

Alain Yger

Analyse complexe

Un regard analytique et géométrique
enrichi de 230 exercices corrigés



La côte de l'ouvrage : 2-515-351

Résumé :

Cet ouvrage décline l'analyse complexe en une variable au niveau master. Organisé en quatre chapitres, il reflète un point de vue qui se veut autant géométrique qu'analytique (mais aussi culturel) et se fixe pour objectif de mettre en lumière le rôle transverse que l'analyse complexe et l'analyse harmonique en deux variables jouent depuis maintenant plus de deux siècles tant en mathématiques (toutes spécialités confondues) qu'en physique théorique ou en ingénierie.

Du fait de la diversité des thèmes avec lesquels il interfère (géométrie analytique ou algébrique, théorie des nombres, théorie des opérateurs, automatique et traitement de l'information, etc.), pareil champ constitue en effet un ciment « unificateur », assise de toute formation scientifique généraliste.

S'il s'adresse aux futurs enseignants ou ingénieurs, l'ouvrage entend aussi poser les tout premiers jalons de l'analyse complexe en plusieurs variables. Les 230 exercices corrigés émaillant le texte illustrent le contenu de l'ouvrage en même temps qu'ils l'enrichissent. Ils ont été proposés en travaux dirigés ou comme textes de problèmes et certains sont inspirés des recherches de l'auteur ou reliés à des questions très actuelles.

Le lecteur se trouvera ainsi entraîné dans une captivante « promenade » vers l'univers fascinant des fonctions classiques : la fonction gamma d'Euler, la fonction zêta de Riemann, la fonction d'Airy, les sommes de séries de Dirichlet et leur prolongement, etc.

Table des matières

Chapitre 1. Le plan complexe et les formes différentielles dans le plan	1
1.1. Le plan complexe et ses compactifications	1
1.1.1. Deux structures sur \mathbb{R}^2	1
1.1.2. La sphère de Riemann et la projection stéréographique	3
1.1.3. La droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$	6
1.1.4. Exercices	7
1.2. Formes différentielles dans un ouvert du plan complexe	7
1.2.1. Champs de vecteurs et 1-formes différentielles dans le plan	7
1.2.2. Potentiel et 1-formes exactes	9
1.2.3. 2-formes différentielles dans un ouvert du plan	10
1.2.4. Image réciproque d'une forme différentielle	15
1.2.5. Exercices	16
1.3. Intégration des formes différentielles	19
1.3.1. Chemins paramétrés dans \mathbb{R}^2	19
1.3.2. Intégrale curviligne d'une 1-forme le long d'un chemin paramétré C^1 par morceaux	20
1.3.3. Exactitude des 1-formes et intégration curviligne	21
1.3.4. Intégration des 2-formes différentielles	26
1.3.5. La formule de Green-Riemann	28
1.3.6. La formule de Cauchy-Pompeiu	33
1.3.7. Exercices	34
1.4. Formes localement exactes et chemins continus	38
1.4.1. Primitive d'une 1-forme localement exacte le long d'un chemin continu	38
1.4.2. Homotopie entre chemins continus et groupes d'homotopie	44
1.4.3. Le théorème de Rouché, version topologique	50
1.4.4. Exercices	52
1.5. Une brève initiation aux notions d'homologie et de cohomologie	57
1.5.1. Groupes des k -chaines singulières différentiables d'un ouvert	57
1.5.2. Le morphisme bord et la notion de cycle	59
1.5.3. Homologie singulière différentiable et cohomologie d'un ouvert	61
1.5.4. Exercices	64
1.6. Corrigés des exercices du chapitre 1	65

Chapitre 2. Holomorphie et analyticité	87
2.1. Fonctions holomorphes : plusieurs points de vue	87
2.1.1. Différentiabilité au sens complexe	87
2.1.2. Le théorème de Cauchy-Goursat	88
2.1.3. L'opérateur de Cauchy-Riemann	90
2.1.4. Le théorème de Morera	92
2.1.5. Exercices	96
2.2. Formules de Cauchy et analyticité	103
2.2.1. Séries entières ; quelques rappels	103
2.2.2. Formules de représentation de Cauchy et analyse de Fourier	106
2.2.3. Développement de Taylor d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point	107
2.2.4. Principes des zéros isolés, du prolongement analytique, et de l'application ouverte	111
2.2.5. Exercices	114
2.3. Les inégalités de Cauchy et leurs conséquences	123
2.3.1. Inégalités de Cauchy et théorème de Liouville	123
2.3.2. Suites de fonctions holomorphes, théorèmes de Weierstraß et de Montel	124
2.3.3. Principes du maximum	128
2.3.4. Exercices	130
2.4. Corrigés des exercices du chapitre 2	142
Chapitre 3. Singularités isolées, méromorphie et théorèmes d'approximation	185
3.1. Singularités isolées des fonctions holomorphes	185
3.1.1. Singularités isolées et coupures	185
3.1.2. Développement de Laurent d'une fonction holomorphe dans une couronne ou au voisinage épointé d'un point	186
3.1.3. Résidu en une singularité isolée et version topologique de la formule des résidus	191
3.1.4. Exercices	195
3.2. Types de singularités isolées, méromorphie	199
3.2.1. Classification des singularités isolées	200
3.2.2. Méromorphie et calcul de résidu en un pôle	202
3.2.3. Méromorphie et variation de l'argument	206
3.2.4. La formule des résidus, version analytique	206
3.2.5. Le théorème de Rouché, version analytique	209
3.2.6. Exercices	211
3.3. Théorème de Weierstraß, approximation, et résolution du $\bar{\partial}$	228
3.3.1. Produits infinis et facteurs primaires de Weierstraß	229

3.3.2.	Le théorème de Weierstraß	232
3.3.3.	Les théorèmes d'approximation de Runge	235
3.3.4.	Résolution du $\bar{\partial}$	242
3.3.5.	Le théorème de Mittag-Leffler et l'interpolation	245
3.3.6.	Exercices	247
3.4.	Représentation conforme et théorème de Riemann	252
3.4.1.	Les notions de conformité et d'univalence	253
3.4.2.	Le théorème de représentation conforme dans \mathbb{C} ou \mathbb{S}^2	255
3.4.3.	Le cas des domaines de Jordan : la formule de l'aire et le théorème de Carathéodory	257
3.4.4.	Exercices	260
3.5.	Corrigés des exercices du chapitre 3	269
Chapitre 4.	Harmonicité, sous-harmonicité, positivité	331
4.1.	Sous-harmonicité et harmonicité	331
4.1.1.	Définitions des deux notions, exemples	332
4.1.2.	Sous-harmonicité, positivité et opérateur de Monge-Ampère complexe	335
4.1.3.	Principes du maximum pour les fonctions sous-harmoniques	342
4.1.4.	Exercices	343
4.2.	Autour du problème de Dirichlet	345
4.2.1.	Le théorème de Dirichlet pour un disque	346
4.2.2.	La régularité des fonctions harmoniques réelles	348
4.2.3.	La formule intégrale de Poisson dans un disque	350
4.2.4.	La relation entre harmonicité réelle et holomorphicité	350
4.2.5.	Mesure harmonique, fonction de Green et problème de Dirichlet	351
4.2.6.	Analyse de Fourier et formule de Poisson du disque $D(0, 1)$	356
4.2.7.	Exercices	359
4.3.	Formules de Jensen et Poisson-Jensen	364
4.4.	Corrigés des exercices du chapitre 4	372
Bibliographie		389
Index		391