

MPSI

Exercices d'algèbre et de probabilités

David Delaunay

- RÉSUMÉS DE COURS
- MÉTHODES
- 3 NIVEAUX D'EXERCICES :
 - apprentissage
 - entraînement
 - approfondissement
- CORRIGÉS DÉTAILLÉS
PAS À PAS

deboeck **B**
SUPÉRIEUR

La côte de l'ouvrage : 2-512-182

Table des matières

1	Ensembles et applications	3
1.1	Rudiments de logique	3
1.2	Ensembles	6
1.3	Applications	8
1.4	Relations binaires	12
1.5	Exercices d'apprentissage	13
	Phrases quantifiées	14
	Raisonnements	17
	Opérations dans $\wp(E)$	21
	Applications	23
	Relations binaires	27
1.6	Exercices d'entraînement	29
	Opérations dans $\wp(E)$	29
	Injection, surjection, bijection	30
	Images directes et images réciproques	36
	Relations binaires	40
1.7	Exercices d'approfondissement	42
2	Calculs algébriques	47
2.1	Les entiers naturels et le principe de récurrence	47
2.2	Sommes et produits	48
2.3	Formules du binôme et de factorisation	52
2.4	Systèmes d'équations linéaires	54
2.5	Exercices d'apprentissage	56
	Principe de récurrence	56
	Sommes et produits	57

	Coefficients binomiaux	62
	Systemes d'equations lineaires	64
2.6	Exercices d'entraınement	66
	Principe de recurrence	66
	Sommes numeriques	69
	Produits numeriques	72
	Coefficients binomiaux	74
2.7	Exercices d'approfondissement	80
3	Arithmetique des entiers	87
3.1	Divisibilite	87
3.2	PGCD et PPCM	89
3.3	Entiers premiers entre eux	91
3.4	Nombres premiers	92
3.5	Exercices d'apprentissage	94
	Divisibilite	94
	PGCD et PPCM	95
	Entiers premiers entre eux	97
	Nombres premiers	99
3.6	Exercices d'entraınement	101
	Etudes arithmetiques	101
	Nombres premiers	108
	L'infinite des nombres premiers	109
	Decomposition en facteurs premiers	111
3.7	Exercices d'approfondissement	112
4	Structures algebriques usuelles	119
4.1	Loi de composition interne	119
4.2	Structure de groupe	122
4.3	Structure d'anneau	123
4.4	Exercices d'apprentissage	125
	Loi de composition interne	125
	Groupes	127
4.5	Exercices d'entraınement	130
	Loi de composition interne	130
	Groupes	132
	Sous-groupes	134
	Groupes finis	137
	Anneaux et corps	138
4.6	Exercices d'approfondissement	141

5	Polynômes et fractions rationnelles	149
5.1	L'anneau des polynômes	149
5.2	Racines d'un polynôme	152
5.3	Dérivation	156
5.4	Arithmétique des polynômes	157
5.5	Le corps des fractions rationnelles	160
5.6	Exercices d'apprentissage	163
	Polynômes	163
	Racines	165
	Arithmétique des polynômes	168
	Décompositions en éléments simples	171
5.7	Exercices d'entraînement	176
	Généralités	176
	Racines	179
	Relations coefficients-racines d'un polynôme scindé	181
	Arithmétiques des polynômes	184
	Familles de polynômes classiques	188
	Les fractions rationnelles	193
5.8	Exercices d'approfondissement	198
6	Dénombrement	205
6.1	Cardinal d'un ensemble fini	205
6.2	Cardinaux usuels	207
6.3	Listes, arrangements, combinaisons	208
6.4	Exercices d'apprentissage	209
	Généralités	209
	Dénombrements	210
6.5	Exercices d'entraînement	213
	Démonstrations combinatoires	213
	Dénombrements	214
	Compositions d'un entier	218
	Dénombrements ensemblistes	221
	Dénombrements d'applications	223
6.6	Exercices d'approfondissement	227
7	Espaces vectoriels	235
7.1	Espaces vectoriels	235
7.2	Sous-espaces vectoriels	237
7.3	Famille de vecteurs	240
7.4	Espaces de dimension finie	241
7.5	Sous-espaces affines	244
7.6	Exercices d'apprentissage	245
	Sous-espaces vectoriels	245
	Liberté d'une famille de vecteurs	249
7.7	Exercices d'entraînement	253

	Généralités sur les espaces vectoriels	253
	Liberté	259
	Supplémentarité	260
	Rang d'une famille de vecteurs	264
	L'espace des polynômes	265
	Sous-espaces affines	267
7.8	Exercices d'approfondissement	268
8	Les applications linéaires	273
8.1	Applications linéaires	273
8.2	Endomorphismes	275
8.3	Détermination d'une application linéaire	276
8.4	Théorème du rang	277
8.5	Exercices d'apprentissage	279
	Généralités	279
	Applications linéaires en dimension finie	283
8.6	Exercices d'entraînement	286
	Généralités	286
	Projections vectorielles	291
	Applications linéaires en dimension finie	296
	Rang d'une application linéaire	298
	Formes linéaires et hyperplans	303
8.7	Exercices d'approfondissement	305
9	Matrices	309
9.1	Calcul matriciel	309
9.2	Représentations matricielles	313
9.3	Changements de bases	317
9.4	Opérations élémentaires et systèmes linéaires	319
9.5	Exercices d'apprentissage	321
	Calculs matriciels	321
	Matrices et applications linéaires	326
9.6	Exercices d'entraînement	331
	Les matrices carrées	331
	Matrices carrées inversibles	335
	Matrices et applications linéaires	337
	Trace d'une matrice carrée	344
	Rang	345
9.7	Exercices d'approfondissement	348
10	Déterminants	353
10.1	Groupe symétrique	353
10.2	Déterminants	355
10.3	Calculs de déterminants	358
10.4	Applications	360

10.5 Exercices d'apprentissage	361
Permutation de $\{1, \dots, n\}$	361
Calculs de déterminants	363
10.6 Exercices d'entraînement	366
Calculs de déterminants	366
Déterminant d'une matrice	375
Déterminant par blocs	377
Déterminant d'un endomorphisme	379
Applications	383
10.7 Exercices d'approfondissement	387
11 Espaces préhilbertiens réels	393
11.1 Produit scalaire	393
11.2 Espaces euclidiens	397
11.3 Isométries vectorielles	401
11.4 Exercices d'apprentissage	405
Produit scalaire	405
Base orthonormale	408
Orthogonal d'une partie	410
Isométrie et matrices orthogonales	413
11.5 Exercices d'entraînement	415
Produit scalaire	415
Espace euclidien	418
Projection orthogonale	419
Calcul de distance à un sous-espace vectoriel	424
Isométries	426
Matrices orthogonales	430
11.6 Exercices d'approfondissement	432
12 Probabilités	439
12.1 Probabilité sur un univers fini	439
12.2 Probabilités conditionnelles	441
12.3 Exercices d'apprentissage	444
12.4 Exercices d'entraînement	450
Définition d'une probabilité	450
Événements indépendants	453
Calcul de probabilités	458
Probabilités conditionnelles	464
12.5 Exercices d'approfondissement	472
13 Variables aléatoires	477
13.1 Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini	477
13.2 Vecteurs aléatoires	479
13.3 Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle	482
13.4 Exercices d'apprentissage	485

13.5 Exercices d'entraînement	491
Loi binomiale	491
Espérances et variances	494
Calcul d'espérances et de variances	497
Couples de variables aléatoires	503
Covariance	505
Inégalités de concentration	508
13.6 Exercices d'approfondissement	511