta_3 - \theta_2 + \delta B_{23}(y_3 - y_2)}{A_{23}} \quad (\text{IV.44})$$

$$x_3 = x_2 + \frac{y_3 - y_2}{C_{23}} \quad (\text{IV.45})$$

On propose l'algorithme suivant de calcul en présentant les grandes étapes de calcul des propriétés en un point 3 sur la paroi rigide de la tuyère.

1. Les données sont :  $(x_2, y_2, T_2, \theta_2)$ , Tol,  $\delta$ ,  $\alpha_{\theta 23}$ ,  $\alpha_{T 23}$ ,  $\alpha_{y 23}$

2. Approximation initiale  $K=0$  est donnée par :

$$x_3^0 = x_2 ; \quad y_3^0 = f(x_3^0) ; \quad T_3^0 = T_2 ; \quad \theta_3^0 = \arctg \left[ \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_3^0} \right]$$

3. Calcul de  $y_{23}$ ,  $T_{23}$  et  $\theta_{23}$  en utilisant les relations dans les références [5], [6], [11], [13] par la considération de l'approximation initiale. Alors :

$$\theta_{23} = \alpha_{\theta_{23}} \cdot \theta_2 + (1 - \alpha_{\theta_{23}}) \cdot \theta_3^0 \quad ; \quad T_{23} = \alpha_{T_{23}} \cdot T_2 + (1 - \alpha_{T_{23}}) \cdot T_3^0 \quad ;$$

$$y_{23} = \alpha_{y_{23}} \cdot y_2 + (1 - \alpha_{y_{23}}) \cdot y_3^0$$

4. Calcul de  $M_{23}, \mu_{23}, A_{23}, B_{23}, C_{23}$  en utilisant les relations dans les références [5], [6], [11].
5. Calcul de  $T_3, x_3, y_3, \theta_3$  en utilisant respectivement les relations (IV.42), (IV.43), (IV.44) et (IV.45).
6. Calcul de l'erreur commise pour cette itération et faire le test de convergence par :

$$ER = \text{Max} \left[ \left| x_3 - x_3^0 \right|, \left| T_3 - T_3^0 \right| \right]$$

Si ( $ER \leq \text{Tol}$ ) alors

Allez à l'étape 7

Sinon

$$x_3^0 = x_3 \quad ; \quad T_3^0 = T_3$$

$$K = K + 1$$

Allez à l'étape 3.

Fin si.

7. Calcul les autres paramètres et affichages des résultats.

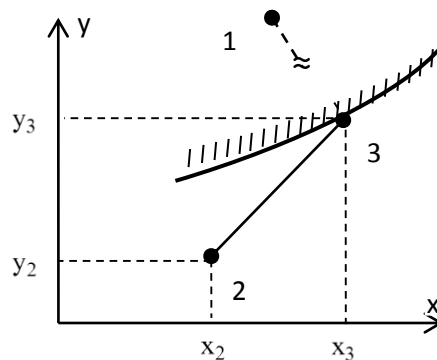


Figure (IV.5) : Nœud sur une paroi rigide

### IV.1.5. Autres paramètres

Une fois qu'on a déterminé les propriétés ( $x$ ,  $y$ ,  $T$  et  $\theta$ ) en un point 3 du champ d'écoulement, on peut déterminer le nombre de Mach  $M_3$  en remplaçant la température  $T=T_3$  dans la relation (IV.4). Les autres paramètres (rapports des masses volumiques, rapport des pressions, rapport des vitesses du son, vitesse de l'écoulement et composantes de la vectrice vitesse) peuvent être déterminés respectivement par les relations suivantes [26] et [32]:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_3 = \text{Exp} \left(-\int_{T_3}^{T_0} Cp(T)/a^2(T) dT\right) \quad (\text{IV.46})$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right) = \left(\frac{T}{T_0}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_3 \quad (\text{IV.47})$$

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)_3 = \frac{a(T_3)}{a(T_0)} = \left(\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)}\right)^{1/2} \left(\frac{a(T_3)}{a(T_0)}\right)^{1/2} \quad (\text{IV.48})$$

$$\left[\frac{v}{a_0}\right]_3 = M_3 \left[\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)}\right]^{1/2} \left[\frac{T_3}{T_0}\right]^{1/2} \quad (\text{IV.49})$$

$$\left[\frac{\mu}{a_0}\right]_3 = M_3 \left[\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)}\right]^{1/2} \left[\frac{T_3}{T_0}\right]^{1/2} \cos(\theta_3), \quad \left[\frac{v}{a_0}\right]_3 = M_3 \left[\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)}\right]^{1/2} \left[\frac{T_3}{T_0}\right]^{1/2} \sin(\theta_3) \quad (\text{IV.50})$$

## IV.2. Procédure de calcul dans la tuyère

Le calcul de l'écoulement dans la tuyère est divisé en deux régions nommées respectivement par région de Kernel et de transition.

### IV.2.1. Région de Kernel

Le calcul de l'écoulement dans la région de Kernel commence au point A avec plusieurs types de conception. Une première possibilité consiste à dimensionner la tuyère sur la base de l'angle de détente  $\theta^*$ . Le nombre  $N$  des  $C$  à calculé dans cette région sera parmi les données. Le nombre de Mach  $M_s$  correspondant à cet angle sera déterminé juste après le calcul de l'écoulement dans la région de Kernel. Cette méthode est utilisée dans la référence [6]. Il est à noter que pour le cas axisymétrique, il n'existe aucune relation analytique entre le nombre de Mach  $M_s$  et l'angle de déviation initiale  $\theta^*$ . Une deuxième possibilité consiste à considérer le nombre de Mach  $M_s$  de sortie. Ici le pas  $\Delta\theta$  doit être parmi les données. L'angle de détente  $\theta^*$  correspondant sera déterminé



juste après le calcul de la région de Kernel. Dans ce cas un problème se pose durant le calcul, présenté par la figure IV.7. Notons que notre code de calcul peut faire la conception sur la base du choix de ces deux possibilités.

Pour le cas bidimensionnel, l'angle de détente initial  $\theta^*$  est relié avec le nombre de Mach  $M_S$  par la relation suivante [5] et [26]:

$$\theta^* = \frac{v_S}{2} = \frac{1}{2} \int_{T_S}^{T^*} F_v(T) dT \quad (\text{IV.51})$$

La température  $T_S$  peut être déterminée par la résolution de l'équation (IV.4) en prenant  $T=T_S$  et  $M=M_S$ .

Substituons les valeurs de  $T^*$  et  $T_S$  dans la relation (IV.51) pour obtenir la valeur de  $v_S$  et ensuite, la valeur de l'angle de détente  $\theta^*$  correspondant au nombre de Mach de sortie. La procédure d'intégration de la relation (IV.51) est présentée dans les références [22].

Il y a une infinité d'ondes de Mach qui seront issues du point A et qui se réfléchiront sur l'axe de symétrie. Si la conception se fait sur la base de l'angle de détente  $\theta^*$ , le calcul numérique nous oblige à discrétiser la zone de détente de l'écoulement  $0 \leq \theta \leq \theta^*$  en un nombre fini N de points. Au total, on obtient N+1 C<sup>-</sup> ; y compris les deux extrémités. Alors, entre deux caractéristiques successives, on prend :

$$\Delta\theta = \Delta v = \frac{\theta^*}{N} \quad (\text{IV.52})$$

Si la conception se fait sur la base du nombre de Mach  $M_S$ , le calcul nous oblige à considérer un pas  $\Delta\theta = \Delta v$  assez petit. Chaque passage à une caractéristique, on incrémente l'angle de déviation de l'écoulement au point A par un pas  $\Delta\theta$ . Le nombre des C<sup>-</sup> à calculer est inconnu a priori. Il dépend essentiellement du pas  $\Delta\theta$  adopté et de la valeur de  $M_S$  choisie.

Le pas  $\Delta\theta$  donne un maillage uniforme pour les C<sup>-</sup> de la fin de la région de Kernel et un espace large et un maillage non uniforme pour les premières C<sup>-</sup> juste après le col. En conséquence, le contour de la paroi, juste après le col, sera mal présenté. Pour corriger ce problème, on adopte dans notre étude, un raffinement du maillage par insertion des C<sup>-</sup> supplémentaires entre la ligne sonique et la première caractéristique régulière descendante. La distribution des caractéristiques insérées est réalisée en introduisant la condensation suivante [3], [26] et [32] :

$$v_i = \left(\frac{i}{N_i}\right)^\Delta \Delta v \quad i=1, 2, 3, \dots, N_i \quad (IV.53)$$

$N_i$  indique le nombre des  $C$  insérées entre le col et la première caractéristique régulière descendante et  $\Delta$  représente un nombre réel supérieur à l'unité. Le processus de calcul dans la région de Kernel est présenté dans la figure IV.6. En premier lieu, on détermine les propriétés au point 1 de la figure IV.6a. En ce point, on a  $x_1/y^*=0, y_1/y^*=1$  (non-dimensionnel) et  $\theta_1=v_1$  en utilisant la relation (IV.53) si on utilise un maillage avec condensation ou égale à  $\theta_1=\Delta\theta$  si le maillage est sans procédure de condensation. La température  $T_1$  doit être déterminée en résolvant l'équation suivante [20]:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T^*} F_v(T) dT \quad (IV.54)$$

La fonction  $F_v(T)$  est donnée par la relation (IV.3).

La procédure de résolution de l'équation (IV.54) est présentée dans les références [26] et [32] :

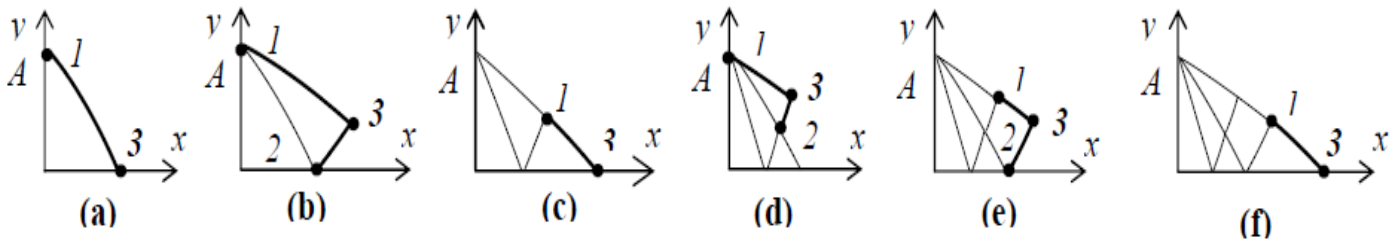


Figure IV.6 : Processus du calcul des caractéristiques dans la région de Kernel.

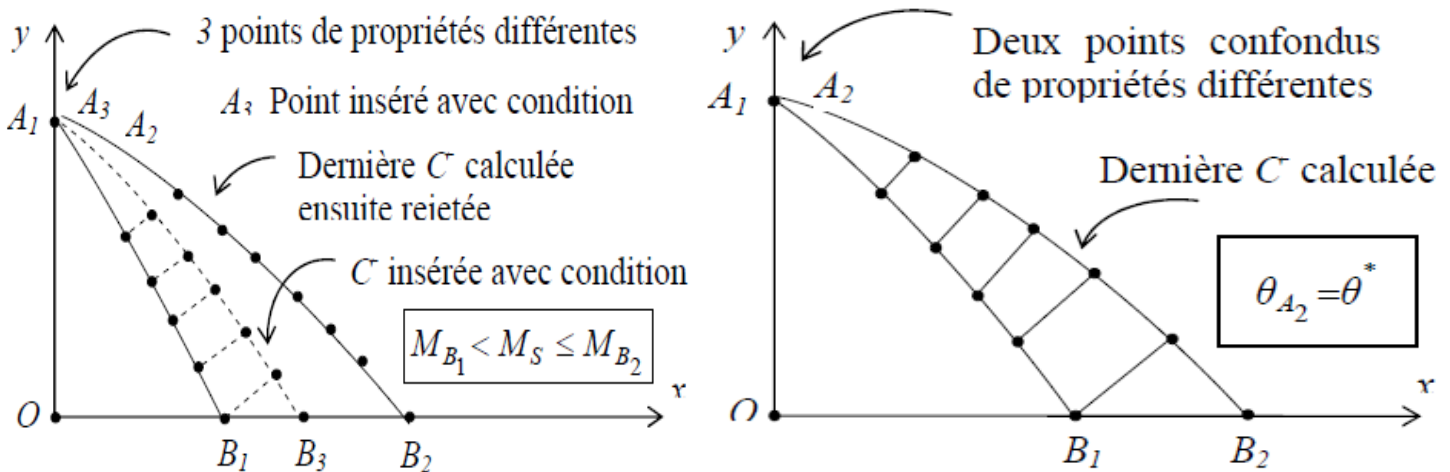
On procède ensuite à la détermination des propriétés au point 3 de la figure IV.5a en utilisant la procédure d'un point sur l'axe de symétrie. Maintenant, la première caractéristique est calculée. On passe à la deuxième  $C$  et le calcul commence par la détermination des propriétés au point 1 de la figure IV.6b. En ce point on a toujours  $x_1/y^*=0, y_1/y^*=1$ , mais  $\theta_1=v_2$  ou  $\theta_1=2 \Delta\theta$  suivant que le maillage soit avec ou sans procédure de condensation. La détermination de la température  $T_1$  se fait toujours par la résolution de l'équation (IV.54) avec la nouvelle valeur de  $\theta_1$ . On passe par la suite à la détermination des propriétés au point 3 de la figure IV.6b en utilisant la procédure d'un point interne si l'écoulement est bi-dimensionnel, ou la procédure d'un point interne particulier si l'écoulement est axisymétrique. Nous finissons le calcul sur cette  $C$  par la détermination des propriétés au point 3 de la figure IV.6c en utilisant la procédure d'un point sur l'axe de symétrie. Une fois arrivé au point de l'axe de symétrie, la caractéristique descendante

concernée est complètement calculée. On passe à la troisième  $C$ . Chaque caractéristique à partir de la troisième, contient 4 types de points si l'écoulement est axisymétrique et 3 types de points si l'écoulement est bi-dimensionnel. Le premier, c'est le point  $I$  confondu avec le point  $A$ . Un point 3 sur l'axe de symétrie comme le montre la figure IV.6f. Un point 3 interne particulier (écoulement axisymétrique) comme la montre la figure IV.6e et le reste des points sont de type point interne. Chaque type de point nécessite une procédure différente comme présentée au paravent. Notons ici, qu'une  $C$  de numéro  $i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ ) contient  $i+1$  points à traiter. Si la zone de Kernel contient  $N$  caractéristiques à traiter, le nombre totale  $N_T$  de points à traiter est exactement égal à:

$$N_T = 2 + 3 + 4 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2} - 1 \tag{IV.55}$$

Il se partage en  $(N-1)$  points au début de chaque  $C$ ,  $(N-1)$  points sur l'axe de symétrie,  $(N-2)$  points internes particuliers et le reste sont des points internes.

Le calcul de l'écoulement dans la région de Kernel s'arrête suivant le type de conception. Si le dimensionnement se fait sur la base de l'angle de détente  $\theta^*$ , le processus s'arrête si le calcul suivant toutes les  $N$  caractéristiques sélectionnées au départ est achevé. Dans ce cas, le nombre de Mach  $M_S$  est déterminé comme le nombre de Mach du dernier point calculé sur l'axe de symétrie. Les propriétés en ce point sont celles de la section de sortie. Dans ce cas aucun problème ne se pose et la fin de calcul se fait d'une façon normale comme le montre la figure IV.7b.



(a): Dimensionnement par rapport à  $M_S$

(b): Dimensionnement par rapport à l'angle  $\theta^*$

**Figure IV.7 :** Différents type de dimensionnement de la tuyère à détente centrée

Si le dimensionnement se fait sur la base du nombre de Mach  $M_S$  de sortie, chaque fois qu'on détermine les propriétés aux points d'une  $C$ , on contrôle si le nombre de Mach au point de l'axe de symétrie est égal ou juste supérieur au nombre de Mach  $M_S$  pour arrêter le calcul. En général, c'est très rare de trouver  $M_3=M_S$ . Pour cette raison, un problème est rencontré. Il consiste à détecter la caractéristique  $C$  contenant le nombre de Mach  $M_S$  sur l'axe de symétrie avec une précision. Cette situation est présentée sur la figure IV.7a. L'algorithme de dichotomie [35] sera utilisé pour insérer et éliminer des  $C$  entre les deux dernières  $C$  régulières, celle la dernière  $A_2B_2$  et l'avant dernière  $A_1B_1$  puisque on a trouvé la relation suivante:

$$M_{B1} < M_S \leq M_{B2} \quad (\text{IV.56})$$

Une  $C$   $A_3B_3$  sera insérée entre les  $C$   $A_1B_1$  et  $A_2B_2$ , qui remplace la dernière rejetée. En premier lieu, on insère un point  $A_3$  avec la condition suivante:

$$\theta_{A_3} = \theta_1 = \frac{\theta_{A_1} + \theta_{A_2}}{2} \quad (\text{IV.57})$$

On détermine la température  $T_{A_3}$  en résolvant l'équation (IV.54) après le remplacement de l'expression (IV.57) ensuite on calcule les propriétés en tous les points de la  $C$   $A_3B_3$  jusqu'au point  $B_3$  et vérifie la condition (IV.56). Le calcul sera répété jusqu'à ce que l'on détermine la valeur de  $M_S$  avec une précision  $\epsilon$  voulue. Le nombre de  $C$  totale à traiter sera augmenté légèrement par rapport à celui déterminé (ou donné) avant l'application de l'algorithme de dichotomie dans cette région particulière.

Après la détermination du champ d'écoulement dans la région de Kernel, on peut déterminer sa longueur (longueur de détente) par:

$$\frac{L_d}{y^*} = \frac{x_B}{y^*} \quad (\text{IV.58})$$

### IV.2.2. Contour de la paroi de la tuyère bidimensionnelle

La détermination du contour de la paroi se fait suivant le processus présenté sur la figure IV.8. Le processus de calcul à la forme d'une suite de récurrence et le calcul ne dépend pas des résultats en aval du point considéré. Si on connaît les propriétés en un point, il est facile de déterminer celles du point adjacent à droite jusqu'au point de la section de sortie.

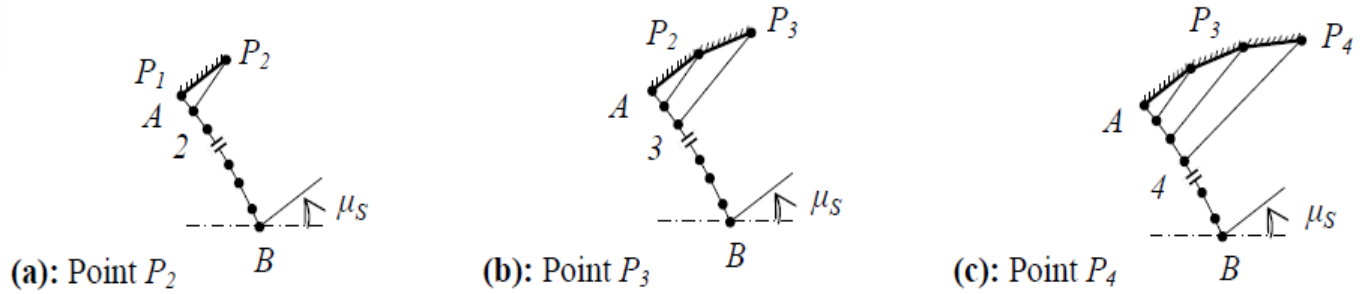


Figure IV.8 : Processus de détermination des points de la paroi de la tuyère MLN 2D

La paroi de la tuyère passe par le point A. En ce point, on a  $x_A=0.0$ ,  $y_A=y^*$ ,  $M_A=M^*$  et  $\theta_A=\theta^*$ . La valeur de  $M^*$  est égale au nombre de Mach au point A juste après la détente et correspond au nombre de Mach au premier point sur la dernière caractéristique descendante AB (voir figure IV.2).

Les propriétés de l'écoulement sur chaque ligne de Mach montante dans la région de transition ABS sont constantes, alors les paramètres ( $T$ ,  $\theta$ ,  $M$ ,  $P$ ,  $\rho$ ) sur les points  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) de la paroi sont connues et il ne nous reste qu'à déterminer les positions ( $x$ ,  $y$ ) de chaque points. A titre d'information, les lignes de Mach montantes dans cette région représentent une portion des lignes iso-Mach.

La figure IV.8 présente un schéma général pour déterminer les équations nécessaires pour l'obtention de la position du point  $P_i$ . La pente d'un panneau numéro ( $i-1$ ) entre les points  $i-1$  et  $i$  est approchée par l'angle  $\alpha(i-1)$  prise comme valeur interpolée entre les valeurs aux deux extrémités. Pour les applications, on prend  $C_\theta=0.5$  (voir figure IV.9). La position du point  $P_i$  peut alors être déterminée par les relations suivantes [26]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_{P_i}}{y^*} = \frac{\left(\frac{y_i}{y^*}\right) - \left(\frac{y_{P_{i-1}}}{y^*}\right) + \left(\frac{x_{P_{i-1}}}{y^*}\right) \operatorname{tg}(a_{(i-1)}) - \left(\frac{x_i}{y^*}\right) \operatorname{tg}(\theta_i + \mu_i)}{\operatorname{tg}(a_{(i-1)}) - \operatorname{tg}(\theta_i + \mu_i)} \quad i=2, 3 \dots N \quad (\text{IV.59}) \\ \frac{x_{P_i}}{y^*} = \frac{y_{P_{i-1}}}{y^*} + \left(\frac{x_{P_i}}{y^*} - \frac{x_{P_{i-1}}}{y^*}\right) \operatorname{tg}(a_{(i-1)}) \end{array} \right.$$

Avec 
$$a_{(i-1)} = C_\theta \theta_{i-1} + (1 - C_\theta) \theta_i \quad (\text{IV.60})$$

Pour  $i=1$ , on a 
$$\frac{x_{P_i}}{y^*} = 0 \quad , \quad \frac{y_{P_i}}{y^*} = 1$$

Lorsque  $i=N$ , On obtient la position du dernier point de la paroi qui représente le point de la section de sortie. Alors, a partir de ce point, et sous forme non-dimensionnelle, on peut calculer la longueur de la tuyère et la section de sortie correspondant à cette discrétisation de  $N$  points par:

$$\frac{L}{y^*} = \frac{x_s}{y^*} = \frac{x_{P_N}}{y^*} \tag{IV.61}$$

$$\frac{A_s}{A^*} = \frac{y_s}{y^*} (\text{calculé}) = \frac{y_{P_N}}{y^*} \tag{IV.62}$$

La comparaison des résultats numériques obtenus est faite entre le rayon de la section de sortie calculé numériquement et le rapport des sections théorique normalisé ( $y^*=1.0$ ) présenté par la formule suivante [23], [24] et [26]:

$$\left(\frac{y_s}{y^*}\right)_{\text{théorique}} = \frac{A_s}{A^*} = \text{Exp} \int_{T_s}^{T^*} F_v(T) dT \tag{IV.63}$$

Le nombre de points trouvés sur la paroi est égal au nombre de points de la dernière  $C AB$  de la région de Kernel.

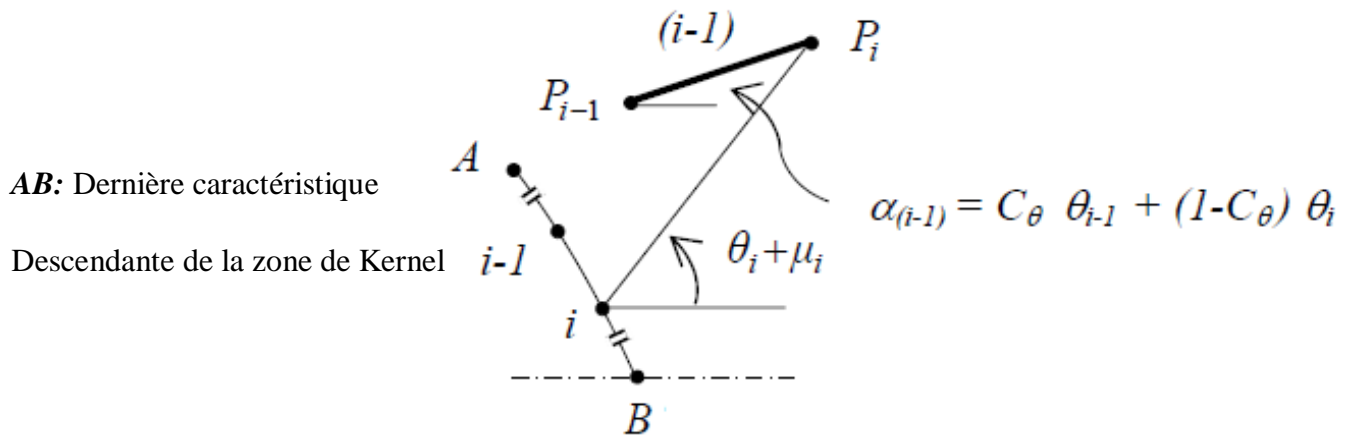


Figure IV.9 : Paramètres de calcul du point  $P_i$  ( $i=2, 3, 4, \dots, N$ ) de la paroi de la tuyère.

### IV.2.3. Région de Transition et contour de la tuyère axisymétrique

La détermination du contour de la paroi de la tuyère axisymétrique se fait en même temps que le calcul de l'écoulement aux points d'intersection des caractéristiques dans la région de transition  $ABS$  de la figure IV.2.

Le contrôle de la géométrie du maillage dans la région de transition dépend de la distance  $\Delta x$  (non-dimensionnel) choisie pour les points sélectionnés sur la ligne de Mach uniforme  $BS$ .

Les propriétés des points sur cette ligne sont connues et sont égales aux valeurs de l'écoulement uniforme de la section de sortie. La figure IV.10 présente le processus de calcul et illustre la direction de calcul dans la région de transition. On calcul en premier les propriétés au point 3 de la figure IV.10a. Ici les propriétés au point 2 sont connues puisque il appartient à la dernière  $C^-$  dans la région de Kernel. Les propriétés au point 1 sont données par:

$$x_1 = x_B + \Delta x \quad , \quad y_1 = \Delta x \operatorname{tg}(\mu_s) \quad , \quad \theta_1 = 0 \quad , \quad T_1 = T_s \quad (\text{IV.64})$$

La température  $T_s$  peut être déterminée par la résolution de l'équation (IV.4) en remplaçant  $T=T_s$  et  $M=M_s$ .

Le calcul des propriétés au point 3 se fait en utilisant la procédure d'un point interne. On passe ensuite au calcul des propriétés au point interne 3 de la figure IV.10b sur la même  $C^-$ . On poursuit le calcul suivant la flèche indiquée sur la figure IV.10b jusqu'au le premier point (point 3) de la  $C^-$  comme le montre la figure IV.10c. Le premier point de la caractéristique précédente est toujours un point de la paroi, déjà déterminé.

Le problème qui se pose c'est de déterminer un point de la paroi de la tuyère qui coupe la  $C^-$  calculée. Entre les deux caractéristiques, on peut détecter plusieurs points intermédiaires de la paroi. Les différents cas possibles de détection de point de la paroi sont illustrés sur la figure IV.11.

Sur la figure IV.11, les segments reliant les points 1 et 3 et les points 2 et 3 ainsi que le segment de la paroi sont considérés comme des lignes droites. Les propriétés aux points 1, 2, 3 et  $W$  sont connues. L'intersection de la paroi avec la  $C^-$  est nommée par le point  $P^-$  de propriétés  $(x^-, y^-, \theta^-, T^-)$  et l'intersection avec la  $C^+$  est nommée par le point  $P^+$  de propriétés  $(x^+, y^+, \theta^+, T^+)$ .

Pour connaître l'intersection du segment de la paroi avec  $C^+$  ou  $C^-$ , on calcule la valeur suivante avec l'approximation initiale  $\theta_{\pm} = \theta_w$ .

$$\Delta y = y_w - y_1 + (x_1 - x_w) \operatorname{tg}(\varphi) \quad (\text{IV.65})$$

$$\text{Avec} \quad \varphi = C_w \theta_w + (1 - C_w) \theta^+ \quad (\text{IV.66})$$

Et  $C_w \in [0, 1]$  coefficient d'interpolation.

Si  $\Delta y \geq 0$ , on se trouve dans la situation (a) ou (c) de la figure 3.10.

Si  $\Delta y < 0$ , on se trouve dans la situation (b) ou (d) de la figure 3.10.

On rencontre le cas (a) si le nombre de points de l'intersection de la paroi avec les  $C^+$  entre deux  $C^-$  est nul. Au début du calcul de l'écoulement dans la région de transition, on rencontre soit le cas (a) soit le cas (d). Si  $\Delta y \geq 0$ , on trouve une intersection de la paroi avec la caractéristique calculée. Il faut sauvegarder les paramètres  $(x_P, y_P, T_P, \theta_P)$  du dernier point calculé comme un nouveau point de la paroi et passer à la sélection d'une nouvelle  $C^-$  comme l'indique la figure IV.12. Si  $\Delta y < 0$ , on n'a pas encore trouvé une intersection de la paroi avec la caractéristique calculée, et on se trouve dans la configuration (b) ou (d) de la figure IV.11.

Pour déterminer les propriétés du nouveau point détecté de la paroi, on suppose une variation linéaire de l'angle  $\theta$  sur le segment reliant les points 1 et 3 si  $\Delta y \geq 0$ , et sur le segment reliant les points 2 et 3 si  $\Delta y < 0$  (voir figure IV.11).

### **1<sup>er</sup> Cas: Si $\Delta y \geq 0$**

Lorsque  $\xi = 0$ , on a  $\theta_{13}(\xi) = \theta_3$  et lorsque  $\xi = \Delta \xi_{13}$  (distance entre les points 1 et 3) on a  $\theta_{13}(\xi) = \theta_1$ . La variation linéaire de l'angle  $\theta$  donne au point  $P$ , le résultat suivant:

$$\theta^- = \theta_3 + \left[ \frac{(x^- - x_3)^2 + (y^- - y_3)^2}{(x_3 - x_1)^2 + (x_3 - y_1)^2} \right]^{1/2} (\theta_3 - \theta_1) \quad (\text{IV.67})$$



La détermination de la position du point  $P^-$  se fait en écrivant les équations reliant les points 1 et 3 et les points  $W$  et  $P^-$ . On obtient:

$$x^- = \frac{y_3 - y_w + x_3 \lambda^- + x_w \operatorname{tg}(\varphi^-)}{\operatorname{tg}(\varphi^-) + \lambda^-} \quad (\text{IV.68})$$

$$y^- = y_3 + \lambda^- (x^- - x_3) \quad (\text{IV.69})$$

Avec 
$$\varphi^- = c_w \theta_w + (1 - c_w) \theta^- \quad (\text{IV.70})$$

Et 
$$\lambda^- = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad (\text{IV.71})$$

### 2<sup>ème</sup> Cas: Si $\Delta y < 0$

Lorsque  $\eta = 0$ , on a  $\theta_{23}(\eta) = \theta_2$  et lorsque  $\eta = \Delta \eta_{23}$  (distance entre les points 2 et 3), on a  $\theta_{23}(\eta) = \theta_3$ . La variation linéaire de l'angle  $\theta$ , donne au point  $P_+$ , le résultat suivant

$$\theta^- = \theta_2 + \left[ \frac{(x^- - x_2)^2 + (y^- - y_2)^2}{(x_3 - x_2)^2 + (x_3 - y_2)^2} \right]^{1/2} (\theta_3 - \theta_2) \quad (\text{IV.72})$$

La détermination de la position du point  $P_+$  se fait en écrivant toujours les équations reliant les points 2 et 3 et les points  $W$  et  $P_+$ . On obtient:

$$x^+ = \frac{y_3 - y_w + x_3 \lambda^+ + x_w \operatorname{tg}(\varphi^+)}{\operatorname{tg}(\varphi^+) + \lambda^+} \quad (\text{IV.73})$$

$$y^+ = y_3 + \lambda^+ (x^+ - x_3) \quad (\text{IV.74})$$

Avec 
$$\varphi^+ = c_w \theta_w + (1 - c_w) \theta^+ \quad (\text{IV.75})$$

Et 
$$\lambda^+ = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \quad (\text{IV.76})$$

Les équations (IV.67) et (IV.68) représentent un système algébrique non linéaire permettant de déterminer la position  $(x^-, y^-)$  du point  $P^-$ . En premier lieu, on approxime l'angle  $\theta^- = \theta_w$ . On introduit cette approximation dans les équations (IV.67) et (IV.68) pour obtenir l'approximation initiale de la position du point  $P^-$ . En substituons cette valeur initiale dans la relation (IV.66) on corrige l'angle  $\theta^-$ . La procédure sera répétée jusqu'à satisfaction le critère de convergence  $\varepsilon$  (voir équation (IV.76)).

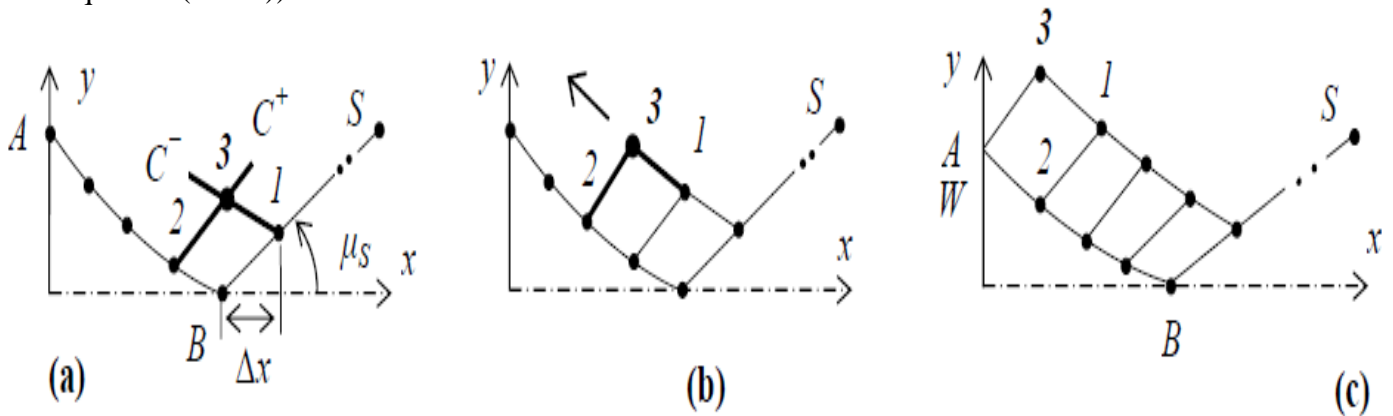


Figure IV.10 : Processus de calcul des  $C^-$  de la région de transition de la tuyère axisymétrique

Pour le point  $P^+$ , l'algorithme est présenté par les équations (IV.71), (IV.72) et (IV.73) pour obtenir la position de ce point et l'angle de déviation de la paroi.

$$\text{Max} [ |x^\pm(\text{inération } k) - x^\pm(\text{inération } k - 1)|, |y^\pm(\text{inération } k) - y^\pm(\text{inération } k - 1)| ] < \varepsilon \quad (\text{IV.77})$$

Entre chaque deux itérations successives il faut vérifier la condition (IV.64) pour la nouvelle valeur corrigée de  $\theta^-$  ou  $\theta^+$  pour prendre convenablement les équations nécessaires entre le point  $P^+$  ou  $P^-$  et de détecter exactement le point de la paroi. Une fois la position d'un point déterminée, il sera considéré comme un nouveau point de la paroi et une ou deux parmi les configurations de la figure IV.11 étaient appliquées. La procédure sera répétée pour les prochaines caractéristiques sélectionnées dans la région de transition. La présentation de la paroi dépend du pas  $\Delta x$  choisi pour les points de la ligne de Mach uniforme  $BS$  et des résultats obtenus sur la dernière  $C^-$  de la région de Kernel.

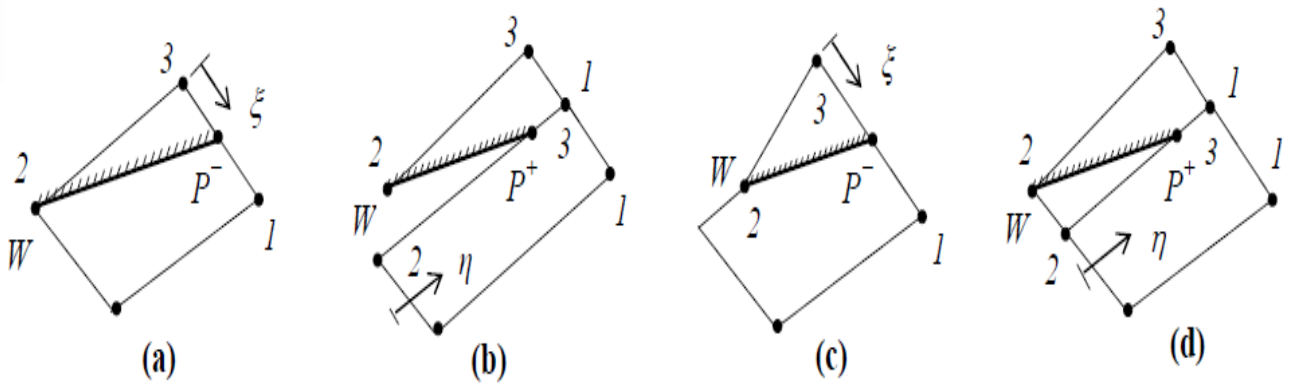


Figure IV.11 : Différents cas de l'intersection de la paroi avec les caractéristiques de la tuyère axisymétrique

Une fois la position des points  $P^+$  et  $P^-$  est déterminée, l'angle de déviation de la paroi converge en même temps avec le processus de calcul. La température en ces points peuvent être calculée en supposons une variation linéaire sur les segments reliant les points  $1$  et  $3$  et les points  $2$  et  $3$  avec la même démarche comme l'angle  $\theta$ . On aura le résultat suivant, respectivement pour le point  $P^-$  et  $P^+$ :

$$T^- = T_{3+} \left[ \frac{(x^- - x_3)^2 + (y^- - y_3)^2}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \right]^{1/2} (T_1 - T_3) \quad (IV.78)$$

$$T^+ = T_{2+} \left[ \frac{(x^- - x_2)^2 + (y^- - y_2)^2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \right]^{1/2} (T_3 - T_2) \quad (IV.79)$$

Pour obtenir le nombre de Mach en ce point, on remplace la valeur obtenue de la température dans l'équation (IV.4). Les autres paramètres peuvent être obtenus en remplaçant la valeur de  $T_3$  par la valeur obtenue de  $T^-$  ou  $T^+$  dans les relations (IV.47), (IV.48), (IV.49), (IV.50) et (IV.51).

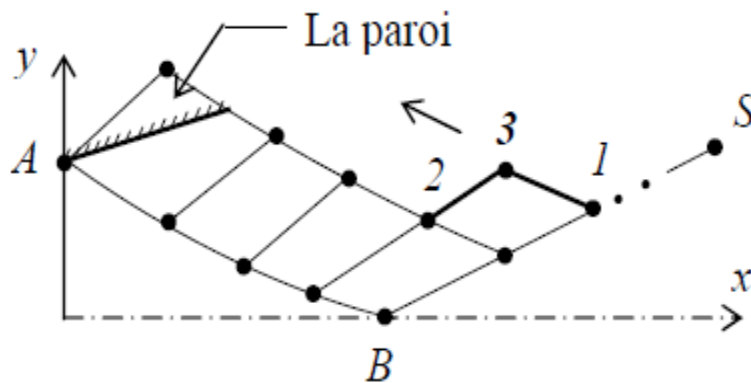


Figure 3.12 : Passage d'une caractéristique à l'autre dans la région de transition

La procédure complète sera répétée pour chaque  $C^-$  sélectionnée dans la région de transition jusqu'à la détermination d'une intersection de la paroi avec la  $C^+$  BS uniforme. Chaque fois qu'on sélectionne un point sur la ligne BS, le nombre de points interne à calculer sur la  $C^-$  correspondante diminue graduellement jusqu'à obtenir un point. Cette situation est obtenue cela veut dire qu'on est arrivé au point S de la section de sortie. Par conséquent, le rayon de sortie non-dimensionnel correspondant à la discrétisation sera donné par:

$$\frac{y_s}{y^*} (\text{calculé}) = \frac{y_{NW}}{y^*} \quad (\text{IV.80})$$

Le nombre de points trouvés sur la paroi de la tuyère (précisément le nombre NW dans la relation (IV.79)) dépend du pas  $\Delta x$  choisi sur la  $C^-$  uniforme BS et du nombre de points sur la dernière  $C^-$  AB de la région de Kernel. Il est supérieur ou égal au nombre de points choisi sur la  $C^-$  BS uniforme et même supérieur au nombre de points obtenus sur la dernière  $C^-$  AB de la région de Kernel ; ce qui n'est pas le cas pour la géométrie bidimensionnelle, où le nombre de points de la paroi est égal forcément au nombre de points de la dernière  $C^-$  AB de la région de Kernel.

La comparaison des résultats numériques obtenus sera faite entre le rayon de la section de sortie calculé numériquement et le rapport des sections théorique normalisé ( $y^*=1.0$ ) présenté par la formule suivante [24], [32].

$$\left(\frac{y_s}{y^*}\right)^2_{\text{théorique}} = \frac{A_s}{A^*} = \text{Exp} \int_{T_s}^{T^*} F_A(T) dT \quad (\text{IV.81})$$

$F_A(T)$  est donné par la relation (II.43) du chapitre 1.

### IV.3. Courbes Iso-Mach

Soit  $M^{iso}$  la valeur du nombre de Mach que doit avoir un ensemble de points interne dans la tuyère dont on doit déterminer les positions. Le segment contenant le point P de la courbe iso-Mach doit vérifier la condition suivante:

$$(M^{iso} - M_G)(M^{iso} - M_D) \leq 0 \quad (\text{IV.82})$$

Pour arriver à déterminer la position du point  $P$ , on considère une variation linéaire  $M(S)=\alpha S+\beta$  du nombre de Mach sur le segment  $GD$ . Lorsque  $S=0$ ,  $M(S)=M_G$  et lorsque  $S=S_{GD}$  (distance entre les points  $G$  et  $D$ ),  $M(S)=M_D$ . La relation  $M(S)=M_P=M^{iso}$  est vérifiée lorsque  $S=S_{GP}=S^{iso}$ . Alors, la distance entre les points  $G$  et  $P$  est donnée par:

$$M_{GP} = M^{iso} = \frac{M^{iso} - M_G}{M_D - M_G} \sqrt{(M_G - M_D)^2 + (y_G - y_D)^2} \quad (\text{IV.83})$$

La position  $(x_P, y_P)$  du point  $P$  de la courbe iso-Mach peut être déterminée par:

$$x_P = x_G - S_{GP} \cos(\theta_{GP}) \quad (\text{IV.84})$$

$$y_P = y_G - S_{GP} \sin(\theta_{GP}) \quad (\text{IV.85})$$

Avec 
$$\theta_{GP} = \arctg\left(\frac{y_D - y_G}{x_D - x_G}\right) \quad (\text{IV.86})$$

Il faut trier les points obtenus de sorte qu'il y ait accroissement des ordonnées pour permettre un traçage convenable.

Chapitre V

Résultats  
et  
discussion

Dans ce chapitre, on présente les divers résultats obtenus par le programme de calcul élaboré pour la forme de tuyère à détente centrée. Ce chapitre est divisé en deux paragraphes. Le premier Paragraphe V.1 comporte les résultats obtenus pour la tuyère à détente centrée bidimensionnelle. Le deuxième paragraphe V.2 comporte aussi les résultats obtenus pour la tuyère à détente centrée mais de la géométrie axisymétrique.

L'objectif principal de ce chapitre est la mise en application sur l'ordinateur de la méthode développée. Les résultats trouvés seront présentés sous forme de courbes (des figures). On a choisi la présentation des figures par quatre courbes, trois courbes pour le cas à haute température correspondant à la température génératrice  $T_0 = 1000K$ ,  $T_0 = 2000K$ ,  $T_0 = 3000K$  y compris la quatrième courbe du cas du gaz parfait pour  $\gamma = 1,402$ .

Dans la discussion, on a introduit l'abréviation GP pour le gaz calorifique-ment parfait et par HT pour le modèle à Haute Température.

### **\*. Présentation du programme :**

Le programme de calcul est essentiellement formé d'un programme principal et de huit sous-routines. Le programme principal contient les étapes logiques d'analyse de l'écoulement dans la partie divergente d'une tuyère supersonique plane ou axisymétrique. Les résultats qu'il permet d'obtenir sont représentés par les valeurs des propriétés de l'écoulement en chaque point du maillage interne ainsi que les performances de la tuyère.

Le programme principal communique avec huit sous-routines énumérées avec leurs Fonctions spécifiques ci-dessous :

- Sous-routine« P\_INTERNE\_GP »: pour le calcul les propriétés des points internes pour le cas plan à gaz parfait.
- Sous-routine« P\_INTERNE\_HT »: pour le calcul les propriétés des points internes pour le cas plan à HT.
- Sous-routine« P\_SYMETRIE\_GP»: point sur l'axe de symétrie pour le cas plan à GP.

- Soubroutine« P\_SYMETRIE\_HT»: point sur l'axe de symetrie pour le cas plan à HT.
- Soubroutine« Y\_PAROI(XX)»: pour determiner l'interpolation en " cubic spline " de paroi de la tuyere.
- Soubroutine « COEF\_Y»: pour determination les constantes necessaires pour l'interpolation en " cubic spline " de la paroi de la tuyere. Et calcul de l'ecoulement a haute temperature dans une tuyere dimensionnee sur la base de modele GP.
- Soubroutine « INTEG\_NU»: pour calculer l'integrale de la fonction  $F_A(T)$ , et pour la determination de la valeur de la fonction de Prandtl-Meyer pour un nombre de mach donne dans le regime supersonique.
- Soubroutine « SIMPSON»: calcul de la valeur d'une integrale definie d'une fonction Par la methode de Simpson a pas variable,

*\*. Les données thermodynamiques et géométriques pour le Programme*

- **Données thermodynamiques** : ce sont les données décrivant l'état de stagnation de l'écoulement. Elles sont principalement représentées par les valeurs de pression et de température totale et la masse volumique.
- **Donnée géométriques de la tuyère** : elles permettent de décrire la forme géométrique de la région du col.



## V.1. Résultats sur la tuyère à détente centrée bi-dimensionnelle (2D MLN)

Dans cette partie du chapitre des résultats, on présente les divers résultats obtenus sur la tuyère à détente centrée bidimensionnelle.

### V.1.1 Maillages en caractéristiques :

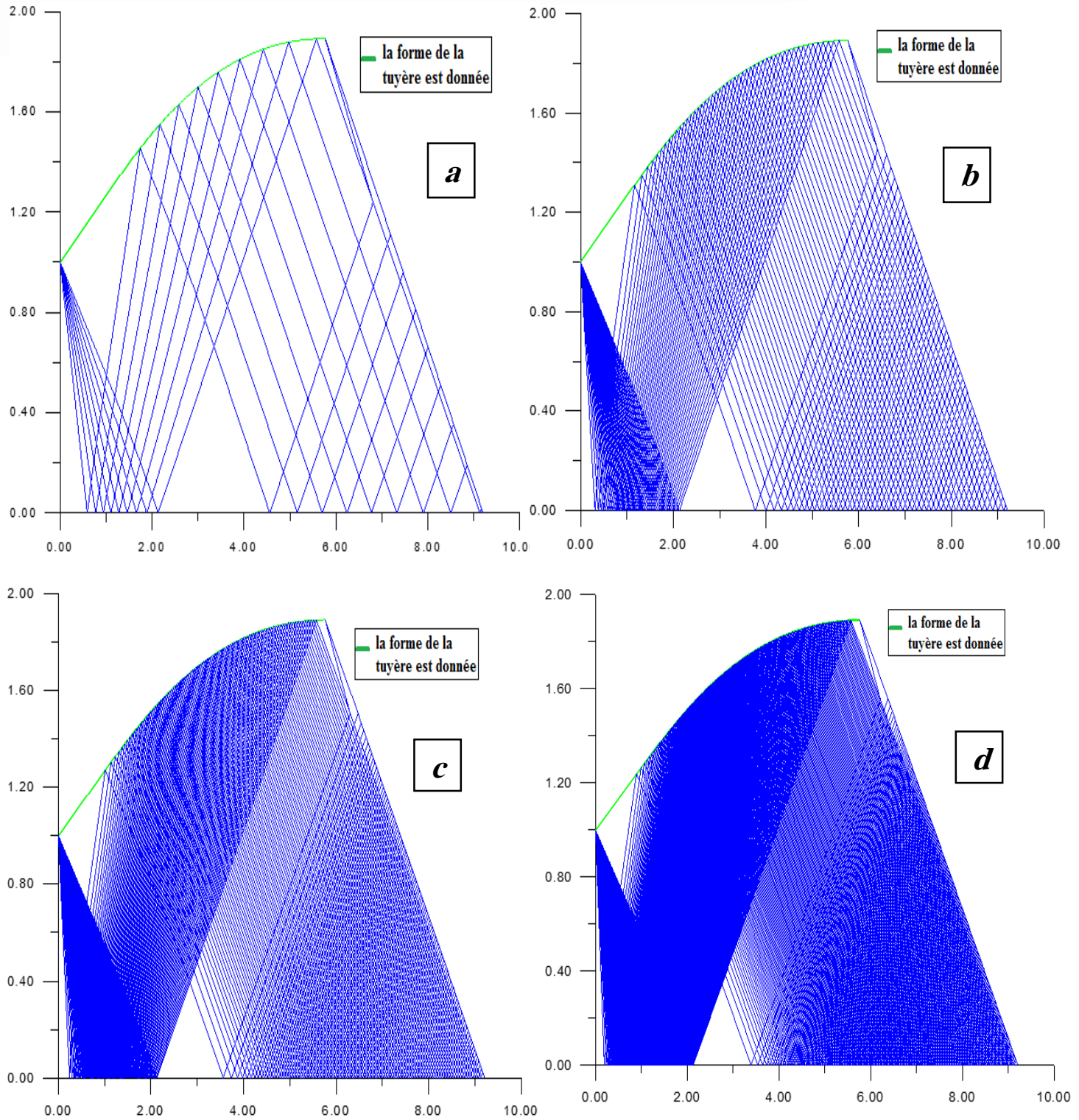
Dans les figures V.1 et V.2, on a présenté des maillages en caractéristiques dans une tuyère à détente centrée 2D avec et sans effet de condensation. Dans ces figures, on a pris l'exemple avec  $M_s=3.00$ .

Le but de ces figures c'est de présenter les différents cas possibles de maillage et leurs effets sur les résultats numériques de dimensionnement et de conception. Chaque figure contient quatre présentations pour différentes données.

La figure V.1 représente quelques maillages obtenus si on utilise l'insertion progressive des caractéristiques supplémentaires dans la région de Kernel entre la ligne sonique et la première C régulière. On remarque clairement pour cet exemple, que le nombre des caractéristique régulières  $N_c=10$  et le nombre des caractéristique insérée  $N_j=0$ , que la paroi de la tuyère est mal présentée au voisinage du col, ainsi qu'un espace large entre la ligne sonique et la première C régulière, et pour le nombre des caractéristiques  $N_c=50$ ,  $N_c=100$ ,  $N_c=200$ , On remarque que la paroi au voisinage du col est bien présentée. La distance entre la ligne sonique et la 1<sup>ère</sup> C régulière est diminuée.

On n'a pas la notion de Subdivision de la tuyère en trois zones (Kernel, transition, uniforme) est séparé, dans ce cas nous avons un seul de région est zone non uniforme

Sur la figure V.2, on a pris d'exemple avec nombre des caractéristiques régulières  $N_c=10$  et le nombre des caractéristiques insérées entre la ligne de sonique et la première caractéristiques descendantes régulières est égale à  $N_j=10$ . On remarque clairement pour cette exemple que la paroi de la tuyère est mal présentée au voisinage du col, ainsi qu'un espace large entre la ligne sonique et la première C régulière, et pour le nombre des caractéristique  $N_c=50$ ,  $N_c=100$ ,  $N_c=200$ , On remarque que la paroi au voisinage du col est bien présentée. La distance entre la ligne sonique et la 1<sup>ère</sup> C régulière est diminuée.

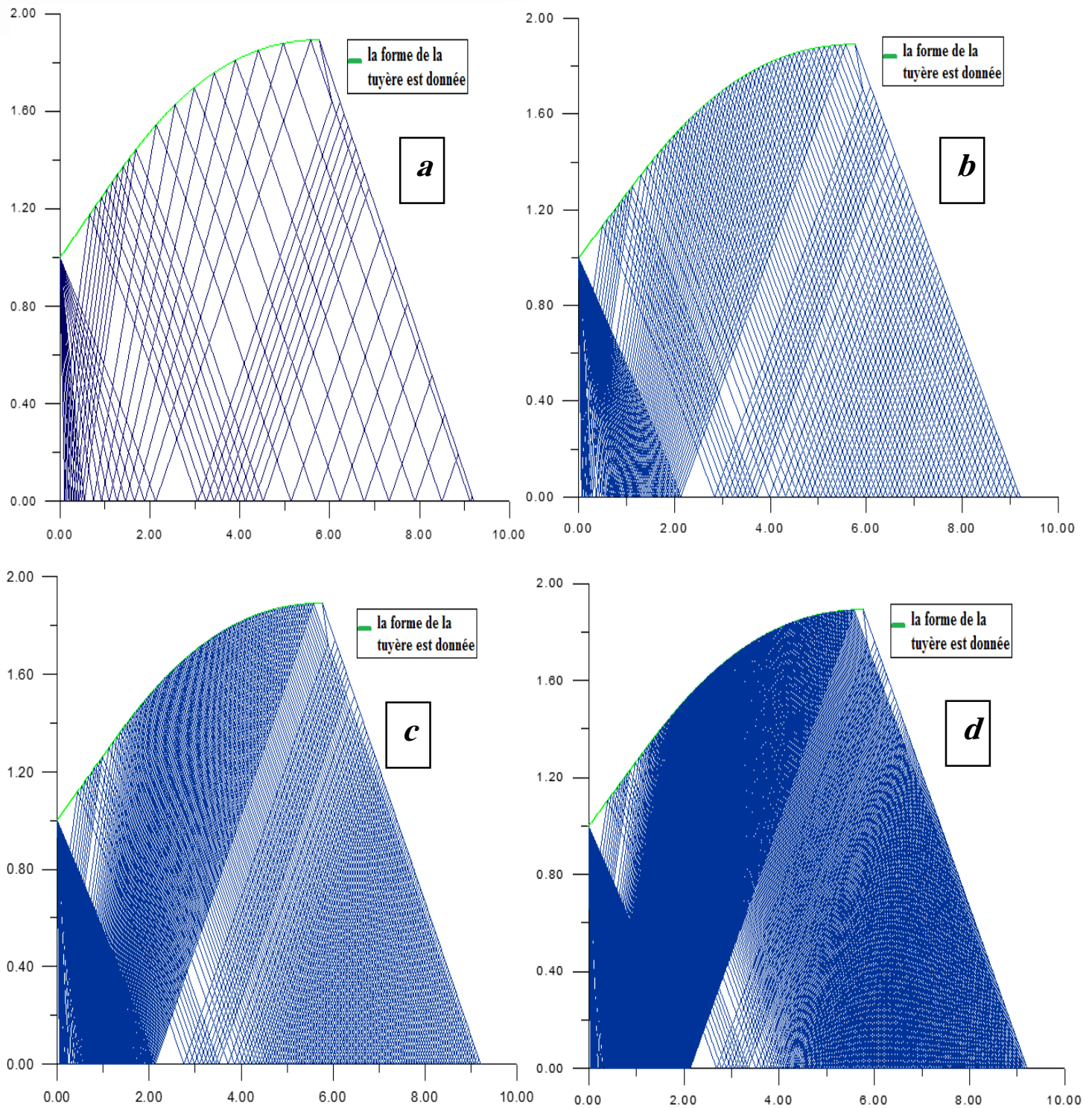


**Figure V.1** : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère

*MLN 2D* avec  $M_s=3.0$ ,  $N_j=0$ .

**(a)** : insertion avec  $N_c=10$ . **(b)** : Insertion avec  $N_c=50$ .

**(c)** : Insertion avec  $N_c=100$ . **(d)** : Insertion avec  $N_c=200$ .



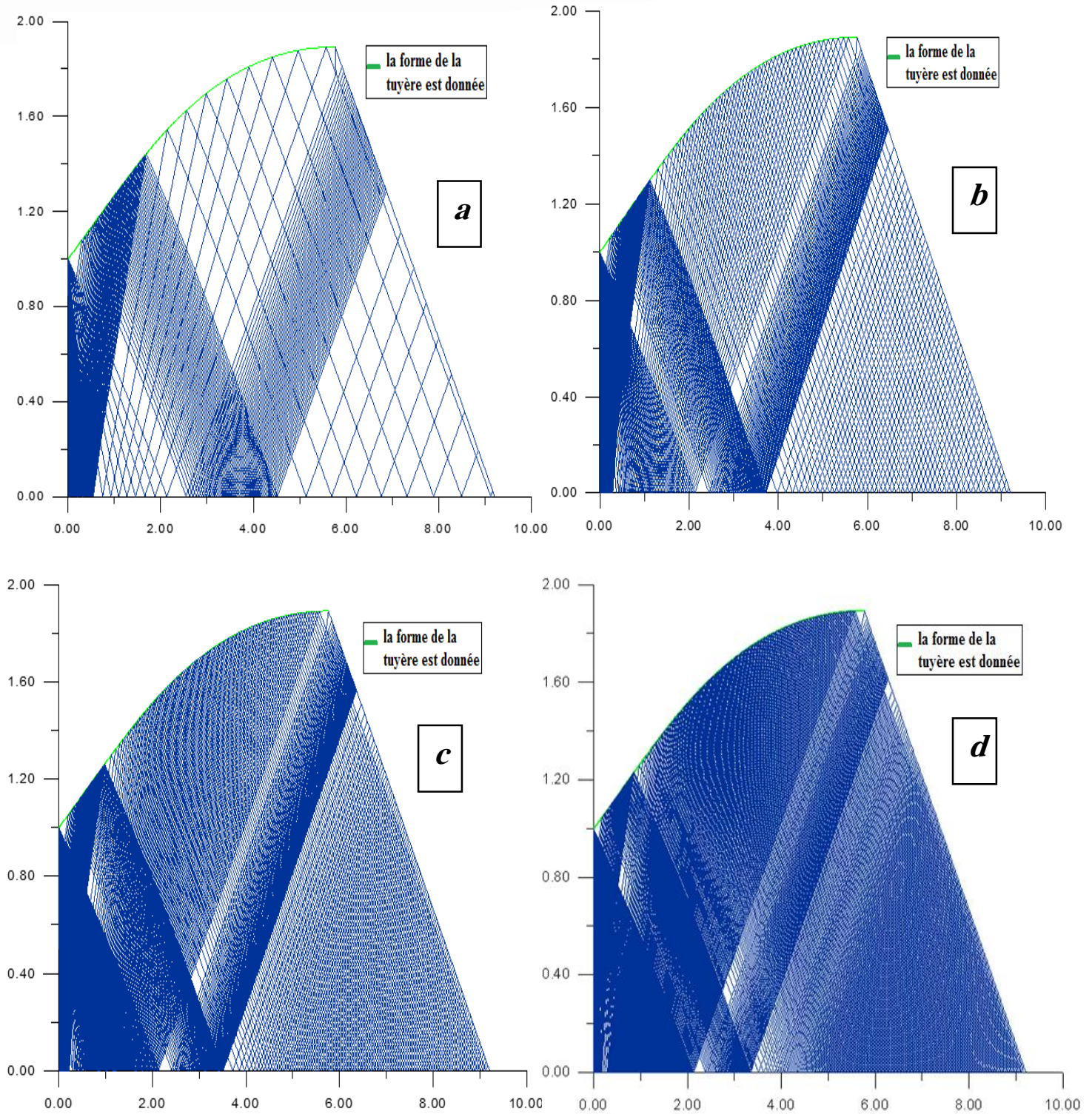
**Figure V.2** : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère *MLN 2D* avec  $M_s=3.0$ ,  $N_j=10$ .

**(a)** : Insertion avec  $N_c=10$ . **(b)** : Insertion avec  $N_c=50$ .

**(c)** : Insertion avec  $N_c=100$ . **(d)** : Insertion avec  $N_c=200$ .

On a pris d'exemple sur la figure V.3, avec nombre des caractéristiques régulières  $N_c=10$  et le nombre des caractéristiques insérées entre la ligne de sonique et la première caractéristique descendante régulière est égale à  $N_j=100$ . On remarque clairement pour cette exemple que la paroi de la tuyère est toujours mal présentée au voisinage du col, ainsi qu'un espace large entre la ligne sonique et la première  $C$  régulière, et pour le nombre des caractéristique  $N_c=50$ ,  $N_c=100$ ,  $N_c=200$ , On remarque que la paroi au voisinage du col est bien présentée l'écoulement intérieur de la tuyère. La distance entre la ligne sonique et la 1<sup>ère</sup>  $C$  régulière est diminuée.

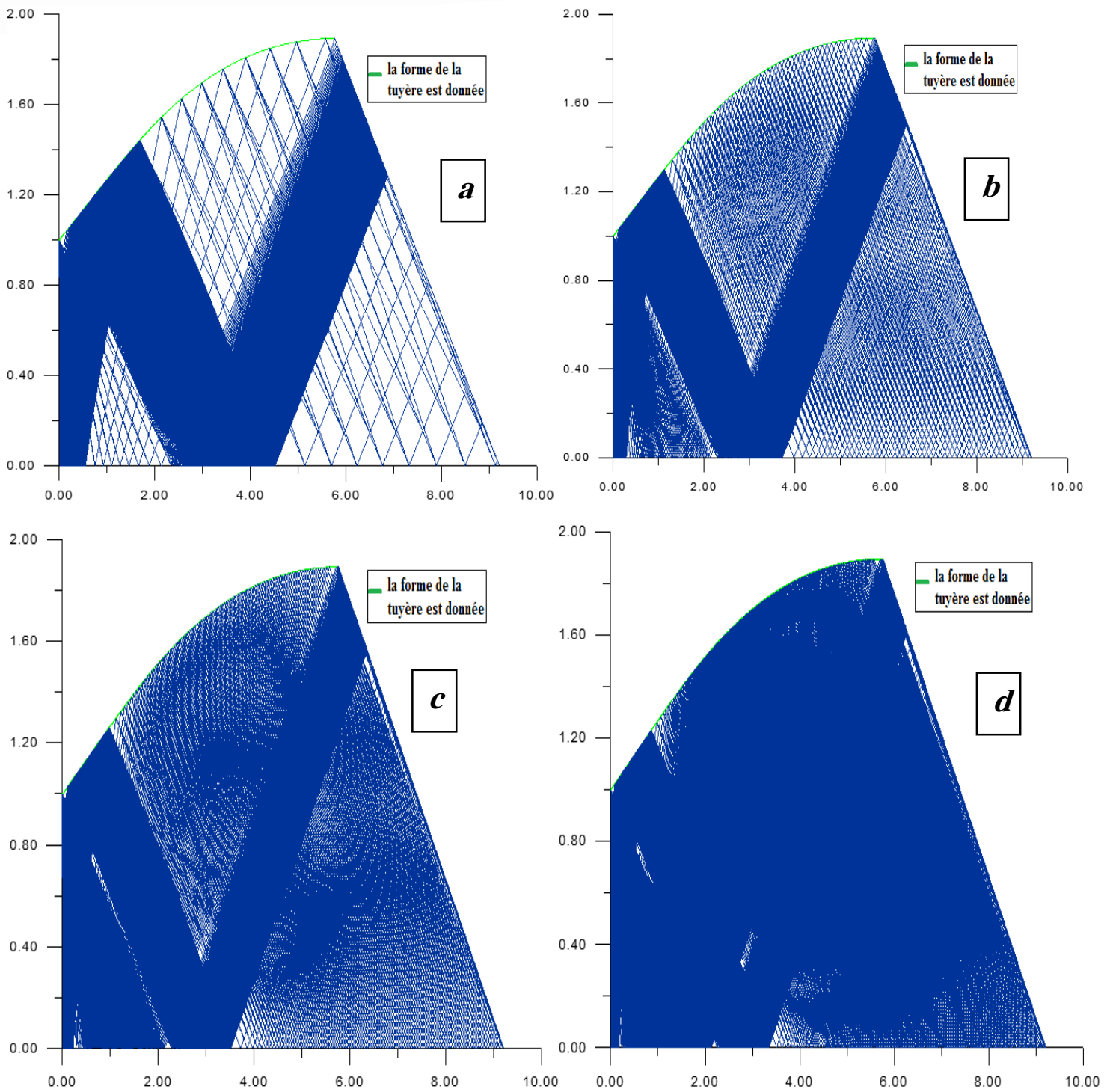
Sur la figure V.4, on a pris d'exemple avec nombre des caractéristiques régulières  $N_c=10$  et le nombre des caractéristiques insérées entre la ligne de sonique et la première caractéristiques descendantes régulières est égale à  $N_j=200$  (1cm). On remarque clairement pour cette exemple que la paroi de la tuyère est mal présentée au voisinage du col, ainsi qu'un espace large entre la ligne sonique et la première  $C$  régulière, et pour le nombre des caractéristique  $N_c=50$ ,  $N_c=100$ ,  $N_c=200$ , On remarque que la paroi au voisinage du col est bon présentée de l'écoulement intérieur de la tuyère. La distance entre la ligne sonique et la 1<sup>ère</sup>  $C$  régulière est diminuée.



**Figure V.3** : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère  $MLN$  2D avec  $M_s=3.0$ ,  $N_j=50$ .

**(a)** : insertion avec  $N_c=10$ . **(b)** : Insertion avec  $N_c=50$ .

**(c)** : Insertion avec  $N_c=100$ . **(d)** : Insertion avec  $N_c=200$ .



**Figure V.4** : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère  
 $MLN$  2D avec  $M_s=3.0$ ,  $N_j=200$ .

**(a)** : insertion avec  $N_c=10$ . **(b)** : Insertion avec  $N_c=50$ .

**(c)** : Insertion avec  $N_c=100$ . **(d)** : Insertion avec  $N_c=200$ .

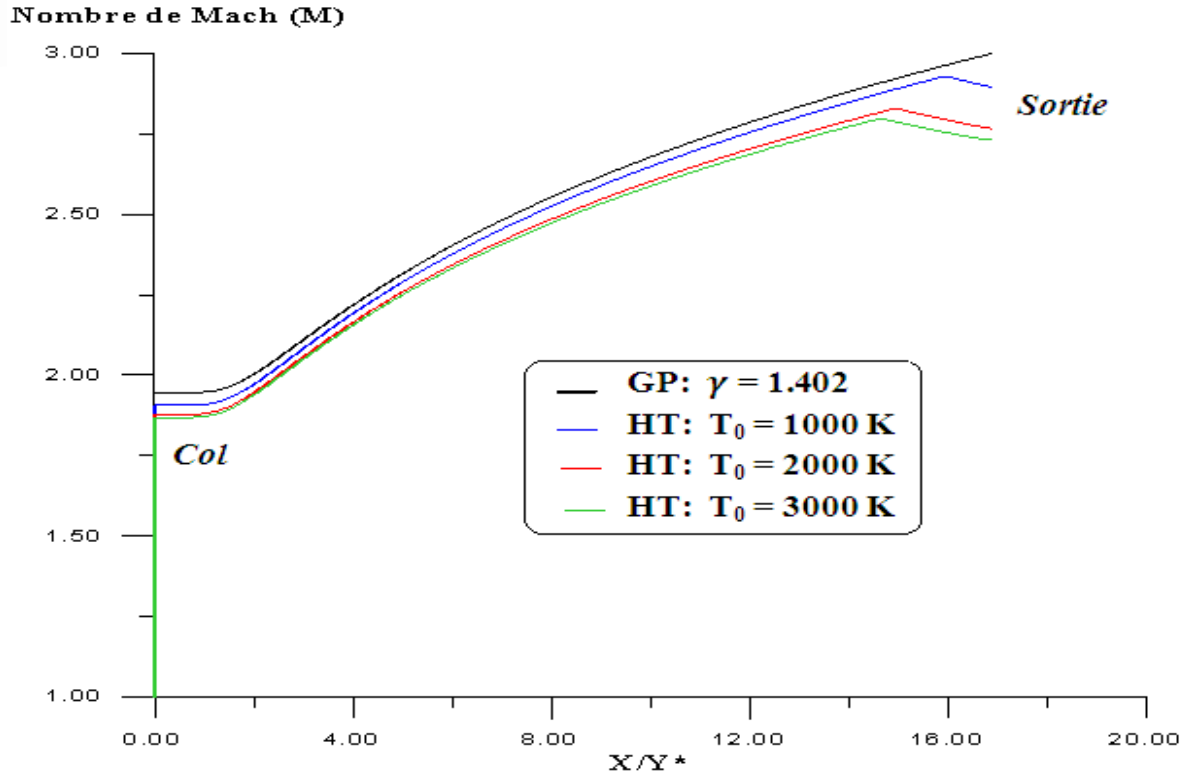
### V.1.2. Variation des paramètres à travers la paroi de la tuyère :

La variation de nombre de Mach  $M$  nous donne une indication sur l'écoulement.

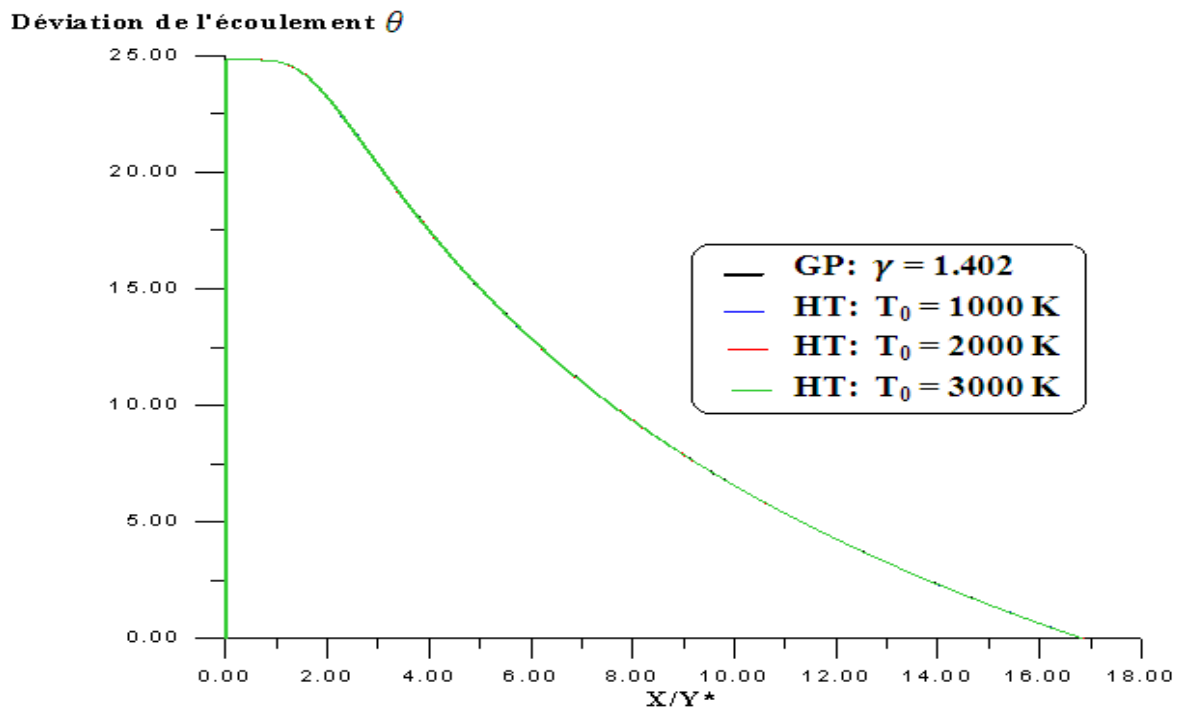
La figure V.5. Présente la variation de nombre de Mach  $M$  le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée Bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On voit clairement une diminution du nombre du Mach juste après la détente au col lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, et une augmentation de nombre de Mach au niveau du région du Kernel à travers la paroi avec une différence entre les quatre courbes et une chute du nombre de Mach à la sortie de la tuyère à travers la paroi pour le cas haute température  $1000K, 2000K, 3000K$ . Pour avoir le même nombre de Mach il faut ouvrir la paroi pour avoir une détente complète, alors on remarque lorsque la température de chambre de combustion augmente il y'aura une dégradation de l'écoulement sur la paroi au niveau de la section de sortie vu qu'il y a une apparition probablement d'une onde de choc oblique. La position du choc rapproche vers le col plus lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, on remarque que la température du chambre de combustion influe sur la forme de la tuyère.

La variation de l'angle de déviation de l'écoulement  $\theta$  nous donne une indication sur le rapport des sections

La figure V.6. présente la variation de l'angle de déviation de l'écoulement  $\theta$  le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée Bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On voit clairement que l'écoulement est horizontal à la section de sortie. Les quatre courbes sont confondues puisque la forme de la tuyère reste inchangée.



**Figure V.5:** Variation de nombre de Mach le long de la paroi à travers la tuyère MLN 2D du modèle GP



**Figure V.6:** Variation de l'angle de déviation de l'écoulement le long de la paroi à travers la tuyère MLN 2D du modèle GP.



La variation du rapport des températures  $T/T_0$  nous donne une indication sur le choix convenable du matériau de la construction qui va résister à cette température. Ce rapport nous servie encore pour déterminer la condition au limite interne du modèle mathématique du transfert de chaleur à travers le matériau utilisé pour la construction de la tuyère.

La figure V.7. Présente la variation du rapport des températures  $T/T_0$  le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On voit une augmentation de rapport des températures juste après la détente au col lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, et une diminution de ce rapport au niveau du région de Kernel à travers la paroi avec une différence entre les quatre courbes, et une augmentation de rapport des températures au voisinage de la sortie de la tuyère à travers la paroi pour le cas du modèle à haute température, contrairement au modèle gaz parfait qui continue avec sa diminution au voisinage de la sortie de la tuyère à travers la paroi, on remarque que lorsque la température de la chambre de combustion augmente la température au niveau de la paroi augmente.

Rapport des températures

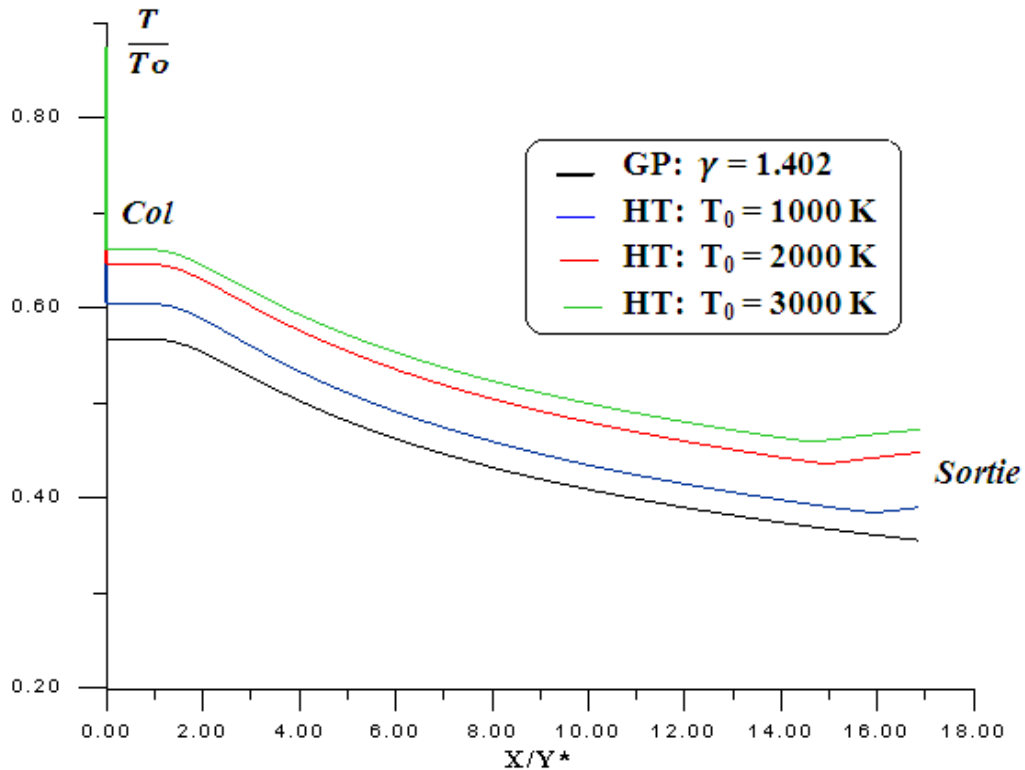
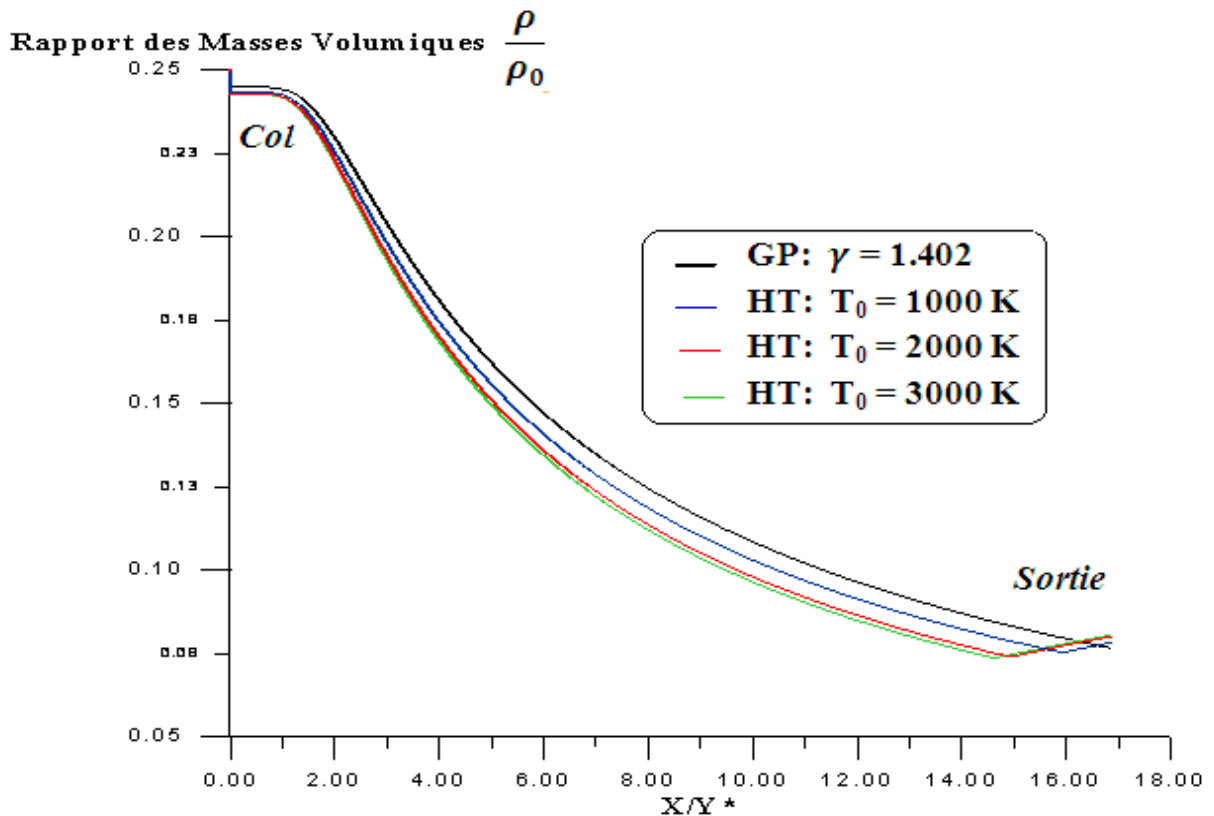


Figure V.7: Variation de Rapport des Températures le long de la paroi à travers la tuyère MLN 2D du modèle GP.

La variation de rapport des Masses Volumiques  $\rho/\rho_0$  nous donne une indication sur la quantité du gaz qui va traverser le divergent afin de déterminer la durée de la vie du carburent. Encore il servira pour l'obtention du rapport des pressions.

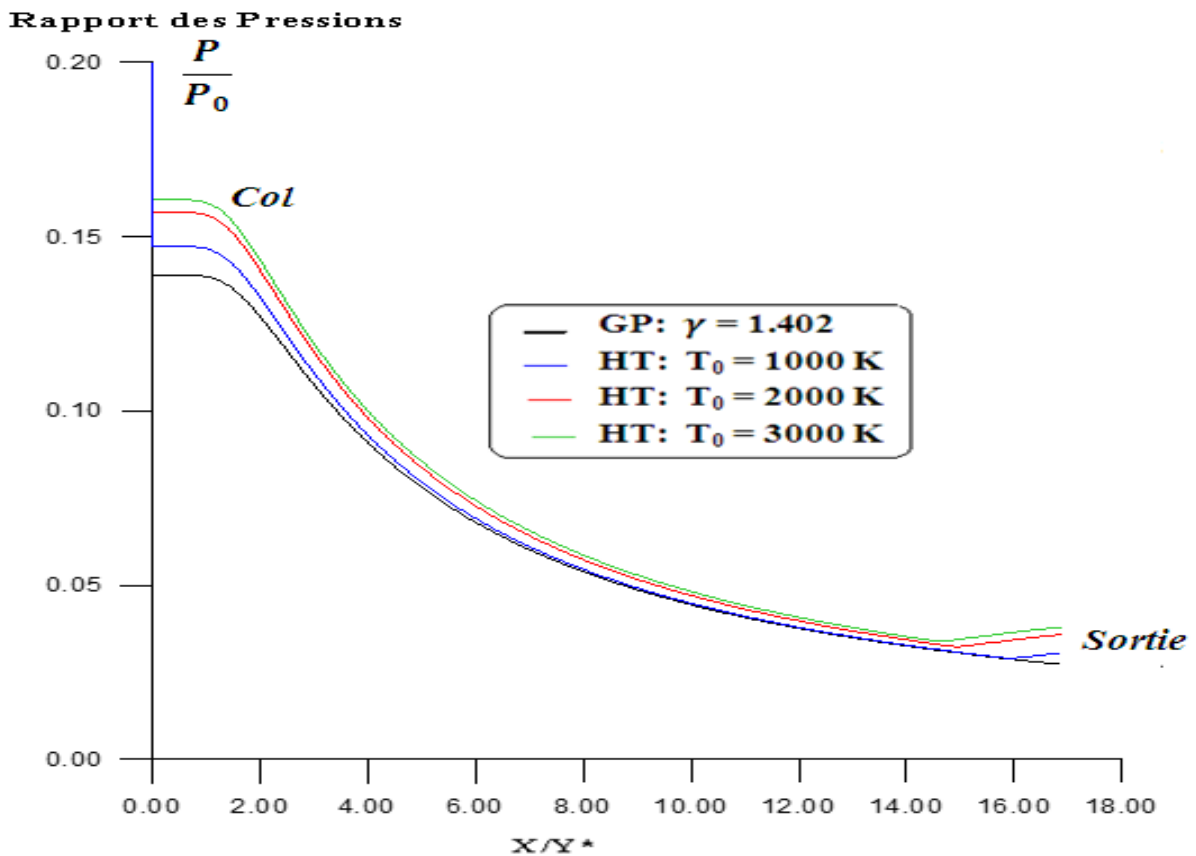
La figure V.8. Présente la variation de Rapport des Masses Volumiques  $\rho/\rho_0$  le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On voit une diminution de rapport des masses volumiques juste après la détente au col lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, et une diminution de rapport des masses volumique dans la région de Kernel à travers la paroi avec une petite différence entre les quatre courbes et une augmentation de rapport des masses volumiques à la sortie de la tuyère le long de la paroi pour le cas du modèle à haute température, contrairement au modèle gaz parfait qui continue de diminuer au voisinage de la section de la tuyère à travers la paroi. Le rapport des masses volumiques n'est pas important pour nous parce que le rapport nous permet de calculer le débit et on a un débit entre la section d'entrée et la section de sortie à travers la tuyère constant au niveau de la paroi ce qui démontre son non influence.



**Figure V.8:** Variation de Rapport des Masses Volumiques le long de la paroi à travers la tuyère MLN 2D du modèle GP.

La variation de rapport des pressions  $P/P_0$  nous servira pour déterminer la force de pression exercée sur la paroi du divergent. Cette figure indique une chute de pression à travers le divergent qui va délivrer une force de pression. Ce rapport servi encore pour faire l'étude sur la distribution de la contrainte radiale et tangentielle, pour but d'étudier la résistance du matériau

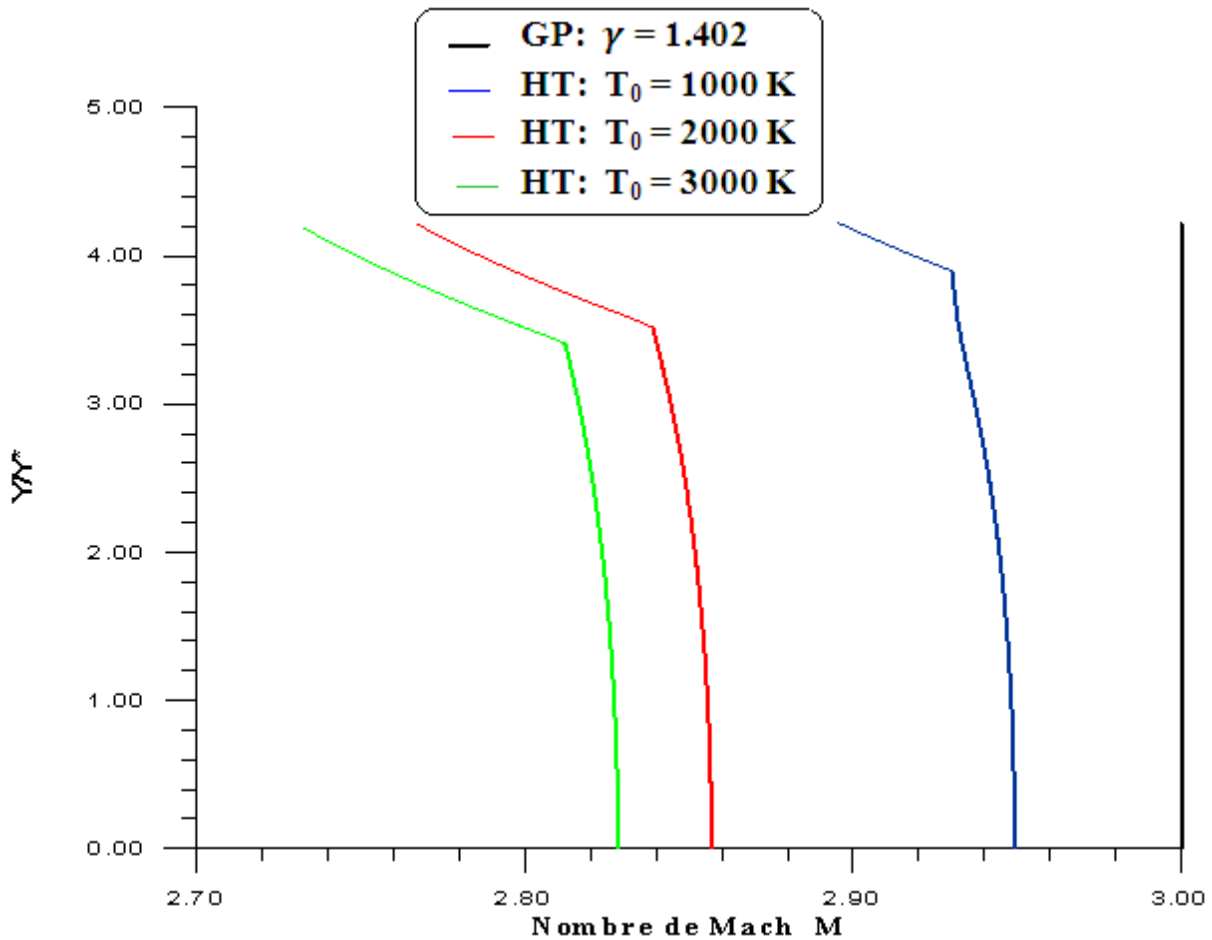
La figure V.9. Présente Variation de Rapport des Pressions  $P/P_0$  le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On voit une augmentation de rapport des pressions juste après la détente au col lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, et une diminution de rapport des pressions dans la région de Kernel à travers la paroi avec une petite différence entre les quatre courbes, et une augmentation de rapport des pressions à la sortie de la tuyère le long de la paroi qui explique la possibilité d'existence d'une onde de choc. Plus que la température de chambre de combustion augmente plus que la distribution de pression du gaz parfait sur la paroi augmente on remarque l'effet de température. La pression rentre dans le cadre de calcul de coefficient de poussé.



**Figure V.9:** Variation de Rapport des Pressions le long de la paroi à travers la tuyère MLN 2D du modèle GP.

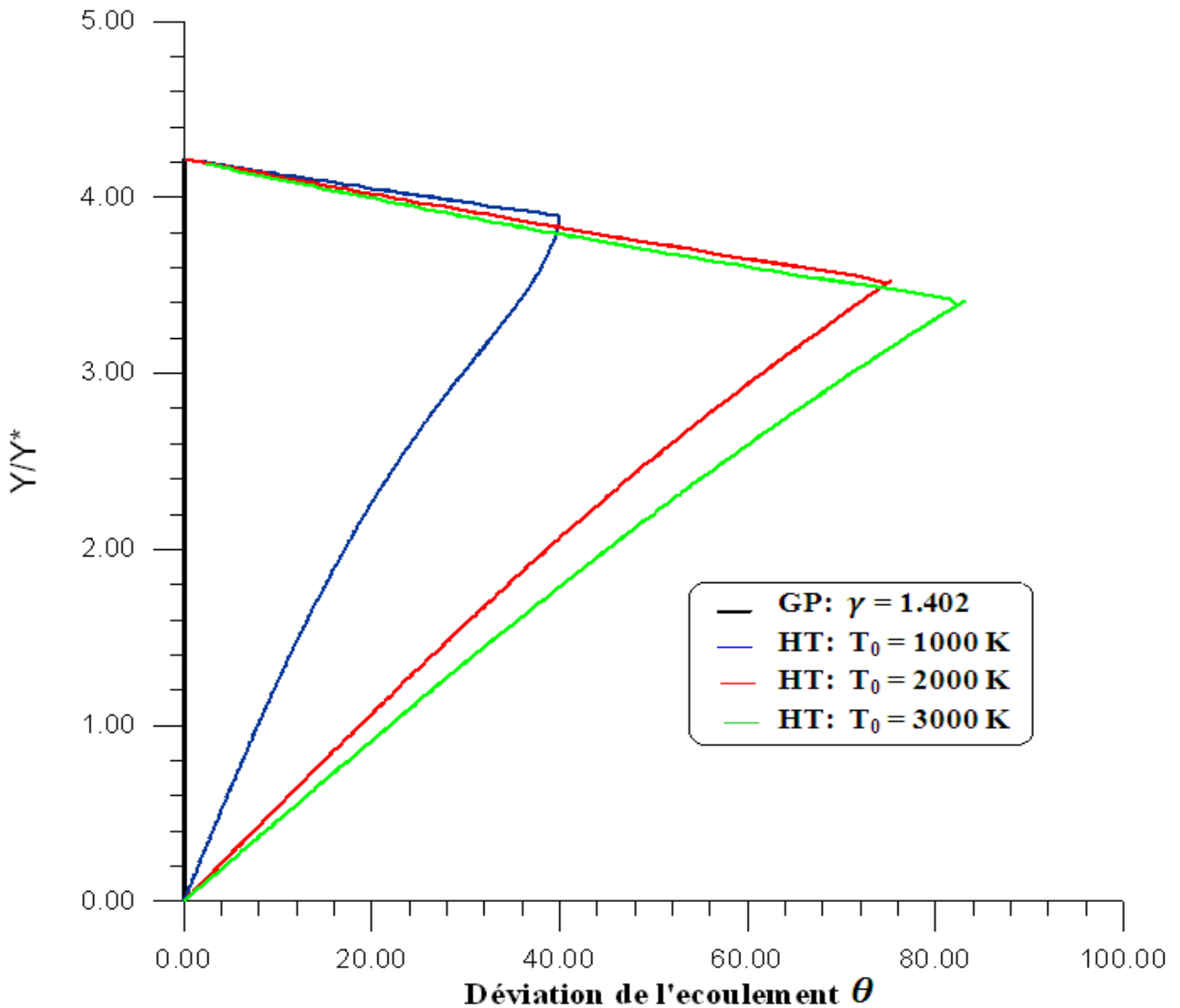
### V.1.3. Variation des paramètres dans la section de sortie de la tuyère :

La figure V.10 présente la variation de nombre de Mach  $M$  dans la section de sortie de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement que le nombre de Mach dans la section de sortie pour le cas du Gaz Parfait GP reste constante est égal à la valeur 3. Pour le cas à haute température HT le nombre de Mach égal à 2.95, 2.84, 2.828 lorsque  $T_0 = 1000K, T_0 = 2000K, T_0 = 3000K$  respectivement, on remarque à l'axe de symétrie une diminution de nombre de Mach dans la section de sortie et une chute de nombre de Mach au niveau de la paroi lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, avec une différence entre les quatre courbes. Pour  $T_0$  donné on remarque une chute de nombre de Mach à travers le rayon de la section de sortie au voisinage de la paroi vu ce chute est justifier par la naissance d'une onde de choc oblique qui sera réflectif a fin de donné cette variation.



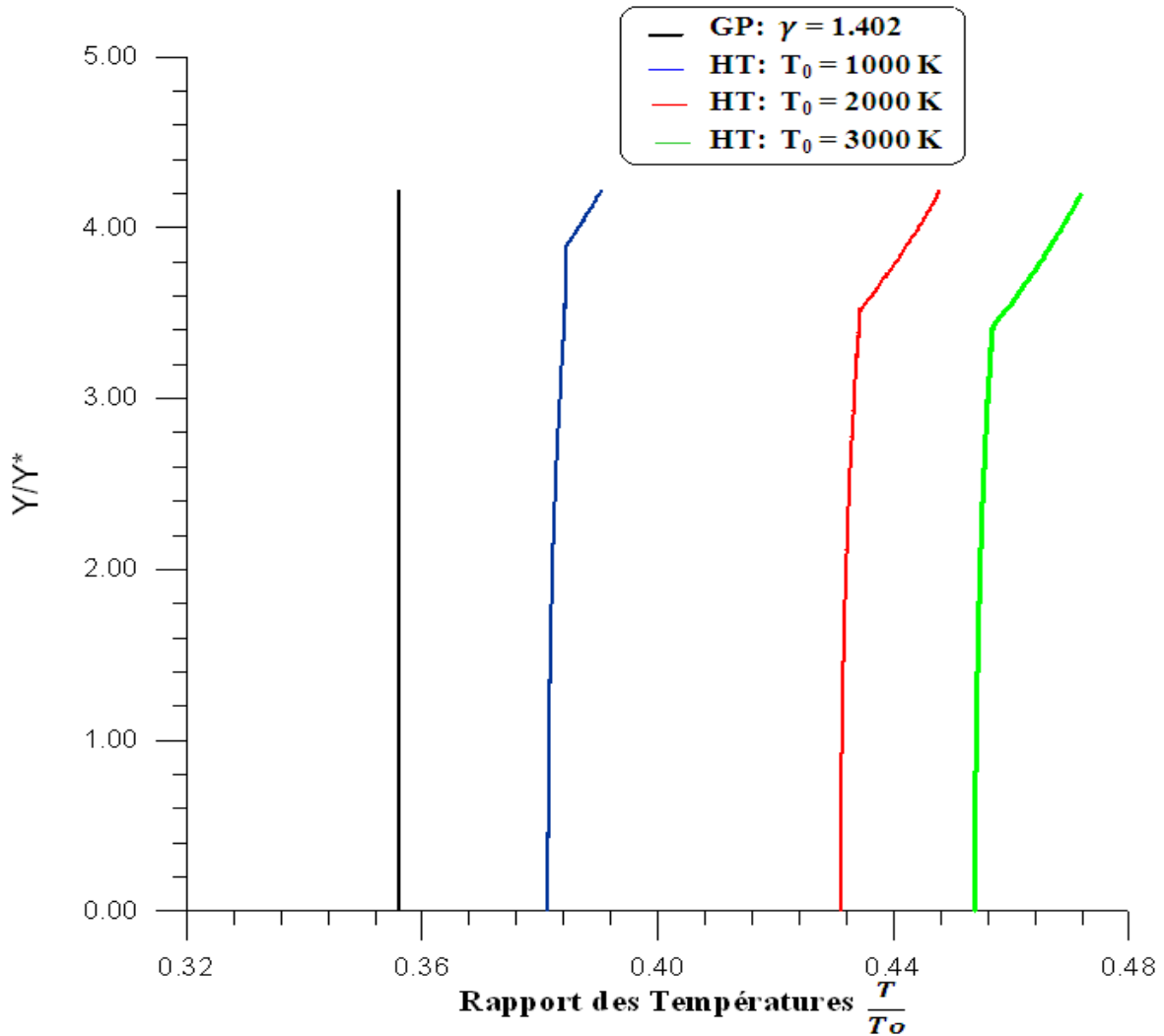
**Figure V.10:** Variation de nombre de Mach dans la section de sortie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.

La figure V.11 présente la variation de l'angle de déviation  $\theta$  de l'écoulement dans la section de sortie de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement que la valeur de l'angle de déviation de l'écoulement pour le cas de gaz parfait GP reste nulle l'écoulement est horizontal, Et pour le cas à haute température lorsque  $T_0 = 1000K, T_0 = 2000K, T_0 = 3000K$  respectivement, avec une différence entre les quatre courbes, on voit que l'angle de déviation de l'écoulement à la paroi et l'axe de symétrie est nulle alors l'écoulement est horizontal. L'écoulement n'est pas horizontal entre l'axe de symétrie et la paroi dans la section de sortie alors on ne peut pas vérifier le rapport de section dans ce cas.



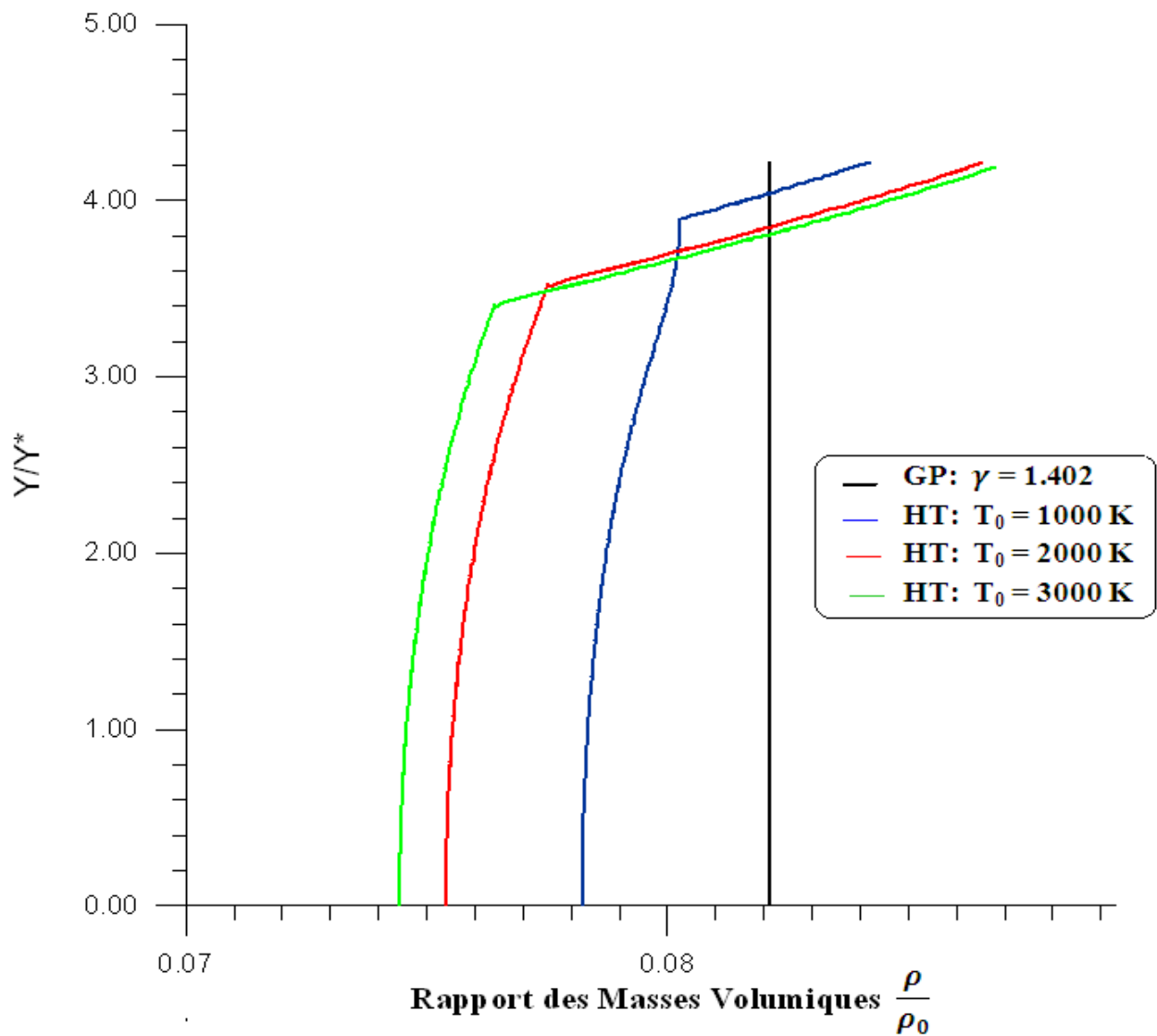
**Figure V.11:** Variation de l'angle de déviation de l'écoulement dans la section de sortie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.

La figure V.12 présente la variation de rapport des températures  $T/T_0$  dans la section de sortie de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement que le rapport des températures pour le modèle de gaz parfait reste constant à une valeur égale à 0,358. Pour le cas à haute température le rapport des températures égal à 0.382, 0.431, 0.454 lorsque  $T_0 = 1000K, T_0 = 2000K, T_0 = 3000K$  respectivement, on voit une augmentation de rapport des températures lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente au niveau de l'axe de symétrie dans la section de sortie, et une augmentation brusque de rapport des températures au niveau de la paroi qui est justifier par la naissance d'une onde de choc oblique sur la paroi qui est réfléchi afin de donné cette variation de température.



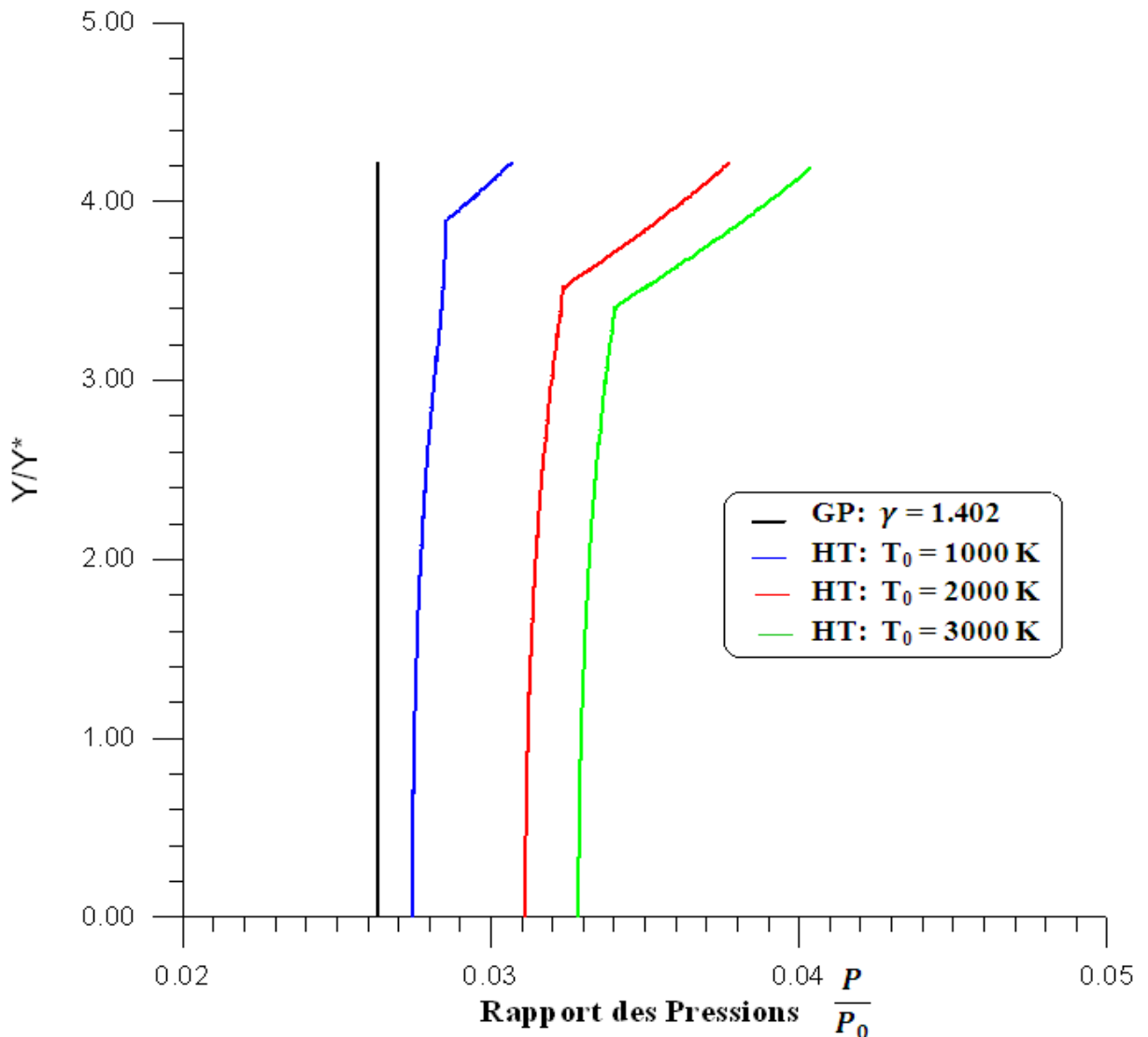
**Figure V.12:** Variation de Rapport des Températures dans la section de sortie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.

La figure V.13 présente la variation de rapport des Masses Volumiques  $\rho/\rho_0$  dans la section de sortie de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement que la valeur du rapport des masses volumiques pour le modèle de gaz parfait GP reste constante avec une valeur égal à 0,081. Pour le cas à haute température le rapport des masses volumiques égal à 0.762, 0.726, 0.714 lorsque  $T_0 = 1000K, T_0 = 2000K, T_0 = 3000K$  respectivement on voit une diminution de rapport des Masses Volumiques au niveau de l'axe de symétrie dans la section de sortie et une augmentation de ce rapport au niveau de la paroi lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, avec une différence entre les quatre courbes.



**Figure V.13:** Variation de Rapport des Masses Volumiques dans la section de sortie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.

La figure V.14 présente la variation de rapport des pressions  $P/P_0$  dans la section de sortie de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement que la valeur de rapport des pressions pour le modèle de gaz parfait GP reste constante avec une valeur égal 0.0029. Pour le cas du modèle à haute température HT le rapport des pressions égal à 0.0302, 0.0336, 0.0352 lorsque  $T_0 = 1000K, T_0 = 2000K, T_0 = 3000K$  respectivement, on voit une augmentation des valeurs de rapport des pressions dans la section de sortie au niveau de la paroi lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, avec une différence entre les quatre courbes. Ce qui montre que la pression n'est plus uniforme à la section de sortie pour le cas du modèle à haute température HT.

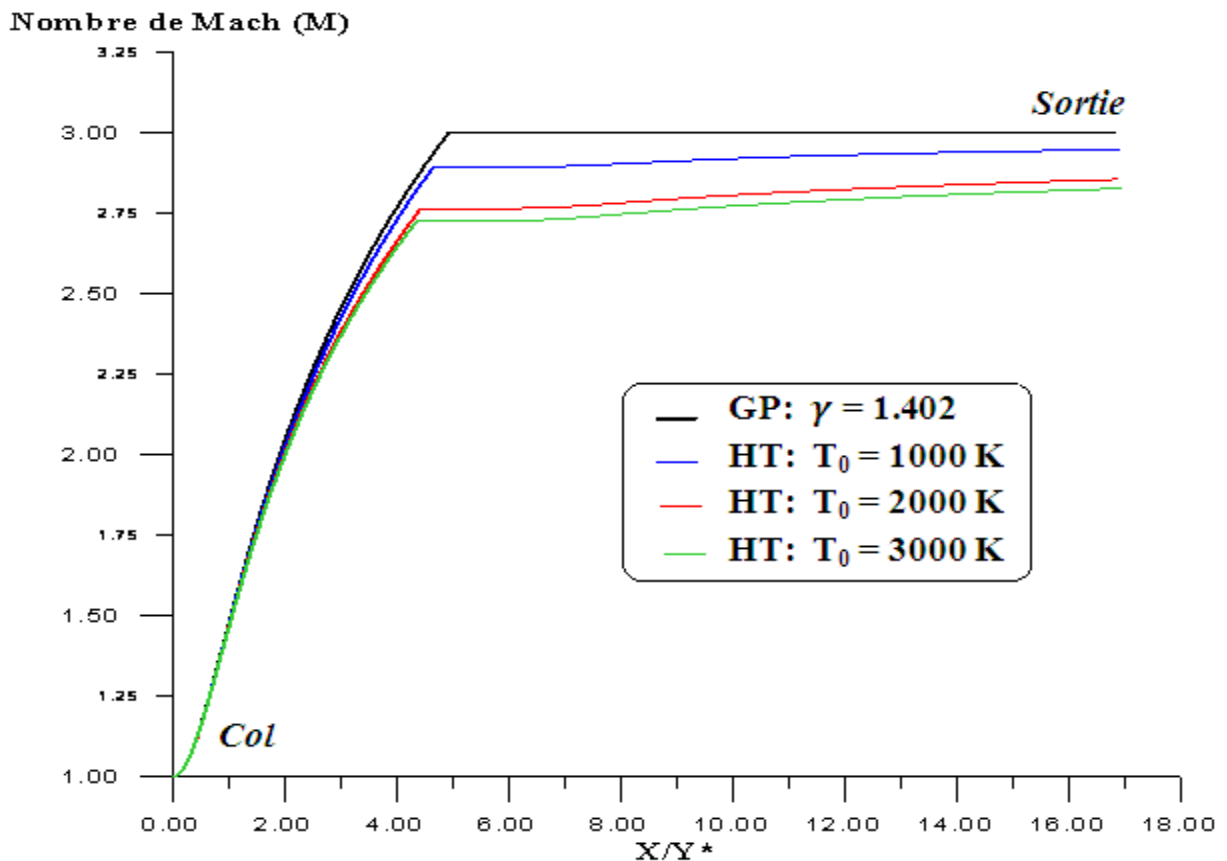


**Figure V.14:** Variation de Rapport des Pressions dans la section de sortie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.



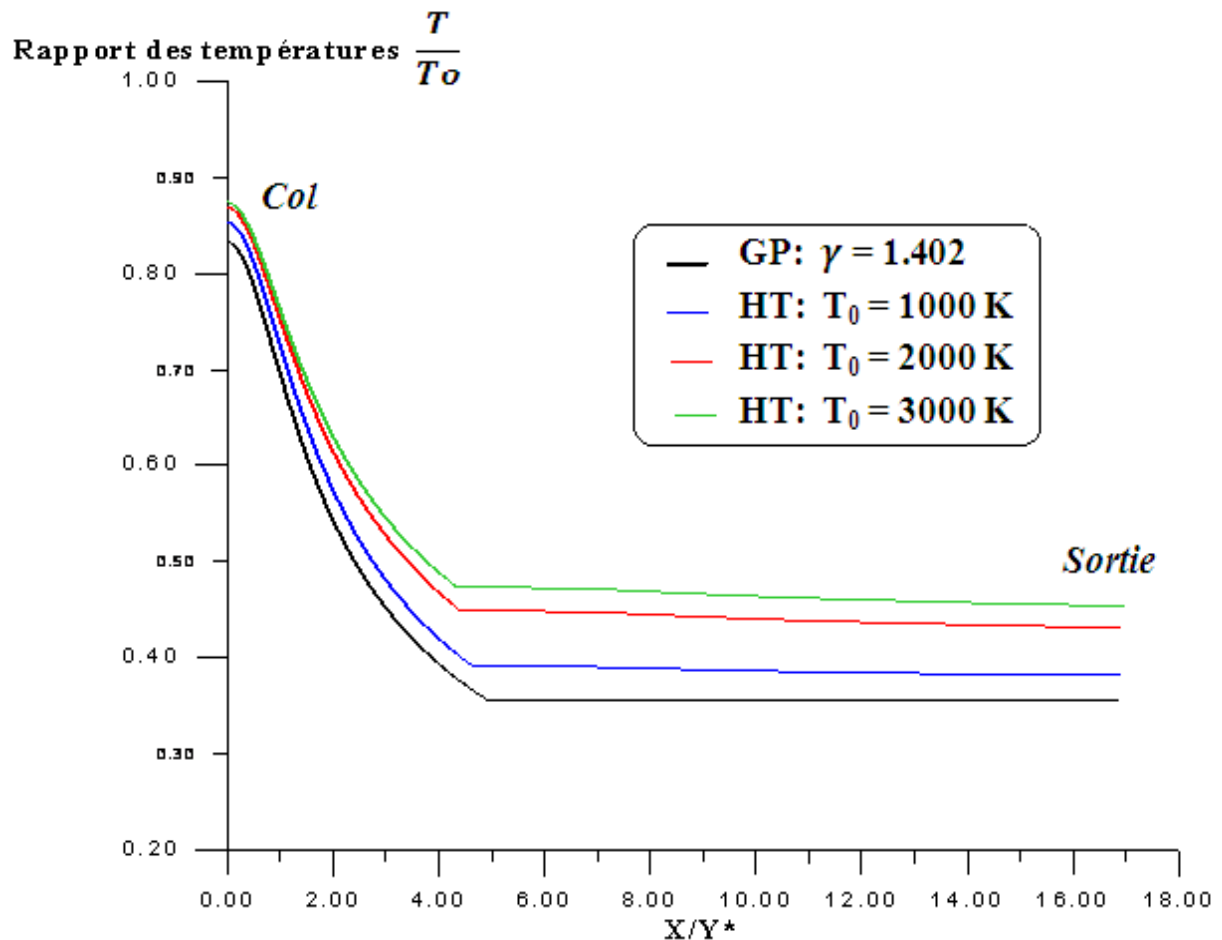
#### V.1.4. Variations des paramètres dans l'axe de symétrie de la tuyère :

La figure V.15 présente la variation de nombre de Mach  $M$  sur l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement la valeur du nombre du Mach est constante et égal à 1 au niveau du col, et une augmentation de nombre de Mach au niveau du région du Kernel sur l'axe de symétrie lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente avec une petite différence entre les quatre courbes alors on remarque que la température de la chambre de combustion influe sur la forme de la tuyère. La température génératrice  $T_0$  influe sur la distance de région de Kernel, donc plus que  $T_0$  augmente plus que la longueur de région de Kernel diminue. On remarque que l'écoulement est uniforme juste après la région de Kernel jusqu'à la section de sortie pour le modèle du gaz parfait GP. Tandis que si on prend  $T_0$  en compte (HT), l'écoulement ne reste plus uniforme et dans ce cas on parle plus sur l'existence de la zone uniforme.



**Figure V.15:** Variation de Nombre de Mach dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.

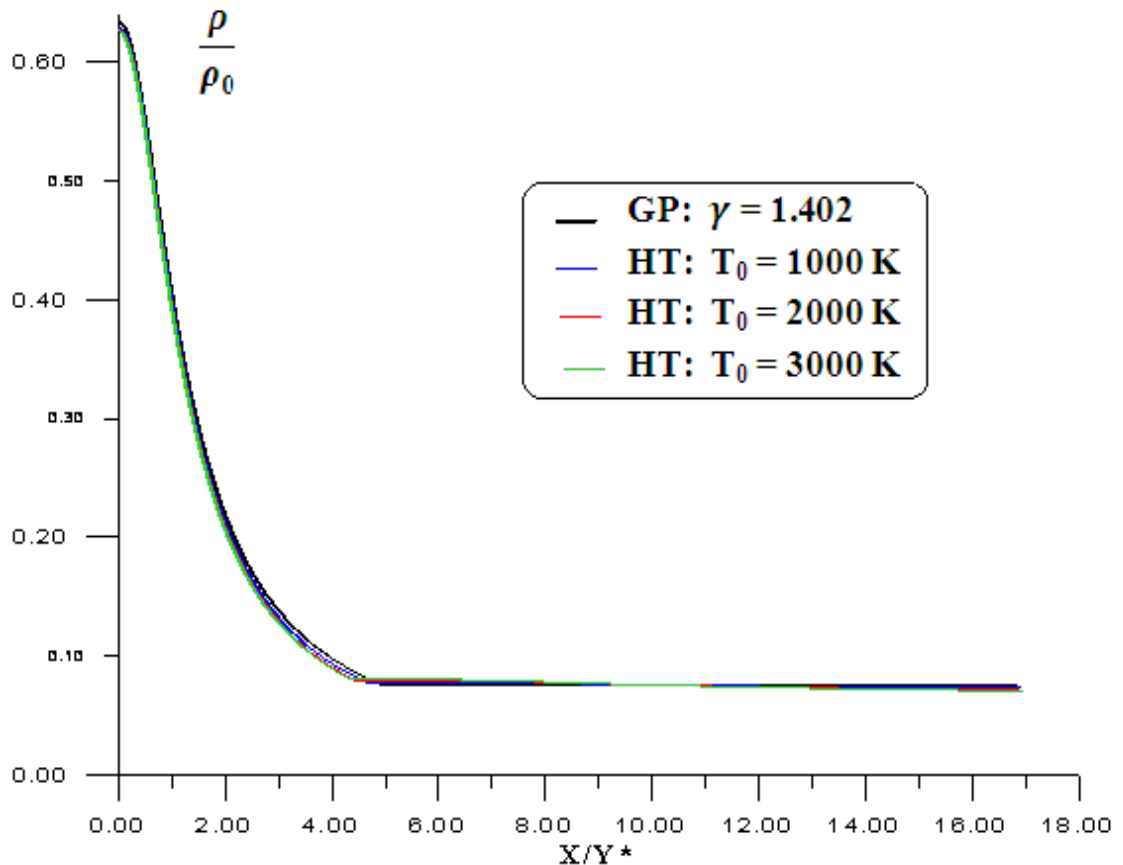
La figure V.16 présente la variation de rapport des températures  $T/T_0$  sur l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On voit une augmentation de température juste après la détente au col lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, et une diminution de température au niveau de la région de Kernel dans l'axe de symétrie avec une différence remarquable entre les quatre courbes. Et au niveau de section de sortie on voit que le rapport des températures dans l'axe de symétrie devient constant pour le cas du modèle gaz parfait GP, et n'est pas constant pour le cas du modèle à haute température HT ce qui montre que l'écoulement n'est plus uniforme si on considère le modèle HT pour l'écoulement.



**Figure V.16:** Variation de Rapport des Températures dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.

La figure V.17 présente la variation de rapport des Masses Volumiques  $\rho/\rho_0$  sur l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement une diminution de valeur de rapport de masses volumiques juste après la détente au col lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, et une diminution de rapport de masses volumiques à la région de Kernel sur l'axe de symétrie avec une petite différence entre les quatre courbe, et au niveau de section de sortie on voit que le rapport des masses volumiques sur l'axe de symétrie devient constant pour le cas du modèle gaz parfait GP et on remarque que il n'est pas constant dans le cas du modèle à haute température HT.

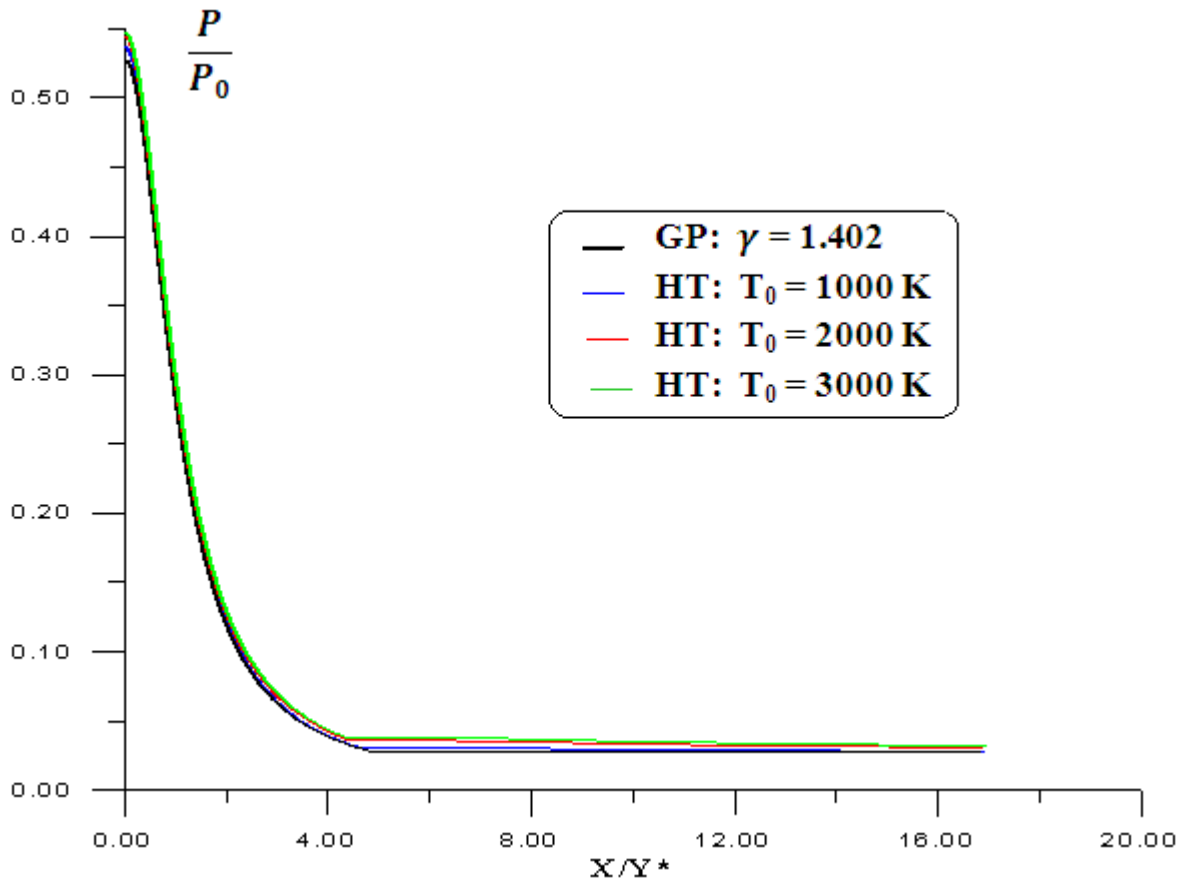
Rapport des Masses Volumique



**Figure V.17:** Variation de Rapport des Masses Volumiques dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.

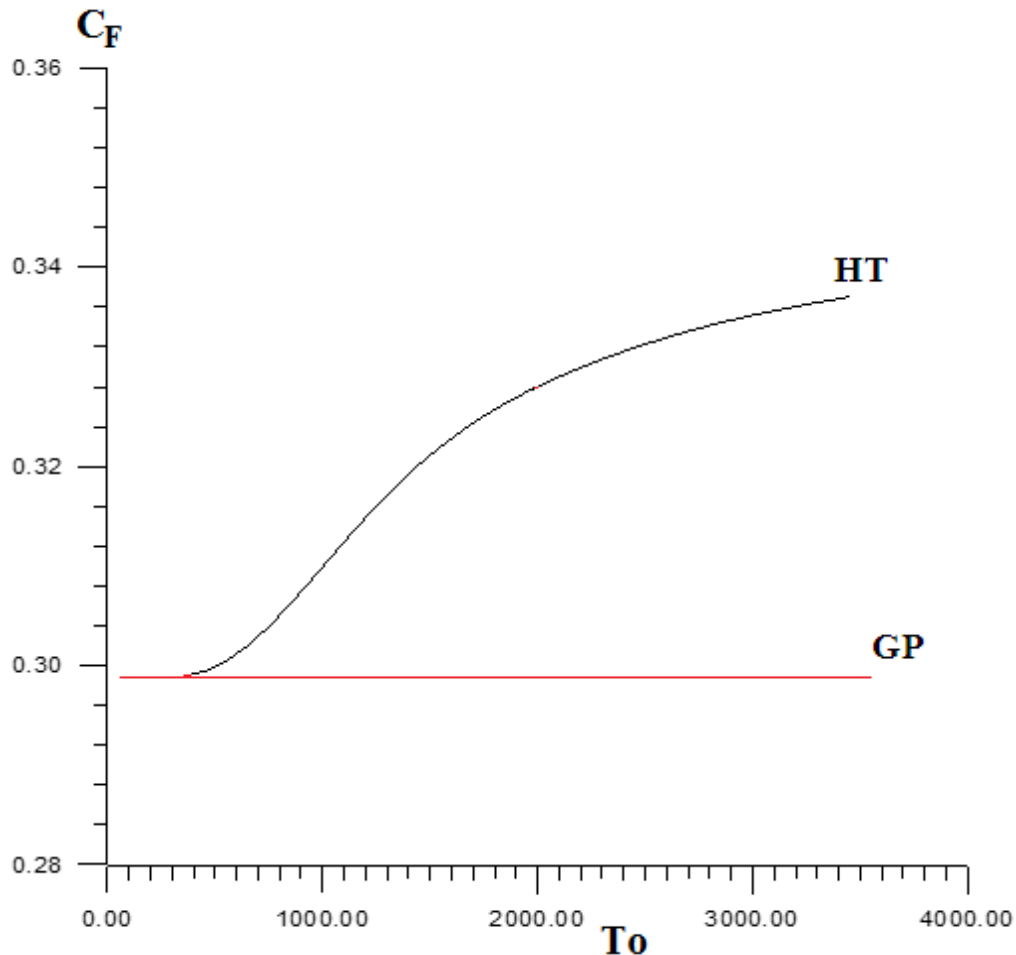
La figure V.18 présente la variation de rapport des pressions  $P/P_0$  sur l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement une augmentation de rapport des pressions juste après la détente au col lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente et une diminution de rapport des pressions à la région de Kernel dans l'axe de symétrie, avec une petite différence entre les quatre courbes, et au niveau de section de sortie on voit que le rapport des pressions dans l'axe de symétrie devient constant pour le cas du modèle de gaz parfait GP, et pour le cas du modèle à haute température HT on remarque que le rapport des pressions ne reste plus constant.

Rapport des Pressions



**Figure V.18:** Variation de Rapport des Pressions dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN 2D du modèle GP.

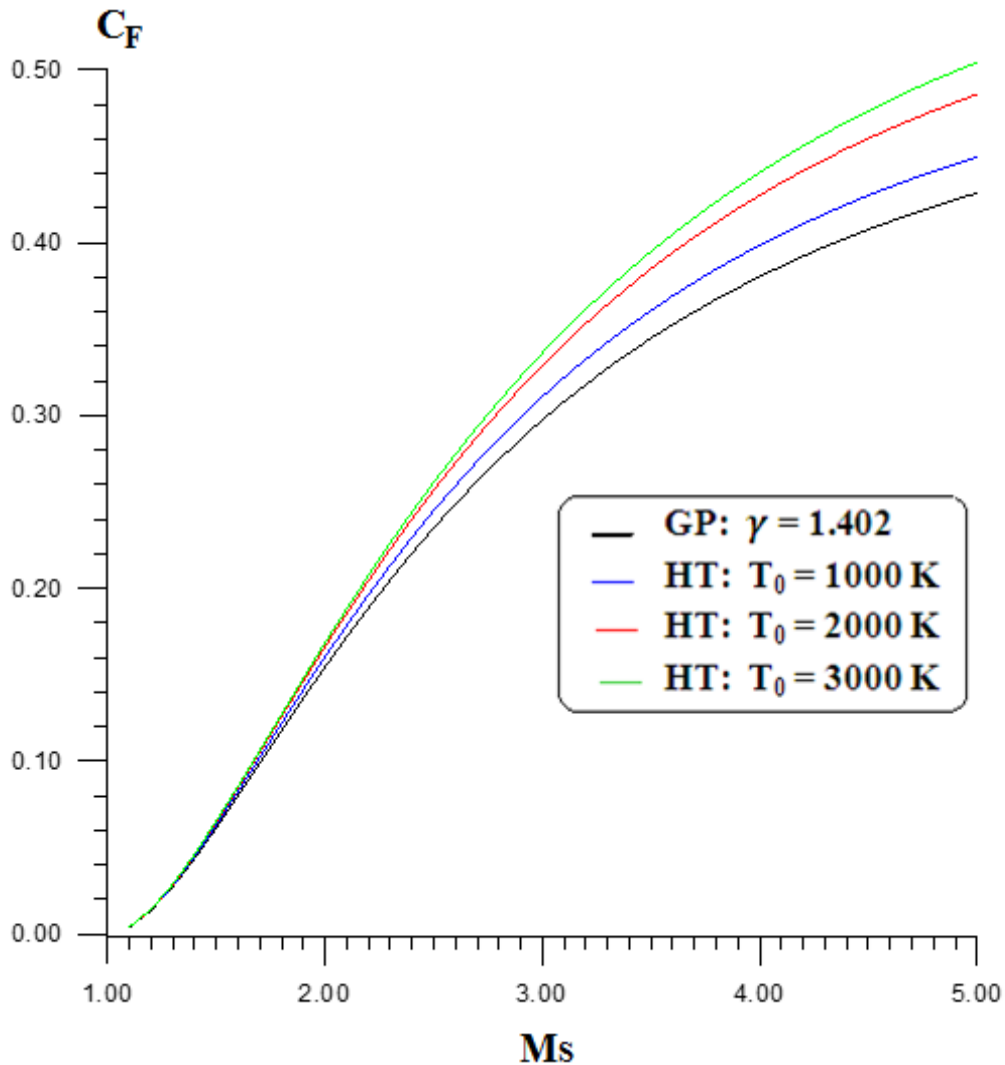
La figure V.19 présente la variation de coefficient de poussé  $C_f$  en fonction de température génératrice  $T_0$  à travers la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On voit que le graphe pour le cas de gaz parfait GP reste constant lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente et pour le cas à haute température HT aussi augmente. Nous pouvons dire qu'à basse température. Le gaz peut être considéré comme étant calorifique-ment parfait, à cause de l'invariance de coefficient de poussé. Cet intervalle de température est considéré entre 0 K et environ 240 K. Pour le cas de gaz parfait, le coefficient de poussé ne dépend pas de température génératrice  $T_0$ , plus  $T_0$  augmente, la valeur  $C_f$  augmente considérablement et s'éloigne du modèle d'un gaz parfait, d'où la nécessité d'utiliser le modèle à haute température pour corriger les résultats puisque réellement la valeur de  $C_f$  varie avec la température.



**Figure V.19:** Variation de  $C_F$  de la tuyère à détente centrée 2D en fonction de  $T_0$  lorsque

MS=3.00

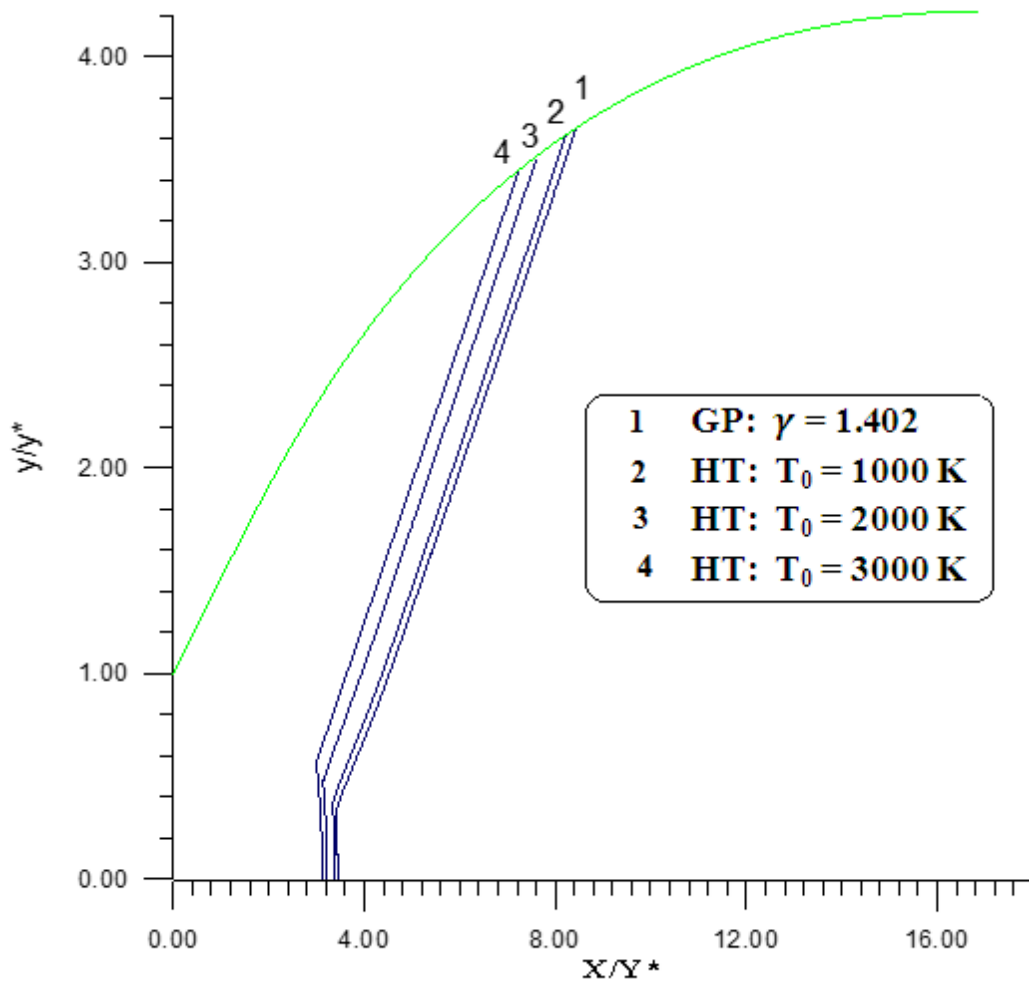
La figure V.20. Présente la variation de coefficient de poussé  $C_f$  en fonction de nombre de Mach  $M$  à la sortie à travers la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On voit clairement une augmentation de coefficient de poussé lorsque le nombre de Mach augmente et les trois graphes à haute température sont au dessus du graphe de gaz parfait. Donc la tuyère délivre un coefficient de poussé supérieur à celui considéré pour le cas du modèle gaz parfait GP.



**Figure V.20:** Variation de  $C_F$  de la tuyère à détente centrée 2D en fonction de  $M_s$

**Courbes ISO-MACH :**

La figure V.21. Présente les Iso-Mach dans une tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement que les lignes de Mach sont des lignes droite dans la zone de transition, et que les lignes de Mach du modèle gaz parfait est supérieur à celle du modèle à haute température avec une différence entre les quatre courbes. Ce qui montre que si on considère le modèle à haute température HT pour le calcul on va voir une dégradation de la vitesse de l'écoulement.



**Figure V.21:** Courbes iso-Mach de la tuyère à détente centrée 2D

## V.2. Résultats sur la tuyère à détente centrée axisymétrique (Axisymmetric MLN)

Dans ce paragraphe, on va présenter les divers résultats de dimensionnement et de conception des tuyères à détente centrée de géométrie axisymétrique.

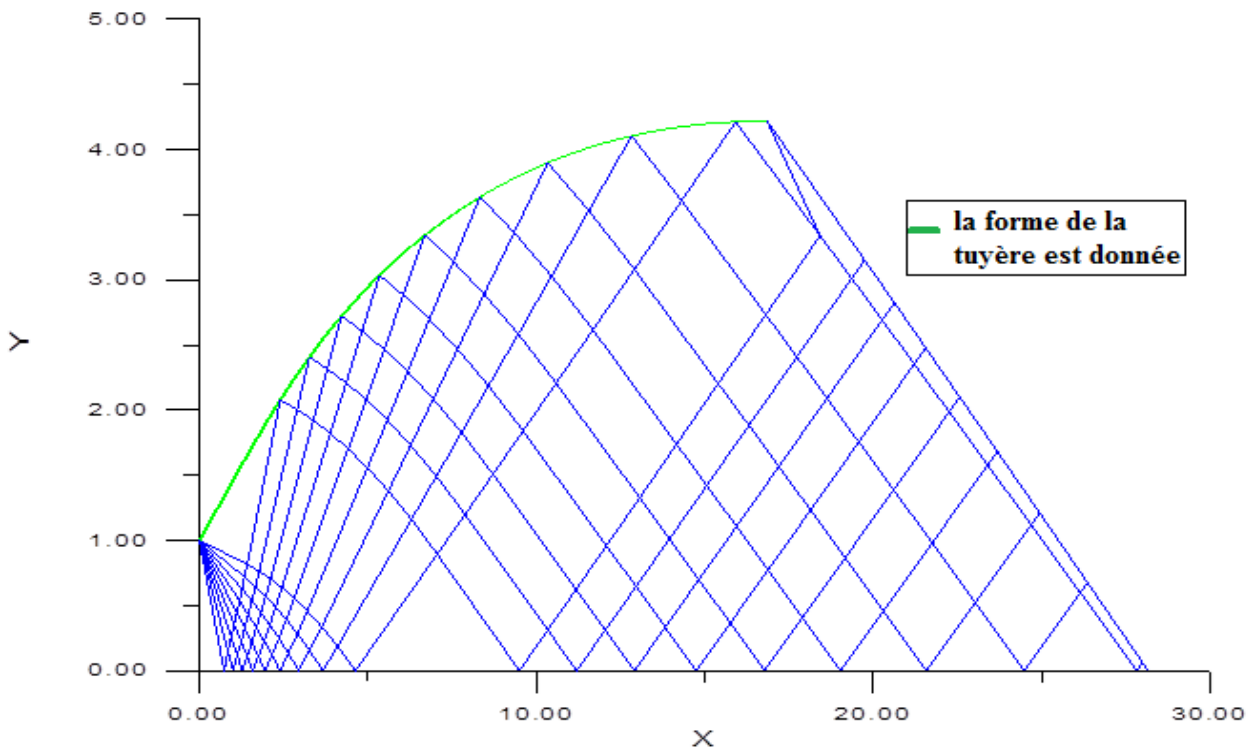
### V.2.1 Maillages en caractéristiques :

Dans les figures V.22, V.23, 24 et V.25, on a présenté des maillages en caractéristiques dans une tuyère à détente centrée *axisymétrique* avec et sans effet de condensation. Dans ces figures, on a pris l'exemple avec  $M_s=3.00$ .

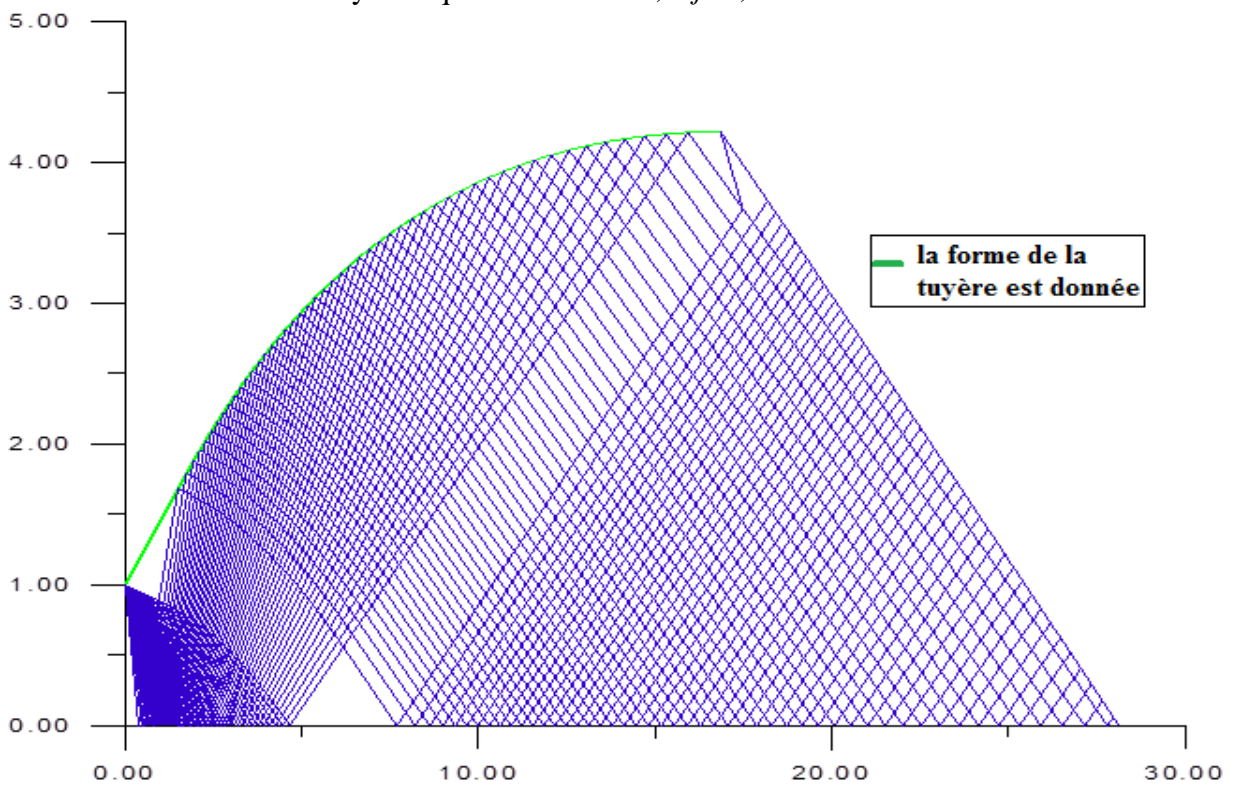
La figure V.22 représente de maillage obtenu si on utilise l'insertion progressive des caractéristiques supplémentaires dans la région de Kernel entre la ligne sonique et la première  $C$  régulière. On remarque clairement pour cet exemple, que le nombre des caractéristique régulières  $N_c=10$  et le nombre des caractéristique insérée  $N_j=0$ , que la paroi de la tuyère est mal présentée au voisinage du col, ainsi qu'un espace large entre la ligne sonique et la première  $C$  régulière, et sur la figure V.23 pour le nombre des caractéristiques  $N_c=50$ , On remarque que la paroi au voisinage du col est bien présentée. La distance entre la ligne sonique et la 1<sup>ère</sup>  $C$  régulière est diminuée.

Sur la figure V.25, on a pris d'exemple avec nombre des caractéristiques régulières  $N_c=10$  et le nombre des caractéristiques insérées entre la ligne de sonique et la première caractéristiques descendantes régulières est égale à  $N_j=200$ . On remarque clairement pour cet exemple que la paroi de la tuyère est mal présentée au voisinage du col, ainsi qu'un espace large entre la ligne sonique et la première  $C$  régulière, et sur les figures V.26, V.27 pour le nombre des caractéristiques  $N_c=50$ ,  $N_c=200$  respectivement, On remarque que la paroi au voisinage du col est bon présentée de l'écoulement intérieur de la tuyère. La distance entre la ligne sonique et la 1<sup>ère</sup>  $C$  régulière est diminuée.

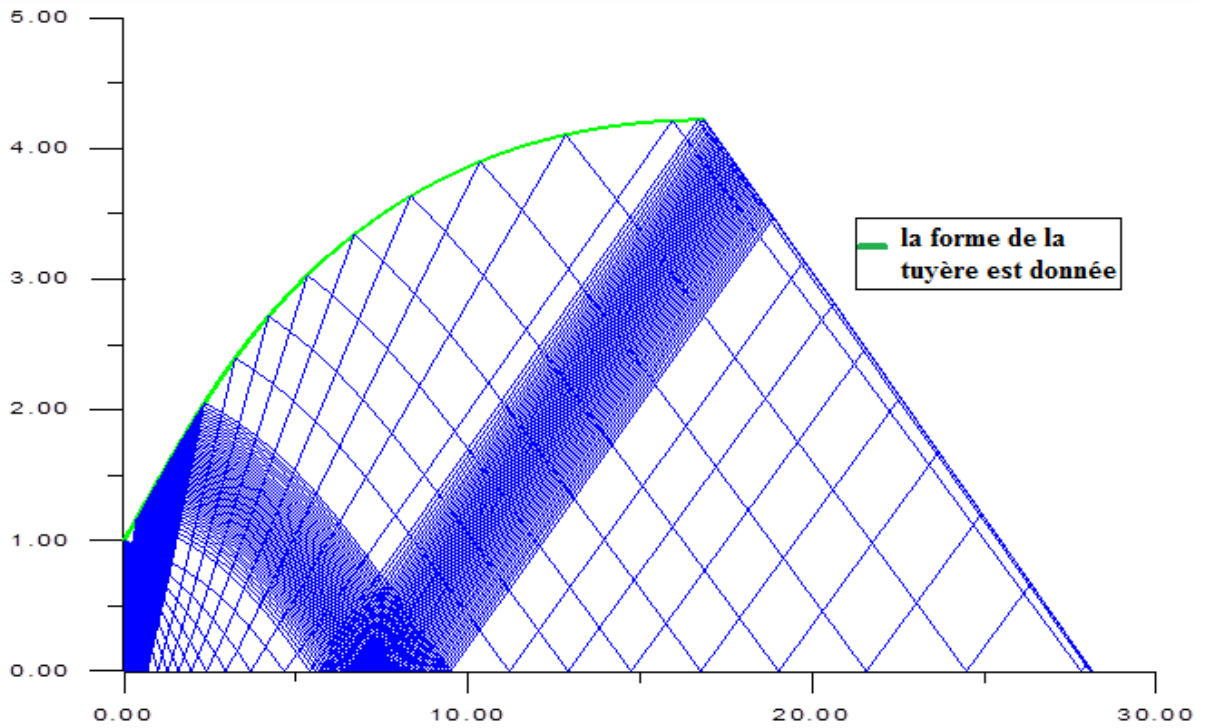




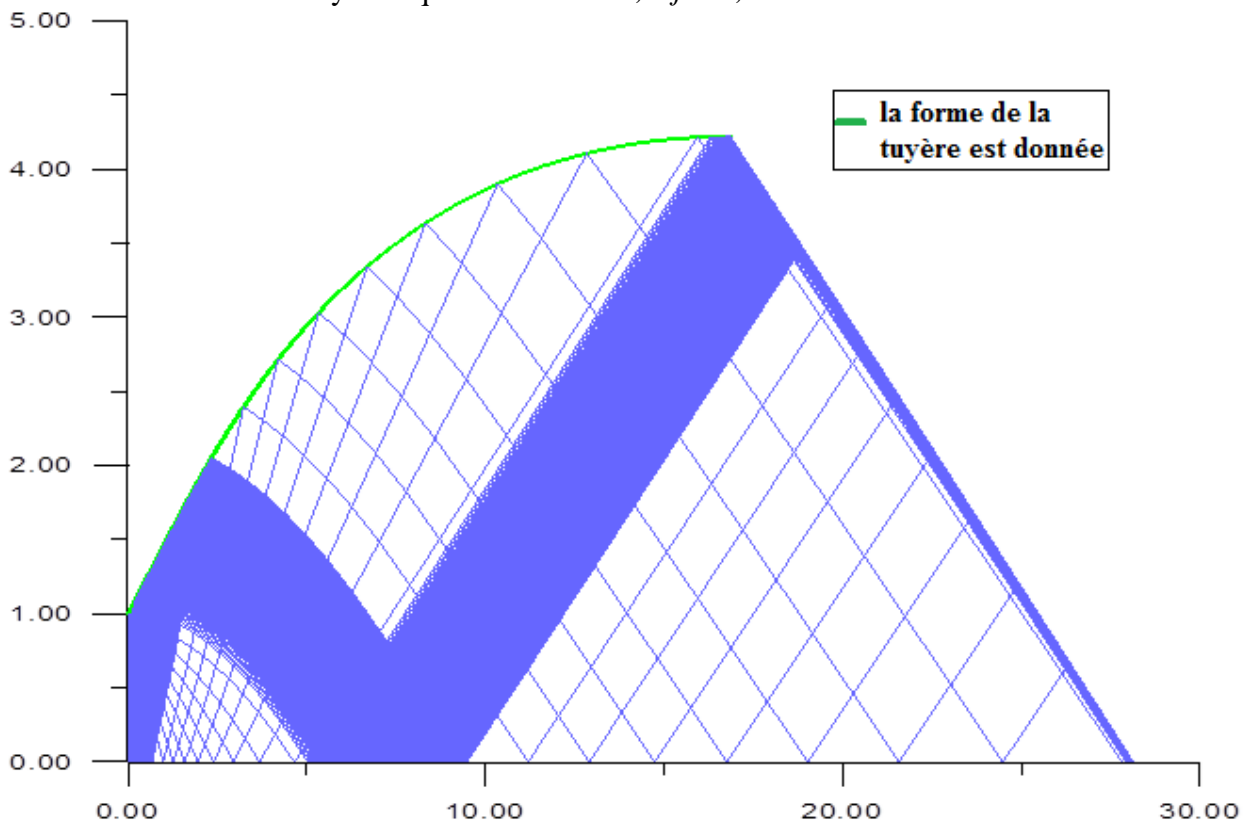
**Figure V.22** : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère *MLN* axisymétrique avec  $M_s=3.0$ ,  $N_j=0$ , avec  $N_c=10$ .



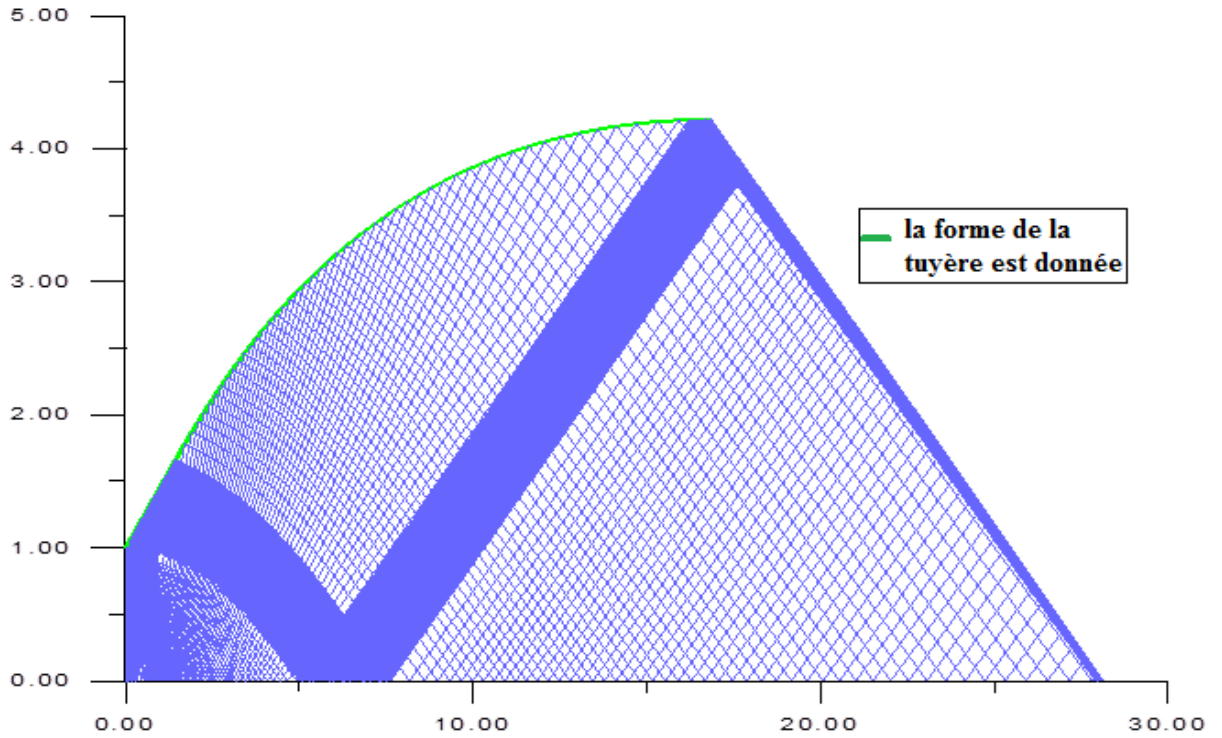
**Figure V.23** : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère *MLN* axisymétrique avec  $M_s=3.0$ ,  $N_j=0$ , avec  $N_c=50$ .



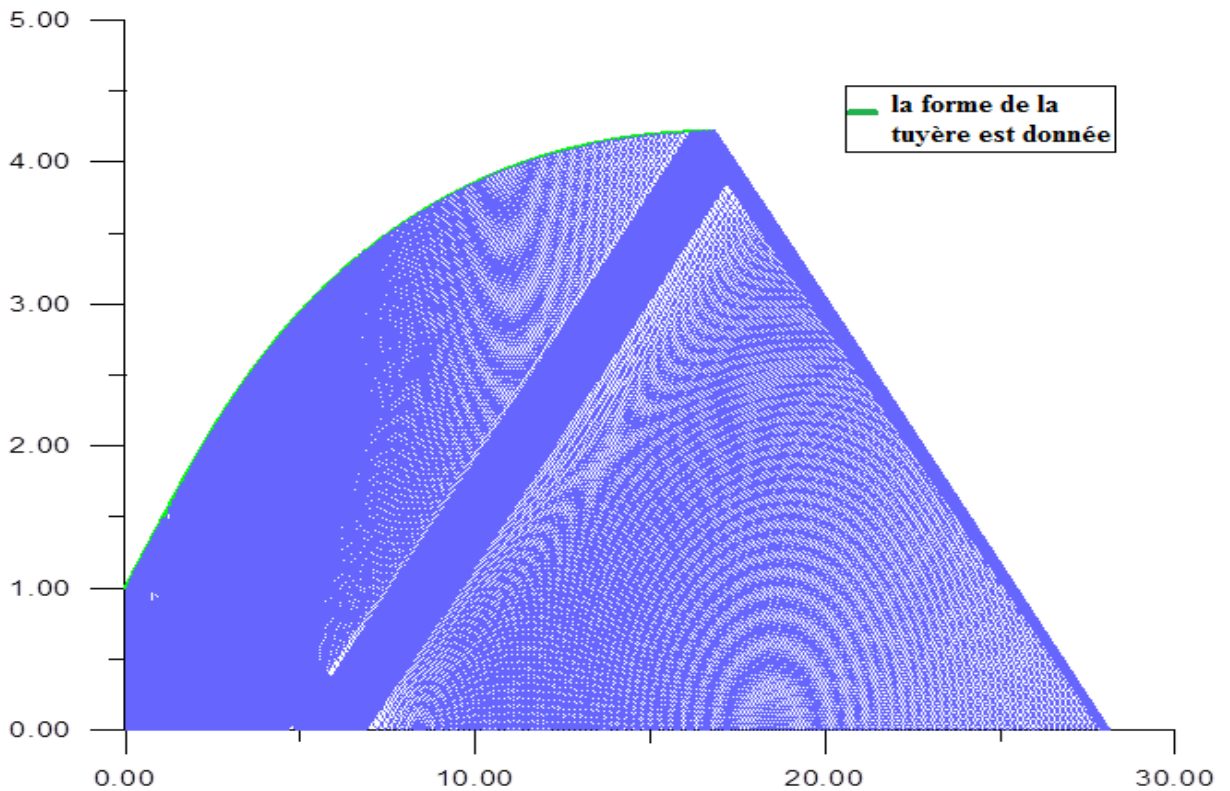
**Figure V.24:** Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère *MLN* axisymétrique avec  $M_s=3.0$ ,  $N_j=50$ , avec  $N_c=10$ .



**Figure V.25:** Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère *MLN* axisymétrique avec  $M_s=3.0$ ,  $N_j=200$ , avec  $N_c=10$ .



**Figure V.26:** Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère *MLN* axisymétrique avec  $Ms=3.0$ ,  $Nj=200$ , avec  $Nc=50$ .

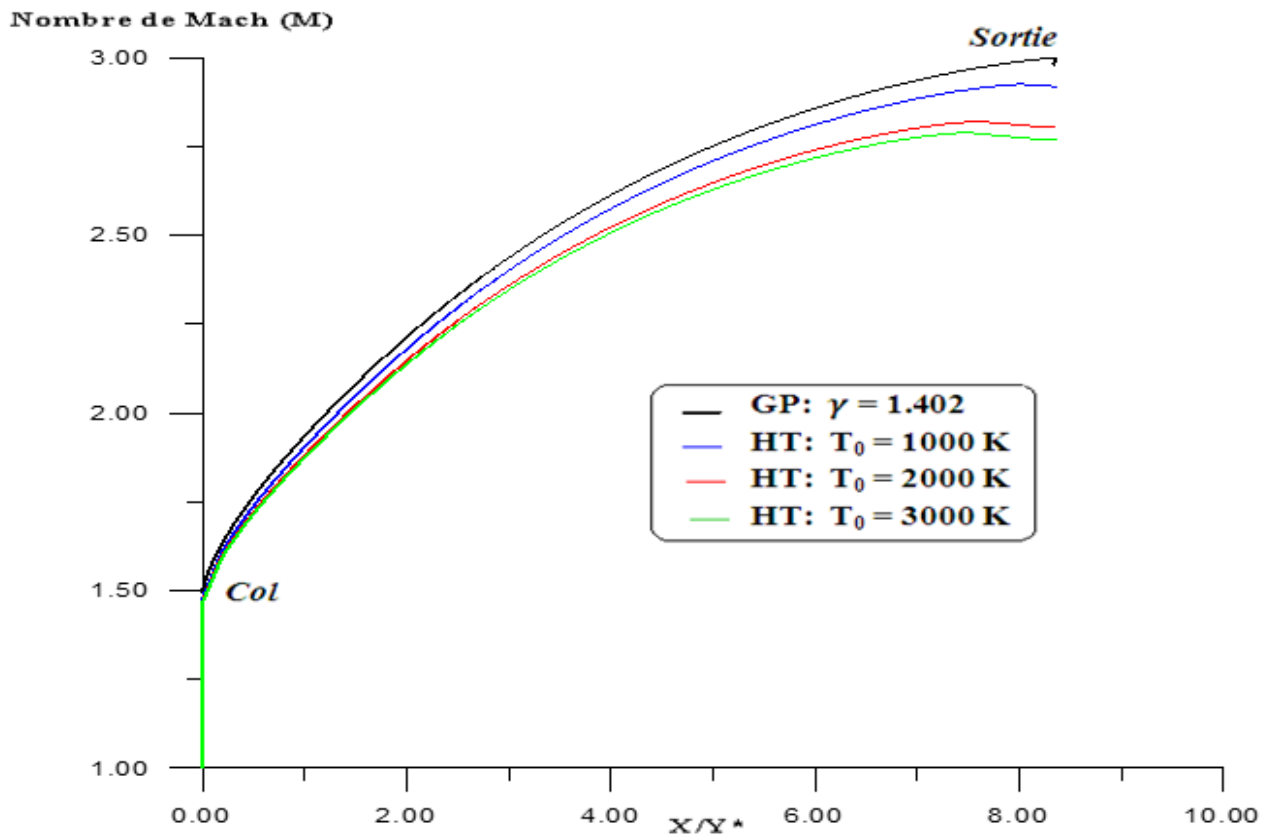


**Figure V.27:** Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère *MLN* axisymétrique avec  $Ms=3.0$ ,  $Nj=200$ , avec  $Nc=200$ .

### V.2.2. Variation des paramètres à travers la paroi de la tuyère :

La variation de nombre de Mach  $M$  Nous donne une indication sur l'écoulement.

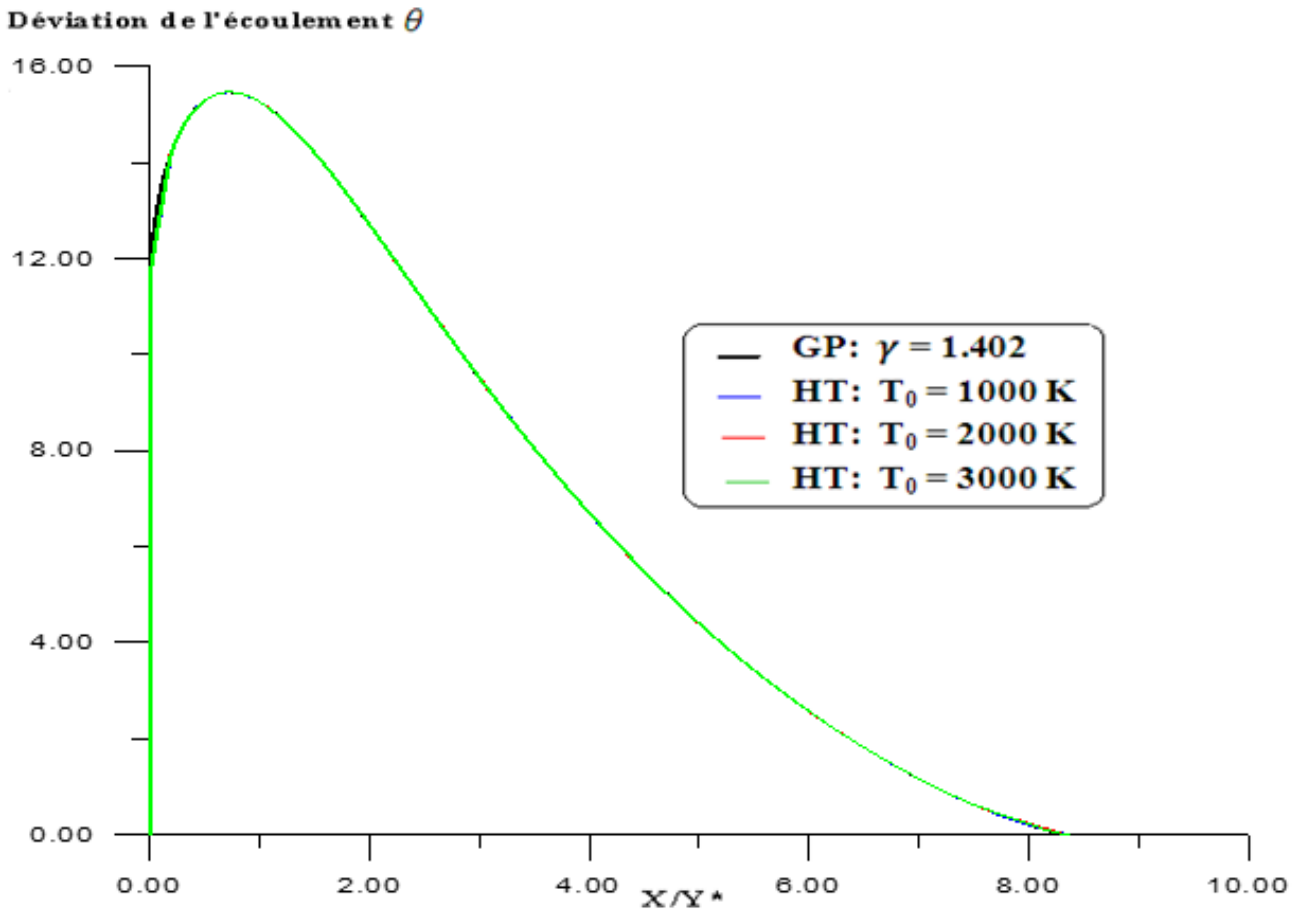
La figure V.28 présente la variation de nombre de Mach  $M$  le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement une diminution du nombre du Mach juste après la détente au col lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, et une augmentation de nombre de Mach au niveau du région du Kernel à travers la paroi avec une différence entre les quatre courbes et une petite chute du nombre de Mach à la sortie de la tuyère à travers la paroi pour le cas haute température 1000K, 2000K, 3000K. Vu qu'il ya une apparition probablement d'une onde de choc.



**Figure V.28:** Variation de nombre de Mach le long de la paroi à travers la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.

La variation de l'angle de déviation de l'écoulement  $\theta$  nous donne une indication sur le rapport des sections

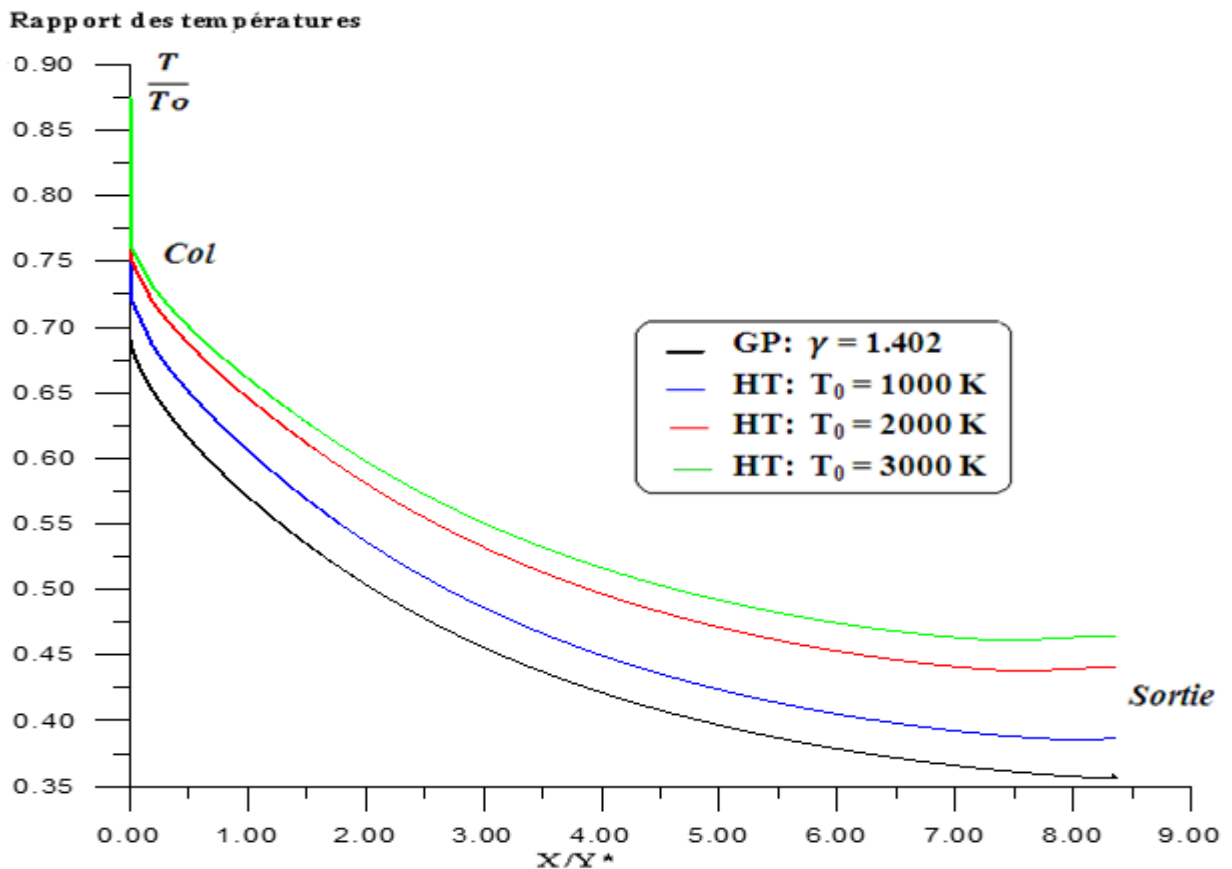
La figure V.29 présente la variation de l'angle de déviation de l'écoulement  $\theta$  le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement que les quatre courbes sont confondues puisque la forme de la tuyère reste inchangée et augmente au niveau de région de Kernel et que l'écoulement est horizontal à la section de sortie.



**Figure V.29:** Variatiion de L'angle de déviation de l'écoulement le long de la paroi à travers la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.

Le rapport des températures  $T/T_0$  nous permet de faire un choix convenable du matériau de construction qui va résister à cette distribution

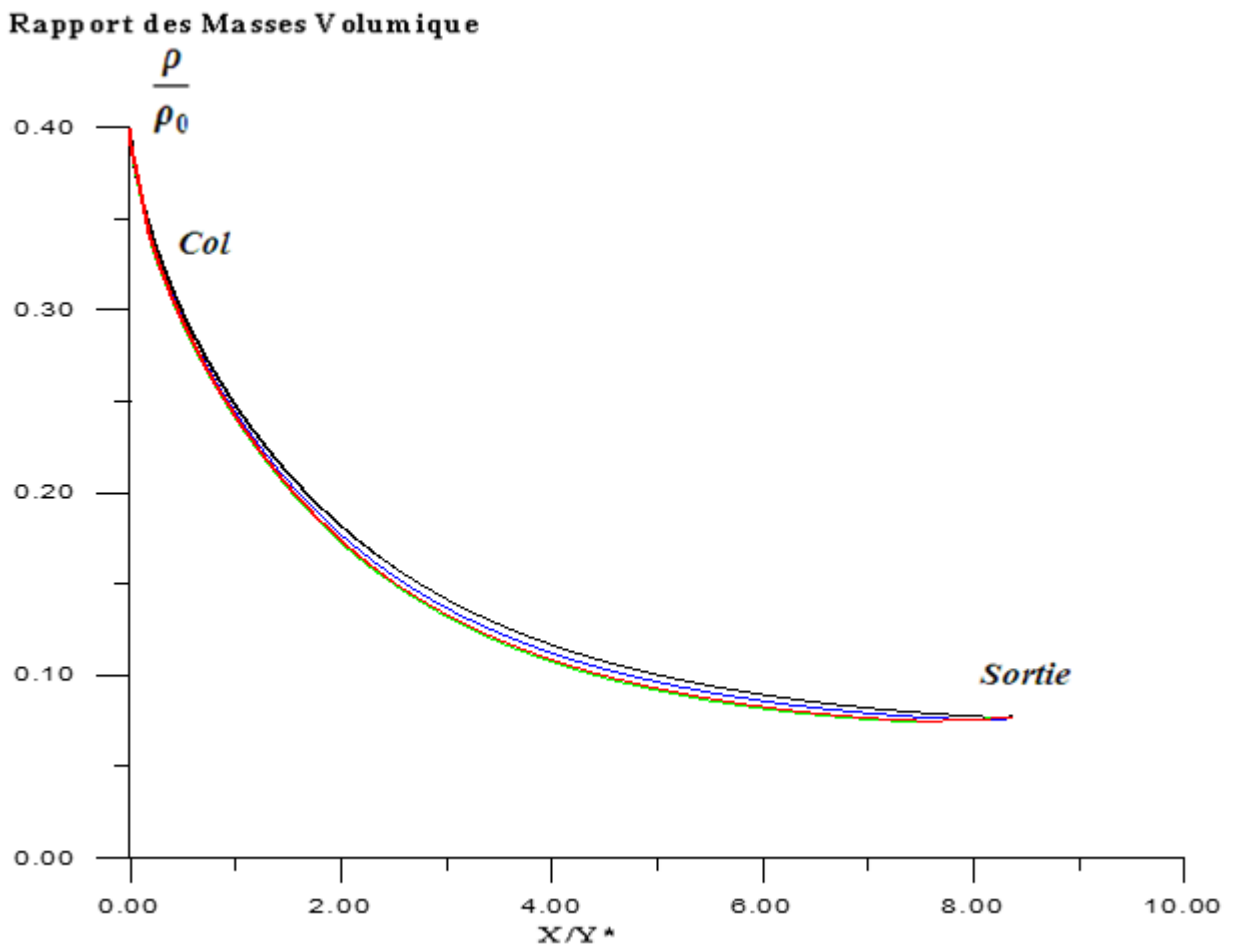
La figure V.30 présente la variation de rapport des températures  $T/T_0$  le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement une augmentation de rapport des températures juste après la détente au col le long de la paroi lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, et une diminution de rapport des températures au niveau de région de Kernel le long de la paroi jusqu'à la section de sortie avec une différence entre les quatre courbes pour le cas du modèle gaz parfait GP. On remarque diminution de rapport des températures dans la région de Kernel et une petite augmentation de ce rapport à la section de sortie à travers la paroi due probablement à l'apparition d'une onde de choc pour le cas du modèle à haute température HT.



**Figure V.30:** Variation de Rapport des Températures le long de la paroi à travers la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.

Le rapport des masses volumiques  $\rho/\rho_0$  servira pour déterminer la quantité du gaz qui va traverser le divergent, afin de déterminer la durée de vie du carburant.

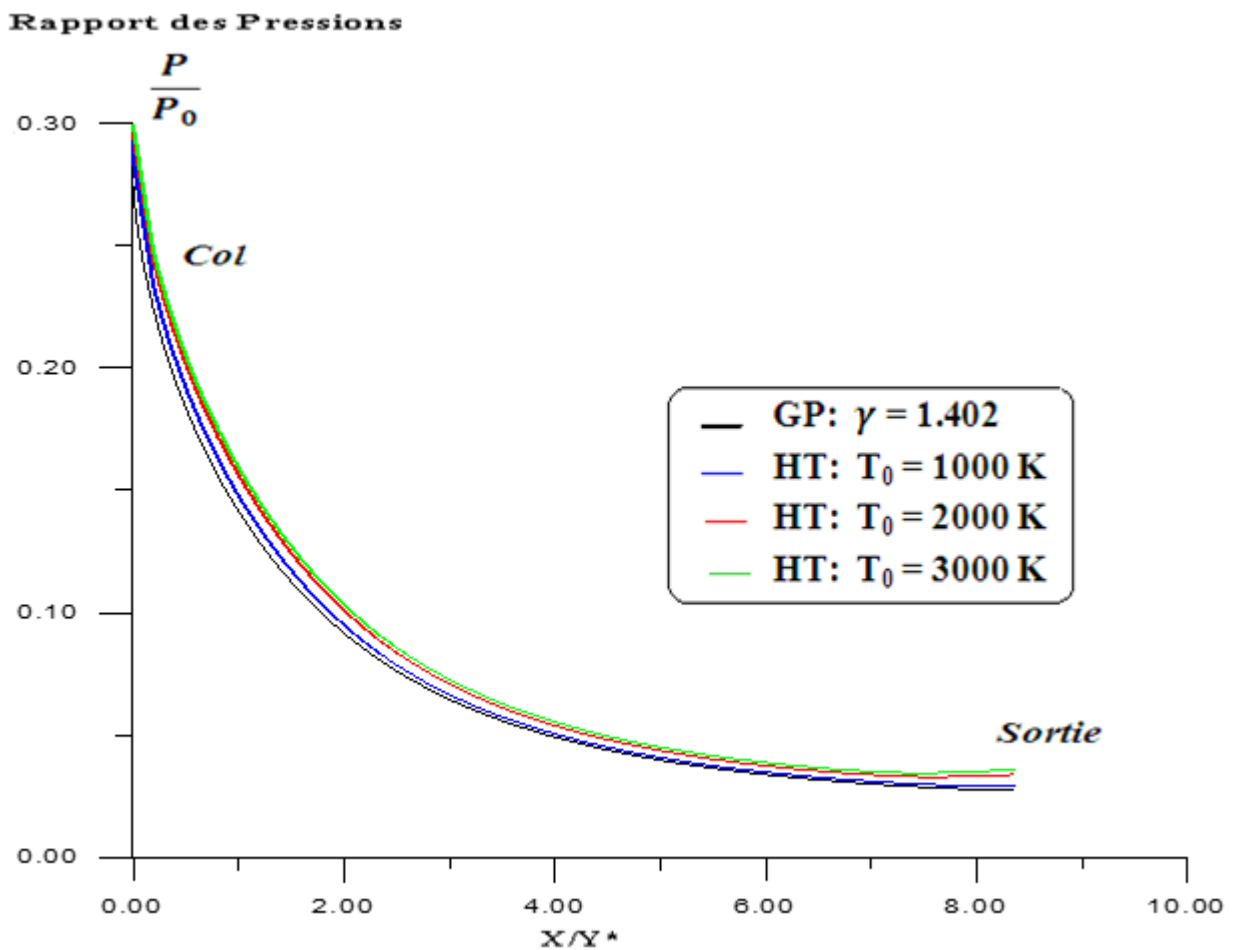
La figure V.31 présente la variation de rapport des masses volumiques  $\rho/\rho_0$  le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement une diminution de rapport des masses volumiques juste après la détente au col le long de la paroi lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, et une diminution de rapport des masses volumiques dans la région de Kernel jusqu'à la section de sortie le long de la paroi avec une petite différence entre les quatre courbe pour le cas du modèle gaz parfait GP, mais pour le cas du modèle à haute température HT on voit une petite augmentation de rapport des masses volumiques à la section de sortie à travers la paroi.



**Figure V.31:** Variation de Rapport des Masses Volumiques le long de la paroi à travers la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.

Le rapport des pressions  $P/P_0$  servira pour déterminer la force de pression exercée sur la paroi du divergent. Il nous servira encore pour déterminer la condition à la limite interne pour faire l'étude de transfert de chaleur à travers le matériau de la paroi.

La figure V.32 présente la variation de rapport des pressions  $P/P_0$  le long de la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du gaz parfait. On remarque clairement l'augmentation de rapport des pressions juste après la détente au col lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente le long de la paroi, et une diminution de rapport des pressions dans la région de Kernel jusqu'à la section de sortie, avec une petite différence entre les quatre courbes pour le modèle gaz parfait, mais pour le modèle à haute température HT on remarque une petite augmentation de rapport des pressions à la section de sortie à travers la paroi.

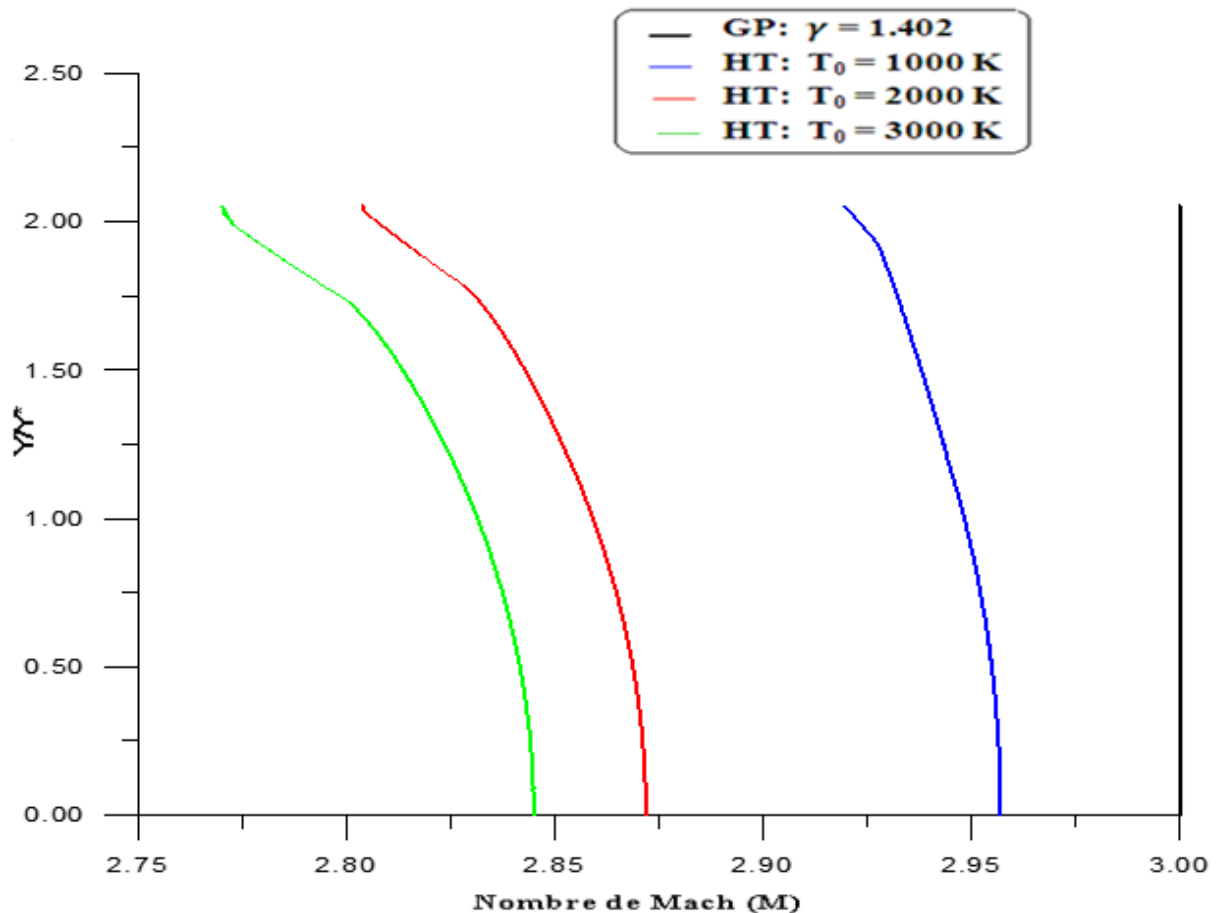


**Figure V.32:** Variation de Rapport des Pressions le long de la paroi à travers la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.



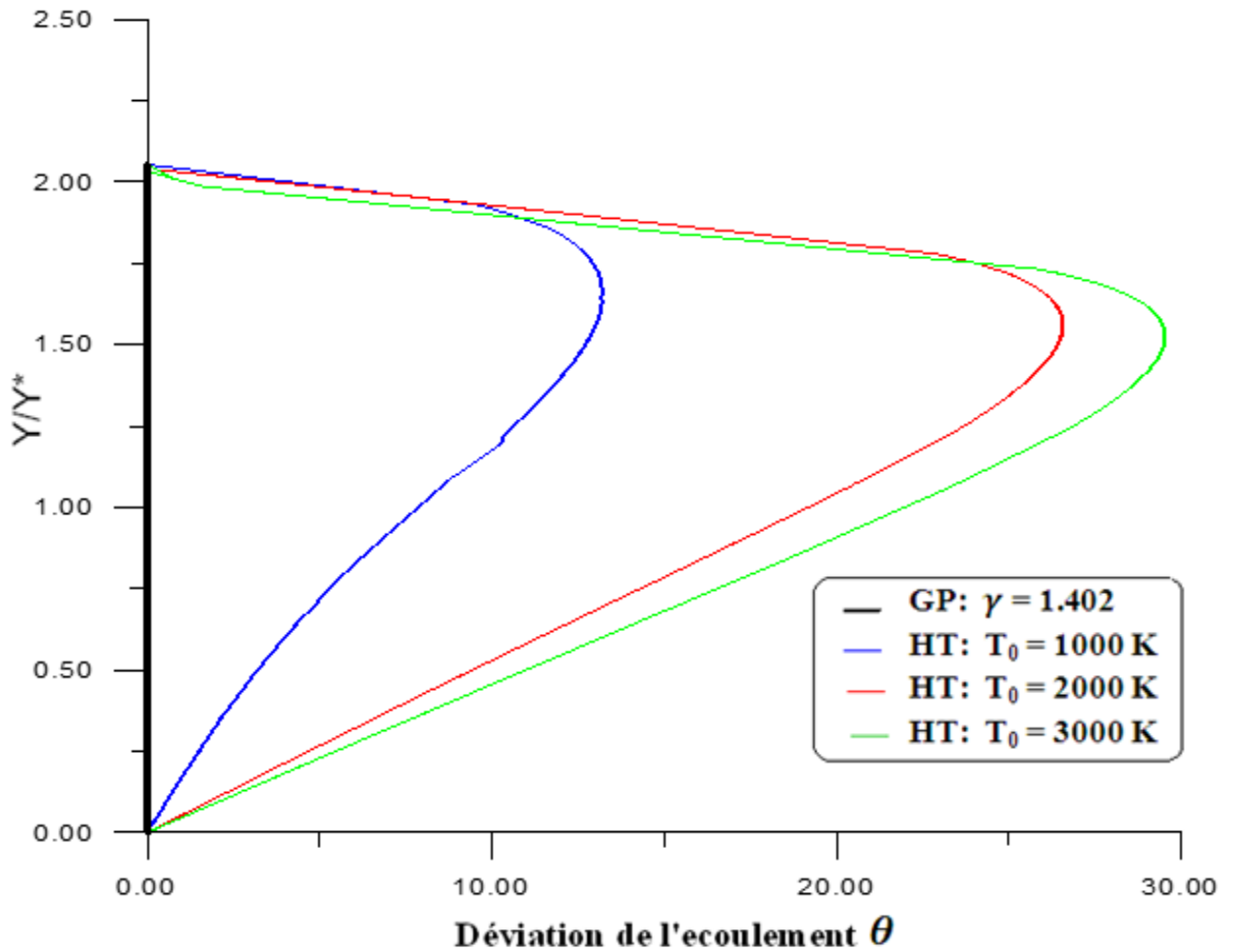
### V.2.3. Variations des paramètres dans la section de sortie de la tuyère :

La figure V.33 présente la variation de nombre de Mach  $M$  dans la section de sortie de la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base de gaz parfait. On remarque clairement au niveau de l'axe de symétrie une diminution de nombre de Mach lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente dans la section de sortie, et la valeur de nombre de Mach de modèle gaz parfait reste constante et égal à 3 ce qui démontre que l'écoulement est uniforme. Pour le cas de modèle à haute température le nombre de Mach égal à 2.958, 2.872, 2.845, lorsque  $T_0 = 1000K, T_0 = 2000K, T_0 = 3000K$  respectivement, le nombre de Mach diminue à travers le rayon dans la section de sortie avec petite différence entre les quatre courbes, ce qui démontre que si la température génératrice  $T_0$  est prise en considération, l'écoulement ne reste plus uniforme à la section de sortie.



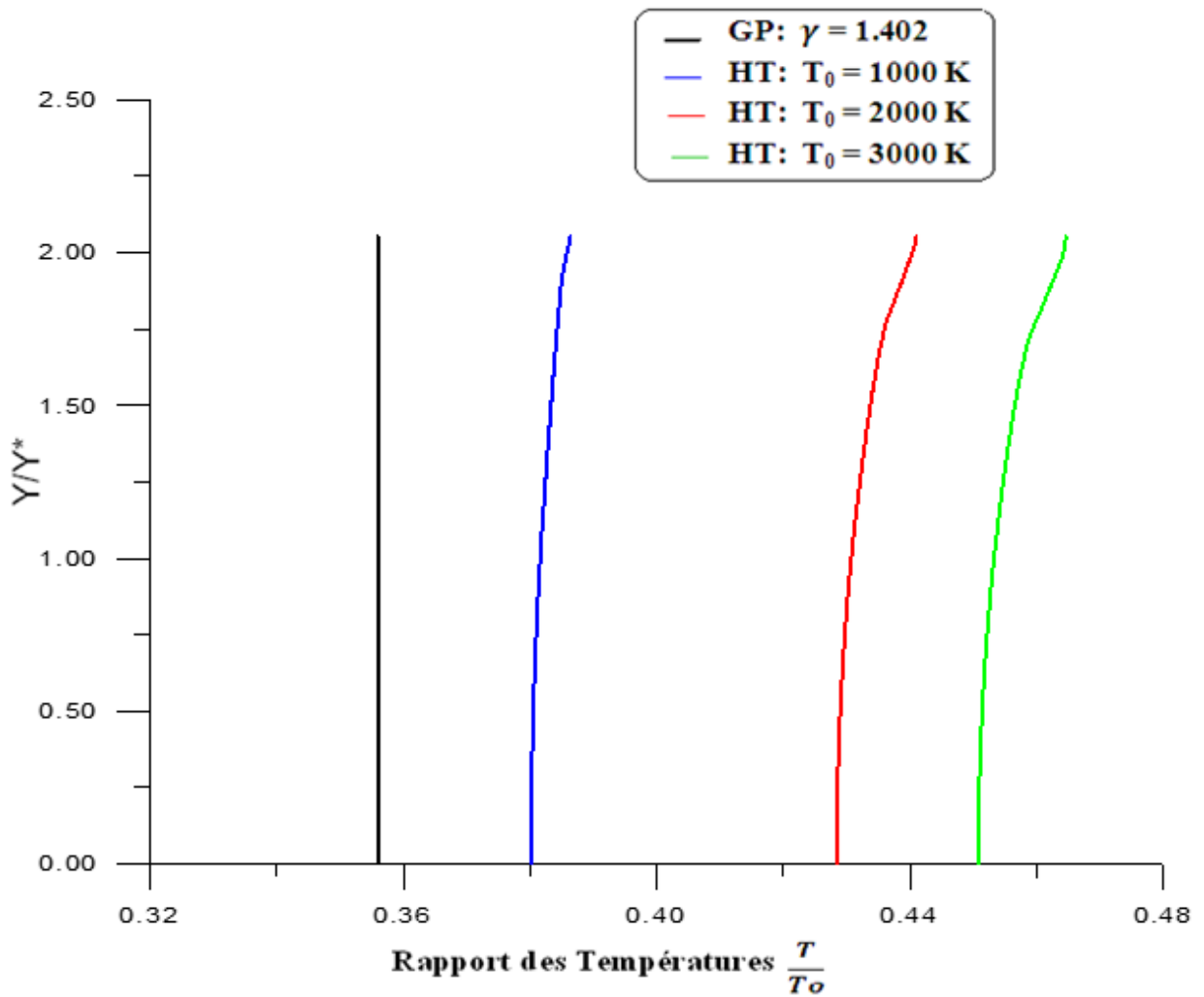
**Figure V.33:** Variation de nombre de Mach dans la section de sortie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.

La figure V.34 présente la variation de l'angle de déviation de l'écoulement  $\theta$  dans la section de sortie de la tuyère axisymétrique dimensionnée à base de modèle gaz parfait. On remarque que la valeur de l'angle de déviation de l'écoulement égal à 0 pour le cas de modèle gaz parfait. Pour le cas à haute température lorsque  $T_0 = 1000K, T_0 = 2000K, T_0 = 3000K$  respectivement avec une différence entre les quatre courbes, on voit que l'écoulement à la paroi et l'axe de symétrie dans la section de sortie est horizontal, mais entre la paroi et l'axe de symétrie dans la section de sortie l'écoulement n'est pas horizontal.



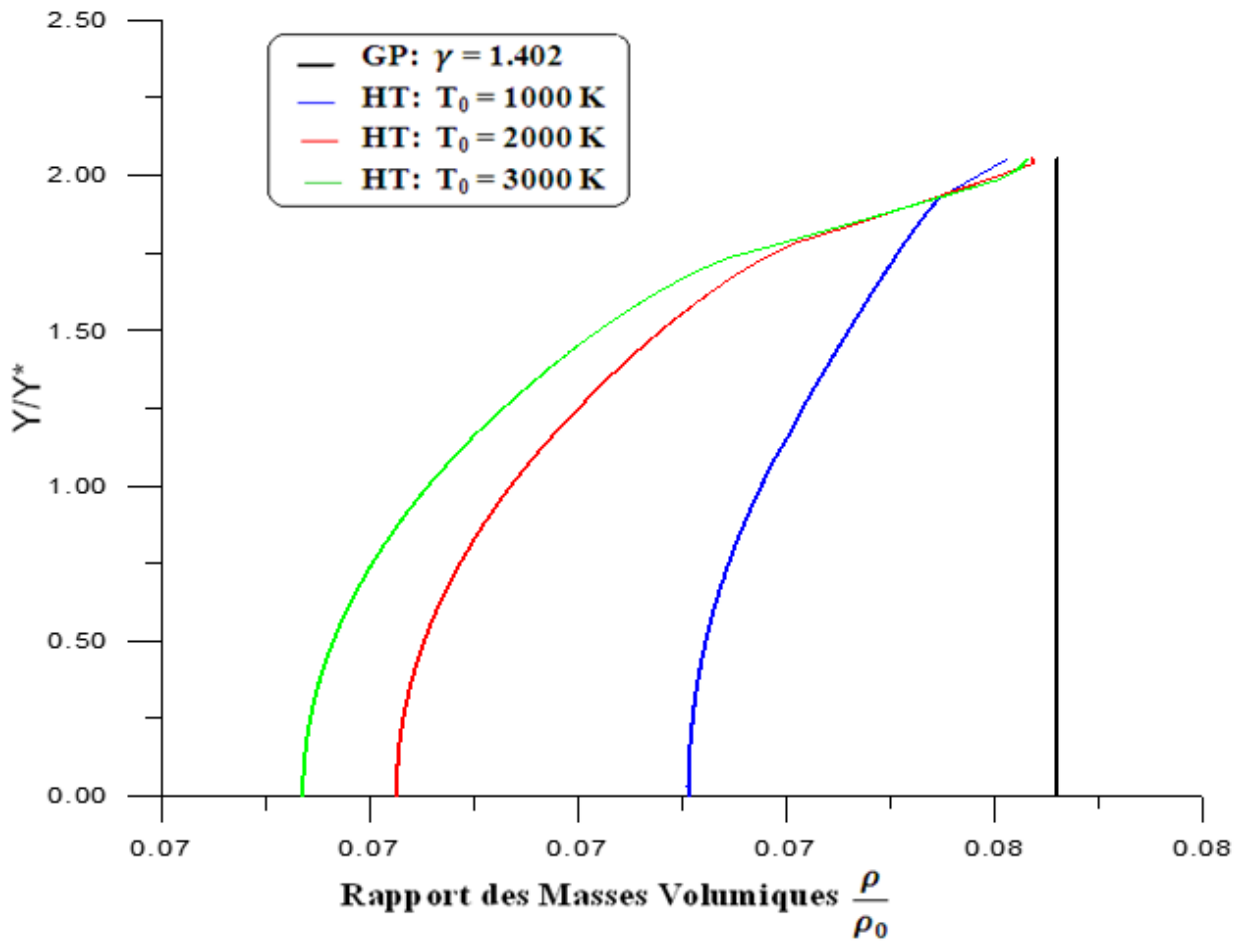
**Figure V.34:** Variation de l'angle de déviation de l'écoulement dans la section de sortie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.

La figure V.35 présente la variation de rapport des températures  $T/T_0$  dans la section de sortie de la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée à base du modèle gaz parfait. On remarque clairement une augmentation de rapport des températures au niveau de l'axe de symétrie dans la section de sortie lorsque la température génératrice augmente, la valeur de rapport des températures reste constante elle est égale à 0.356 pour le cas du modèle de gaz parfait. Pour le cas à haute température le rapport des températures égal à 0.38, 0.427, 0.452 lorsque  $T_0 = 1000K, T_0 = 2000K, T_0 = 3000K$  respectivement, le rapport des températures augmente légèrement au niveau de la paroi dans la section de sortie avec une différence entre les quatre courbes.



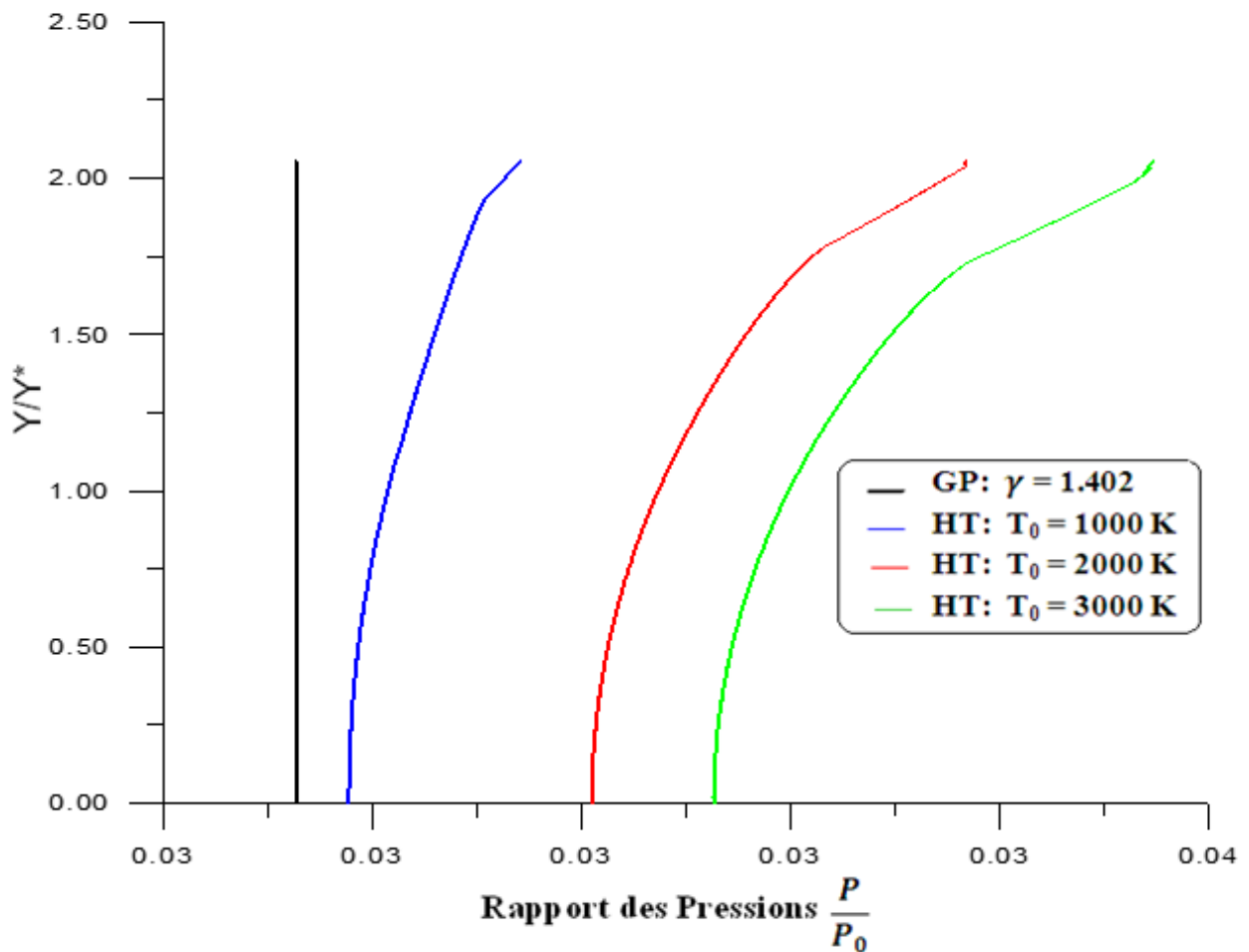
**Figure V.35:** Variation de Rapport des Températures dans la section de sortie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.

La figure V.36 présente la variation de rapport des masses volumiques  $\rho/\rho_0$  dans la section de sortie de la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée à base du modèle gaz parfait. On remarque clairement que le rapport des masses volumiques reste constant elle est égal à 0.843 pour le cas de modèle gaz parfait. Pour le cas à haute température le rapport des masses volumiques égal à 0.784, 0.737, 0.723 lorsque  $T_0 = 1000K, T_0 = 2000K, T_0 = 3000K$  respectivement, on voit une diminution de rapport des masses volumiques au niveau de l'axe de symétrie dans la section de sortie si la température génératrice  $T_0$  augmente, et une augmentation de rapport des masses volumiques le long de rayon de la section de sortie, avec une différence entre les quatre courbes.



**Figure V.36:** Variation de Rapport des Masses Volumiques dans la section de sortie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.

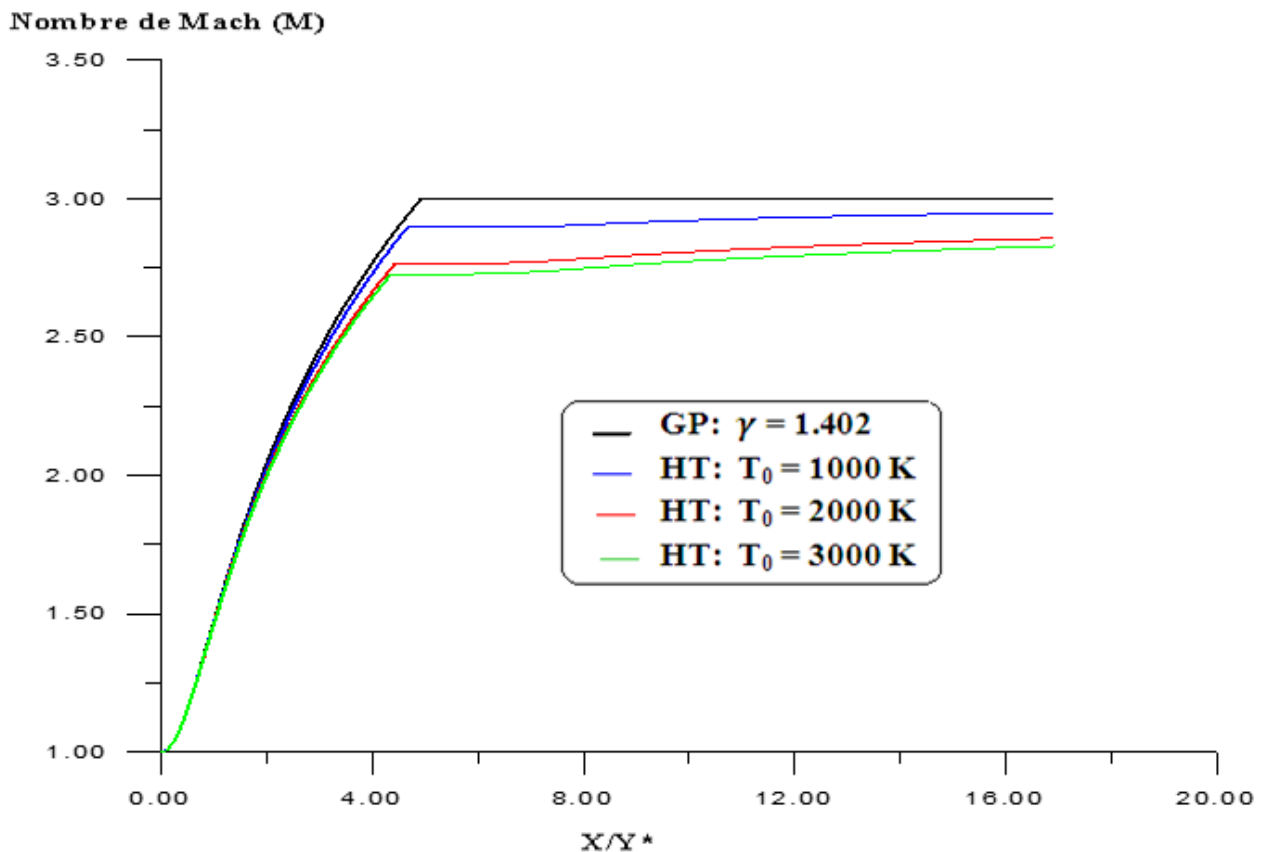
La figure V.37 présente la variation de rapport des pressions  $P/P_0$  dans la section de sortie de la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement que le rapport des pressions reste constant et égal à 0.0241 pour le cas du modèle gaz parfait dans la section de sortie. Pour le cas à haute température le rapport des pressions égal à 0.0247, 0.0276, 0.029 lorsque  $T_0 = 1000K$ ,  $T_0 = 2000K$ ,  $T_0 = 3000K$  respectivement, on voit une augmentation de rapport des pressions le long de rayon de la section de sortie lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, avec une différence entre les quatre courbes.



**Figure V.37:** Variation de Rapport des Pressions dans la section de sortie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.

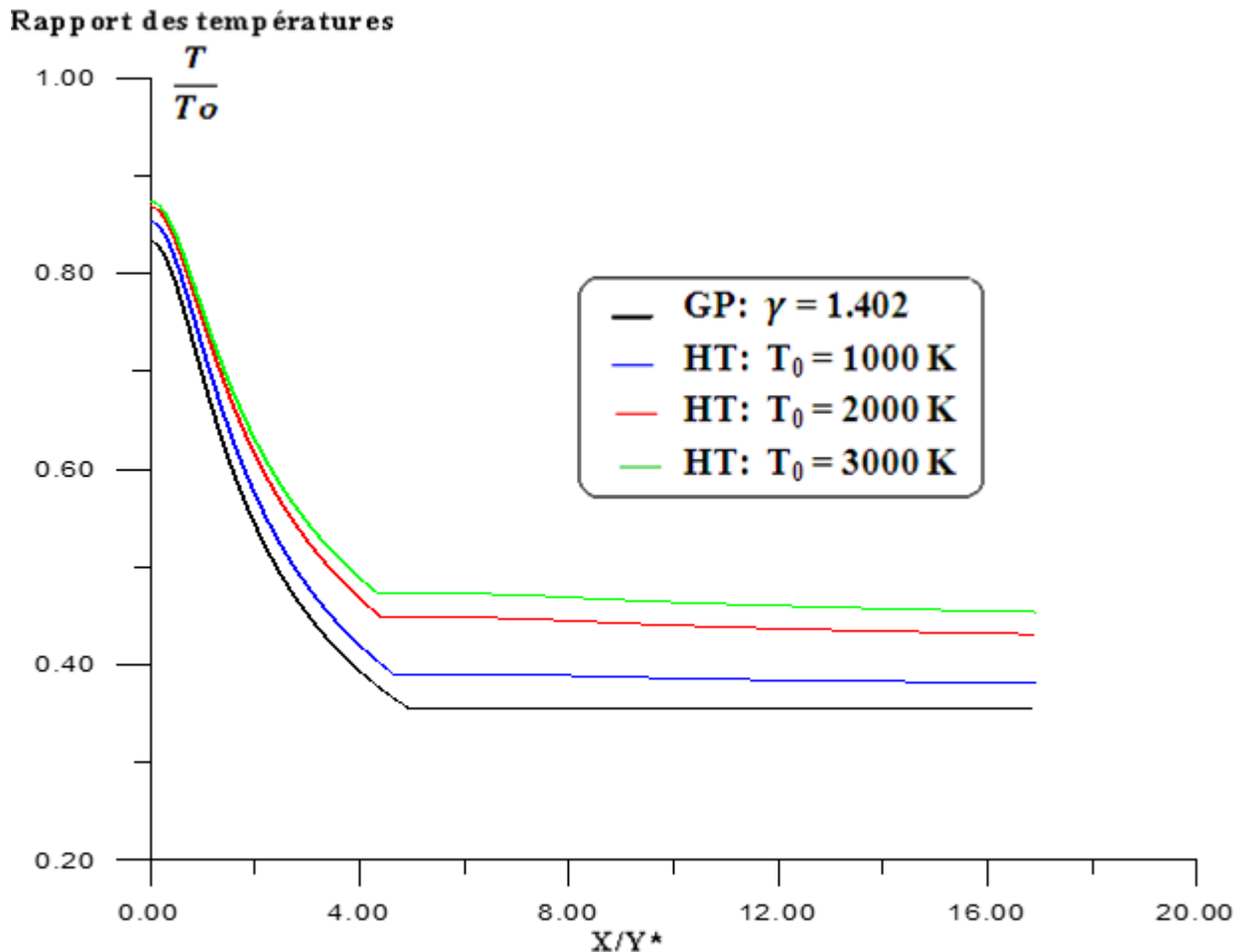
#### V.2.4. Variation des paramètres dans l'axe de symétrie de la tuyère :

La Figure V.38 présente la variation de nombre de Mach  $M$  sur l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement que la valeur de nombre de Mach est constante et égale à 1 juste après la détente au col lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente sur l'axe de symétrie, et une augmentation de nombre de Mach au niveau de région de Kernel, après le nombre de Mach devient constant au niveau de section de sortie sur l'axe de symétrie dans le cas du modèle gaz parfait GP, on remarque plus la température génératrice  $T_0$  augmente la longueur de la région de Kernel diminue et que l'écoulement est uniforme. Tandis que si on prend  $T_0$  en compte (HT), l'écoulement ne reste plus uniforme.



**Figure V.38:** Variation de Nombre de Mach dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.

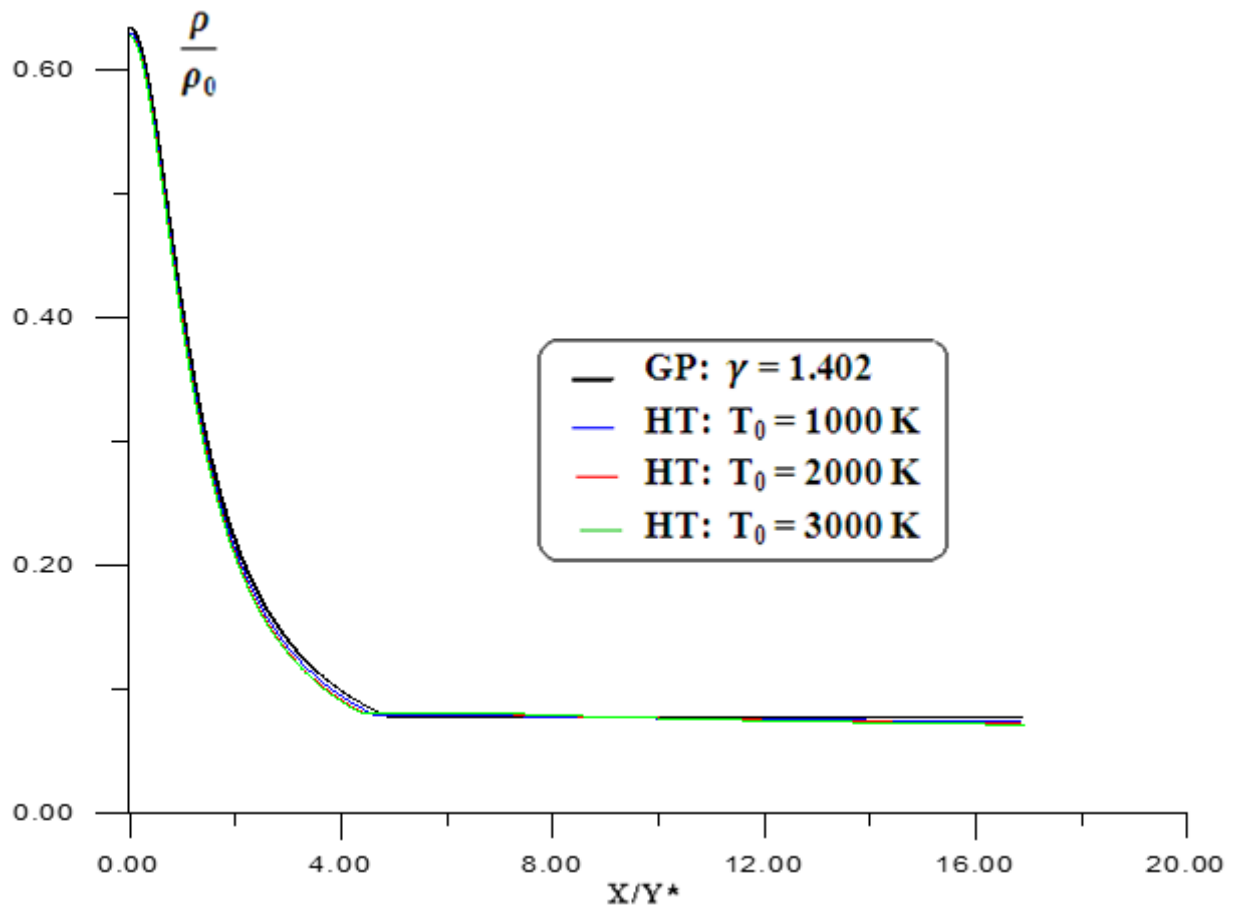
La figure V.39 présente la variation de Rapport des températures  $T/T_0$  sur l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement une augmentation de rapport des températures juste après la détente au col sur l'axe de symétrie lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, et une diminution au niveau de région de Kernel dans l'axe de symétrie, après le rapport des températures devient constant au niveau de section de sortie dans l'axe de symétrie pour le cas du modèle gaz parfait GP, l'écoulement est uniforme, mais dans le cas du modèle à haute température HT l'écoulement n'est plus uniforme à la section de sortie sur l'axe de symétrie.



**Figure V.39:** Variation de Rapport des Températures dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.

La figure V.40 présente la variation de rapport des masses Volumiques  $\rho/\rho_0$  sur l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque une augmentation de rapport des masses volumiques juste après la détente au col sur l'axe de symétrie lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente et une diminution de rapport des masses volumiques au niveau de région de Kernel sur l'axe de symétrie, après le rapport des masses volumiques devient constant au niveau de section de sortie sur l'axe de symétrie pour le cas du modèle gaz parfait GP et n'est pas constant pour le cas du modèle à haute température HT.

Rapport des Masses Volumique

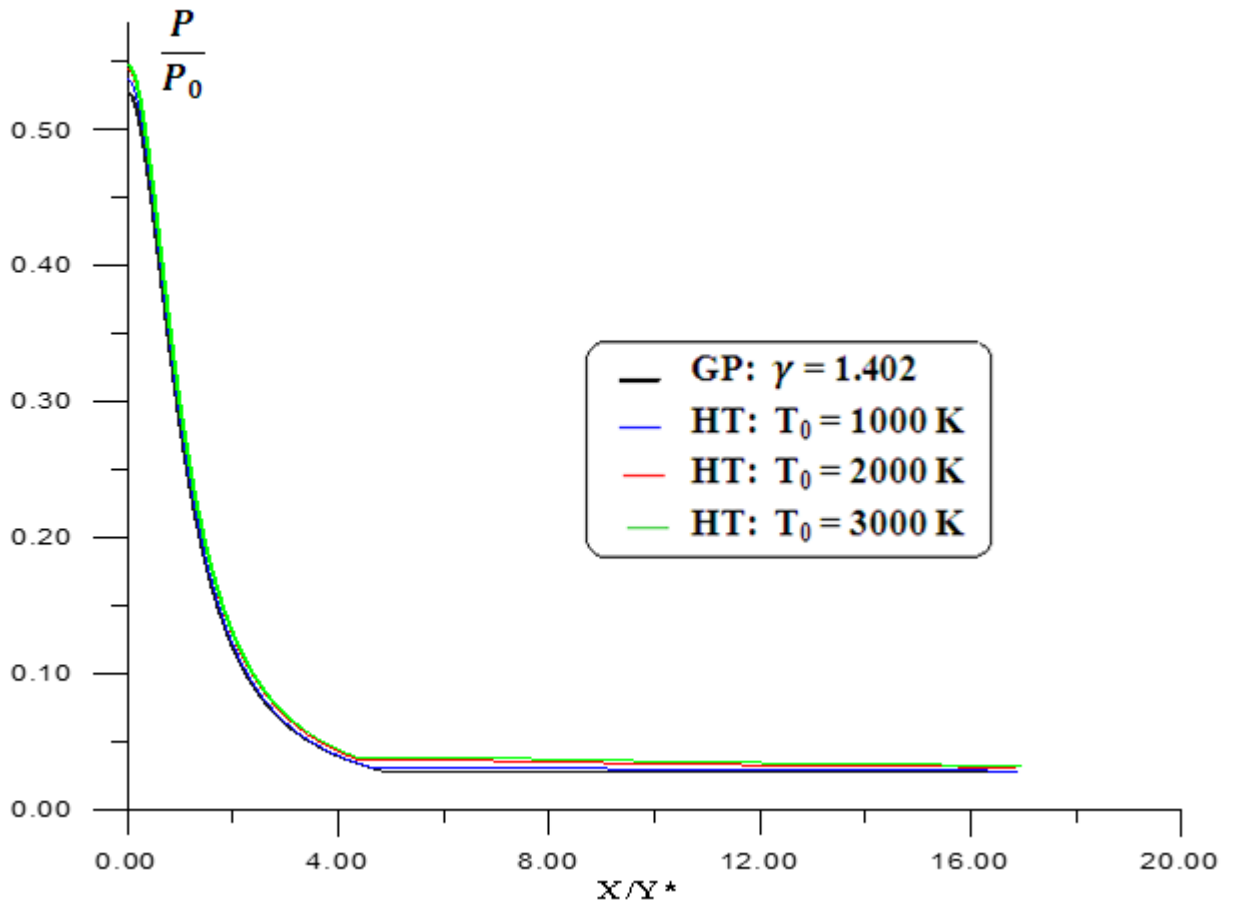


**Figure V.40:** Variation de Rapport des Masses Volumiques dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.



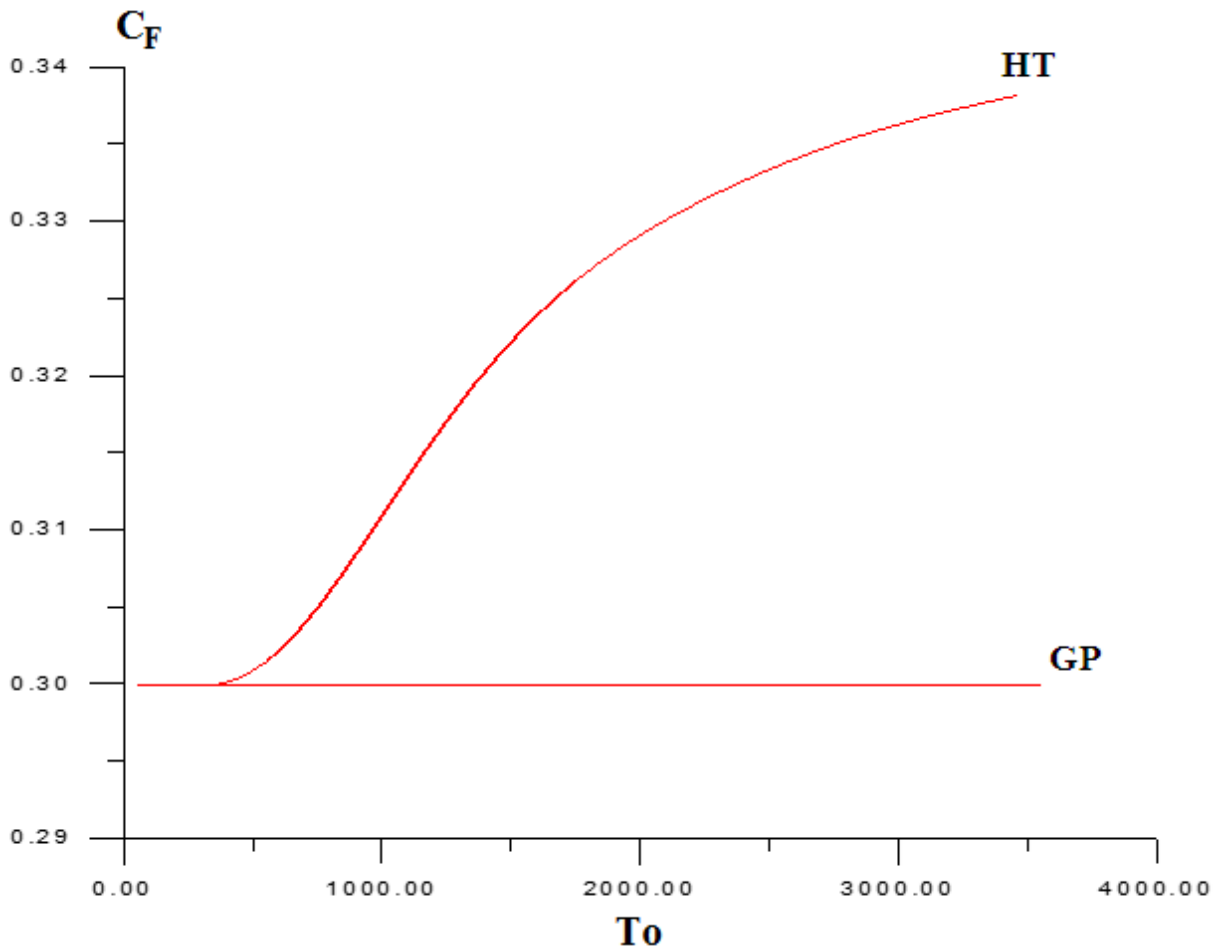
La figure V.41 présente la variation de rapport des pressions  $P/P_0$  sur l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On remarque clairement une augmentation de rapport des pressions juste après la détente au col sur l'axe de symétrie lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, et une diminution de rapport des pressions à la région de Kernel sur l'axe de symétrie, après le rapport des pressions devient constant à la section de sortie dans l'axe de symétrie pour le cas du modèle parfait GP, mais pour le cas du modèle à haute température HT le rapport des pressions ne reste plus constant à la section de sortie sur l'axe de symétrie.

**Rapport des Pressions**



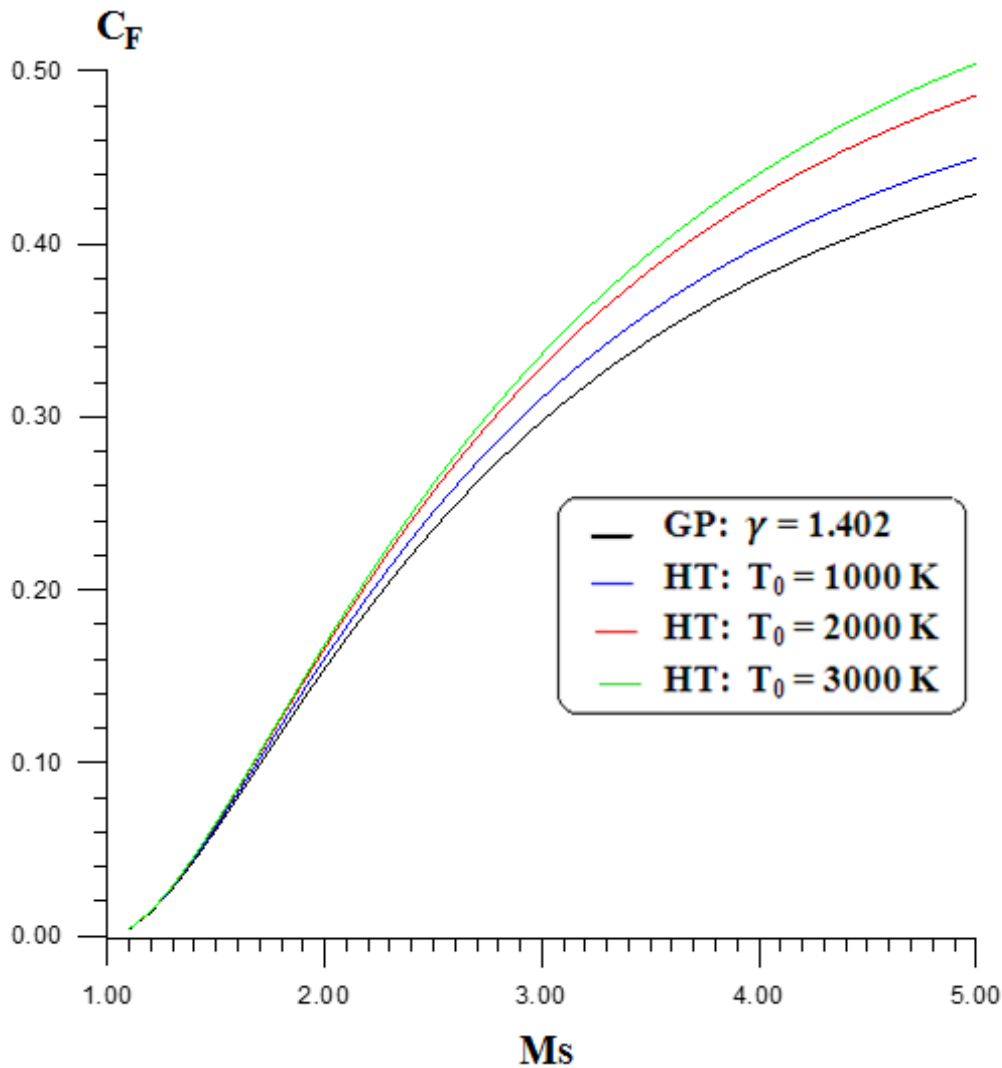
**Figure V.41:** Variation de Rapport des Pressions dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN Axisymétrique du modèle GP.

La figure V.42 présente la variation de coefficient de poussé en fonction de température génératrice  $T_0$  à travers la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On voit clairement que le graphe pour le cas de gaz parfait reste constant lorsque la température génératrice augmente. Le cas à haute température le gaz peut être considéré comme calorifique-ment parfait et cela de 0 K jusqu'à environ 240 K, plus  $T_0$  augmente, la valeur de  $C_f$  augmente considérablement et s'éloigne du modèle d'un gaz parfait, d'où la nécessité d'utiliser le modèle à haute température pour corriger les résultats, puisque réellement les valeurs de  $C_p$  et de  $\gamma$  varient avec la température.



**Figure V.42:** Variation de  $C_F$  de la tuyère à détente centrée axisymétrique en fonction de  $T_0$  lorsque  $MS=3.00$

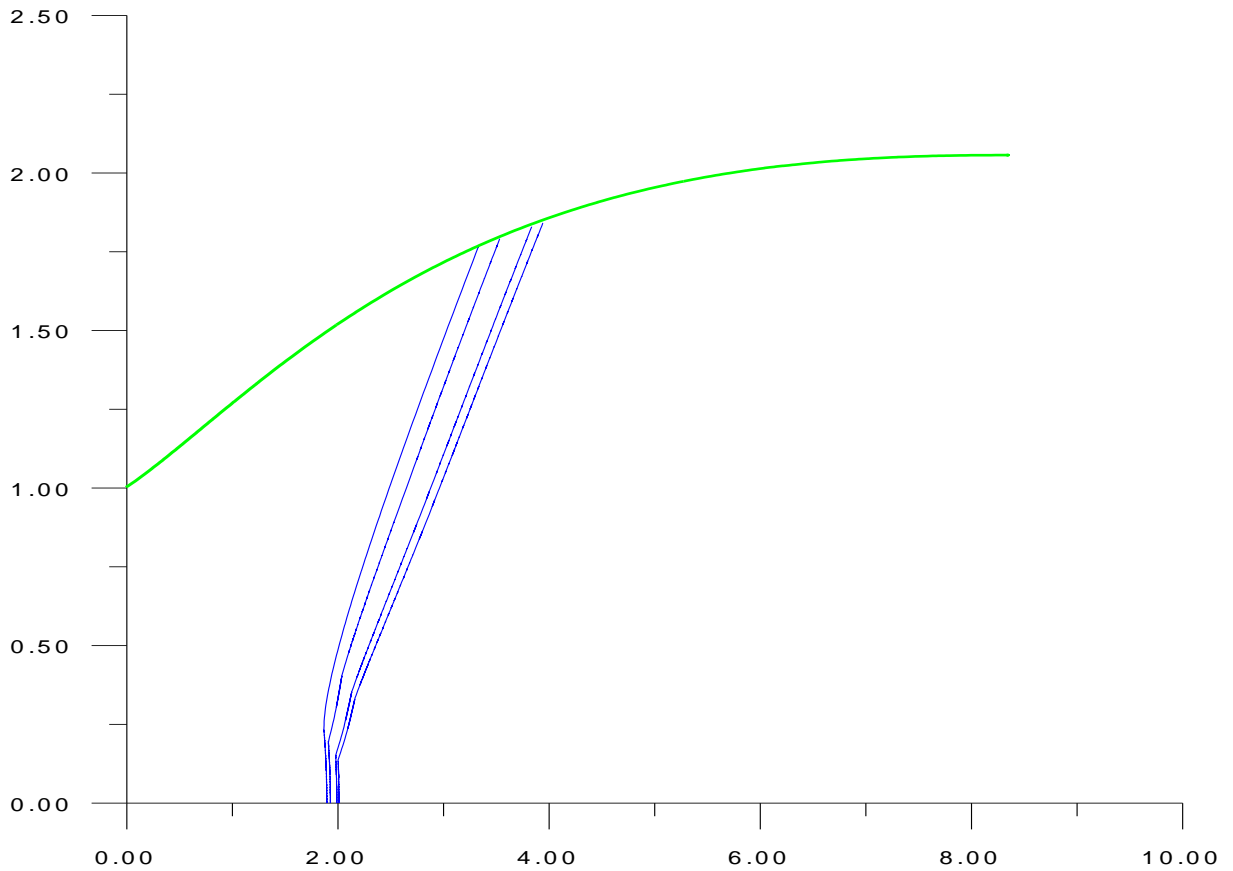
La figure V.43 présente la variation de coefficient de poussé en fonction de nombre de Mach de sortie à travers la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On voit clairement que le coefficient de poussé augmente avec nombre de Mach augmente lorsque la température génératrice augmente avec une différence entre les quatre courbes



**Figure V.43:** Variation de  $C_F$  de la tuyère à détente centrée axisymétrique en fonction de  $M_s$

**Courbes ISO-MACH :**

La figure V.44 présente la variation des Iso Mach dans une tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle gaz parfait. On voit des lignes de Mach sont courbes dans la région de transition et que la ligne de Mach du modèle gaz parfait sont au dessus de celle du cas à haute température lorsque  $T_0 = 1000K, T_0 = 2000K, T_0 = 3000K$  respectivement. Ce qui montre que si on considère le modèle à haute température HT pour le calcul on va voir une dégradation de la vitesse de l'écoulement.



**Figure V.44:** Courbes iso-Mach de la tuyère à détente centrée axisymétrique

# CONCLUSION

A partir de cette étude de calcul de l'écoulement supersonique dans la tuyère à détente centrée bidimensionnelle et axisymétrique avec l'hypothèse à haute température. On a pu avoir nos résultats d'après le programme de calcul numérique, qui permet de faire la correction de l'écoulement dans une tuyère à détente centrée bidimensionnelle et axisymétrique sur la base des hypothèses d'un gaz parfait GP à  $C_p$  et  $\gamma$  constantes en utilisant le modèle des équations de comptabilités et de caractéristiques à haute température HT, et la forme de tuyère est donnée.

A la fin on peut citer les points suivants :

- ✓ La correction de cas du modèle gaz parfait GP avec notre modèle à haute température si la tuyère est dimensionnée sur la base de modèle gaz parfait, puisque réellement les valeurs de  $C_p$  et de  $\gamma$  varient avec la température.
- ✓ L'écoulement à la sortie de la tuyère MLN à haute température ne sera plus uniforme à la section de sortie pour la tuyère dimensionné sur la base de modèle GP.
- ✓ L'écoulement à travers la tuyère sera complètement modifié en comparaison avec celui donné par le modèle GP.
- ✓ A basse température nous pouvons étudier un écoulement à haute température en utilisant les relations du modèle d'un gaz parfait. Par conséquent, lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, la théorie d'un gaz parfait commence à donner des résultats qui ne rapprochent pas au cas réel.
- ✓ Lorsque la température génératrice  $T_0$  augmente, la théorie d'un gaz parfait commence à donner des résultats qui s'éloignent au fur et à mesure du cas réel, d'où la nécessité d'utiliser le modèle à haute température.
- ✓ Dans le cas du modèle à haute température l'écoulement dans la région de Kernal et la région de transition et région uniforme devient une région non simple. N'y a pas division des régions, et la région uniforme disparaît.
- ✓ Tous les paramètres et autres peuvent être déterminés en fonction de nombre de Mach  $M_5$  de la sortie et le rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$  du gaz utilisé pour le modèle GP et en fonction de la température génératrice pour le modèle HT.

- ✓ Pour les iso-Mach le gaz s'il est considéré sur la base pour le modèle à haute température il est moins accéléré que le gaz qui est considéré pour le modèle de GP.
- ✓ On a trouvé une différence entre la tuyère à détente centrée bidimensionnelle et axisymétrique. La détente dans une tuyère axisymétrique est plus rapide que celle dans une tuyère bidimensionnelle.

Il est utile, pour rendre l'étude détaillée dans ce domaine, de s'attaquer à des problèmes constituant des sujets de recherche intéressants. Nous citons ici quelques thèmes que nous proposerons comme travaux futurs.

- 1) Faire le Calcul de la couche limite.
- 2) Faire l'extension afin de concevoir des tuyères supersoniques tridimensionnelle de section de sortie arbitraire, par exemple carrée, elliptique, ...en utilisant la définition de la fonction de courant dans l'espace.
- 3) Faire le calcul de l'écoulement en utilisant les équations d'Euler.
- 4) Calcul de l'écoulement dans une tuyère dimensionné sur la base d'utilisation
- 5) Calcul de l'écoulement supersonique dimensionné sur la base d'utilisation du modèle gaz parfait avec l'hypothèse à haute température supérieur au seuil de dissociation des molécules.
- 6) Correction de l'écoulement dans une tuyère dimensionnée sur la base d'utilisation du modèle gaz réelle en utilisant notre modèle HT inférieur au seuil de dissociation des molécules pour le cas d'une tuyère bidimensionnelle et axisymétrique.
- 7) Correction de l'écoulement dans une tuyère dimensionnée sur la base d'utilisation du modèle gaz réelle en utilisant notre modèle HT supérieur au seuil de dissociation des molécules pour le cas d'une tuyère bidimensionnelle et axisymétrique.

En fin, notre grand souhait est que ce travail puisse être un outil de base pour des recherches futures dans le domaine de la conception de nouvelles formes de tuyères supersoniques.

# Annexe A

## Interpolation 'Cubic Spline'

L'interpolation est considérée comme le cœur de l'analyse numérique, vu l'existence des fonctions qui sont tabulées et l'expression analytique est absente. Si on veut chercher la valeur de la fonction pour des points qui ne sont pas tabulés, il est nécessaire d'interpoler ces points.

Aujourd'hui l'interpolation se fait par ordinateur.

- Interpolation linéaire.
- Interpolation quadrature.
- Interpolation cubique.

Plusieurs auteurs ont développé des procédures d'interpolations des points tabulés. On peut citer à titre d'information :

- Interpolation de Lagrange.
- Interpolation par itération.
- Interpolation inverse.
- Interpolation de Hermite.
- Interpolation par différences finis.
- Interpolation par cubique Spline.

Dans le cas général, il est possible qu'une séquence d'interpolation polynomiale  $\{P_n(x)\}$  sur un nombre fixé et fini d'intervalles ne converge pas régulièrement à une fonction lisse, c'est à dire, si on veut chercher le comportement de ces polynômes entre les points interpolés, on observe dans certains cas, les oscillations des polynômes qui quittent volontairement la variation réelle de la fonction. Les polynômes d'interpolation qui possèdent un degré grand donnent ces situations. Un chemin pour éviter ce problème est de considérer une interpolation polynomiale avec un petit degré sur des petits intervalles de l'intervalle considéré. Avec cela, l'oscillation entre ces points n'est pas significative, où l'interpolation peut imiter le comportement de la fonction. Cependant, le résultat de la fonction interpolée à partir des petits intervalles avec des polynômes de degré faibles n'est pas nécessairement encore lisse.

Puisqu'on souhaite d'imiter le comportement de la fonction, il est recommandé que pour les polynômes d'interpolation soient lisses.

Ces fonctions avec un degré maximal sont nommées 'Spline', parmi celle-ci on cite l'interpolation 'Cubic Spline' et voici la description de sa formulation :

### A.1. Formulation mathématique de l'interpolation 'Cubic Spline':

L'interpolation Cubique Spline (dite par morceau) au point de vue mécanique ressemble à un procédé qui consiste à joindre une série des points par une tige élastique (Spline). Il existe plusieurs types de Spline, linéaire, quadratique, cubique, ..... La plus utilisée c'est la Spline Cubique qui consiste à lisser chaque segment de deux points successifs par une fonction Cubique.

Considérons l'intervalle  $I = [a, b]$  divisée en  $(n-1)$  sous intervalles pas nécessairement de mêmes longueurs.

$$a = a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

La fonction Spline  $S(x)$  de degré  $m$  est une fonction définie sur l'intervalle  $I$  par :

1°) considérer avec le polynôme de degré  $m$  sur chacun sous l'intervalle

$$I_i = [a_{i-1}, a_i] \quad i = 2, 3, 4, \dots, n$$

2°) possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $m - 1$

Les abscisses  $\{a_i\}$  sont nommées les nœuds du "Spline". La fonction 'Spline'  $S(x)$  est l'interpolation des points  $[a_i, y_i]$  si :

$$S(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

La forme la plus simple est du premier degré, nommée fonction d'interpolation linéaire qui n'est pas lisse mais très efficace si la distance entre les nœuds est petite. En effet, toutes les tables des valeurs des fonctions qui utilisent l'interpolation linéaire conduisent à une approximation fondamentale des fonctions par " Spline Linéaire ". Spline de degré deux peut être définie, mais puisqu'il y a uniquement un degré de liberté dans sa définition, il y a manque de symétrie dans leur détermination avec relation des points de frontière de l'intervalle. De plus, les fonctions résultantes ne sont pas suffisamment lisses. Cependant, en générale, la meilleure utilisation de 'Spline' est celle



de 'Cubic-Spline' qui comporte deux paramètres à choisir pour donner le comportement aux extrémités de l'intervalle.

Un type des conditions aux limites est tel que :

$$S''(a) = S''(b) = 0$$

L'interpolation en 'Cubic-Spline' qui satisfait ces conditions est nommée 'Cubic-Spline naturelle'

Une deuxième condition qui généralement donne des meilleurs résultats est :

$$S'(a) = f'(a), S'(b) = f'(b)$$

Cela, évidemment demande des données sur la dérivée aux extrémités.

L'une parmi plusieurs représentations de 'Spline' peut être donnée comme suit :

Soient:

$$h_i = a_i - a_{i-1} \quad i = 2,3,4, \dots, n \quad (A.1)$$

Cependant, S(x) est une fonction cubique, alors S'(x) a une forme quadratique (2<sup>ème</sup> degré) et S''(x) a une forme linéaire et continues. Cependant, on peut écrire:

$$S''(x) = M_i \frac{a_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - a_{i-1}}{h_i} \quad \text{Sur } I_i \quad (A.2)$$

Pour certaines constantes  $M_i$ , en effet:

$$S''(a) = M_i \quad i = 1,2,3, \dots, n \quad (A.3)$$

Intégrant l'équation (A.2) deux fois et écrivons la fonction linéaire arbitraire sous la forme indiquée, on obtient :

$$S(x) = M_{i-1} \frac{(a_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - a_{i-1})^3}{6h_i} + C_i(a_i - x) + d_i(x - a_{i-1}) \quad \text{sur } I_i \quad (A.4)$$

Cependant, on souhaite que la fonction 'Spline' interpole aux nœuds, on a :

$$S(a_{i-1}) = y_{i-1}, \quad S(a_i) = y_i$$

Ces deux équations déterminent les constantes  $C_i$  et  $D_i$ , La fonction S(x) devient :

$$S(x) = M_{i-1} \frac{(a_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - a_{i-1})^3}{6h_i} + \left( y_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_i}{6} \right) \frac{a_i - x}{h_i} + \left( y_i - \frac{M_i h_i}{6} \right) \frac{x - a_{i-1}}{h_i} \quad (A.5)$$

Dérivons l'expression (A.5), on obtient :

$$S'(x) = -M_{i-1} \frac{(a_i - x)^2}{2h_i} + \frac{(x - a_i)^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{6} h_i \quad \text{sur } I_i = [a_{i-1}, a_i] \quad (A.6)$$

Par analogie, sur l'intervalle  $I_{i+1} = [a_i, a_{i+1}]$  on a :

$$S'(x) = -M_i \frac{(a_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - a_i)^2}{2h_{i+1}} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{M_{i+1} - M_i}{6} h_{i+1} \quad \text{sur } I_i = [a_{i-1}, a_i] \quad (A.7)$$

On note les valeurs particulières d'après (A.6) et (A.7)

$$S'(a_i) = \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i}{3} M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \quad (A.9)$$

$$S'(a_i) = -\frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$

Cependant, la fonction  $S'(x)$  doit être continue, ces deux valeurs doivent être égales, cela donne ces équations :

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (A.9)$$

On obtient  $(n - 2)$  équations linéaires (à l'exception des deux nœuds des extrémités ) dont les inconnus sont  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ , d'où deux conditions supplémentaires doivent être ajoutées pour avoir une solution unique.

Une fois les valeurs  $M_i$  sont déterminées, l'interpolation Spline sera complètement déterminée par l'équation (A.5).

Pour simplifier l'écriture de l'équation (A.9) on pose :

$$\sigma_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i, \quad d_i = \frac{6(\sigma_{i+1} - \sigma_i)}{h_i + h_{i+1}}, \quad (A.10)$$

Après substitution de (A.10) dans (1.9), le système d'équation possède la forme suivante :

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad (A.11)$$

Les deux conditions supplémentaires possèdent la forme :

$$\begin{aligned} 2M_1 + \lambda_1 M_2 &= d_1 \\ \mu_n M_{n-1} + 2M_n &= d_n \end{aligned} \tag{A.12}$$

Et on indique que plusieurs possibilités pour les choix des constantes  $\lambda_1, d_1, \mu_n$  et  $d_n$ . sous la forme matricielle, on aura :

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & & & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & & & \\ & & 0 & & 0 & 0 & & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & 0 & & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} & & \\ & & & & \mu_n & 2 & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ M \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{A.13}$$

C'est un système d'équations à matrice tri diagonales liées. 1<sup>ère</sup>

Cas : si on choisit  $\lambda_1 = d_1 = \mu_n = d_n = 0$ , alors  $M_1 = M_n = 0$ . Ceci donne l'interpolation 'Spline naturelle'. 2<sup>ème</sup> Cas : selon la 2<sup>ème</sup>

condition aux limites proposée au paravent :

$$S'(x) = y'_1, \quad S'(x) = y'_n \tag{A.14}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_n = 1 \\ d_1 &= \frac{6}{h_2} \left( \frac{y_2 - y_1}{h_2} - y'_1 \right) \\ d_n &= \frac{6}{h_n} \left( y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right) \end{aligned} \tag{A.15}$$

3<sup>ème</sup> Cas : la troisième possibilité est de choisir  $a_i, i = 2, 3, \dots, n - 1$ , comme des nœuds du Spline. Les points des extrémités ne sont pas donnés comme des nœuds et d'imposer les conditions :

$$S'(a) = y'_1$$

et

$$S'(a_n) = y'_n$$

Dans ce cas, l'indice 'i' dans l'équation (A.11) varie entre 3 et n - 2, et les deux conditions additionnelles sont similaires en forme pour le choix de (A.12). Les valeurs de  $\lambda_2$  et  $d_2$  peuvent être rapidement évaluées en supposant  $x = a_1$  dans (A.5) et posons  $S(a_1) = y_1$ . De même, en posant  $x = a_n$ , on peut déterminer les valeurs de  $\lambda_{n-1}$  et  $d_{n-1}$ . Ce schéma ne demande aucune informations additionnelles.

De l'équation (A.10) : on sait que :

$$0 < \lambda_i < 1$$

$$0 < \mu_i < 1 \qquad i = 2, 3, n - 1$$

Si donc  $|\lambda_1| < 2$  et  $|\mu_n| < 2$ , la matrice dans (1.13) sera en diagonale dominante. Dans ce cas, il est possible de montrer qu'une solution unique de (A.13) existe pour  $d_1, d_2, \dots, d_n$  arbitraire. Cependant pour le 1<sup>ère</sup> cas 2<sup>ème</sup> cas on est assurée l'existence de l'interpolation Spline. Similairement dans le 3<sup>ème</sup> cas, la solution toujours existe :

A.2. Résolution d'un Système d'équations linéaires à matrice Tri-diagonale non symétrique par la méthode du double balayage de Cholesky :

Dans le cas des matrices tri diagonales, la méthode du pivot est parfois appelée méthode du double balayage de Cholesky. Nous la donnerons parce que sa mise en œuvre est aisée, et que les matrices tri diagonale interviennent dans de nombreux problèmes, notamment pour interpoler une fonction donnée sous forme d'un tableau.

Le système d'équations tri diagonale s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1x_1 + c_1x_2 = y_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = y_2 \\ Ka_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 = y_3 \\ \Lambda\Lambda\Lambda\Lambda O \qquad \qquad M \\ \Lambda\Lambda\Lambda\Lambda a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_{i+1} = y_i \\ \Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda O \qquad \qquad M \\ \Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda a_n x_{n-1} + b_n x_n = y_n \end{array} \right. \qquad (A.16)$$

La première équation de (A.16) permet d'exprimer l'inconnue  $x_1$  en fonction de l'inconnue  $x_2$  :

$$x_1 = \frac{-c_1}{b_1} x_2 + \frac{y_1}{b_1} \quad (A.17)$$

Portons cette valeur de  $x_1$  dans la seconde équation de (A-16) on obtient :

$$a_2 \left[ \frac{-c_1}{b_1} x_2 + \frac{y_1}{b_1} \right] + b_2 x_2 + c_2 x_3 = y_2$$

$$\left[ \frac{-c_1 a_2}{b_1} + b_2 \right] x_2 = -c_2 x_3 + y_2 - a_2 \frac{y_1}{b_1}$$

On a ainsi exprimé  $x_2$  en fonction de  $x_3$ , et ainsi de suite on exprimera chaque inconnue en fonction de la suivante. Supposons qu'on ait obtenu :

$$x_{i-1} = A_{i-1} x_i + B_{i-1}$$

Et portons cette valeur dans la  $i^{\text{ème}}$  équation de (A.16), il vient :

$$a_i (A_{i-1} x_i + B_{i-1}) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = y_i$$

$$x_i = \frac{-c_i}{a_i A_{i-1} + b_i} x_{i+1} + \frac{y_i - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i} \quad (A.18)$$

On peut écrire donc :

$$\begin{cases} x_i = A_i x_{i+1} + B_i \\ A_i = \frac{-c_i}{a_i A_{i-1} + b_i} \\ B_i = \frac{y_i - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i} \end{cases} \quad (A.19)$$

En faisant  $i=1$  dans les équations (A.19) et en comparant avec (A.17), on voit que :

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ B_0 = 0 \end{cases} \quad (A.20)$$

Les équations (A.19) et (A.20) nous permettent de calculer aisément de proche en proche, étant donnés  $A_0 = 0$  et  $B_0 = 0$ , les couples  $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3)$ , en utilisant un premier balayage de  $i=1$  à  $n$ .

Nous allons maintenant effectuer un second balayage, de  $i = n$  à 1, qui va nous permettre de calculer les inconnues. En effet, la dernière équation de (A.16) s'écrit :

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = y_n$$

Ce qui s'écrit en remplaçant  $x_{n-1}$  par sa valeur tirée de (A-19) où on fait  $i = n-1$

$$a_n (A_{n-1} x_n + B_{n-1}) + b_n x_n = y_n$$

D'où :

$$x_n = \frac{y_n - a_n B_{n-1}}{a_n A_{n-1} + b_n}$$

C'est-à-dire, d'après (4) où  $i = n$

$$x_n = B_n$$

On obtient ainsi la valeur cherchée  $x_n$ . On en déduit :

$$x_{n-1} = A_{n-1} x_n + B_{n-1} \tag{A.21}$$

Puis  $x_{n-2}$ , etc ..... jusqu'à  $x_1$ , de proche en proche.

# REFERENCES

- [1] Irwin Treager traduction Didier Féminier, Les Réacteurs Principes de fonctionnement, Edition 1983.
- [2] A.H, «Compressible Fluid Flow». Vol.1 .PP.73, 1953.
- [3] H.P.G, Peterson C.R, «Mechanics and Thermodynamics of Propulsion». Addition Wesley Publishing Company Inc.PP.180, 1965.
- [4] Anderson J.D. Jr., «Fundamentals of Aerodynamics » McGraw-Hill Book company, New York, 1998
- [5] Anderson J. D. Jr., «Modern Compressible Flow: With Historical Perspective, » McGraw Hill Book Company, New York, 1982.
- [6] Argrow B.M and Emanuel G., « Comparison of Minimum Length Nozzles, » Journal of Fluids Engineering, Vol. 110, PP. 283-288, September 1988.
- [7] Argrow B.M and Emanuel G., « Computational Analysis of the Transonic Flow field of Two-Dimensional Minimum Length Nozzles, » AIAA-1989-1822, 20<sup>th</sup> Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, Buffalo, NY, June 12-14, 1989.
- [8] Démidovitch B. and I. Maron., «Eléments de calcul numérique, »Editions Mir, Moscow, 1987.
- [9] Dumitrescu L. Z., « Minimum Length Axisymmetric Laval Nozzels, » AIAA Journal, Vol. 13, PP. 520-531, 1975.
- [10] Emanuel G., « Gasdynamic: Theory and Application», New York, AIAA Educational Serie, 1986.
- [11] Georing M., «Nozzle Design Optimization by Method-of- Characteristics, » AIAA-1990-2024, 26<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Orlando, Florida, July 16-18, 1990.

- [12] Lax P. D and Wendroff B., «Difference Schemes with High Order of Accuracy for Solving Hyperbolic Equations, » CIMS Report NY0-9759, July 1962, New York Univ., New York.
- [13] Ortega J. and Rheinboldt W., «Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, » New York, Academic Press, 1970.
- [14] Peterson C. R and Hill P.G «Mechanics and Thermodynamics of Propulsion, » Addison-Wesley Publishing Company Inc. New York. 1965.
- [15] Ralston A. and Rabinowitz P., «A First Course in Numerical Analysis, »McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [16] Rao G. V. R., «Recent development in Rocket Nozzle Configuration, » ARS Journal, Vol. 31 N<sup>o</sup> 04, PP. 1488-1494,1961.
- [17] Rao G. V. R., «Contoured Rocket Nozzles, » Proc. 9<sup>th</sup> Int. Astro-Fed. Congress, Amsterdam, 1958.
- [18] Shapiro A.H., «the Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow, » Vol .1, the Ronald Press Company, New York, 1953.
- [19] Sutton G.P «Determination of Internal Gas Flows by a Transient Numerical Technique » AIAA Journal, Vol. 10, N<sup>o</sup> 5, PP .603-611, May 1972.
- [20] Sauer R., «General Characteristics of the Flow through Nozzles at near Critical Speed » NASA TM-1147, 1947.
- [21] Zebbiche T. et Youbi Z., «Design of Two – Dimensional Supersonic Minimum Length Nozzle at high Temperature Application for Air, » DGLR 2005-257 , German Aerospace Congress 2005 , 26-29 Sep.2005 , Friedrichshafen .Germany .
- [22] Zebbiche T. and Youbi Z., «Fonction de Prandtl Meyer A Haute Température, » Conférence Internationale de la Mécanique Avancée, Cima ' 04 Boumerdès (Algérie), 03 Nov., 02 Déc.2004.
- [23] Zebbiche T ., and Youbi Z., «Parameters of Supersonic Flow at High temperature Application for Air , » 4<sup>th</sup> International Conferences on Heat Transfer , Fluid Mechanics and Thermodynamics HEFAT , 19-22 Sep 2005 , Caire, Egypt .



- [24] Zebbiche T. and Youbi Z., «Supersonic Flow Parameters at High Temperature. Application for Air in Nozzles, » DGLR -2005 -256, German Aerospace Congress 2005, 26-29 Sep. 2005 Friedrichshafen, Germany.
- [25] Zebbiche T. and Youbi Z., «Supersonic Two – Dimensional Minimum Length Nozzle Design at high Temperature Application for air, » AIAA-2006-4599, 42st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & E
- [26] Zebbiche T., «New Generalized Form of the Prandtl Meyer Function. Application for Air at High Temperature, » AIAA-2006-3674, 25<sup>th</sup> Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, California 5-8 Jun 2006.
- [27] Zucker R.D and Bilbarz O., «Fundamentals of GasDynamics, » John wiley & Sons, New Jersey, 2002.
- [28] Zucro M.J. and Hoffman J.D., «Gas Dynamics, » Vol 1 and Vol 2 , New York , Wiley , 1976.
- [29] Raviart P.A et Thomas J.M., «Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivée Partielles » Masson 1983.
- [30] Sod G.A., «Numerical Methodds in Fluid Dynamics, » Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [31] Press W.H., Flannery B.P., Tcukolsky S.A. and Vetterling W.T., «Numerical Recipes The Art of Scientific Computing, » Cambridge University Press, Cambridge 1986.
- [32] Zebbiche T., «Supersonic Axisymmetric Minimum Length Nozzle Design at high Temperature, » Submitted to 45<sup>TH</sup> AIAA Aerospace Meeting and Exhibit , 8-11 Jan . 2007, Reno Hilton, Reno, Nevada; 2007.
- [33] Malina F. J., “Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect gases,” J. Franklin Inst., Vol. 230, PP. 433-450, 1940.
- [34] Sutton G. P., “Rocket Propulsion Elements,” sixth edition, California, 1992.
- [35] Démidovitch B. and I. Maron., “Eléments de calcul numérique,” Editions Mir, Moscow, 1987.

- [36] Ryhming I. L., "Dynamique des Fluides," Presses Polytechnique romandes, Lausanne, Suisse, 1984.
- [37] Comolet R., "Mécanique Expérimentale des Fluides. Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux," Tome 1, 3<sup>ème</sup> Edition, Masson, 1979.
- [38] Fletcher C. A. J. "Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories," Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [39] Powell M. J. D., "On the Maximum Error of Polynomial Approximation Defined by Interpolation and by Least Squares Criteria," Comput. J., Vol. 9, PP. 404-40, 1978.
- [40] El-Kachbour.K et Koudri-B «Simulation Numérique sur les tuyères supersoniques tronquées 2009.
- [41] Mr Zebiche Toufik Thèse de Magister : Déterminations des profils des tuyères supersoniques par la méthode des caractéristiques, septembre 1995.