

Driss Boularas

Fondements des équations différentielles ordinaires

Analyse qualitative
et quantitative
des solutions



ellipses

Table des matières

1	Introduction, vocabulaire de base	5
1.1	Un peu d'histoire (avant 1900)	5
1.2	Les systèmes différentiels : vocabulaire de base	12
1.2.1	Premières définitions et exemples	12
1.2.2	Écriture normalisée, champs de vecteurs	17
1.2.3	Deux familles remarquables de systèmes différentiels	19
1.2.4	Espace des phases et espace des phases élargi	20
1.3	Intégrales premières	25
1.3.1	Deux exemples introductifs	25
1.3.2	Définition générale d'une intégrale première	26
1.4	Modèles simples entièrement étudiés	29
1.5	Un point d'histoire	32
1.6	Exercices	34
2	Théorèmes fondamentaux	39
2.1	Théorème d'existence de Peano	40
2.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz	45
2.3	Solutions maximales, solutions globales	49
2.4	Cas des systèmes différentiels autonomes	56
2.4.1	Les systèmes dynamiques	56
2.4.2	Pourquoi les systèmes différentiels autonomes sont-ils des systèmes dynamiques ?	57
2.5	Un point d'histoire	63
2.6	Exercices	64
3	Systèmes différentiels linéaires	71
3.1	Propriétés générales	72
3.2	Matrice fondamentale, résolvante, wronskien	74
3.2.1	Matrice fondamentale	74
3.2.2	Résolvante	75

3.2.3	Expression de la solution générale d'un système linéaire non homogène	77
3.2.4	Le wronskien	78
3.2.5	Réduction d'ordre des systèmes différentiels linéaires	80
3.3	Résolution des systèmes linéaires constants	83
3.3.1	Forme de Jordan d'une matrice	84
3.3.2	Fonctions analytiques de matrices	86
3.3.3	Matrice fondamentale des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	90
3.4	Portraits de phases des systèmes 2×2	93
3.4.1	La valeur propre est double	94
3.4.2	Les valeurs propres sont réelles et distinctes	95
3.4.3	Les valeurs propres sont complexes conjuguées	96
3.5	Un point d'histoire	99
3.6	Exercices	100
4	Intégrales premières et courbes invariantes	105
4.1	Premières définitions et exemples	106
4.1.1	Dérivée suivant un système différentiel, crochet de Lie	106
4.1.2	Intégrales premières	109
4.2	Existence d'intégrales premières locales	110
4.2.1	Dépendance fonctionnelle	110
4.2.2	Théorème d'existence d'intégrales premières locales	111
4.3	Réduction de l'ordre des systèmes différentiels	113
4.4	Méthode du facteur intégrant	114
4.4.1	Motivation et définition	115
4.4.2	Langage des formes différentielles	117
4.5	Intégrales particulières	120
4.5.1	Définitions, premières propriétés	120
4.6	Systèmes hamiltoniens	123
4.6.1	Les formalismes newtonien et lagrangien	123
4.6.2	Le formalisme hamiltonien	126
4.6.3	Intégrabilité complète des systèmes hamiltoniens	130
4.7	Un point d'histoire	134
4.8	Exercices	136
5	Dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales et aux paramètres	141
5.1	Dépendance continue par rapport aux conditions initiales et aux paramètres	142
5.1.1	Deux exemples introductifs	142

5.1.2	Théorème de dépendance continue par rapport aux conditions initiales et aux paramètres	143
5.2	Différentiabilité des solutions par rapport aux conditions initiales et aux paramètres	150
5.2.1	Équations aux variations	150
5.2.2	Théorème de Liouville et exemples	157
5.3	Un point d'histoire	159
5.4	Exercices	161
6	Stabilité au sens de Lyapounov	167
6.1	Exemple introductif	167
6.2	Stabilité dans les systèmes autonomes	168
6.3	Stabilité dans les systèmes non autonomes	172
6.4	Stabilité des systèmes linéaires	174
6.4.1	Caractérisations des stabilités dans le cas linéaire	174
6.4.2	Stabilité des systèmes linéaires homogènes constants	177
6.4.3	Critère de Routh-Hurwitz	178
6.5	Méthode directe de Lyapounov	186
6.5.1	Cas des systèmes autonomes	186
6.5.2	Cas des systèmes non autonomes	189
6.5.3	Lemme de Morse	192
6.5.4	Deux exemples traités par la méthode directe	195
6.6	Théorème de la première approximation	197
6.7	Un point d'histoire	199
6.8	Exercices	201
7	Introduction aux systèmes dynamiques	205
7.1	Définitions, exemples	206
7.2	Les ensembles limites	212
7.3	Stabilités au sens de Lyapounov et de Poisson	216
7.3.1	Stabilité au sens de Poisson	217
7.3.2	Stabilité au sens de Lyapounov	222
7.4	Systèmes dynamiques discrets	222
7.5	Un point d'histoire	225
7.6	Exercices	227
8	Systèmes différentiels plans	231
8.1	Introduction	231
8.2	Définitions et premières propriétés	232
8.2.1	Points singuliers élémentaires et multiples	232
8.2.2	Directions critiques	233

8.2.3	Courbes de Jordan et indice de champs de vecteurs . . .	236
8.2.4	Cycles, cycles limites	244
8.3	Théorème de Poincaré-Bendixson	246
8.3.1	Arcs sans contact	246
8.3.2	Théorèmes de Poincaré-Bendixson	254
8.4	Étude des points singuliers élémentaires	257
8.4.1	Théorème de Hartman-Grobman	257
8.4.2	Retour sur les points singuliers élémentaires	260
8.5	Retour sur les points singuliers multiples	263
8.5.1	Secteurs hyperboliques, paraboliques et elliptiques . . .	263
8.6	Comportement des trajectoires à l'infini	265
8.7	Un point d'histoire	268
8.8	Exercices	270
9	Annexes	275
9.1	Annexe 1 : résolution des équations différentielles	275
9.1.1	Différentes classes d'équations différentielles scalaires	275
9.1.2	Équations différentielles linéaires du premier ordre . . .	278
9.1.3	Équations différentielles linéaires d'ordre 2	279
9.1.4	Résolution à l'aide des séries entières	282
9.2	Annexe 2 : méthodes numériques	285
9.2.1	Méthodes d'Euler et du point milieu	285
9.2.2	Consistance, convergence et stabilité des méthodes . . .	289
9.2.3	Méthode de Runge-Kutta	295
	Bibliographie	301
	Index	303