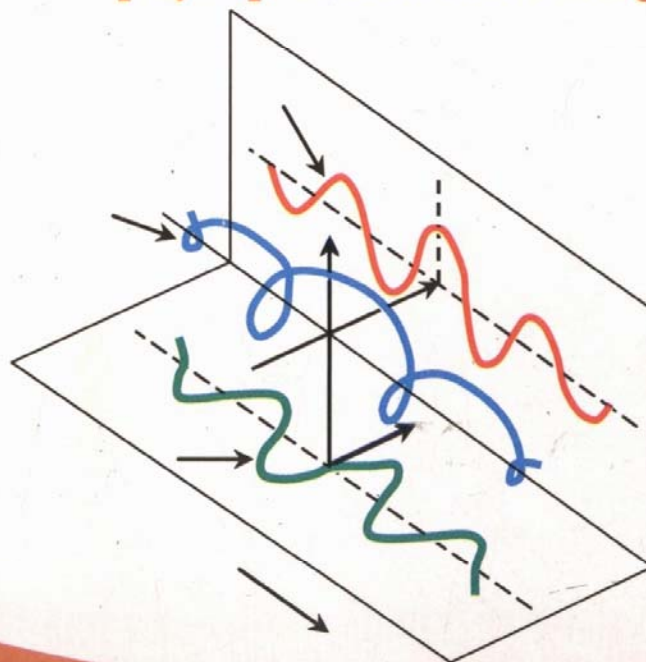


K. BADDARI

A. ABBASSOV

# Théorie et pratique des fonctions d'une variable complexe

Application à la physique de la terre au génie pétrolier



# Table des matières

<b>Avant propos</b> .....	3
---------------------------	---

## Chapitre I :

### Nombres complexes

I.1 Ensemble des nombres complexes .....	7
I.2 Opérations fondamentales sur les nombres complexes .....	7
I.3 Représentation graphique des nombres complexes .....	8
I.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe .....	10
I.5 Projection stéréographique .....	11
I.6 Ensemble de points d'un plan complexe .....	13
I.7 Limite d'une suite de nombres complexes .....	15

## Chapitre II

### Fonction d'une variable complexe

II.1 Définition d'une fonction d'une variable complexe.....	19
II.2 Limite d'une fonction d'une variable complexe .....	20
II.3 Continuité d'une fonction d'une variable complexe .....	21

## Chapitre III

### Dérivée

III.1 Condition de d'Alembert- Euler .....	25
III.1.1 Définition d'une dérivée .....	25

III.1.2	Condition de d'Alembert –Euler.....	25
III.1.3	Propriété d'une dérivée.....	28
III.1.4	Différentielle.....	28
III.2	Sens géométrique du module et de l'argument d'une dérivée d'une fonction. Transformation conforme.....	29
III.2.1	Cas d'une fonction complexe d'une variable réelle.....	29
III.2.2	Cas d'une fonction d'une variable complexe.....	30
III.3	Sens géométrique du module de la dérivée.....	32
III.4	Transformation conforme.....	32

## Chapitre IV

### Fonctions élémentaires et transformations conformes

IV.1	Fonctions homographiques. Conformité.....	37
IV.2	Fonction puissance $w = z^n$ .....	42
IV.3	Fonction $w = \sqrt[n]{z}$ .....	43
IV.4	Fonction de Joukovsky $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ .....	44
IV.5	Fonction exponentielle $w = e^z$ .....	46
IV.6	Logarithme.....	49
IV.7	Fonctions trigonométrique et hyperbolique.....	50
IV.8	Fonctions trigonométriques inverses.....	51
IV.9	Fonctions hyperboliques inverses.....	51
IV.10	Fonction $z^\alpha$ .....	52
IV.11	Fonctions algébriques et transcendantes.....	52

## Chapitre V

### Lien entre fonction harmonique et fonction analytique

V.1 Etablissement d'une fonction analytique par sa partie réelle (imaginaire) .....	55
V.2 Relation entre le problème plan de la théorie de filtration et la théorie des fonctions analytiques .....	57
V.3 Application de la transformation conforme dans quelques problèmes de filtration .....	64

## Chapitre VI

### Intégration des fonctions d'une variable complexe

VI.1 Définition de l'intégrale d'une fonction d'une variable complexe .....	69
VI.1.1 Définition de l'intégrale .....	69
VI.1.2 Propriété des intégrales d'une fonction d'une variable complexe .....	71
VI.2 Théorème de Cauchy .....	73
VI.3 Intégrale indéterminée .....	76
VI.4 Formule intégrale de Cauchy et son application .....	79
VI.5 Différentiabilité illimitée d'une fonction .....	82
VI.6 Théorème de Liouville .....	84

## Chapitre VII :

### Représentation des fonctions analytiques par des séries

VII.1 Séries fonctionnelles .....	89
-----------------------------------	----

VII.2	Séries entières. Disque de convergence.....	92
VII.3	Zéros d'une fonction analytique. Théorème d'unicité .....	97
VII.4	Série de Laurent.....	98
VII.5	Points singuliers isolés d'une fonction analytique .....	103
VII.6	Comportement d'une fonction analytique à l'infini .....	110
VII.7	Prolongement analytique .....	111
VII.8	Prolongement analytique d'une fonction analytique réelle d'une variable réelle .....	113
VII.9	Application à l'hydrodynamique .....	113
VII.9.1	Flux de fluide irrotationnel libre.....	113
VII.9.2	Fonction caractéristique d'un flux .....	116
VII.9.3	Mouvement d'un cylindre dû à un flux sans circulation	117
VII.9.4	Flux circulaire.....	121
VII.9.5	Cas général .....	122

## Chapitre VIII

### Théorie des résidus

VIII.1	Résidu d'une fonction analytique à un point singulier isolé	127
VIII.1.1	Définition du résidu à un point singulier isolé (fini).....	127
VIII.2	Formules de calcul du résidu à un point singulier fini ....	128
VIII.3	Calcul du résidu à un point infiniment éloigné .....	129
VIII.4	Théorème principal des résidus.....	130
VIII.5	Théorème de la somme des résidus.....	132

## Chapitre IX

### Application de la théorie des résidus au calcul des intégrales définies

IX.1	Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ .....	136
------	--	-----

IX.2	Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$ .....	137
IX.3	Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} G(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ .....	143
IX.4	Cas de fonctions multiformes .....	145

## Chapitre X

### Séries trigonométriques de Fourier. Intégrales de Fourier

X.1	Forme complexe de la série de Fourier .....	153
X.2	Intégrale de Fourier .....	154
X.2.1	Définition .....	154
X.3	Caractéristiques spectrales de la série de Fourier .....	160
X.4	Propriété de la transformation discrète de Fourier .....	167
X.4.1	Convolution de la transformée de Fourier .....	167
X.4.2	Passage du spectre continu au spectre discret .....	169
X.4.3	Critère de différence entre le spectre continu et le spectre discret .....	171
X.4.4	Forme matricielle d'une transformation de Fourier discrète .....	172

## Chapitre XI

### Calcul symbolique

XI.1	Original et image .....	177
XI.2	Propriétés de la transformation de Laplace .....	179
XI.3	Image de la fonction de Dirac .....	189
XI.4	Théorème d'inversement .....	191

XI.5	Théorème de développement .....	198
XI.6	Application des méthodes de la recherche symbolique aux problèmes de la mécanique d'exploitation pétrolière .....	201

## Chapitre XII :

### Quelques applications en physique de la terre

XII.1	Equations de la théorie linéaire de l'élasticité .....	245
XII.2	Fonctions des contraintes et réduction des problèmes principaux aux limites de la théorie d'élasticité à des problèmes aux limites pour les fonctions analytiques d'une variable complexe .....	249
XII.3	Premier problème principal de la théorie d'élasticité pour un cercle .....	253
XII.4	Deuxième problème principal de la théorie d'élasticité pour un cercle .....	254
XII.5	Transformations de Fourier appliquées aux données gravitationnelles et magnétiques .....	256
XII.5.1	Théorèmes sur les spectres .....	258
XII.5.1.1	Théorème d'addition .....	258
XII.5.1.2	Théorème du retard .....	259
XII.5.1.3	Spectre de la dérivée .....	259
XII.5.1.4	Théorème sur le spectre de la dérivée par rapport à un paramètre .....	260
XII.5.1.5	Théorème des énergies (égalité de Parseval) .....	261
XII.5.1.6	Théorème sur l'intégrale d'une convolution .....	261
XII.5.1.7	Démonstration du théorème de convolution pour deux Variables .....	263
XII.5.2	Représentations fréquentielles des dérivées des potentiels gravitationnel et magnétique .....	264

XII.6	Forme complexe de la série de Fourier appliquée en sismique	268
XII.6.1	Notion sur le spectre complexe discret.....	268
XII.6.2	Détermination des coefficients de la série de Fourier ....	271
XII.6.3	Impulsions de signaux. Spectres continus.....	273
XII.6.4	Relation entre le spectre de phase-amplitude et le spectre de phase-fréquence d'un signal sismique .....	276
XII.6.4.1	Relation entre les parties réelle et imaginaire d'un signal complexe. Notion sur la transformée de Hilbert...	276
XII.6.4.2	Notions sur le signal analytique .....	280
XII.6.4.3	Relation entre le module et la phase d'un spectre de fréquence et le signal analytique.....	282
XII.7	Analyse spectrale en sismique.....	285
XII.7.1	Discussion sur l'analyse spectrale en sismique .....	286
XII.7.2	Corrélation .....	291
XII.7.3	Relation entre l'auto-corrélation et le spectre de puissance.	296
XII.7.4	Détermination des paramètres spectraux.....	297
XII.8	Analyses cepstrales dans l'exploration sismique .....	302
XII.8.1	Aperçu sur l'analyse cepstrale.....	302
XII.9	Dérivation des paramètres sismiques en utilisant les analyses des traces complexes .....	306
XII.10	Solution de l'équation de Laplace. Séparation des variables en coordonnées cartésiennes .....	317
XII.11	Problème de Dirichlet pour un demi espace $z > 0$ .....	318
XII.12	Séparation de variables en coordonnées cylindriques.....	319
XII.13	Prolongement vers le bas.....	321
XII.14	Prolongement des fonctions harmoniques.....	323
XII.14.1	Calcul des coefficients de prolongement.....	323



XII.15	Calcul des composantes du champ magnétique .....	327
XII.16	Types de champs cylindriques, leurs développements et asymptotes.....	330
XII.17	Transformation intégrales et théorie de composition des fonctions cylindriques .....	336
	<b>Bibliographie</b> .....	341
	<b>Table des matières</b> .....	343