

Driss Boularas

Fondements des équations différentielles ordinaires

Analyse qualitative
et quantitative
des solutions



La côte de l'ouvrage : 2--515-354

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction, vocabulaire de base | 5 |
| 1.1 | Un peu d'histoire (avant 1900) | 5 |
| 1.2 | Les systèmes différentiels : vocabulaire de base | 12 |
| 1.2.1 | Premières définitions et exemples | 12 |
| 1.2.2 | Écriture normalisée, champs de vecteurs | 17 |
| 1.2.3 | Deux familles remarquables de systèmes différentiels | 19 |
| 1.2.4 | Espace des phases et espace des phases élargi | 20 |
| 1.3 | Intégrales premières | 25 |
| 1.3.1 | Deux exemples introductifs | 25 |
| 1.3.2 | Définition générale d'une intégrale première | 26 |
| 1.4 | Modèles simples entièrement étudiés | 29 |
| 1.5 | Un point d'histoire | 32 |
| 1.6 | Exercices | 34 |
| 2 | Théorèmes fondamentaux | 39 |
| 2.1 | Théorème d'existence de Peano | 40 |
| 2.2 | Théorème de Cauchy-Lipschitz | 45 |
| 2.3 | Solutions maximales, solutions globales | 49 |
| 2.4 | Cas des systèmes différentiels autonomes | 56 |
| 2.4.1 | Les systèmes dynamiques | 56 |
| 2.4.2 | Pourquoi les systèmes différentiels autonomes sont-ils des systèmes dynamiques ? | 57 |
| 2.5 | Un point d'histoire | 63 |
| 2.6 | Exercices | 64 |
| 3 | Systèmes différentiels linéaires | 71 |
| 3.1 | Propriétés générales | 72 |
| 3.2 | Matrice fondamentale, résolvante, wronskien | 74 |
| 3.2.1 | Matrice fondamentale | 74 |
| 3.2.2 | Résolvante | 75 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.2.3 | Expression de la solution générale d'un système linéaire non homogène | 77 |
| 3.2.4 | Le wronskien | 78 |
| 3.2.5 | Réduction d'ordre des systèmes différentiels linéaires | 80 |
| 3.3 | Résolution des systèmes linéaires constants | 83 |
| 3.3.1 | Forme de Jordan d'une matrice | 84 |
| 3.3.2 | Fonctions analytiques de matrices | 86 |
| 3.3.3 | Matrice fondamentale des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants | 90 |
| 3.4 | Portraits de phases des systèmes 2×2 | 93 |
| 3.4.1 | La valeur propre est double | 94 |
| 3.4.2 | Les valeurs propres sont réelles et distinctes | 95 |
| 3.4.3 | Les valeurs propres sont complexes conjuguées | 96 |
| 3.5 | Un point d'histoire | 99 |
| 3.6 | Exercices | 100 |
| 4 | Intégrales premières et courbes invariantes | 105 |
| 4.1 | Premières définitions et exemples | 106 |
| 4.1.1 | Dérivée suivant un système différentiel, crochet de Lie | 106 |
| 4.1.2 | Intégrales premières | 109 |
| 4.2 | Existence d'intégrales premières locales | 110 |
| 4.2.1 | Dépendance fonctionnelle | 110 |
| 4.2.2 | Théorème d'existence d'intégrales premières locales | 111 |
| 4.3 | Réduction de l'ordre des systèmes différentiels | 113 |
| 4.4 | Méthode du facteur intégrant | 114 |
| 4.4.1 | Motivation et définition | 115 |
| 4.4.2 | Langage des formes différentielles | 117 |
| 4.5 | Intégrales particulières | 120 |
| 4.5.1 | Définitions, premières propriétés | 120 |
| 4.6 | Systèmes hamiltoniens | 123 |
| 4.6.1 | Les formalismes newtonien et lagrangien | 123 |
| 4.6.2 | Le formalisme hamiltonien | 126 |
| 4.6.3 | Intégrabilité complète des systèmes hamiltoniens | 130 |
| 4.7 | Un point d'histoire | 134 |
| 4.8 | Exercices | 136 |
| 5 | Dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales et aux paramètres | 141 |
| 5.1 | Dépendance continue par rapport aux conditions initiales et aux paramètres | 142 |
| 5.1.1 | Deux exemples introductifs | 142 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.1.2 | Théorème de dépendance continue par rapport aux conditions initiales et aux paramètres | 143 |
| 5.2 | Différentiabilité des solutions par rapport aux conditions initiales et aux paramètres | 150 |
| 5.2.1 | Équations aux variations | 150 |
| 5.2.2 | Théorème de Liouville et exemples | 157 |
| 5.3 | Un point d'histoire | 159 |
| 5.4 | Exercices | 161 |
| 6 | Stabilité au sens de Lyapounov | 167 |
| 6.1 | Exemple introductif | 167 |
| 6.2 | Stabilité dans les systèmes autonomes | 168 |
| 6.3 | Stabilité dans les systèmes non autonomes | 172 |
| 6.4 | Stabilité des systèmes linéaires | 174 |
| 6.4.1 | Caractérisations des stabilités dans le cas linéaire | 174 |
| 6.4.2 | Stabilité des systèmes linéaires homogènes constants | 177 |
| 6.4.3 | Critère de Routh-Hurwitz | 178 |
| 6.5 | Méthode directe de Lyapounov | 186 |
| 6.5.1 | Cas des systèmes autonomes | 186 |
| 6.5.2 | Cas des systèmes non autonomes | 189 |
| 6.5.3 | Lemme de Morse | 192 |
| 6.5.4 | Deux exemples traités par la méthode directe | 195 |
| 6.6 | Théorème de la première approximation | 197 |
| 6.7 | Un point d'histoire | 199 |
| 6.8 | Exercices | 201 |
| 7 | Introduction aux systèmes dynamiques | 205 |
| 7.1 | Définitions, exemples | 206 |
| 7.2 | Les ensembles limites | 212 |
| 7.3 | Stabilités au sens de Lyapounov et de Poisson | 216 |
| 7.3.1 | Stabilité au sens de Poisson | 217 |
| 7.3.2 | Stabilité au sens de Lyapounov | 222 |
| 7.4 | Systèmes dynamiques discrets | 222 |
| 7.5 | Un point d'histoire | 225 |
| 7.6 | Exercices | 227 |
| 8 | Systèmes différentiels plans | 231 |
| 8.1 | Introduction | 231 |
| 8.2 | Définitions et premières propriétés | 232 |
| 8.2.1 | Points singuliers élémentaires et multiples | 232 |
| 8.2.2 | Directions critiques | 233 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 8.2.3 | Courbes de Jordan et indice de champs de vecteurs . . . | 236 |
| 8.2.4 | Cycles, cycles limites | 244 |
| 8.3 | Théorème de Poincaré-Bendixson | 246 |
| 8.3.1 | Arcs sans contact | 246 |
| 8.3.2 | Théorèmes de Poincaré-Bendixson | 254 |
| 8.4 | Étude des points singuliers élémentaires | 257 |
| 8.4.1 | Théorème de Hartman-Grobman | 257 |
| 8.4.2 | Retour sur les points singuliers élémentaires | 260 |
| 8.5 | Retour sur les points singuliers multiples | 263 |
| 8.5.1 | Secteurs hyperboliques, paraboliques et elliptiques . . . | 263 |
| 8.6 | Comportement des trajectoires à l'infini | 265 |
| 8.7 | Un point d'histoire | 268 |
| 8.8 | Exercices | 270 |
| 9 | Annexes | 275 |
| 9.1 | Annexe 1 : résolution des équations différentielles | 275 |
| 9.1.1 | Différentes classes d'équations différentielles scalaires | 275 |
| 9.1.2 | Équations différentielles linéaires du premier ordre . . | 278 |
| 9.1.3 | Équations différentielles linéaires d'ordre 2 | 279 |
| 9.1.4 | Résolution à l'aide des séries entières | 282 |
| 9.2 | Annexe 2 : méthodes numériques | 285 |
| 9.2.1 | Méthodes d'Euler et du point milieu | 285 |
| 9.2.2 | Consistance, convergence et stabilité des méthodes . . | 289 |
| 9.2.3 | Méthode de Runge-Kutta | 295 |
| | Bibliographie | 301 |
| | Index | 303 |