



MARC BRIANE • GILLES PAGÈS

# Analyse Théorie de l'intégration

7<sup>e</sup>  
édition

Convolution et transformée de Fourier

LICENCE 3 ET MASTER 1  
ÉCOLES D'INGÉNIEURS

- Cours complet
- 230 exercices avec solutions
- QCM et problèmes d'examen

deboeck **B**  
SUPÉRIEUR

# Sommaire

<b>Table des matières</b>	<b>3</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>11</b>
<b>Notations</b>	<b>14</b>
<b>I Rappels et préliminaires</b>	<b>17</b>
1 Intégrale au sens de Riemann	19
2 Éléments de théorie des cardinaux	33
3 Quelques compléments de topologie	41
<b>II Théorie de la mesure</b>	<b>51</b>
De Riemann vers Lebesgue	53
Sur une généralisation de l'intégrale définie (par H. Lebesgue)	54
4 Tribu de parties d'un ensemble	57
5 Fonctions mesurables	65
6 Mesure positive sur un espace mesurable	75
<b>III Intégrale de Lebesgue</b>	<b>113</b>
7 Intégrale par rapport à une mesure positive	115
8 Théorèmes de convergence et applications	133

<b>9</b>	<b>Espaces <math>L^p</math></b>	<b>157</b>
<b>10</b>	<b>Théorèmes de représentation et applications</b>	<b>195</b>
<b>11</b>	<b>Mesure produit. Théorèmes de Fubini</b>	<b>227</b>
<b>12</b>	<b>Mesure image. Changement de variables</b>	<b>251</b>
<b>13</b>	<b>Mesure complétée, tribu de Lebesgue, ensemble de Cantor</b>	<b>275</b>
<b>IV</b>	<b>Convolution et transformée de Fourier</b>	<b>289</b>
<b>14</b>	<b>Convolution et applications</b>	<b>291</b>
<b>15</b>	<b>Transformée de Fourier</b>	<b>315</b>
<b>V</b>	<b>En guise de conclusion : problèmes, QCM et solutions succinctes des exercices et QCM</b>	<b>339</b>
<b>16</b>	<b>Questionnaires à choix multiples</b>	<b>341</b>
<b>17</b>	<b>Quelques problèmes</b>	<b>349</b>
<b>18</b>	<b>Vers la solution des exercices</b>	<b>365</b>
<b>19</b>	<b>Réponses aux QCM</b>	<b>389</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>393</b>
	<b>Index</b>	<b>395</b>

# Table des matières

II	Théorie de la mesure	11
III	Intégrale de Lebesgue	14
1	<b>Rappels et préliminaires</b>	<b>17</b>
1	<b>Intégrale au sens de Riemann</b>	<b>19</b>
1.1	Intégrale des fonctions en escalier	19
1.2	Fonctions intégrables au sens de Riemann	20
1.3	Fonctions réglées	22
1.4	Intégrale de Riemann et calcul de primitive	24
1.5	Changement de variable et intégration par parties	25
1.6	Formules de la moyenne	25
1.7	Sommes de Riemann	26
1.8	L'espace semi-normé $\mathcal{S}([a, b], \mathbb{K})$	27
1.9	Intégrales dépendant d'un paramètre	28
1.10	Exercices	30
2	<b>Éléments de théorie des cardinaux</b>	<b>33</b>
2.1	Cardinaux	33
2.2	Ensembles dénombrables	35
2.3	Exercices	39
3	<b>Quelques compléments de topologie</b>	<b>41</b>
3.1	La droite achevée	41
3.2	Limite supérieure et limite inférieure	43

3.3	Topologie sur un ensemble. Espace métrique . . . . .	45
3.4	Base dénombrable d'ouverts, séparabilité . . . . .	46
3.5	Exemples de constructions de topologies . . . . .	47
3.5.1	Topologie induite . . . . .	47
3.5.2	Topologie produit . . . . .	47
3.6	Distance d'un point à un ensemble . . . . .	48
3.7	Exercices . . . . .	49
<b>II Théorie de la mesure</b>		<b>51</b>
	De Riemann vers Lebesgue . . . . .	53
	Sur une généralisation de l'intégrale définie (par H. Lebesgue) . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Tribu de parties d'un ensemble</b>	<b>57</b>
4.1	Tribu, tribu borélienne . . . . .	59
4.2	Autres exemples de tribus . . . . .	62
4.2.1	Tribu image-réciproque . . . . .	62
4.2.2	Tribu image . . . . .	62
4.3	Lemme de transport . . . . .	62
4.4	Exercices . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Fonctions mesurables</b>	<b>65</b>
5.1	Définitions . . . . .	65
5.2	Opérations sur les fonctions mesurables . . . . .	68
5.3	Fonctions étagées sur un espace mesurable . . . . .	70
5.4	Exercices . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Mesure positive sur un espace mesurable</b>	<b>75</b>
6.1	Définition et exemples . . . . .	75
6.1.1	Propriétés essentielles . . . . .	77
6.1.2	Application à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ . . . . .	79
6.2	Caractérisation d'une mesure. Unicité . . . . .	80
6.2.1	Un théorème de classe monotone . . . . .	80
6.2.2	Application à la caractérisation d'une mesure . . . . .	81
6.3	Construction de mesures par prolongement (I) . . . . .	83
6.3.1	Théorème de prolongement de Carathéodory . . . . .	83
6.3.2	Principes de construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ . . . . .	84
6.4	Régularité de la mesure de Lebesgue . . . . .	85
6.5	♣ Construction de mesures par prolongement (II) . . . . .	86
6.5.1	Démonstration du théorème de Carathéodory . . . . .	86
6.5.2	Construction de mesures sur $\mathbb{R}$ : Lebesgue, Stieltjes . . . . .	92
6.6	♣ Régularité d'une mesure sur un espace métrique . . . . .	99

6.6.1	Le cas d'une mesure finie	100
6.6.2	Le cas d'une mesure $\sigma$ -finie	101
6.6.3	Régularité des mesures de Borel	103
6.6.4	Régularité des mesures finies sur un espace polonais	105
6.6.5	Application à la caractérisation des mesures	106
6.7	Exercices	106
<b>III</b>	<b>Intégrale de Lebesgue</b>	<b>113</b>
<b>7</b>	<b>Intégrale par rapport à une mesure positive</b>	<b>115</b>
7.1	Intégrale d'une fonction étagée positive	115
7.2	Intégrale d'une fonction mesurable positive	119
7.3	L'espace $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^1(\mu)$ des fonctions intégrables	124
7.4	Intégrales de Riemann et de Lebesgue sur un intervalle compact	127
7.5	Exercices	130
<b>8</b>	<b>Théorèmes de convergence et applications</b>	<b>133</b>
8.1	Lemme de Fatou et théorème de convergence dominée	133
8.2	Application aux séries de fonctions	139
8.3	Intégrales dépendant d'un paramètre	140
8.4	Mesures à densité : première approche	147
8.5	Exercices	148
<b>9</b>	<b>Espaces <math>L^p</math></b>	<b>157</b>
9.1	Espaces $L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ : définition et premières propriétés	157
9.2	Inégalités de Hölder et de Minkowski	158
9.3	Les espaces de Banach $L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ , $1 \leq p < +\infty$	164
9.3.1	Préliminaires sur les espaces semi-normés	164
9.3.2	Construction et propriétés	165
9.4	Théorèmes de densité dans les $L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ , $1 \leq p < +\infty$ , (I)	170
9.5	L'espace $L_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mu)$ ( $\mu \neq 0$ )	175
9.6	Propriétés hilbertiennes de $L_{\mathbb{K}}^2(\mu)$	180
9.6.1	L'espace de Hilbert $L_{\mathbb{K}}^2(\mu)$	180
9.6.2	Théorème de projection	181
9.6.3	Représentation d'une forme linéaire continue	182
9.7	♣ Théorèmes de densité dans les $L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ , $p < +\infty$ , (II)	183
9.7.1	Densité des fonctions lipschitziennes dans $L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$	183
9.7.2	Densité des fonctions lipschitziennes à support compact	185
9.7.3	Théorème de Lusin	186
9.8	Exercices	189

<b>10</b>	<b>Théorèmes de représentation et applications</b>	<b>195</b>
10.1	♣ Théorème de représentation de Riesz . . . . .	195
10.1.1	Cas des formes linéaires positives . . . . .	195
10.1.2	Mesures de Radon . . . . .	203
10.2	Théorème de Radon-Nikodym . . . . .	208
10.2.1	Le cas d'une mesure de référence $\mu$ finie . . . . .	209
10.2.2	Extension au cadre $\sigma$ -fini . . . . .	211
10.3	Dualité $L^p$ - $L^q$ . . . . .	212*
10.3.1	Formes linéaires réelles positives . . . . .	212
10.3.2	Formes linéaires réelles ou complexes . . . . .	214
10.4	Interpolation sur les espaces $L^p$ . . . . .	215
10.5	Exercices . . . . .	220
<b>11</b>	<b>Mesure produit, théorèmes de Fubini</b>	<b>227</b>
11.1	Tribu produit . . . . .	227
11.1.1	Définition, premières propriétés . . . . .	227
11.1.2	Le cas des tribus boréliennes . . . . .	229
11.1.3	Section d'un élément de la tribu produit . . . . .	231
11.2	Mesure produit de mesures $\sigma$ -finies . . . . .	231
11.2.1	Construction et caractérisation . . . . .	231
11.2.2	Construction de la mesure de Lebesgue $\lambda_d, d \geq 2$ . . . . .	234
11.3	Théorèmes de Fubini . . . . .	235
11.4	♣ Produit infini de mesures de probabilité . . . . .	241
11.5	Exercices . . . . .	243
<b>12</b>	<b>Mesure image, changement de variables</b>	<b>251</b>
12.1	Mesure image . . . . .	251
12.2	Théorème général de changement de variables . . . . .	254
12.3	♣ Application : le degré topologique de Brouwer . . . . .	266
12.4	Exercices . . . . .	271
<b>13</b>	<b>Mesure complétée, tribu de Lebesgue, ensemble de Cantor</b>	<b>275</b>
13.1	Complétion d'une mesure . . . . .	275
13.2	Tribu de Lebesgue . . . . .	278
13.3	Ensemble de Cantor, fonction de Lebesgue, applications . . . . .	280
13.4	♣ Produit de mesures complètes. Complétion d'un produit . . . . .	285
13.5	♣ Complétion et fonctions mesurables . . . . .	286
<b>IV</b>	<b>Convolution et transformée de Fourier</b>	<b>289</b>
<b>14</b>	<b>Convolution et applications</b>	<b>291</b>
14.1	Opérateurs de translation sur les fonctions . . . . .	291

14.2	Convolution sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	293
14.2.1	Le cas positif . . . . .	293
14.2.2	Cadre général . . . . .	295
14.3	Conditions d'existence et propriétés . . . . .	297
14.4	Approximation de l'unité . . . . .	302
14.5	Régularisation par convolution . . . . .	306
14.6	Autres convolutions . . . . .	309
14.6.1	... de fonctions . . . . .	309
14.6.2	Convolution de mesures positives $\sigma$ -finies . . . . .	310
14.7	Exercices . . . . .	311
<b>15</b>	<b>Transformée de Fourier</b> . . . . .	<b>315</b>
15.1	Définition et premières propriétés . . . . .	316
15.2	Injectivité et formule d'inversion . . . . .	323
15.3	Transformée de Fourier-Plancherel . . . . .	331
15.4	Exercices . . . . .	333
<b>V</b>	<b>En guise de conclusion : problèmes, QCM et solutions succinctes des exercices et QCM</b> . . . . .	<b>339</b>
<b>16</b>	<b>Questionnaires à choix multiples</b> . . . . .	<b>341</b>
16.1	QCM 1 . . . . .	342
16.2	QCM 2 . . . . .	343
16.3	QCM 3 . . . . .	344
16.4	QCM 4 . . . . .	345
16.5	QCM 5 . . . . .	346
16.6	QCM 6 . . . . .	347
<b>17</b>	<b>Quelques problèmes</b> . . . . .	<b>349</b>
17.1	Problème 1 . . . . .	349
17.2	Problème 2 . . . . .	350
17.3	Problème 3 . . . . .	351
17.4	Problème 4 . . . . .	352
17.5	Problème 5 . . . . .	354
17.6	Problème 6 . . . . .	355
17.7	Problème 7 . . . . .	357
17.8	Problème 8 . . . . .	359
17.9	Problème 9 . . . . .	361
17.10	Problème 10 . . . . .	362
17.11	Problème 11 . . . . .	363

