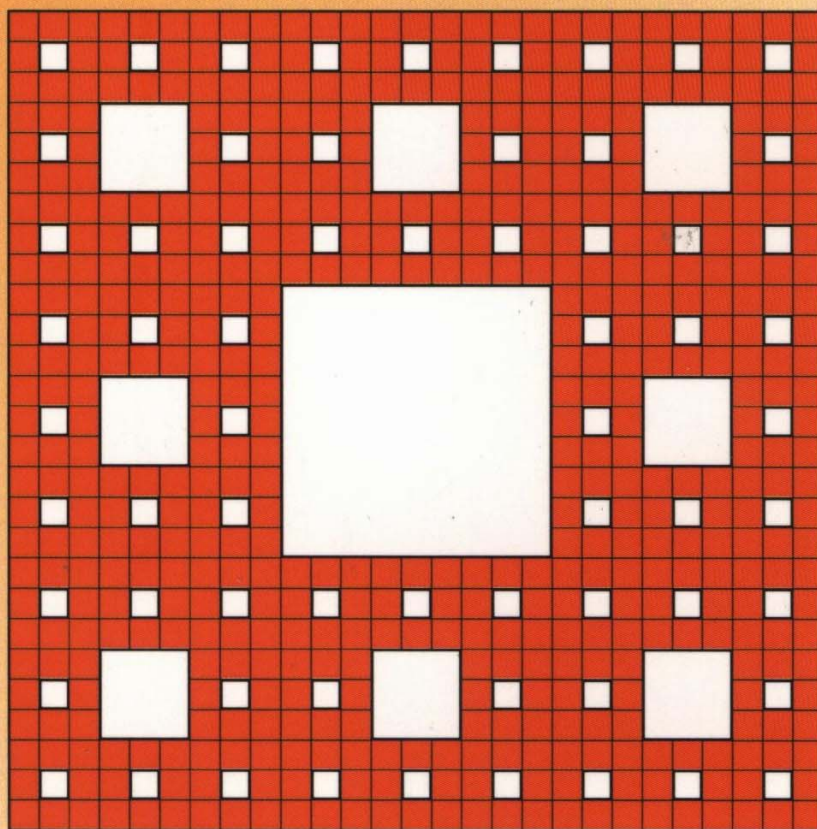


COURS ET EXERCICES D'ANALYSE :
TOPOLOGIE, ANALYSE
FONCTIONNELLE ET MATRICIELLE

Mathématiques spéciales MP - MP* - PSI* - CAPES - Agrégation

Pierre Meunier



Cépaduès
ÉDITIONS

TABLES DES MATIERES

TABLES DES MATIERES	5
Avant-propos : hommage à René-Louis Baire.	11
Introduction	13
Chapitre 1 - ESPACES METRIQUES et ESPACES NORMES.....	15
1.1 Espaces métriques	15
1.1.1 Définition et premières conséquences	15
1.1.2 Topologie d'un espace métrique	16
1.1.3 Espaces topologiques.....	17
1.1.4 Les suites dans les espaces métriques.....	19
1.1.4.1 Limite et valeur d'adhérence d'une suite.....	19
1.1.4.2 Espaces métrique complets	20
1.1.5 Limite et continuité dans les espaces métriques.....	24
1.1.5.1 Définition	24
1.1.5.2 Fonctions continues.....	25
1.1.5.3 Distances topologiquement équivalentes	26
1.2 Espaces vectoriels normes.....	27
1.2.1 Définitions et premières propriétés.....	27
1.2.2 Applications linéaires continues.....	29
1.2.3 Espaces vectoriel normés de dimension finie.....	32
1.2.4 Applications multilinéaires continues.....	34
1.2.5 Algèbres normées. Séries dans les algèbres normées de Banach.....	36
1.2.5.1 Séries dans les \mathbb{K} - evn.....	36
1.2.5.2 Algèbres normées.....	38
1.3 Espaces métriques compacts	40
1.3.1 Définitions et premières conséquences	40
1.3.2 Théorèmes généraux concernant les compacts	42
1.3.3 Les suites dans les espaces métriques compacts : le théorème de Weierstrass-Bolzano	44

1.3.4	Espaces métriques compacts et espaces complets : le processus diagonal.....	47
1.3.5	Les compacts dans les \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) evn de dimension finie	49
1.3.5.1	Les compacts de (\mathbb{R}, \cdot)	49
1.3.5.2	Les compacts de $(\mathbb{K}^n, \ \cdot \ _\infty)$	50
1.3.5.3	Equivalence des normes en dimension finie	51
1.3.6	Le théorème de Riesz.....	54
1.4	Espace métriques connexes	55
1.4.1	Définitions et premières conséquences	55
1.4.2	Théorèmes fondamentaux concernant les connexes.....	56
1.4.3	Les compacts connexes	57
1.4.4	Les connexes de (\mathbb{R}, \cdot)	59
1.4.5	Composantes connexes. Connexes par arcs	61
1.4.5.1	Connexes par arcs	61
1.4.5.2	Composantes connexes d'un espace métrique	61
1.4.5.3	Une application pour finir de la connexité et une concernant la compacité.	62
Chapitre 2	65
2.1	Espaces de Baire. Applications fonctionnelles	65
2.1.1	Des définitions et des théorèmes généraux.....	65
2.1.2	Des conséquences primordiales dans les e.v.n de Banach.....	69
2.1.3	Le théorème de Baire et les fonctions limites simples.....	74
2.1.4	A propos des points de continuité d'une fonction :.....	76
2.1.5	Des applications « élémentaires » de la notion d'espace de Baire.....	78
2.2	Distance de Hausdorff. Applications	94
2.2.1	L'espace métrique (H, δ) est complet si E est un \mathbb{K}^n	96
2.2.2	Application (on suppose toujours que E est un \mathbb{K}^n avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})	98

2.2.3	Les fractales de Sierpinski	99
2.2.3.1	Définition :	99
2.2.3.2	Construction géométrique de la suite approximante (A_n)	100
2.2.3.3	Remarque importante	103
2.2.3.4	Des exemples standards :	104
2.2.3.5	Une courbe fractale : la courbe de Von-Koch	107
2.3	Norme minimale de Hahn-Pflug et norme maximale de Lie	109
2.3.1	Norme minimale de Hahn-Pflug	109
2.3.2	Norme maximale de Lie dans \mathbb{C}^n	115
2.4	Quelques résultats géométriques importants concernant les compacts	122
2.4.1	Enveloppe convexe d'un compact de E ($E = \mathbb{R}^n$)	122
2.4.2	Le théorème de Markov-Kakutani	124
2.4.3	Homéomorphie des compacts convexes d'intérieur non vide en dimension finie	125
2.4.4	Caractérisation des sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$	128
2.4.4.1	Compacité de $O(q)$ si q est une forme quadratique définie positive	128
2.4.4.2	Etude de la réciproque :	129
2.4.5	Le Hausdorffien d'une matrice complexe	132
Chapitre 3 - Exercices de Topologie et d'analyse fonctionnelle		141
3.1	Exercices généraux concernant les espaces vectoriels normés	141
3.2	Exercices utilisant les projections orthogonales dans les espaces préhilbertiens ; application à la détermination de certains extremums	199
3.2.1	Un résultat essentiel concernant les espaces de Hilbert	200
3.2.2	Projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert	202
3.2.3	Une application du théorème de projection orthogonale : la pseudo-inverse d'une matrice : exemple	203

3.2.4	Le théorème dit des trois normales	206
3.2.5	L'identité de Parseval	207
3.2.6	Une caractérisation des projecteurs orthogonaux.....	209
3.2.7	Distance d'un vecteur à un s.e.v de dimension finie dans un espace préhilbertien réel : applications à la matrice de Hilbert et aux égalités de Mordell.....	209
3.2.8	Convergence faible dans les espaces de Hilbert.....	215
3.3	Exercices de topologie en liaison avec le calcul matriciel	220
3.3.1	Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires.....	220
3.3.2	Application : Approximation itérative pour $A \in GL_n(\mathbb{C})$ de son inverse A^{-1}	222
3.3.3	Comparaison de deux normes euclidiennes sur \mathbb{R}^n	223
3.3.4	Normes dans $M_n(\mathbb{C})$ et rayon spectral	225
3.3.5	Normes dans $M_n(\mathbb{K})$ subordonnées à la norme de Minkowski d'ordre $p \geq 1$ de \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).....	233
3.3.6	Méthode de la puissance inverse.....	237
3.3.7	Composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R}), SO_n(\mathbb{R})$, et des formes quadratiques non dégénérées.....	239
3.3.8	Adhérence dans $M_n(\mathbb{R})$ des matrices trigonalisables	247
3.4	Un résultat de Topologie très utile en programmation linéaire.....	248
3.4.1	Le lemme de Farkas-Minkowski	248
3.4.2	Application à la recherche d'un minimum d'une forme linéaire sur un polyèdre.....	250
3.4.2.1	Un énoncé	250
3.4.2.2	Des précisions : les sommets d'un polyèdre	251
3.4.2.3	Mise en forme pratique de la détermination de μ : l'algorithme du simplexe	254
3.4.3	Commentaires et mise en forme pratique :	256
3.4.4	Remarques et étude de deux exemples élémentaires	257

3.5 Des énoncés où il y a une forte complicité entre la topologie et l'algèbre matricielle	260
3.5.1 Application à l'analyse matricielle	283
3.5.2 Exemple numérique	284
Chapitre 4 - Des problèmes de révision	287
4.1 Problème n° 1 : Points extrémaux d'un convexe ; normes jauges ; application.....	287
4.2 Problème n° 2 : Enoncé issu d'un problème de l'X.....	293
4.3 Problème n° 3 : Calcul fonctionnel.....	297
4.4 Problème n° 4 : Enoncé et solution d'une épreuve écrite proposée à l'Ecole Polytechnique : étude de $l^1(\mathbb{R})$	302
4.5 Problème n° 5 : Topologie et analyse fonctionnelle.....	319
4.6 Problème n° 6 : Topologie et polynômes de Legendre.....	335
INDEX - ALPHABETIQUE	351