

REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA
INSTITUT D'AERONAUTIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION
D'UN DIPLOME D'ETUDE UNIVERSITAIRE APPLIQUE
EN AERONAUTIQUE

OPTION: STRUCTURE

THÈME

**DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES
AERODYNAMIQUES DES AILES DELTA**

Présente par:
MELL TAHLAITI FOUZIA

Propose par: M_r.A.CHEGRANI

ANNEE UNIVERSITAIRE 2000/2001

SOMMAIRE

INTRODUCTION

CHAPITRE I : GENERALITES

I.1- CARACTERISTIQUES DES PROFILS	5
I.2- CARACTERIQUES GEOMETRIQUES	5
I.3- ORIENTATION DES PROFILS	7
I.4- CARACTERISTIQUES DE FORME DES PROFILS	7
I.5- DESIGNATION D'UN PROFIL	8

CHAPITRE II : THEORIES DES PROFILS

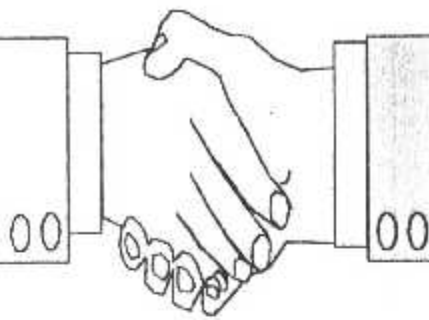
II.1- LA THEORIE DES PROFILS MINCES	10
II.1.1- INTRODUCTION	10
II.1.2- DECOMPOSITION DU PROBLEME	10
II.1.2.1- SIMPLIFICATION DES CONDITIONS AUX LIMITES	12
II.1.3- PROFIL SYMETRIQUE A UNE INCIDENCE NULLE	14
II.1.4- PROFIL SQUELETTIQUE AVEC CAMBRURE A UNE INCIDENCE NULLE	16
II.1.5- PLAQUE PLANE A UNE INCIDENCE DONNEE α	18
II.2- LA THEORIE DE DISTRIBUTION DES SINGULARITES	21
II.2.1- INTRODUCTION	21
II.2.2- LA METHODE DES PANNEAUX	21
II.2.2.1- METHODE DES PANNEAUX SOURCES « SOURCE PANALS »	22
II.2.2.2- METHODE DES PANNEAUX VORTEX « PANAL VORTEX »	27
II.3- THEORIE DES TRANSFORMATIONS	31
II.3.1- INTRODUCTION	31
II.3.2- DEFINITION	31
II.3.2.1- TRANSFORMATION D'UN CERCLE EN UN PROFIL D'AILE	31
II.3.2- TRANSFORMATION DE JOUKOVSKI	33
II.3.1.1- FAMILLE DES PROFILS D'AILES SELON LA TRANSFORMATION DE JOUKOVSKI	36
1- PROFIL SYMETRIQUE	36
2- PROFIL SQUELETTIQUE EN ARC CERCLE	37
3- PROFIL CAMBRE	38
II.3.2- TRANSFORMATION DE THEODORSEN	38
II.3.2.1- PROCEDURE DE TRANSFORMATION	39

CHAPITRE III : THEORIE DES AILES FINIS

III.1- DEFINITION	49
III.1.1- SURFACE DE REFERENCE	49
III.1.2- CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUE D'UNE VOILURE	49
III.1.3- FORME EN PLAN	52
III.2- THEORIE DE LA LIGNE PORTANTE DE PRANDTL	53
III.2.1- GENERALITES	53
III.2.2- DESCRIPTION DE LA THEORIE DE LA LIGNE PORTANTE DE RANDLT	54
III.2.3- PRINCIPE DE LA THEORIE DE LA LIGNE PORTANTE	55
III.2.3.1- LA DISTRIBUTION DE PORTANCE	56
III.2.3.2- LA PORTANCE TOTALE	56
III.2.3.3- LA TRAINEE INDUITE	57
III.2.4- DISTRIBUTION ELLIPTIQUE DE PORTANCE	57
III.2.4.1- PROPRIETES AERODYNAMIQUES	59
III.2.4.2- COEFFICIENT DE TRAINEE INDUITE	61
III.3- THEORIE DE LA SURFACE PORTANTE	62
III.3.1- INTRODUCTION	62
III.3.2- ASPECTS THEORIQUES	62
III.3.3- VITESSE INDUITE PAR LE TOURBILLON EN FER A CHEVAL	64
III.3.3.1- CALCUL DE LA VITESSE INDUITE	66
III.3.4- CALCUL DES COORDONNEES	68
III.3.4.1- LES COORDONNEES DU TOURBILLON EN FER A CHEVAL	69
III.3.4.2- LES COORDONNEES DU POINT DE CONTROLE	69
III.3.5- CALCUL DES CARACTERISTIQUES AERODYNAMIQUES	70
III.3.5.1- CALCUL DU COEFFICIENT DE PORTANCE	70
III.3.5.2- CALCUL DU COEFFICIENT DE TRAINEE INDUITE	70
III.4- AILE DELTA	71
III.4.1- LES AILES ELANCEES ET LEUR DOMAINE DE VOL	71
<u>CHAPITRE IV : RESULTATS ET COMMENTAIRES</u>	
IV.1-INTERPRETATION	76
IV.2- COEFFICIENT DE PORTANCE	76
IV.3- COEFFICIENT DE TRAINEE	76
IV.4- FINESSE	77

CHAPITRE V : CONCLUSION GENERALE

ANNEXE

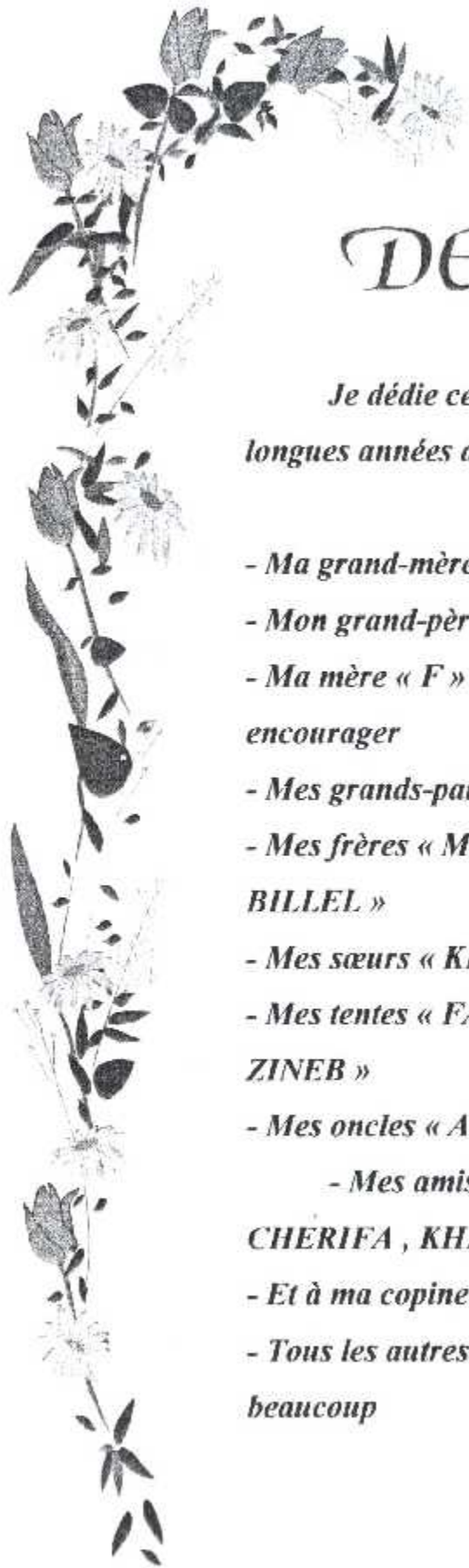


REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon promoteur Mr A. CHEGRANI pour ses conseils et son aide, ainsi qu'à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation depuis mon plus jeune âge.

Comme je tiens à remercier vivement toutes les personnes qui m'ont prodigué conseils et encouragement pour la réussite de cette thèse.

Sans oublier de remercier le président et les membres de jury d'avoir accepté d'honorer par leur présence ma soutenance.



DEDICACES

*Je dédie ce mémoire de fin d'étude fruit des
longues années d'étude à :*

- *Ma grand-mère « MAHJOUBA »*
- *Mon grand-père « SALEM »*
- *Ma mère « F » qui ma toujours soutenu et
encourager*
- *Mes grands-parents*
- *Mes frères « MOUHAMED , MOURAD , TAHAR ,
BILLEL »*
- *Mes sœurs « KHADIJA , LINDA »*
- *Mes tentes « FATMA , YAMINA , KHEIRA ,
ZINEB »*
- *Mes oncles « ALI , SNOUSI »*
- *Mes amis « SOUAD , ZAHRA , SAIDA ,
CHERIFA , KHEIRA , DJAMEL..... »*
- *Et à ma copine « YASMINA , RAFIKA , KENZA »*
- *Tous les autres dont la présence m'apporte
beaucoup*

FOUZIA

Liste des symboles

- AR allongement
- b envergure
- C corde
- C_{di} coefficient de traînée
- C_m coefficient de moment
- C_p coefficient de portance
- C_{pi} coefficient de pression induite
- D traînée induit
- D_i traînée induite par unité d'envergure
- ΔCP coefficient de différence de pression
- e épaisseur relative
- E épaisseur de maître couple
- L portance
- L' portance par unité d'envergure
- L_m corde moyenne
- N nombre de panneaux
- η_c la fonction cambrure
- η_r la fonction épaisseur
- q_∞ pression dynamique
- Q intensité de source
- r distance entre le fil tourbillonnaire et la vitesse induite
- S surface de référence
- S_j surface d'un panneau
- V_∞, U_∞ vitesse de l'écoulement à l'infini ament
- U, V, W les composantes de la vitesse induite
- V_t vitesse tangentielle
- V_{ti} vitesse tangentielle induite
- V_n la composante normale de la vitesse
- Z et ξ deux variable complexes
- α angle d'incidence
- α_{eff} angle d'attaque effectif
- α_i angle d'incidence induit
- α_0 angle de portance nulle
- ρ_∞ masse volumique
- γ intensité de tourbillon
- ϕ angle de dièdre ou potentiel des vitesse
- Γ circulation
- Γ_0 circulation à l'origine
- λ effilement
- δ dièdre d'une voilure

liste des figures

Fig I.1- Référence du profil.

Fig I.2- Nomenclature du profil.

Fig II.1.1- Nomenclature d'un profil d'aile portant.

Fig II.1.2- Décomposition du profil mince.

Fig II.1.3- Distribution de source sur un profil symétrique.

Fig II.1.4- Distribution des tourbillons sur un profil avec cambrure.

Fig II.1.5- Distribution des tourbillons pour une plaque plane.

Fig II.2.1- Distribution des panneaux de singularité sur la surface.

Fig II.2.2- Distribution des panneaux de singularité sur la surface.

Fig II.2.3- Détermination du potentiel des vitesses sur un segment $[a,b]$.

Fig II.2.4- Modélisation d'un profil arbitraire par une distribution des tourbillons sur le contour du profil.

Fig II.2.5- Condition kutta.

Fig II.3.1- Le profil symétrique par Jukowski.

Fig II.3.2- Le profil squelettique en arc de cercle par Jukowski.

Fig II.3.3- Transformation de Thodorsen.

Fig III.1.1- Surface de référence.

Fig III.1.2- Dièdre géométrique d'une voilure.

Fig III.1.3- Flèche d'une voilure.

Fig III.1.4- Les flèches d'une voilure.

Fig III.2.1- Superposition d'un nombre fini de tourbillons en fer à cheval (nappe tourbillonnaire).

Fig III.2.2- Distribution elliptique de portance.

Fig III.3.1- Représentation d'un tourbillon en fer à cheval (nappe tourbillonnaire)

Fig III.3.2- Représentation des tourbillons en fer à cheval.

Fig III.3.3- Représentation des panneaux.

Fig III.3.4- Calcul de la vitesse induite par un tourbillon de longueur fini.

Fig III.3.5- Représentation vectoriel des vitesses induites.

Fig III.3.6- Calcul des coordonnées.

Fig III.4.1- L'ail delta.

Fig IV.1- La variation du coefficient de portance en fonction de l'incidence avec un allongement $AR = 1$.

Fig IV.2- La variation du coefficient de portance en fonction de l'incidence avec un allongement $AR = 1.5$.

Fig IV.3- La variation du coefficient de portance en fonction de l'incidence avec Un allongement $AR = 2$.

Fig IV.4- La variation du coefficient de traînée en fonction de l'incidence.

Fig IV.5- La variation de finesse en fonction de l'incidence.

INTRODUCTION GENERALE

L'aérodynamique est une science qui étudie le mouvement des corps dans l'air et qui né avec l'idée de concevoir des ailes pour voler.

Le développement de cette science a suivi le progrès de la technologie avec l'apparition d'ordinateur de plus en plus puissants, et la construction de souffleries géantes et sophistiquées mais les essais en souffleries sont très couteux. Cependant, le besoin de gagner du temps dans la phase de conception amène les aérodynamiciens à utiliser des techniques numériques très développées et des théories basées sur des hypothèses simplifiants les problèmes réels dans le but de déterminer les caractéristiques aérodynamiques des ailes connaissant leurs formes.

Dans le premier chapitre, nous allons décrit les généralités de base sur les caractéristiques géométriques des profils d'ailes.

Dans le deuxième chapitre, nous allons défini la théorie des profils, tel que dans sa première partie, nous avons étudié la théorie des profils minces, puis dans la deuxième partie, nous donnons les principales propriétés de la méthode des singularités et ses utilités, puis nous avons vu dans la troisième partie la théorie des transformations conformes qui est traitée en deux parties la transformation de Joukowski et la transformation de Theodorsen.

Le troisième chapitre est consacré dans une première partit à définir la théorie des ailes finis, puis dans la deuxième partit nous donnons les applications de la théorie de la ligne portante ou théorie de Prandtl.

Cette dernière est applicable en régime d'écoulement subsonique, puis dans la troisième partit on a étudié la théorie de surface portante qui est très courante dans les bureaux d'étude et les centres des recherches aéronautiques.

Afin de déterminer les caractéristiques des ailes delta, on a utilisé une methode technique spécifique à l'aile delta sachant que son domaine d'application est très important dans le cas des grandes vitesses en particulier le supersonique.

Finalement, on valide nos résultats théoriques par une comparaison avec les résultats expérimentaux.

CHAPITRE I :

GENERALITES

I.1- CARACTERISTIQUES DES PROFILS :

DEFINITION

Un profil est une section de l'ail par un plan parallèle au plan de symétrie pour étudié un profil on assimile une aile cylindrique infiniment longue dont tous les profils sont identiques au profil.

Un profil est constituer généralement d'un :

- EXTRADOS : dessus de profil
- INTRADOS : dessous de profil
- BORD DE FUITE : c'est le lieu de point extrême arrière de profil.
(généralement point anguleux)
- BORD D'ATTAQUE : lieu de point extrême avant, ou encore : lieu des points de tangence de cercle centré au bord de fuite et de rayon Max.
(FIG.1.1).

I.2- CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES :

- L'épaisseur maximale : c'est le plus grand segment perpendiculaire à la corde et qui est noter par la lettre e_{max} .
- L'épaisseur relative : c'est le rapport de l'épaisseur maximale et la corde de profil et elle est noté par la lettre h.

Remarque :

l'épaisseur relative est comptée en pour cent de la corde, il permet aussi de classer les profils :

- Profil mince : $e < 6\%$
- Profil semi-épais : $6\% < e < 12\%$
- Profil épais : $e > 12\%$
- Flèche maximale : c'est la plus grande distance entre la ligne de courbure moyenne (ligne qui joint les milieux des segments perpendiculaires à la corde) et la corde de profil.(fig 1.2).

- Courbure relative : c'est le rapport de la flèche maximale et la corde de profil.

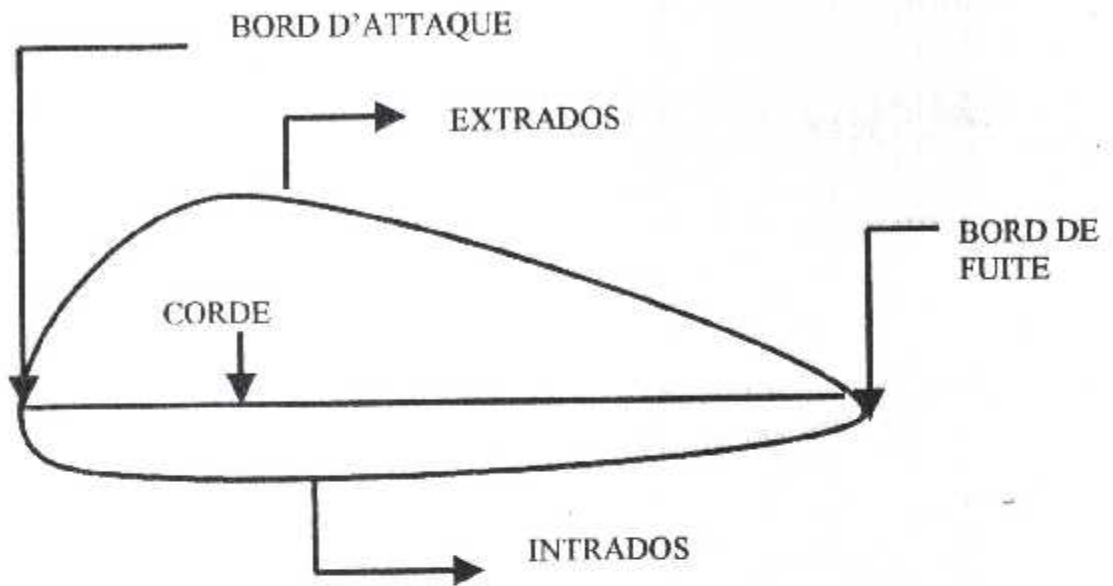


FIG (I.1) - REFERENCE DU PROFIL

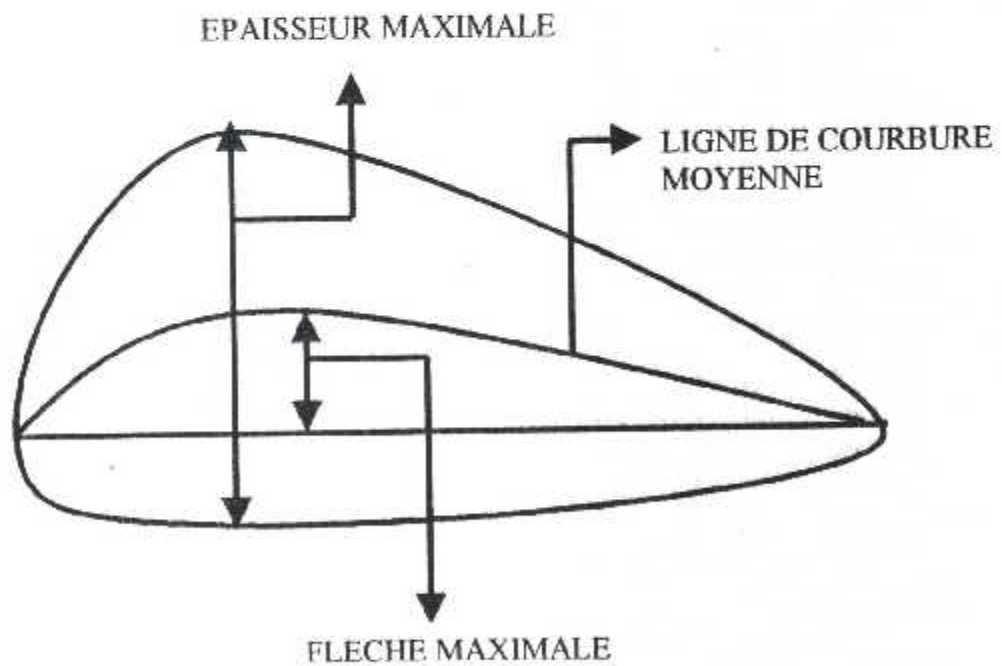


FIG (I.2) - NOMENCLATURE DU PROFIL

1.3- ORIENTATION DES PROFILS :

- *Angle de calage* (γ) : c'est l'angle formé par la corde de profil et l'axe longitudinale de l'avion, il est généralement de l'ordre de -2° à -3° .
- *Angle d'incidence* (α) : c'est l'angle formé par la corde de profil et le vecteur vitesse, il est positif vers le bas en partant de la corde.
- *Angle de portance nulle* (α_0) : incidence pour laquelle la portance de profil est nul, cette angle est habituellement négative pour les profils usuels.

1.4- CARACTERISTIQUES DE FORMES DES PROFILS :

- 1- *Profils biconvexes symétrique* : un profil est dit biconvexes symétrique quand l'extrados et l'intrados sont convexes et symétrique par rapport à la corde, dans ce cas, la ligne de courbure moyenne et la corde sont confondues donc la flèche ainsi que la courbure relative sont nulles. Ce type de profil est généralement utilisé pour les empannage horizontaux et verticaux.
- 2- *Profils biconvexes dissymétriques* : pour ce type de profil la cambrure de l'extrados est plus accentuée que celle de l'intrados. Mentionnant aussi que l'angle de portance nulle est généralement de l'ordre -2° à -3° . Ce type de profil est plus employé pour les ailes d'avion.
- 3- *Profil creux* : sur ce type de profil l'extrados est convexe par contre l'intrados concave. Ce type de profil est généralement utilisé pour les planeurs.
- 4- *Profil plan convexe* : dans ce cas l'extrados est convexe et l'intrados est plan.
- 5- *Profil à double courbure* : ces profils sont auto stables, contrairement aux autres types qui sont instables et nécessitant un empannage horizontale pour la stabilité longitudinale de l'avion.
- 6- *Profil laminaire* : c'est un profil mince, biconvexe symétrique, bord de fuite à lame couteau. Il est utilisé aux grandes vitesses.

I.5- DESIGNATION D'UN PROFIL :

Les principaux pays constructeurs d'avions disposent de toute une gamme des profils par exemples :

- | | |
|--|------------------------|
| ➤ <i>En Allemagne les profils</i> | <i>Gottingen (GOT)</i> |
| ➤ <i>En France les profils</i> | <i>Eiffel</i> |
| ➤ <i>En Grand Bretagne les profils</i> | <i>RAF</i> |
| ➤ <i>Aux U.S.A les profils</i> | <i>Clark et NACA</i> |

Les profils les plus étudiés et les plus utilisés sont :

Les profils NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) autrement dit :
Organisme Américain de la Recherche Aéronautique dont l'équivalent en France est l'ONERA.

Exemple : NACA 2412 et NACA 2.30.12

CHAPITRE II :
THEORIE DES PROFILS

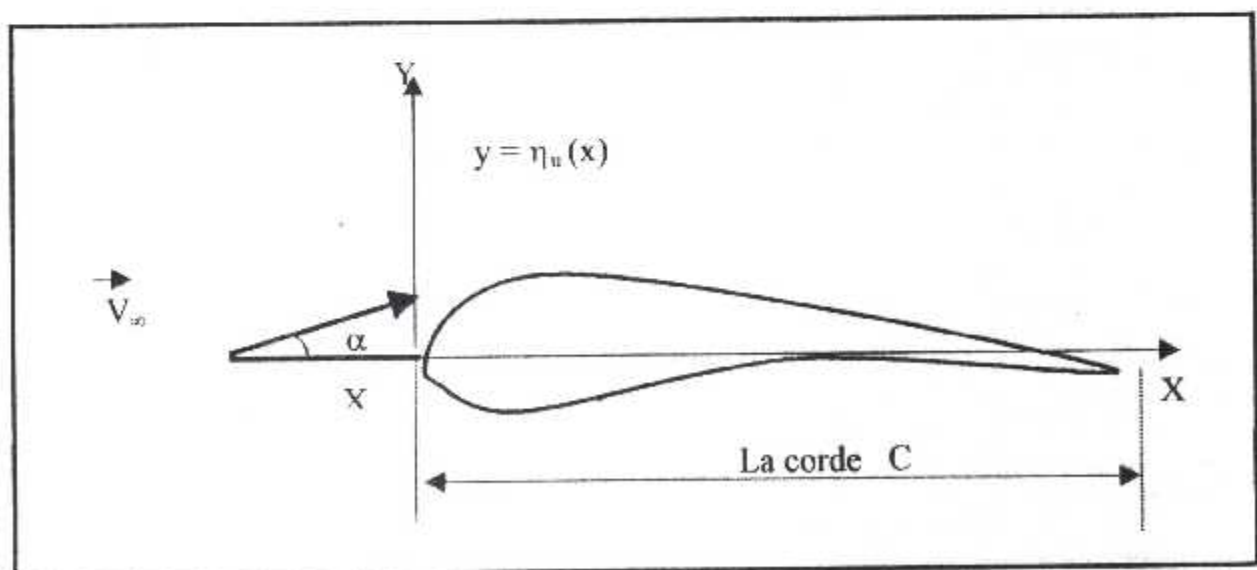
II.1-LA THEORIE DES PROFILS MINCES

II.1. 1- INTRODUCTION

Le problème de l'écoulement d'air autour d'un profil d'aile arbitraire est en général très complexe s'il n'y a pas de restriction quant à son épaisseur, cambrure et angle d'attaque. Ce problème peut être résolu par la méthode THEODORSEN, cependant il faut remarquer que cette dernière n'est pas rapide. Elle ne convient pas lorsqu'on veut concevoir un profil d'aile avec une distribution de pression donnée et une vitesse superficielle voulue. Le but est donc de générer une solution au problème par une méthode simple qui reste quand même une approximation du problème physique.

II-1-2- DECOMPOSITION DU PROBLEME :

Considérons l'écoulement potentiel incompressible permanent autour d'un profil d'aile de forme quelconque. Nous pouvons schématiser cet écoulement par la figure ci-dessous, par convention le bord d'attaque est localiser à l'origine et le bord de fuite est situé sur l'axe des abscisses à $x = C$ telle que C est la corde du profil (fig. II.1.1).



FIG(II.1.1) NOMENCLATURE D'UN PROFIL D'AILE PORTANT

Pour l'écriture des équations régissant cet écoulement, on note que :

$\Phi(x,y)$: le potentiel de vitesse

$F(x,y) = 0$: décrit la forme de profil

L'écoulement obtenu est la solution du problème suivant :

$$\text{L'équation de LAPLACE : } \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{II(1.1)}$$

$$\text{Imperméabilité de la surface : } \vec{\text{grad}} \Phi \cdot \vec{\text{grad}} F = 0 \text{ sur } F(x,y) = 0 \quad \text{II(1.2)}$$

$$\text{Condition à l'infini : } \vec{\text{grad}} \Phi = \vec{V}_\infty \quad \text{II (3.3)}$$

Condition de KUTTA : la circulation autour du profil est telle que la vitesse reste finie et continue au bord de fuite.

HYPOTHESE: on suppose que le profil est mince et sa présence perturbe peu l'écoulement en amont :

$$\vec{V}(x,y) = \vec{V}_\infty + \vec{Q}(x,y) \quad \text{II(1.4)}$$

Les composantes de la vitesse sont :

$$\vec{V} \begin{cases} V_\infty \cos \alpha + u(x, y) \\ V_\infty \sin \alpha + v(x, y) \end{cases} \quad \text{II(1.5)}$$

avec :

\vec{V}_∞ : vitesse de l'écoulement uniforme non perturbé.

$\vec{Q}(x,y)$: Le champ des vitesses de perturbation.

Soit $\phi(x,y)$ le potentiel de la vitesse de perturbation le problème initial devient alors en termes des quantités de perturbation de l'écoulement :

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{II (1.6)}$$

$$(V_\infty + \overrightarrow{\text{grad}} \phi) \overrightarrow{\text{grad}} F = 0 \quad \text{sur } F(x,y) = 0 \quad \text{II(1.7)}$$

$$\text{grad} \phi \longrightarrow 0 \text{ à l'infini} \quad \text{II(1.8)}$$

la condition de KUTTA au bord de fuite

REMARQUE : pour contourner la difficulté de ce problème nous supposons que le profil perturbe peu l'écoulement. Dans ce cas, la théorie des petites perturbations permet de simplifier les conditions aux limites.

II.1.2.1-SIMPLIFICATION DES CONDITIONS AUX LIMITES :

Les équations décrivant la forme du profil pour l'extrados et l'intrados sont données respectivement par :

$$y = \eta(x) \begin{cases} \eta_u(x) \text{ sur l'extrados} \\ \eta_l(x) \text{ sur l'intrados} \end{cases} \quad \text{II(1.9)}$$

avec

$$\begin{cases} \eta_u = \eta_c + \eta_e \\ \eta_l = \eta_c - \eta_e \end{cases} \quad \text{II (1.10)}$$

η_e : représente la fonction d'épaisseur

η_c : représente la fonction de cambrure

D'après l'équation qui décrit la forme du profil on aura :

$$F(x, y) = \eta(x) - y \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \eta(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -1 \end{cases} \quad \text{II (1.11)}$$

On peut déduire à partir de la condition d'imperméabilité de la surface l'équation suivante :

$$v(x, y) = V_\infty \cdot \frac{d\eta(x)}{dx} - V_\infty \cdot \alpha \quad \text{II(1.12.a)}$$

La vitesse de perturbation peut être développée en série de TAYLOR.

En introduisant les fonctions d'épaisseur et de cambrure, l'équation II(1-12a) devient .

$$\begin{cases} v(x,0^+) = V_\infty \frac{d\eta_e}{dx} + V_\infty \frac{d\eta_c}{dx} - V_\infty \alpha \\ v(x,0^-) = -V_\infty \frac{d\eta_e}{dx} + V_\infty \frac{d\eta_c}{dx} - V_\infty \alpha \end{cases} \quad \text{II (1-12b)}$$

L'équation de LAPLACE et les conditions aux limites sont linéaires. Pour la résolution de ce problème, il est pratique de le décomposer en trois autres problèmes plus simples de telle sorte que l'on peut additionner leurs solutions pour trouver la solution finale (fig.II-1-2).

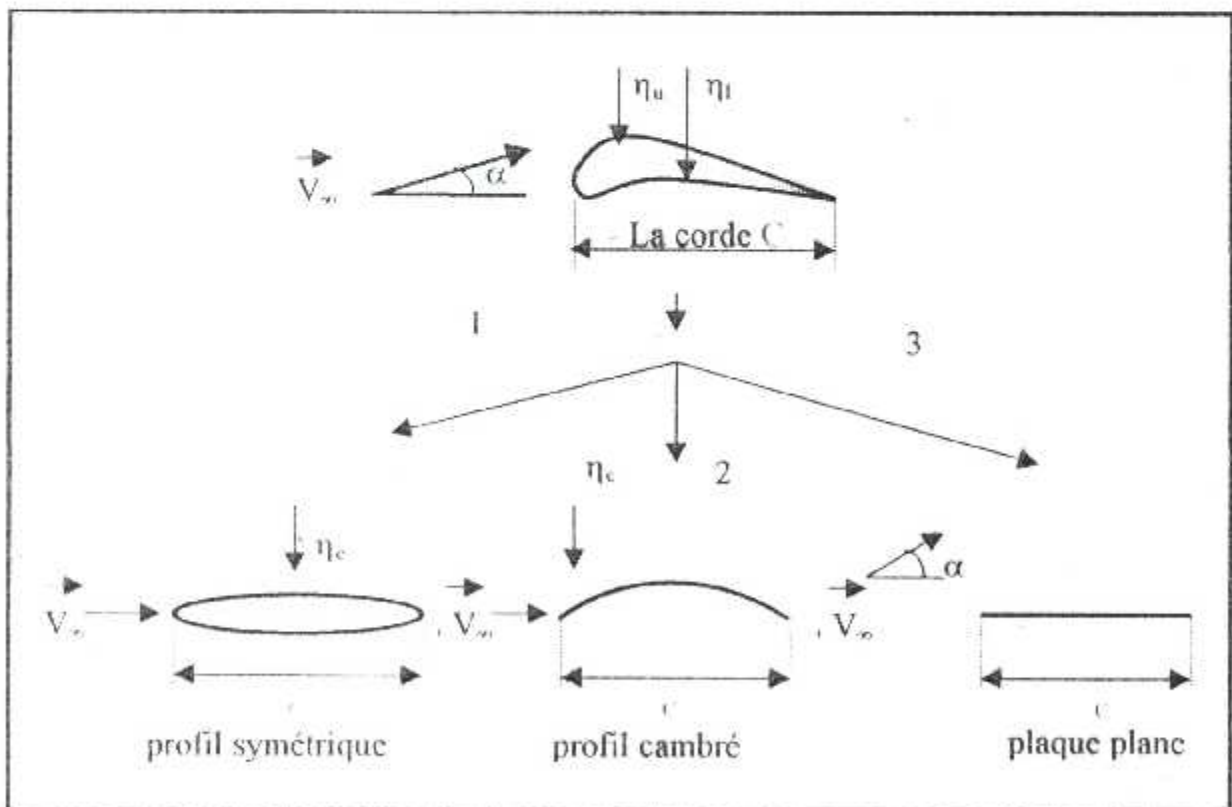


FIG.II-1-2- DECOMPOSITION DU PROFIL MINCE

II.1.3-PROFIL SYMETRIQUE A UNE INCIDENCE NULLE

Ce problème peut être traité par une distribution continue de source sur un segment $(0 \leq x \leq C)$ (FIG.II-1-3). Les équations régissant l'écoulement autour de ce type de profil sont les suivantes :

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ v(x, 0^{\pm}) = \frac{\partial \phi(x, 0^{\pm})}{\partial y} = \pm V_{\infty} \frac{d\eta_c}{dx} & 0 \leq x \leq C \\ \nabla \phi = 0 & \text{à l'infini} \end{cases} \quad \text{II (1-13)}$$

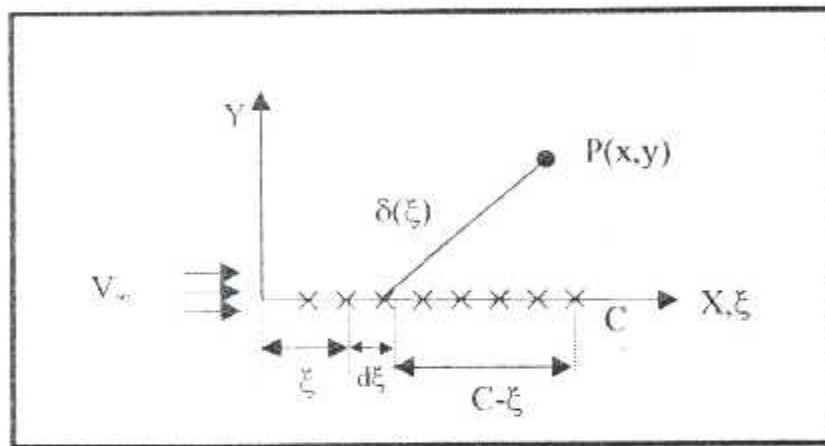


FIG.II-1-3- DISTRIBUTION DE SOURCE SUR UN PROFIL SYMETRIQUE

Les composantes de la vitesse sont données par :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^C \delta(\xi) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \\ v(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^C \delta(\xi) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \end{aligned} \quad \text{II(1-14)}$$

δ : l'intensité de source par unité de source.

puisque $\delta(x) = 2v(x, 0^+) = 2V_{\infty} \frac{d\eta_c}{dx}$ donc :

puisque $\delta(x) = 2v(x,0) = 2V_\infty \frac{d\eta_c}{dx}$ donc :

$\delta(x)$: intensité de tourbillon par unité de longueur.

$$u(x,0) = \frac{V_\infty}{\pi} \int_0^{\xi} \frac{d\eta_c}{dx} \frac{1}{(x-\xi)} d\xi \quad \text{II (1-15)}$$

Pour évaluer l'intégrale, on fait le changement de variable classique suivant :

$$\begin{cases} x = \frac{C}{2} (1 + \cos(\theta)) \\ \xi = \frac{C}{2} (1 + \cos(\varphi)) \end{cases} \quad \text{II(1-16)}$$

La substitution de ces relations dans l'équation II (1-15) permet d'obtenir l'expression suivante :

$$u(\theta) = -\frac{V_\infty}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_c(\theta)}{dx} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi \quad \text{II(1-17)}$$

Cette solution est appelée relation intégrale de POISSON, on démontre que $u(\theta)$ et $\frac{d\eta_c}{dx}$ peuvent être exprimés en série de FOURRIER, on a alors :

$$\frac{d\eta_c(\theta)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \quad \text{II(1-18a)}$$

$$\text{avec } A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_c(\theta)}{dx} \sin(n\theta) d\theta \quad \text{II (1-18b)}$$

$$\text{et } \frac{u(\theta)}{V_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \quad \text{II(1-18c)}$$

Le coefficient de pression est donné par :

$$C_p(\theta) = -2 \frac{u(\theta)}{V_\infty} \quad \text{II(1-19)}$$

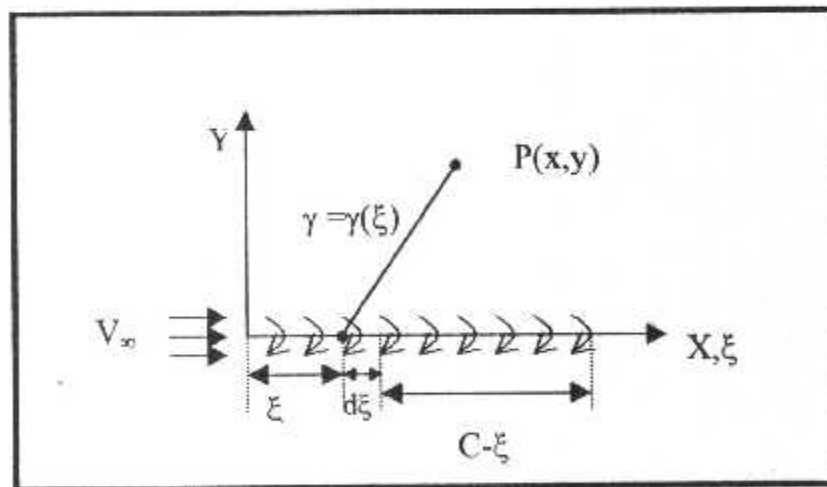
II.1.4-PROFIL SQUELETTIQUE AVEC CAMBRURE A UNE INCIDENCE NULLE

La solution de ce problème peut être obtenue en supposant que le champ de perturbation est généré par une distribution des tourbillons sur l'axe des abscisses

(FIG.II-1-4). Cette distribution satisfait l'équation de LAPLACE écrite avec les conditions aux limites comme suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = 0 \\ v(x, 0^\pm) = \frac{\partial \phi(x, 0^\pm)}{\partial y} = V_\infty \frac{d\eta_e}{dx} \quad 0 \leq x \leq C = 1 \\ \nabla \phi = 0 \quad \text{à l'infini} \end{array} \right. \quad \text{II(1.20)}$$

condition de kutta : la circulation autour du profil est telle que les vitesses soient finies et continues au bord de fuite.



**FIG(II.1.4) DISTRIBUTION DE TOURBILLONS SUR
UN PROFIL AVEC CAMBRURE**

Les composantes de la vitesse obtenues sont :

$$\begin{cases} u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^C \gamma(\xi) \cdot \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \\ v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^C \gamma(\xi) \cdot \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \end{cases} \quad \text{II(1.21)}$$

L'application de la condition à la surface permet de déterminer la circulation qui est donné par :

$$\gamma(x) = 2u(x, 0^+) - 2u(x, 0^-) \quad 0 \leq x \leq C$$

Après plusieurs transformations, l'intensité des tourbillons $\gamma(\theta)$ peut être écrite comme suit :

$$\gamma(\theta) = -2V_\infty \left[\frac{B_0}{2} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta) \right] \quad \text{II(1.22)}$$

Les coefficients (B_n) sont obtenus à partir du développement en série de FOURRIER :

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_c}{dx} \cos(n\theta) \cdot d\theta \quad \text{II (1.23)}$$

$$B_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_c(\theta)}{dx} \cdot d\theta \quad \text{II(1.24)}$$

par conséquents, le coefficient de pression est donné par :

$$C_p(\theta) = 2 \left[\frac{B_0}{2} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta) \right] \quad \text{II(1.25)}$$

De même, le coefficient de portance est exprimé par :

$$C_z = -(B_0 + B_1)\pi \quad \text{II(1.26)}$$

Le coefficient de moment est alors :

$$C_m = \frac{C_x}{4} + \frac{\pi}{4} (B1 + B2) \quad \text{II(1-27)}$$

II.1.5- PLAQUE PLANE A UNE INCIDENCE DONNEE α

On suivant le même raisonnement que dans le problème précédent, la plaque plane peut être représentée par une distribution de tourbillons $\gamma(x)$ le long de l'axe des abscisses (fig.II-1-5).

Les équations représentant cet écoulement s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ v(x,0^+) = \frac{\partial \phi(x,0^+)}{\partial y} = -V_\infty \alpha \quad 0 \leq x \leq C \\ V\phi = 0 \quad \text{à l'infini} \\ \text{condition de kutta} \quad \text{au bord de fuite} \end{cases} \quad \text{II (1-28)}$$

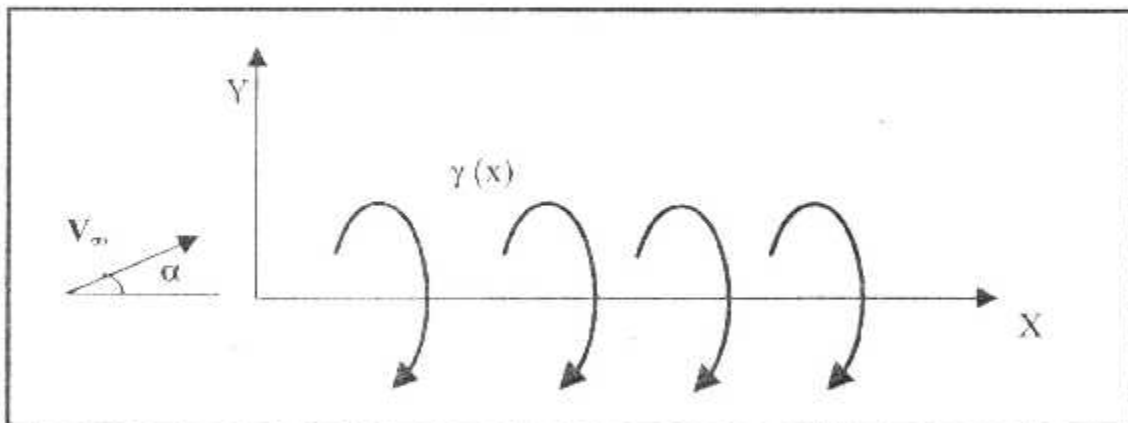


FIG.II-1-5-DISTRIBUTION DES TOURBILLONS POUR UNE PLAQUE PLANE

Avec $\gamma(\xi)$ solution de l'équation (1-29) qui est représenté par l'expression suivante :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \gamma(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} = V(x,0^+) - V_\infty \alpha \quad \text{II(1-29)}$$

En utilisant le changement de variable , l'expression de la circulation devient :

$$\gamma(\theta) = \frac{K}{\sin \theta} - 2V_{\infty} \alpha \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -2V_{\infty} \frac{\alpha}{\sin \theta} \left[-\frac{K}{2V_{\infty} \alpha} + \cos \theta \right] \quad \text{II(1.30)}$$

Pour satisfaire la condition de KUTTA on doit avoir :

$$\gamma(x=1) = 0 \quad \Rightarrow K = 2V_{\infty} \alpha \quad \text{II (1.31)}$$

Par conséquent, la circulation s'écrit :

$$\gamma(\theta) = 2V_{\infty} \alpha \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \quad \text{II(1.32)}$$

Le coefficient de pression est donné par :

$$C_p(\theta) = -2\alpha \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad \text{II(1.33)}$$

Les coefficients de portance et de moment sont respectivement donnés par :

$$C_z = \frac{1}{2V_{\infty}} \int_0^{\pi} \gamma(\theta) \sin \theta \, d\theta = 2\pi\alpha \quad \text{II(1.34)}$$

$$C_m = -\frac{1}{2V_{\infty}} \int_0^{\pi} \gamma(\theta) (1 + \cos \theta) \sin \theta \, d\theta = -\frac{\pi}{2} \alpha \quad \text{II(1.35)}$$

Les coefficients aérodynamiques du problème initiale sont :

$$C_p(\theta) = -2 \left[\left(\alpha - \frac{B_0}{2} \right) \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) \right] \quad \text{II (1.36)}$$

Le coefficient de portance est :

$$C_z = 2\pi \left(\alpha - \frac{B_0 + B_1}{2} \right) \quad \text{II(1.37)}$$

Le coefficient de moment est exprimé par :

$$C_m = -\frac{1}{4} [2\pi\alpha - (B_0 + B_1)\pi] + \frac{\pi}{4} (B_1 + B_2) \quad \text{II(1.38)}$$

Remarque:

la plaque plane peut être représentée par une force de portance agissant au quart de la corde à partir du bord d'attaque. Le point $l/4$ est le centre aérodynamique et en même temps le centre de poussée pour tout angle d'attaque.

CONCLUSION

L'épaisseur ne contribue pas au moment, le système de force agissant sur le profil peut être résumé comme suit :

Une portance agissant au quart de la corde à partir du bord d'attaque.

Un moment agissant au même point indépendant de l'angle d'attaque, ce point est appelé centre aérodynamique.

II-2 LA THEORIE DE DISTRIBUTION DES SINGULARITES

II-2-1- INTRODUCTION

La théorie de la distribution des singularités est une technique de résolution numérique qui consiste à résoudre l'équation régissant les écoulements potentiels. Cette théorie peut s'appliquer dès que l'équation aux dérivées partielles à résoudre est linéaire.

Le principe de base de la méthode consiste à remplacer la surface de l'aile par une distribution de singularités tels que sources, tourbillons ou doublet qui dépendent des équations et des conditions aux limites imposées.

- a) **La méthode des sources** : cette méthode consiste en une distribution de source pour permettre une approximation numérique de la solution de l'écoulement autour d'un corps non portant, ce type de singularité émet un débit volumique, ce débit est positif ou négatif.
- b) **La méthode des vortex** : celle-ci est utilisée pour résoudre les problèmes de surface portante dans le cas d'une aile simple isolée en écoulement stationnaire.
- c) **La méthode des doublets** : toujours pour le cas de surfaces portantes la méthode des doublets est une autre méthode capable de résoudre ce problème, mais celle-ci est capable quelque soit la complexité des configurations portantes

II-2-2- LA METHODE DES PANNEAUX

Si on considère un corps arbitraire dans un écoulement uniforme potentiel (voir FIG.II.2.1). La méthode des panneaux consiste à :

- Approximer la surface du corps par une ligne brisée.
- Choisir une distribution de singularités (sources, tourbillons, doublets) et la faire par élément ou segment.

- Dédurre le potentiel des vitesses induites en chaque point de la distribution.
- Choisir les points de contrôle situés aux milieux des segments et écrire l'équation intégrale au niveau de ces points qui se traduit par un système d'équations algébriques linéaires, que l'on peut résoudre par une méthode directe ou itérative.

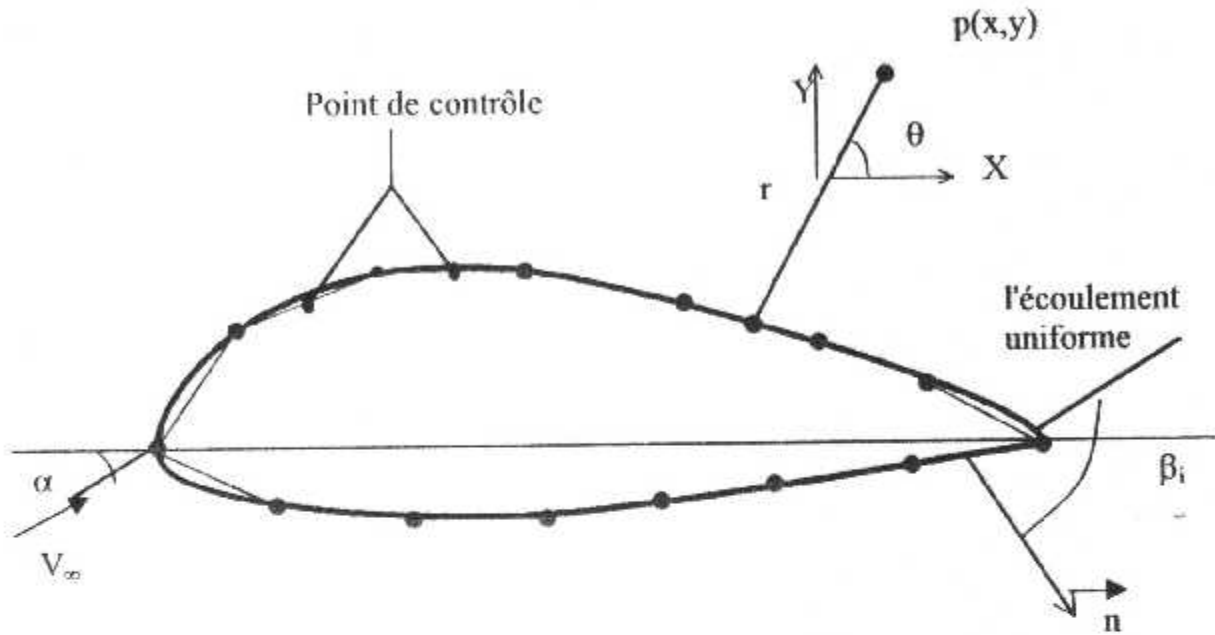
II.2.2.1- METHODE DES PANNEAUX SOURCES "SOURCE PANALS "

C'est un procédé de calcul pratique, qui permet la résolution numérique du problème des écoulements autour d'un corps non portant. La technique consiste à une subdivision du contour de corps en des segments finis, chaque segment (panneau) comporte une source ponctuelle d'intensité δ . (Voir FIG.II-2-2)

Si on choisit un nombre N de panneaux, sur chaque segments $[x_j, x_{j+1}]$ est répartie uniformément une source de densité $\delta_j, j=1$ à N .

Tout le problème reste à déterminer cette intensité δ qui nécessite l'application des conditions aux limites en chaque point de contrôle.

REMARQUE : Si le nombre de panneaux est suffisamment grand on peut généralement obtenir une bonne approximation numérique de la solution.



FIG(II-2-1): DISTRIBUTION DES PANNEAUX DE SINGULARITE SUR LA SURFACE

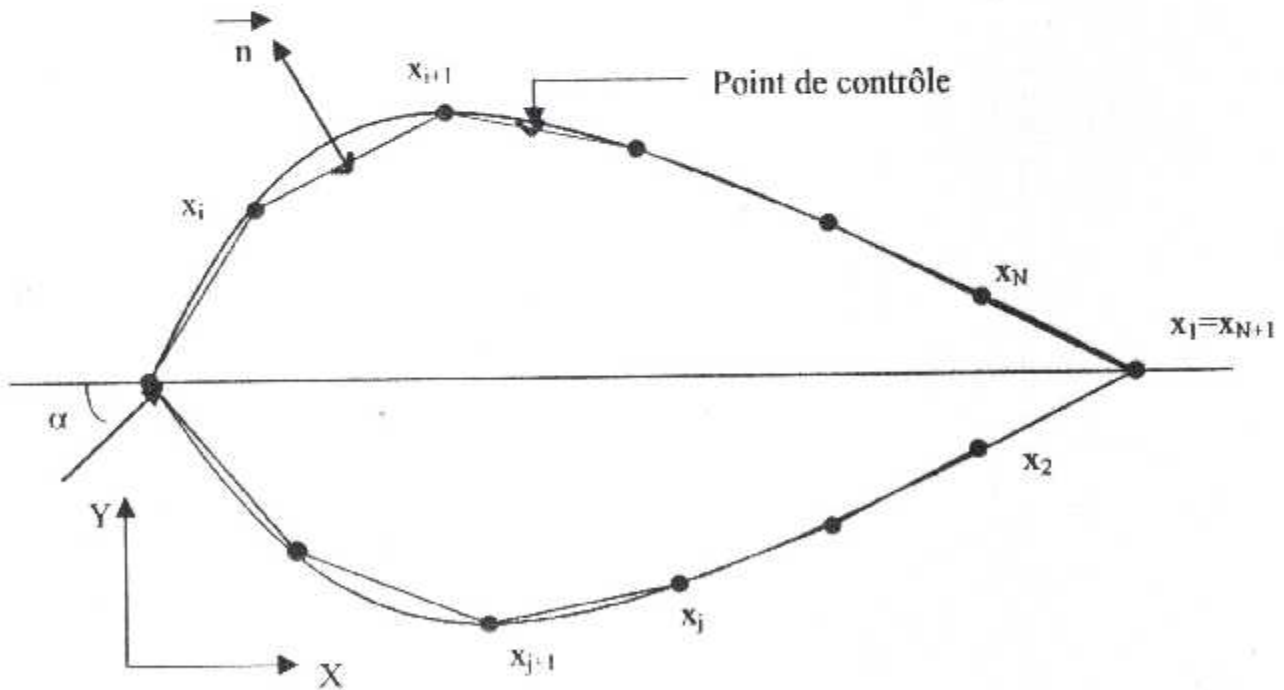


FIG (II.2.2) DISTRIBUTION DES PANNEAUX DE SINGULARITE SUR LA SURFACE

Soit un point de l'écoulement P de coordonnées cartésiennes (x, y) situé à une distance r de la portion ds , le potentiel des vitesses induit par une singularité source ponctuelle est :

$$d\Phi_s = \frac{\delta ds}{2\pi} \ln(r) \quad \text{II(2-1)}$$

Le potentiel des vitesses total induit sur le segment $[a,b]$ par cette distribution est :

$$\Delta\Phi_s(x, y) = \int_a^b \delta \frac{ds}{2\pi} \ln(r) \quad \text{II(2-2)}$$

Le potentiel des vitesses au même point P de l'écoulement induit par le panneau (j) est :

$$\Delta\Phi_s(P) = \frac{\delta_j}{2\pi} \int_j \ln r_{pj} ds_j \quad \text{II (2-3)}$$

$$\text{avec } r_{pj} = \sqrt{(x_p - x_j)^2 + (y_p - y_j)^2} \quad \text{II (2-4)}$$

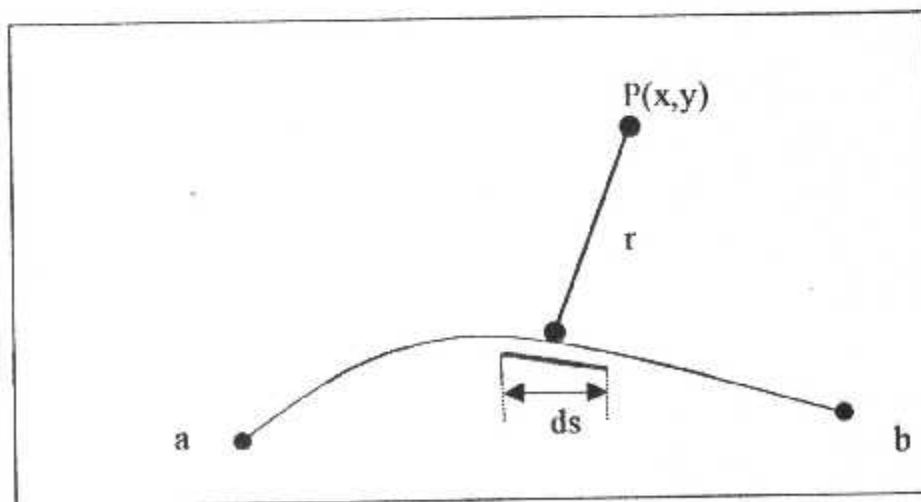


FIG (II.2.3): DETERMINATION DU POTENTIEL DES VITESSES SUR UN SEGMENT $[a,b]$

Le potentiel des vitesses totales induit par cette distribution au point P par l'ensemble des panneaux est :

$$\Phi_s(P) = \sum_{j=1}^N \Delta\Phi_{s_j}(P) = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_j}{2\pi} \int \ln r_{pj} ds_j \quad \text{II(2.5)}$$

Si le point P de coordonnées (x_i, y_i) est un point de contrôle, le potentiel des vitesses total s'écrit comme suite :

$$\Phi_s(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^N \Delta\Phi_{s_j} = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_j}{2\pi} \int \ln r_{ij} ds_j \quad \text{II(2.6)}$$

Le potentiel des vitesses de l'écoulement résultant de la superposition de l'écoulement uniforme et de N panneaux sources est :

$$\Phi = \Phi_\infty + \Phi_s \quad \text{ainsi que}$$

$$\Phi(x_i, y_i) = V_\infty x_i + \sum_{j=1}^N \frac{\delta_j}{2\pi} \int \ln r_{ij} ds_j \quad \text{II(2.7)}$$

La composante normale de la vitesse de l'écoulement uniforme s'écrit comme suite.

$$V_{\infty n} = V_\infty \cos(\beta_i) \quad \text{II (2-8)}$$

La composante normale de la vitesse sur le corps est :

$$V_n = \frac{\partial}{\partial n} (\Phi(x_i, y_i)) \quad \text{II(2.9)}$$

Cette dérivée présente un point singulier qui $(r_{i j})$ apparaîtra au dénominateur de l'intégrale, au $j^{\text{ième}}$ panneau quand $(i=j)$ est $\frac{\delta_i}{2}$ donc :

$$V_n = \frac{\delta_i}{2} + \sum_{j \neq i}^N \frac{\delta_j}{2\pi} \int \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j \quad \text{II(2.10)}$$

Le terme $\frac{\delta_i}{2}$ est la vitesse normale au $j^{\text{ième}}$ point de contrôle induit par le $j^{\text{ième}}$ panneau.

La condition au limite de la surface de l'obstacle s'écrit :

$V_{\infty n} + V_n = 0$ cette solution s'exprime sous la forme suivante :

$$\frac{\delta_i}{2} + \sum_{j \neq i}^N \frac{\delta_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} \ln(r_{ij}) ds_j + V_{\infty} \cos(\beta_i) = 0 \quad \text{II(2.11)}$$

la composante tangentielle de la vitesse à l'infini amont est :

$$V_{\infty, t} = V_{\infty} \sin(\beta_i) \quad \text{II(2.12)}$$

La vitesse tangentielle induite par tous les panneaux est :

$$V_t = \frac{\partial \Phi}{\partial S} = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial S_i} \ln(r_{ij}) ds_j \quad \text{II (2.13)}$$

En particulier la vitesse tangentielle sur un panneau produite par le panneau lui-même ($i=j$) est nulle.

Donc la vitesse tangentielle de la superposition de l'écoulement uniforme et les (N) panneaux sources est :

$V_t = V_{\infty, t} + V_{t_i}$ qui peut être exprimée par :

$$V_{t_i} = V_{\infty} \sin(\beta_i) + \sum_{j=1}^N \delta_j \frac{\partial}{\partial S_j} \ln(r_{ij}) ds_j \quad \text{II(2.14)}$$

Le coefficient de pression au $i^{\text{ième}}$ point de contrôle est obtenu à partir de l'équation de BERNOULLI sous la forme suivante :

$$C_{p_i} = 1 - \left(\frac{V_{t_i}}{V_{\infty}} \right)^2 \quad \text{II(2.15)}$$

II.2.2.2- LA METHODE DES PANNEAUX VORTEX " PANAL VORTEX "

La méthode des panneaux sources ne tient pas compte de la circulation autour d'un obstacle. Cependant, la détermination des caractéristiques aérodynamiques des profils d'ailes portant nécessite l'introduction de la circulation, par conséquent des tourbillons dans la modélisation.

Pour remédier à cet inconvénient la méthode des panneaux vortex a été développée et dont le principe est similaire à la méthode des panneaux sources, sauf que celle ci est applicable à des corps portant.

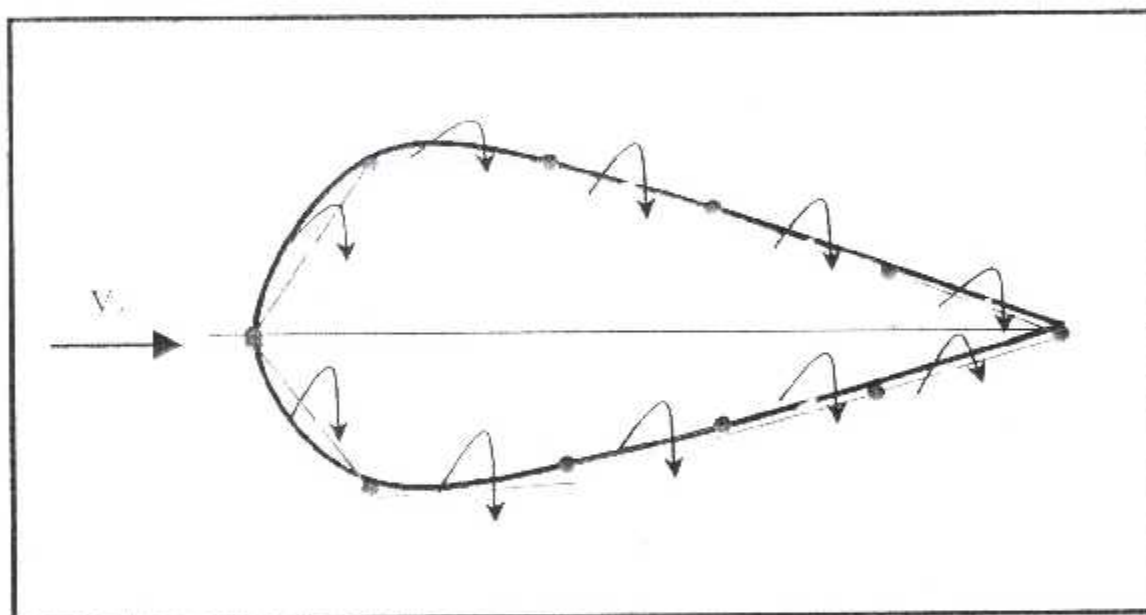


FIG.II-2-4: MODELISATION D'UN PROFIL ARBITRAIRE PAR UNE DISTRIBUTION DES TOURBILLONS SUR LE CONTOUR DU PROFIL

En modélisant le contour du profil (FIG II.2.4) par une série d'éléments tourbillonnaires rectilignes chaque élément a une circulation constante γ par unité de longueur, qui varie d'un élément à un autre.

Si on choisit un nombre N de panneaux où une distribution de circulation sur chaque panneau dont les intensités (γ_i , $i=1$ à N) qui sont des inconnues à déterminer en utilisant la technique de "PANAL VORTEX" et qui doivent satisfaire la condition de KUTTA au bord de fuite.

Soit un point $P(x,y)$ situé à une distance (r_{ij}) du panneau (j) qui fait un angle (θ_{ij}) par rapport à l'axe des abscisses. Le potentiel des vitesses induit par le panneau (j) au point P est :

$$\Delta\Phi(P) = -\frac{1}{2\pi} \int \theta_{ij} \gamma_j ds_j \quad \text{II(2.16)}$$

$$\text{avec } \theta_{ij} = \text{arctg} \left(\frac{y - y_j}{x - x_j} \right) \quad \text{II(2.17)}$$

Le potentiel des vitesses résultant induit au point P par l'ensemble des panneaux est donné par :

$$\Phi(P) = -\sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \int \theta_{ij} ds_j \quad \text{II(2.18)}$$

Si le point (P) de coordonnées (x_i, y_i) est un point de contrôle alors :

$$\Phi(x_i, y_i) = -\sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \int \theta_{ij} ds_j \quad \text{II(2.19)}$$

$$\text{avec } \theta_{ij} = \text{arctg} \left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right) \quad \text{II(2.20)}$$

L'application de la condition à la paroi où la composante normale de la vitesse totale est nulle cette dernière est issue de la superposition de la vitesse de l'écoulement uniforme et celle induite par tous les éléments.

$V_{\infty, n} + V_n = 0$ et qui s'écrit sous la forme suivante :

$$V_{\infty} \cos(\beta_i) - \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j = 0 \quad \text{II (2.21)}$$

Au contraire à la méthode "PANAL SOURCE" la méthode des panneaux vortex en plus de (N) équations données par le système II(2-21), pour fermer le système on doit aussi satisfaire la condition de KUTTA au bord de fuite. (FIG II.2.5)

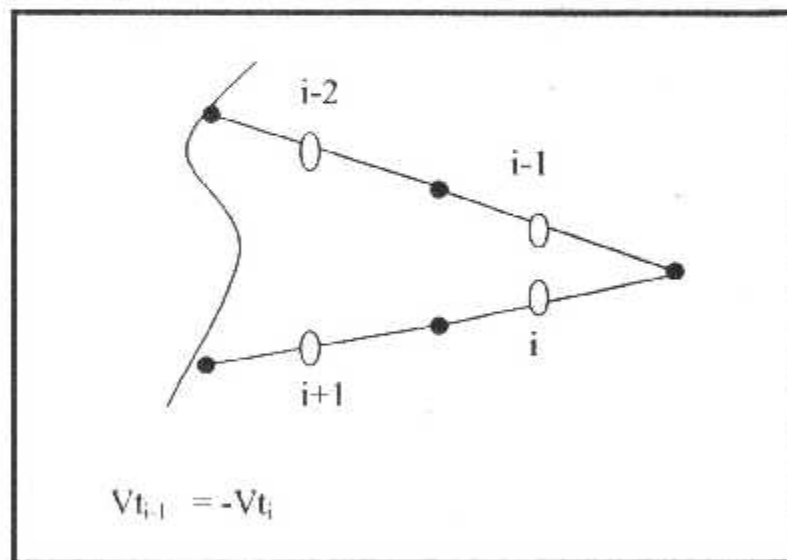


FIG.II-2-5: CONDITION DU KUTTA

Si la longueur de j^{ième} panneau est (s_j) alors la circulation qui en résulte est (γ_j, s_j) et la circulation totale dû à tous les panneaux est :

$$\Gamma = \sum_{j=1}^N \gamma_j s_j \quad \text{II (2.22)}$$

Par l'application du théorème KUTTA-JOUKOWSKI, le coefficient de portance est donné par la relation suivante :

$$C_z = \rho_\infty V_\infty \Gamma = \rho_\infty V_\infty \sum_{j=1}^N \gamma_j s_j \quad \text{II(2.23)}$$

La vitesse tangentielle de chaque panneau est donnée par :

$$V_{t_i} = \frac{\partial}{\partial s} (\Phi(x_i, y_j)) \quad \text{II(2.24)}$$

La vitesse tangentielle totale est la superposition de l'écoulement uniforme et les (N) panneaux vortex, alors :

$$V_{t_i} = V_{\infty, t} + V_t = V_\infty \sin(\beta_i) + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j}{2\pi_j} \int \frac{\partial}{\partial s} \ln(r_{ij}) ds_j \quad \text{II(2.25)}$$

Le coefficient de pression au $i^{\text{ème}}$ point de contrôle est obtenu à partir de l'équation suivante :

$$C_{p_i} = 1 - \left(\frac{V_{t_i}}{V_\infty} \right)^2 \quad \text{II(2-26)}$$

II.3-TRANSFORMATION CONFORME :

II.3.1-INTRODUCTION :

Les transformations conformes sont utilisées pour étudier l'écoulement autour de profils d'aile obtenus à partir d'un cercle afin de déterminer les caractéristiques aérodynamiques d'un profil.

II.3.2-DEFINITION DE LA TRANSFORMATION CONFORME :

Soit Z et ζ deux variables complexes liées entre elles par une fonction analytique $Z = Z(\zeta)$ qui fait correspondre à chaque point du plan complexe Z un ou plusieurs points déterminés du plan ζ et inversement. La transformation est dite conforme si elle conserve les angles entre les directions tracées dans les deux plans complexes.

II.3.2.1- TRANSFORMATION D'UN CERCLE EN UN PROFIL

D'AILE :

Choisissons un cercle et une transformation de type suivant :

$$Z = Z(\zeta) = \zeta + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\zeta^i} \quad \text{II(3.1)}$$

Cette transformation satisfait la condition à l'infini car un point à l'infini dans le plan ζ se transforme en un point à l'infini dans le plan Z et la vitesse complexe $w(Z)$ est conservée au cours de cette transformation.

Si on dérive l'équation II(3-1) par rapport à la variable ζ on obtient :

$$\frac{dZ}{d\zeta} = 1 - \frac{a_1}{\zeta^2} - \frac{2a_2}{\zeta^3} - \frac{3a_3}{\zeta^4} \dots \quad \text{II(3.2)}$$

La vitesse complexe est définie par :

$$w(Z) = w(\zeta) \cdot \frac{1}{\frac{dZ}{d\zeta}} \quad \text{II(3.3)}$$

HYPOTHESE :

Supposons que : $\frac{dZ}{d\zeta} = 0$

$\zeta = \zeta_1, \zeta = \zeta_2, \dots, \zeta = \zeta_k$, les points ζ_1, \dots, ζ_k sont solutions de l'équation :

$$\left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\zeta_k}{\zeta}\right) = \frac{dZ}{d\zeta} = 0 \quad \text{II(3.4)}$$

Tel que

$$\sum_{i=1}^k \zeta_i = 0$$

c'est la condition que les racines ζ_i doivent satisfaire.

▪ Procédure de la transformation :

1. Choisir "k" points dans le plan " ζ " comme des zéros de la dérivée $\left(\frac{dZ}{d\zeta}\right) = 0$
2. La transformation peut être obtenue par intégration de l'équation :

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\zeta_k}{\zeta}\right) \quad \text{II(3.5)}$$

On obtient alors :

$$Z = Z(\zeta) = \zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{a_k}{\zeta^k}$$

Les coefficients a_1, a_2, \dots, a_k sont complexes et sont déterminés par :

$$\frac{dZ}{d\zeta} = 0 \quad \text{Pour } \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$$

3. On doit avoir :
$$\sum_{i=0}^k \zeta_i = 0$$

4. Choisir l'un des zéros comme bord de fuite ζ_f

5. Dessiner un cercle de centre quelconque, englobant tous les zéros et passant par ζ_f , avec un rayon $a = |\zeta_f - \mu|$, tel que " μ " est le centre du cercle.

6. Choisir la ligne joignant l'origine des coordonnées et le bord de fuite ζ_f comme axe réel (axe des abscisses), l'axe imaginaire est alors déterminé (axe des ordonnées). Si " ϑ " est l'argument de $(\zeta_f - \mu)$, on peut écrire :

$$e^{-i\vartheta} \rightarrow a \cdot e^{-i\vartheta} = \zeta_f - \mu$$

7. En choisissant des différents groupes de zéros de $\left(\frac{dZ}{d\zeta}\right)$ et différents cercles, on obtient une infinité de formes de profils d'ailes.

II.3.4-TRANSFORMATION DE JOUKOWSKI :

La transformation la plus connue et la plus simple que l'on peut obtenir par la procédure précédente est la suivante :

- On choisit deux solutions " ζ_1 " et " ζ_2 ", donc la troisième condition donne :

$$\zeta_1 + \zeta_2 = 0 \quad \text{donc} \quad \zeta_1 = -\zeta_2$$

- D'après la quatrième étape de la procédure, on choisit $\zeta_1 = \zeta_f$ et $\zeta_2 = -\zeta_f$ si on les remplace dans l'expression de $\left(\frac{dZ}{d\zeta}\right)$ on obtient :

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \left(1 - \frac{\zeta_f}{\zeta}\right) \left(1 + \frac{\zeta_f}{\zeta}\right) = 1 - \frac{\zeta_f^2}{\zeta^2} \quad \text{II(3.6)}$$

Après intégration, on aura :

$$Z(\zeta) = \zeta + \frac{\zeta_r^2}{\zeta}$$

Posant $\zeta_r = a$, où a est un réel positif, on obtient alors la transformation de JOUKOWSKI :

$$Z(\zeta) = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad \text{II(3-7)}$$

Cette transformation permet de générer une famille de profils d'aile appelés profils de JOUKOWSKI.

❖ PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION DE JOUKOWSKI :

- Les points $\zeta = a$ et $\zeta = -a$ se transforment en $Z = 2a$ et $Z = -2a$ respectivement.

- Le cercle $\zeta = a e^{i\theta}$ se transforme en un segment de l'axe réel

$$-2a < x < 2a.$$

- On peut exprimer les variables complexes Z et ζ comme suit

$$Z = x + iy \quad \text{et} \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

L'expression (5-7) devient alors :

$$x + iy = \xi + i\eta + \frac{a^2}{\xi + i\eta} \quad \text{II(3.8)}$$

On cherche à séparer la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression alors :

$$x + iy = \zeta + i\eta + a^2 \left[\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} - i \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \right] \quad \text{II(3.9)}$$

$$x + iy = \zeta \left[1 + \frac{a^2}{\xi^2 + \eta^2} \right] + i\eta \left[1 - \frac{a^2}{\xi^2 + \eta^2} \right] \quad \text{II(3.10)}$$

par identification on obtient :

$$x = \xi \left[1 + \frac{a^2}{\xi^2 + \eta^2} \right] \quad \text{II(3.11)}$$

$$y = \eta \left[1 - \frac{a^2}{\xi^2 + \eta^2} \right]$$

avec $\xi = R \cos \theta$, $\eta = R \sin \theta$, $\xi^2 + \eta^2 = R^2$ on obtient :

$$\begin{cases} x = \left(1 + \frac{a^2}{R^2} \right) R \cos \theta \\ y = \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right) R \sin \theta \end{cases} \quad \text{II(3.12)}$$

pour $R=R_0$ constante, alors on peut éliminer θ et on obtient :

$$\frac{x^2}{\left(R_0 + \frac{a^2}{R_0} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(R_0 - \frac{a^2}{R_0} \right)^2} = 1 \quad \text{II(3.13)}$$

c'est l'équation d'une ellipse dans le plan Z avec le foyer à $x=\pm 2a$

pour $\theta = \theta_0 = \text{constante}$ on peut éliminer R dans les équations précédentes et on obtient :

$$\frac{x^2}{(2a \cos \theta_0)^2} - \frac{y^2}{(2a \sin \theta_0)^2} = 1 \quad \text{II(3-14)}$$

C'est l'équation d'une hyperbole de foyers $x=\pm 2a$. On peut conclure que la transformation de JOUKOWSKI transforme des cercles centrés à l'origine dans le plan " ζ ", en une famille d'ellipses dans le plan " Z " et des rayons partant de " ζ " en une famille d'hyperboles.

II.3.4.1-FAMILLE DES PROFILS D'AILE SELON LA TRANSFORMATION DE JOUKOWSKI

1. PROFIL SYMETRIQUE

Ce type de profil s'obtient par la transformation du cercle de centre

$(\xi_0=(a-r), \eta_0=0)$ et de rayon R avec $R > a$ (**FIG II.3.1**)

$$\xi = \xi_0 + R \cdot \cos(\theta)$$

$$\eta = \eta_0 + R \cdot \sin(\theta) = R \cdot \sin(\theta)$$

on remplace x et y dans le système d'équation II (3-11), on obtient :

$$x = (\xi_0 + R \cos(\theta)) \left(1 + \frac{a^2}{\xi_0^2 + R^2 + 2R\xi_0 \cos(\theta)} \right)$$

$$y = R \sin(\theta) \left(1 - \frac{a^2}{\xi_0^2 + R^2 + 2R\xi_0 \cos(\theta)} \right)$$

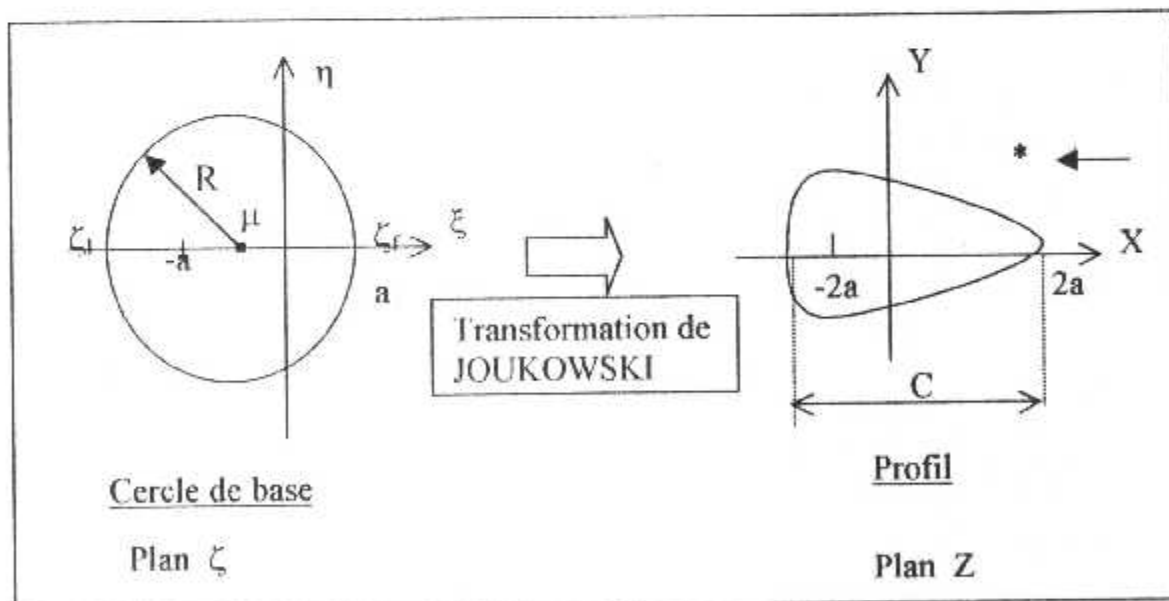


FIG II(3.1): LE PROFIL SYMETRIQUE OBTENUE PAR LA TRANSFORMATION DE JOUKOWSKI

2. PROFIL SOUELETTIQUE EN ARC DE CERCLE

Le profil squelettique en arc de cercle s'obtient si on maintient le cercle à un centre situé sur l'axe imaginaire (FIG II.3.2).

$$\mu (\xi_0 = 0, \eta_0 = b)$$

$$\xi = R \cos \theta$$

$$\eta = \eta_0 + R \sin \theta$$

après transformation on aura :

$$x = R \cos \theta \left(1 + \frac{a^2}{b^2 + R^2 + 2Rb \sin \theta} \right)$$

$$y = (b + R \sin \theta) \left(1 - \frac{a^2}{b^2 + R^2 + 2bR \cos \theta} \right)$$

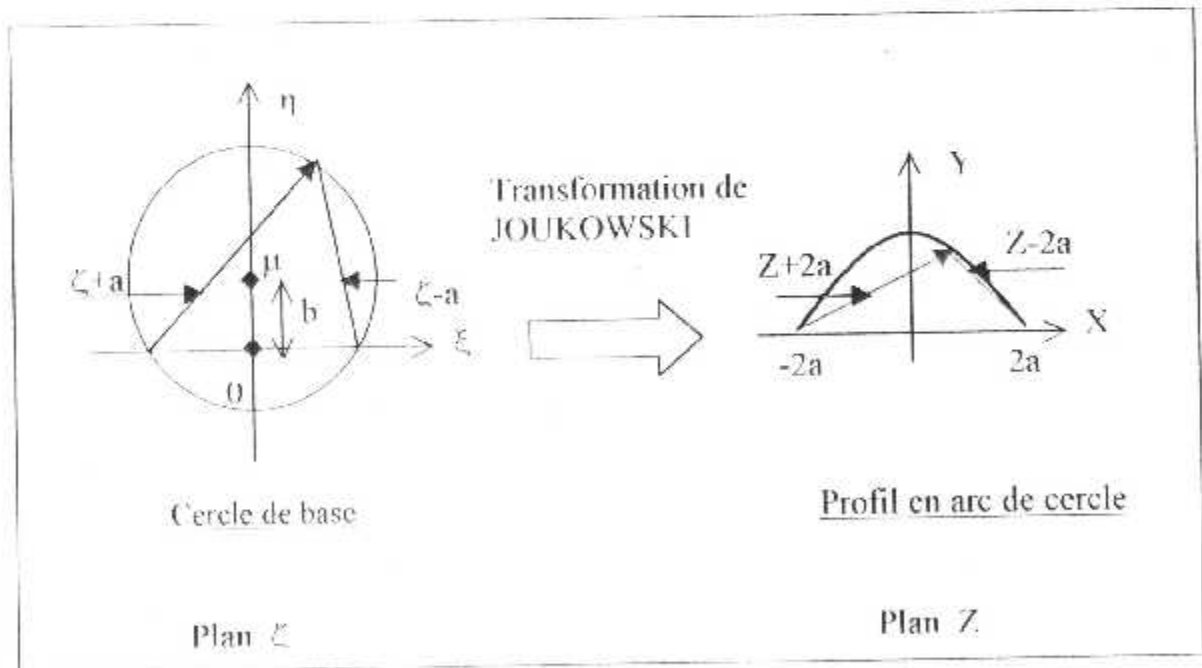


FIG. II-3-2: PROFIL EN ARC DE CERCLE PAR LA TRANSFORMATION DE JOUKOWSKI

3. PROFIL CAMBRE :

Dans ce cas les coordonnées de centre du cercle (ξ_0, η_0) sont différentes de zéro et son rayon R est différent de (a) , avec $R > a$, la transformation conforme nous donne un profil cambré.

II.3.5-TRANSFORMATION DE THEODORSEN :

La transformation définie par JOUKOWSKI représente la transformation la plus connue où l'écoulement autour d'un profil est réduit à celui le plus simple, autour d'un cercle.

Si la transformation de JOUKOWSKI est appliquée pour les profils d'ailes, la courbe résultante dans le plan ζ aura cependant une forme presque circulaire appelé pseudo-cercle.

THEODORSEN montra que l'écoulement sur le pseudo-cercle et par conséquent sur le profil d'aile peut être obtenu de l'écoulement autour d'un cercle réel par un processus de convergence rapide.

La dérivation des relations de THEODORSEN est partagée en trois parties :

1. La dérivation des relations entre l'écoulement dans le plan du profil d'aile et dans le plan du pseudo-cercle ζ' .
2. La dérivation des relations entre l'écoulement dans le plan du pseudo-cercle et dans le plan du cercle réel ζ .
3. La combinaison des relations précédentes pour obtenir l'expression finale de la distribution de vitesse dans le plan du profil d'aile Z (FIG II.3.3).

La relation de base entre le plan ζ' et le plan Z est :

$$Z = \zeta' + \frac{a^2}{\zeta'} \quad \text{II (3.15)}$$

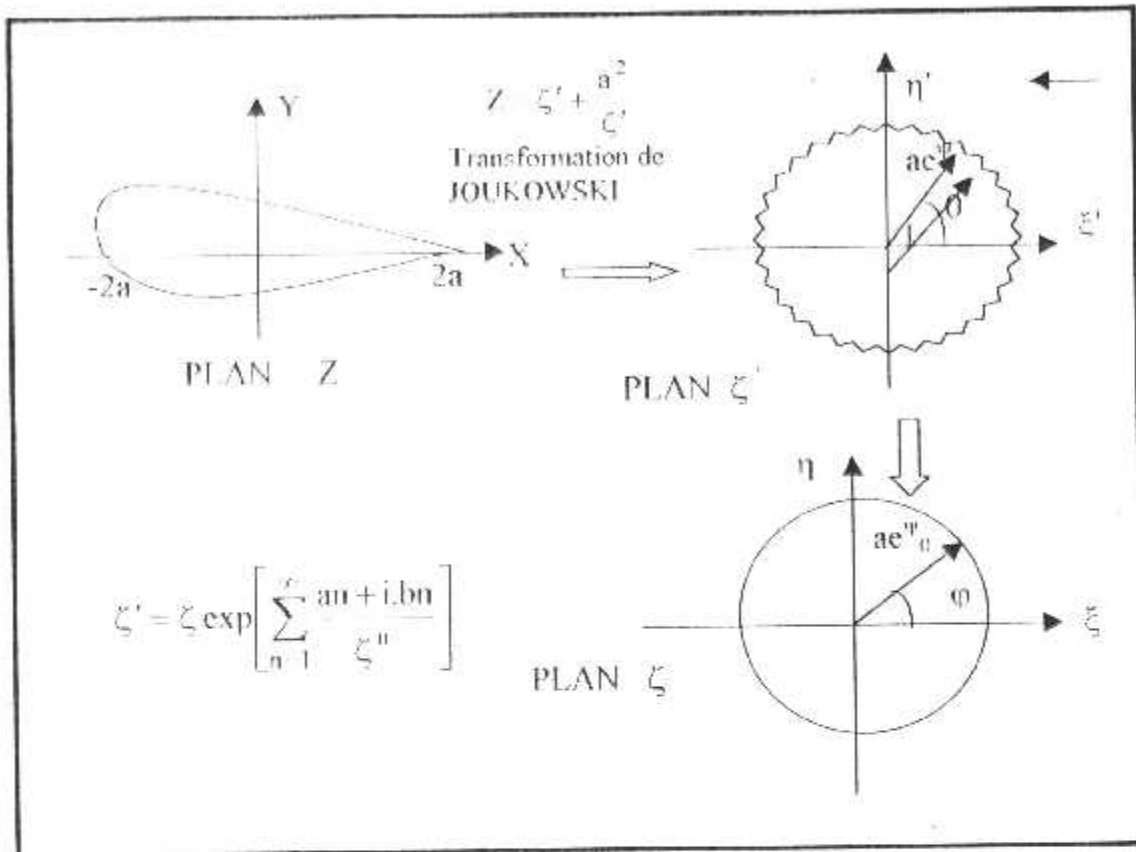


FIG II(3.3) : TRANSFORMATION DE THEODORSEN

II.3.5.1- PROCEDURE DE TRANSFORMATION DE THEODORSEN :

Les coordonnées de Z et ζ' sont définies par :

$$Z = x + iy \tag{II(3-16)}$$

$$\zeta' = a \cdot e^{i\theta} \tag{II(3-17)}$$

On remplace les équations II (3-16) et II (3-17) dans l'expression II (3-15), on obtient :

$$\begin{cases} x = 2a \cosh(\psi) \cdot \cos(\theta) \\ y = 2a \sinh(\psi) \cdot \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{II(3.18)}$$

à partir des relations II (3-18), on tire :

$$\cosh(\psi) = \frac{x}{2a \cos \theta} \quad \text{II(3.19)}$$

$$\sinh(\psi) = \frac{y}{2a \sin \theta}$$

$$\text{on a : } \cosh^2(\psi) - \sinh^2(\psi) = 1 \quad \text{II(3.20)}$$

On remplace l'expression II (3-19) dans l'équation II(3-20), on obtient :

$$\left(\frac{x}{2a \cos \theta} \right)^2 - \left(\frac{y}{2a \sin \theta} \right)^2 = 1 \quad \text{II(3.21)}$$

Après arrangement, l'équation II(3-21), devient :

$$\sin^4(\theta) + \left(\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4a^2} - 1 \right) \sin^2(\theta) - \frac{y^2}{4a^2} = 0 \quad \text{II(3.22)}$$

La résolution de cette équation nous donne,

$$\theta = \text{Arc sin} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(1 - \frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4a^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4a^2} - 1 \right)^2 + \frac{y^2}{a^2}} \right] \right\} \quad \text{II(3.23)}$$

$$\text{On a : } \cosh(\psi) + \sinh(\psi) = e^\psi \quad \text{II(3.24)}$$

On remplace les équations II(3-19) dans la formule II(3-24), on obtient :

$$\psi = \ln \left[\frac{x}{2a \cdot \cos(\theta)} + \frac{y}{2a \cdot \sin(\theta)} \right] \quad \text{II(3.25)}$$

Le facteur liant les vitesses dans le plan ζ' à ceux dans le plan Z est $\frac{dZ}{d\zeta'}$. à partir de l'équation II (3-15) on obtient :

$$\frac{dZ}{d\zeta'} = 1 - \left(\frac{a^2}{\zeta'^2} \right) = \frac{1}{\zeta'} \left(\zeta' - \left(\frac{a^2}{\zeta'} \right) \right) \quad \text{II (3.26)}$$

On remplace l'équation II (3-17) dans l'expression II (3-26), et après simplification, on a :

$$\frac{dZ}{d\zeta'} = \frac{1}{\zeta'} [2.a \cos(\theta) \sinh(\psi) + 2.ia \sin(\theta) \cosh(\psi)] \quad \text{II(3.27)}$$

Déterminant la relation entre l'écoulement dans le plan ζ' et celui dans le plan ζ . Les coordonnées du plan ζ sont définies par :

$$\zeta = a e^{\lambda + i\varphi} \quad \text{II(3.28)}$$

Avec :

- $a e^{\lambda}$ est le rayon vecteur ζ
- φ est l'argument de ζ

Le pseudo-cercle est transformé en un cercle dans le plan ζ par la transformation suivante :

$$\zeta' = \zeta \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an + ibn)}{\zeta^n} \right] \quad \text{II(3.29)}$$

À partir des définitions de ζ et de ζ' , on obtient :

$$\zeta' = \zeta e^{\psi - \lambda + i(\theta - \varphi)} \quad \text{II(3.30)}$$

$$\text{Par conséquent : } \psi - \lambda + i(\theta - \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (an + ibn) \frac{1}{\zeta^n} \quad \text{II(3.31)}$$

On remplace ζ par sa forme polaire, c'est à dire :

$$\zeta = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \quad \text{II(3.32)}$$

$$\text{avec } r = a.e^{\lambda} \quad \text{II(3.33)}$$

L'équation II(3-31) devient alors :

$$\begin{aligned} (\psi - \lambda) + i(\theta - \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{r^n} \cos(n\varphi) + \frac{bn}{r^n} \sin(n\varphi) \right) \\ &+ i \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{an}{r^n} \sin(n\varphi) + \frac{bn}{r^n} \cos(n\varphi) \right) \end{aligned} \quad \text{II(3.34)}$$

En égalisant les parties imaginaires et les parties réelles de l'équation II(3-34), on obtient les séries de FOURRIER suivantes :

$$\begin{aligned} \psi - \lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{an}{r^n} \cos(n\varphi) + \frac{bn}{r^n} \sin(n\varphi) \right] \\ \theta - \varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{bn}{r^n} \cos(n\varphi) - \frac{an}{r^n} \sin(n\varphi) \right] \end{aligned} \quad \text{II(3.35)}$$

Afin que l'écart entre le pseudo-cercle et le cercle réel soit minimum, la valeur de λ correspondant au rayon du cercle réel est prise égale à :

$$\lambda = \psi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi \, d\varphi \quad \text{II(3.36)}$$

La transformation requise du pseudo-cercle au cercle réel est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = a e^{\psi - \psi_0 + i(\theta - \varphi)} \quad \text{II(3.37)}$$

La fonction ψ est écrite sous la forme trigonométrique finie.

$$\psi(\varphi) = \psi_0 + \sum_{m=1}^{n-1} [A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)] + a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi) \quad \text{II(3.38)}$$

La fonction ψ peut être spécifiée au niveau des points équidistants $\left(0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, (2n-1) \frac{\pi}{n}\right)$ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ alors l'équation II(3.36) peut s'écrire :

$$\psi_{\theta} = \left(\frac{1}{2n}\right) \sum_{r=0}^{2n-1} \psi_r \quad \text{II(3.39)}$$

où ψ_r correspond à la valeur de ψ à $\varphi = \frac{r\pi}{n}$ avec $r=1, 2, \dots, 2n-1$

D'après la définition des séries de FOURRIER, on tire directement,

$$A_m = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{2n-1} \psi_r \cos\left(m r \frac{\pi}{n}\right) \quad \text{II(3.40)}$$

$$B_m = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{2n-1} \psi_r \sin\left(m r \frac{\pi}{n}\right) \quad \text{II(3.41)}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{2n-1} (-1)^r \psi_r \quad \text{et} \quad b_n = 0 \quad \text{II(3.42)}$$

Alors, l'équation II(3-35) peut s'écrire :

$$\varphi - \theta = \varepsilon(\varphi) = \sum_{m=1}^{n-1} [A_m \sin(m\varphi) - B_m \cos(m\varphi)] + a_n \sin(n\varphi) \quad \text{II(3.43)}$$

Après simplification et arrangement, on obtient :

$$\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{2n-1} \psi_r \sum_{m=1}^{n-1} \sin\left(m \left(\varphi - \left(\frac{r\pi}{n}\right)\right)\right) + \frac{1}{2n} (\sin(n\varphi)) \sum_{r=0}^{2n-1} (-1)^r \psi_r \quad \text{II(3.44)}$$

Si ε est évalué aux mêmes points où ψ est donné, c'est à dire aux points,

$\varphi_s = \frac{r'\pi}{n}$ et le dernier terme de l'équation II(3.44) s'annule et la variable

$\left(\varphi - \frac{r\pi}{n}\right)$ devient :

$$\varphi - \frac{r\pi}{n} = \varphi_s - \frac{r\pi}{n} = \frac{r'\pi}{n} - \frac{r\pi}{n} = (r' - r)\frac{\pi}{n} = -k\frac{\pi}{n} \text{ avec } k = r - r'$$

Enfin, l'équation II(3-44) s'écrit :

$$\sum_{m=1}^{n-1} \sin\left(m.k.\frac{\pi}{n}\right) \begin{cases} \cot\left(\frac{k.\pi}{2n}\right) & k : \text{impair} \\ 0 & k : \text{pair} \end{cases} \quad \text{II(3.45)}$$

d'où :

$$\varepsilon(\varphi) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n-1} \psi_k \cot\left(\frac{k.\pi}{2n}\right) \quad k : \text{impair} \quad \text{II(3.46)}$$

De l'expression II(3-37) on peut tirer le facteur liant les vitesses dans le pseudo-cercle et le cercle réel.

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta'}{d\zeta} &= \zeta' \left[\frac{1}{\zeta} + \frac{d}{d\zeta} [(\psi - \psi_0) + i(\theta - \varphi)] \right] \\ &= \zeta' \frac{d}{d\zeta} [\psi + i(\theta - \varphi) + \ln(\zeta)] \end{aligned} \quad \text{II(3.47)}$$

Puisque $\zeta = a.e^{\psi_0 + i\varphi}$ sur le cercle réel alors :

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{d}{d\zeta} \ln \zeta = \frac{d(i\varphi)}{d\zeta} \quad \text{II(3.48)}$$

Cette relation nous permet de simplifier l'expression II(3-47) :

$$\frac{d\zeta'}{d\zeta} = \zeta' \left(\frac{d(\psi + i\theta)}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{d\zeta} \quad \text{II(3.49)}$$

A partir de la relation II(3-47) on a :

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = i \zeta \left[1 + \frac{d(\varphi - \theta)}{d\theta} \right]$$

$$\text{donc : } \frac{d\zeta'}{d\zeta} = \frac{\zeta'}{\zeta} \cdot \frac{d}{d\theta} (\theta - i\psi) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{d\varepsilon}{d\theta} \right)} \quad \text{avec } \varepsilon = \varphi - \theta$$

finalement on obtient :

$$\frac{d\zeta'}{d\zeta} = \frac{\zeta'}{\zeta} \cdot \frac{1 - i \left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)}{1 + \left(\frac{d\varepsilon}{d\theta} \right)} \quad \text{II(3.50)}$$

Dans le cercle réel de rayon $(a \cdot e^{\psi_0})$ l'écoulement est décrit par le potentiel complexe suivant :

$$W = V_{\infty} \left(\zeta + \left(a^2 \cdot \frac{e^{2\psi_0}}{\zeta} \right) \right) + i \cdot \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{\zeta}{a \cdot e^{\psi_0}} \right) \quad \text{II(3.51)}$$

La vitesse sur le cercle réel est donnée par :

$$\frac{dW}{d\zeta} = V_{\infty} \left(1 - a^2 \cdot \frac{e^{2\psi_0}}{\zeta^2} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi\zeta} \quad \text{II(3.52)}$$

Introduisant la condition de KUTTA-JOUKOWSKI pour faire correspondre le bord de fuite du profil d'aile avec le point arrière de stagnation. L'écoulement autour du cylindre est dévié d'un angle α_0 égale à l'angle d'attaque du profil.

Ce processus se fait à un angle d'attaque nul et le bord de fuite correspond au point :

$$\zeta = a \cdot e^{\psi_0 + i\varepsilon}$$

$$\Gamma = 4\pi a \cdot e^{\psi_0} \cdot V_\infty \cdot \sin(\alpha_0 + \varepsilon_f)$$

En substituant la valeur générale de ζ dans l'équation II(3-52) on obtient

$$\zeta = a \cdot e^{\psi_0 + i(\alpha_0 + \varphi)}$$

$$\frac{dW}{d\zeta} = V_\infty \left[1 - e^{-2i(\alpha_0 + \varphi)} + 2i \sin(\alpha_0 + \varepsilon_f) - e^{-(\alpha_0 + \varphi)} \right] \quad \text{II(3.53)}$$

et

$$\left| \frac{dW}{d\zeta} \right| = 2 \cdot V_\infty \left[\sin(\alpha_0 + \varphi) + \sin(\alpha_0 + \varepsilon_t) \right] \quad \text{II(3.54)}$$

L'étape suivante consiste à obtenir les vitesses dans le plan du profil d'aile à partir de l'expression de vitesse dans le plan du cercle réel.

L'expression pour la vitesse dans le plan du profil d'aile est :

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{dW}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\zeta'} \cdot \frac{d\zeta'}{dZ} \quad \text{II(3.55)}$$

En multipliant l'équation II(3-27) et II(3-50), et après simplification et passage à la valeur absolue, on obtient :

$$\left| \frac{dZ}{d\zeta} \right| = \frac{2}{e^{\psi_0}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2}}{\left[1 + \frac{d\varepsilon}{d\theta} \right]} \cdot \sqrt{\sinh^2(\psi) + \sin^2(\theta)} \quad \text{II(3.56)}$$

En divisant l'équation II(3-54) par cette expression on obtient l'équation suivante :

$$\left| \frac{dW}{dZ} \right| = v = V_\infty \frac{[\sin(\alpha_0 + \varphi) + \sin(\alpha_0 + \varepsilon_f)] \left[1 + \frac{d\varepsilon}{d\theta} \right] e^{\psi_0}}{\sqrt{\sinh^2(\psi) + \sin^2(\theta)} \left[1 + \left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 \right]} \quad \text{II(3.57)}$$

avec :

v : vitesse locale à n'importe quel point sur la surface de profil.

V_∞ : la vitesse à l'infini amont.

Le coefficient de pression est donc donné par l'équation suivante :

$$C_p = 1 - \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^2 \quad \text{II(3.58)}$$

La première approximation est suffisamment Proche de la solution exacte. Si la précision choisie est grande, une seconde approximation peut être déterminée par variation de ψ en fonction de $(\theta + \epsilon)$.

CHAPITRE III:
THEORIE DES AILES FINIS

III- THORIE DES AILES FINIS

III.1- DEFINITION :

La voilure est l'élément sustentateur de l'avion, elle présente un plan de symétrie confondu à celui de l'avion.

La partie supérieure de l'aile est l'extrados, sa partie inférieure est l'intrados. On appelle respectivement bord d'attaque et bord de fuite l'avant et l'arrière de l'aile.

III.1.1-SURFACE DE REFERENCE (S) :

Par convention, la surface de référence d'un avion est la surface projetée sur un plan horizontal des deux ailes et de la partie du fuselage comprise entre ces deux ailes (parties hachurées). (fig.III.1.1).

III.1.2- CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES D'UNE

VOILURE:

- profil de référence :

Sur les avions modernes le profil diffère au fur et à mesure que l'on s'éloigne du fuselage. On dit que l'aile est vrillée.

Il faut distinguer le vrillage géométrique et le vrillage aérodynamique.

Il y a vrillage géométrique quand le profil reste semblable à lui-même le long de l'aile, seul l'angle de calage varie.

Il y a vrillage aérodynamique quand la courbure du profil varie le long de l'aile.

Généralement les profils de référence sont choisis au niveau de l'encastrement de l'aile dans le fuselage.

- Envergure d'une aile (B) :

C'est la longueur d'une extrémité de la voilure à l'autre comptée perpendiculairement à l'axe longitudinal de l'avion.

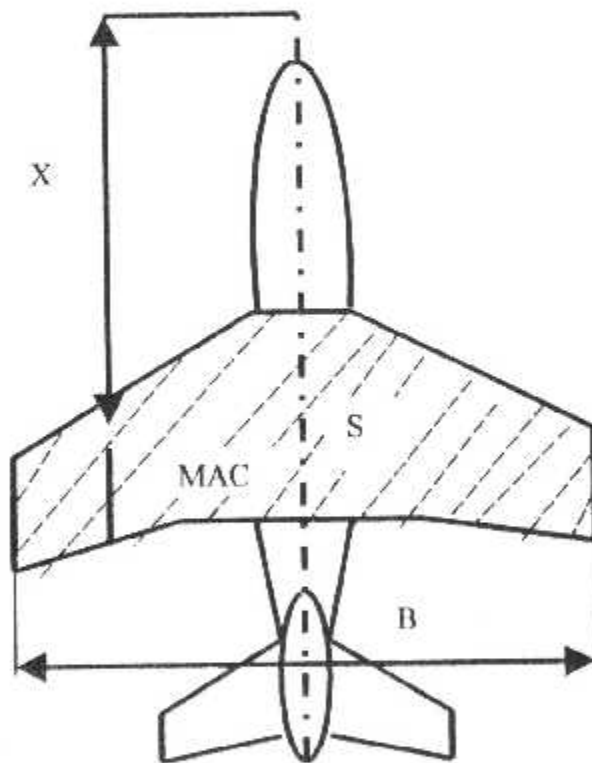
- *Corde moyenne (ou profondeur moyenne)(lm) :*

La profondeur étant plus grande à l'emplanture qu'aux extrémités.

On définit une profondeur moyenne lm par le rapport :

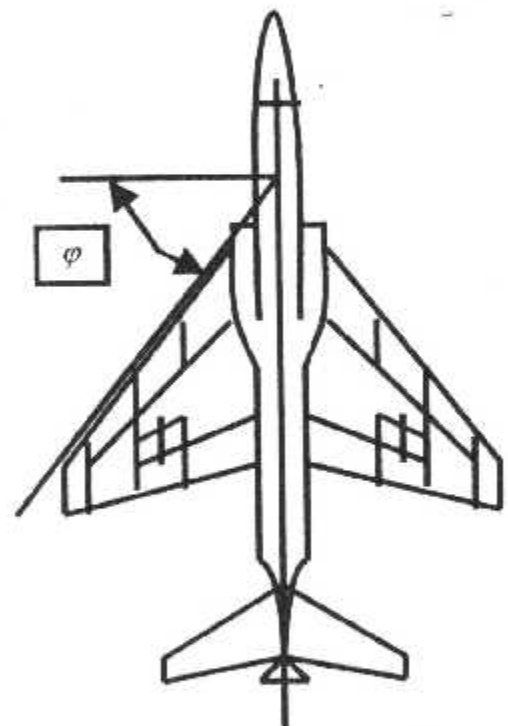
$$lm = \frac{S}{B} = \frac{\text{Surface de référence}}{\text{Envergure}}$$

a- Surface de référence (S)



Fig(III.1.1)

flèche d'une voilure (φ)



Fig(III.1.2)

C A M: corde Aerodynamique moyenne .

❖ *Allongement :*

L'allongement d'une voilure est définie par le rapport :

$$\lambda = \frac{B^2}{S}$$

❖ *Dièdre d'une voilure (δ)*

C'est l'angle que fait le plan des cordes de chaque aile (plan de l'aile) avec le plan horizontal perpendiculaire au plan de symétrie de l'avion.

Le dièdre géométrique peut être : (fig III.1.2.1)

- positif, $\delta > 0$
- négatif, $\delta < 0$
- nul, $\delta = 0$
- flèche φ : on distingue trois flèches : (Fig III.1.2.2)

φ : flèche au bord d'attaque .

φ : flèche au bord de fuite.

φ : flèche à 25% de la corde.

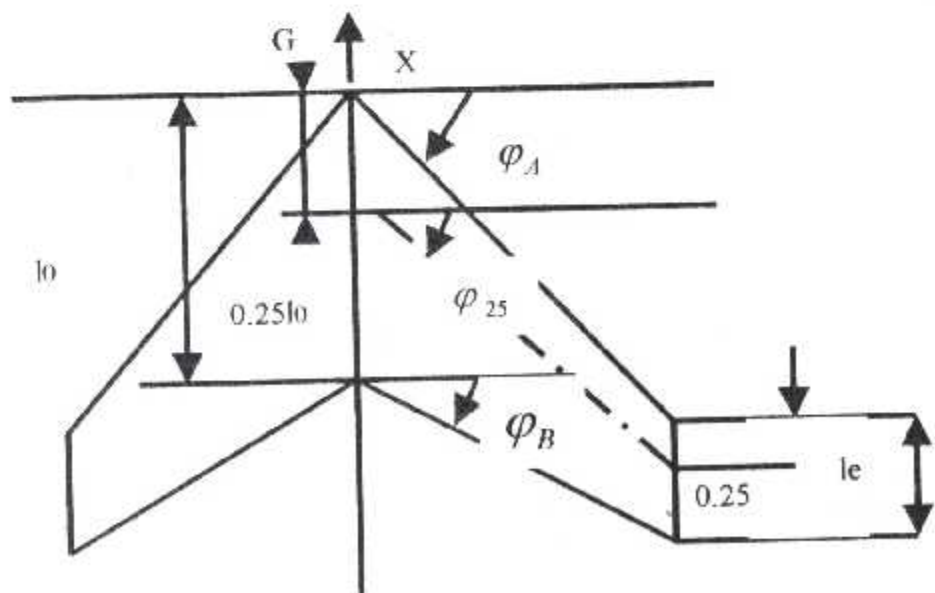


FIG (III.1.4)

La flèche est positive quand le bord d'attaque de l'aile se trouve en arrière de l'axe Gy.

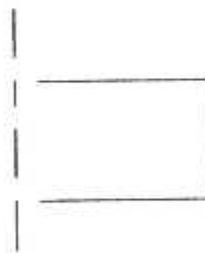
III.1.3- FORME EN PLAN

Les ailes se différencient aussi par leur forme en plan ; il est possible de grouper ces formes en trois groupes :

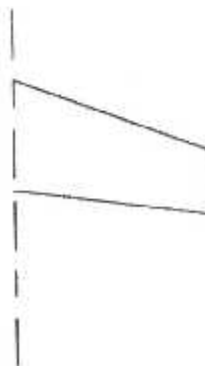
- Aile de grand et moyen allongement et de faible flèche.
- Aile d'allongement et de flèche moyens .
- Aile de faible allongement et de grande flèche, qui correspondent respectivement aux trois catégories d'avion dans leur domaine usuel d'utilisation :
- Avions subsoniques $M < 0,6$.
- Avions transsonique $0,7 < M < 1$
- Avions supersonique $M > 1,2$

Ces différentes formes sont illustrées par les exemples ci-après

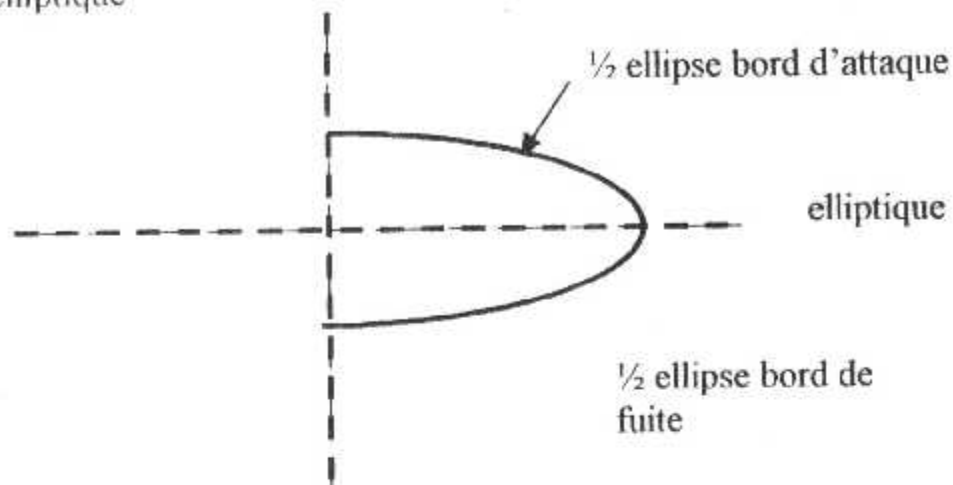
1- aile rectangulaire :



2- Aile trapézoïdal



2- Aile elliptique



Ce type d'aile présente d'excellentes qualités aérodynamiques théoriques (traînée induite) est actuellement très peu utilisé.

- aile à flèche moyenne : exp : AEROSPATIALE SN 600 corvette (FRANCE).
- aile à grand flèche exp : AMDBA MIRAGE F1 (FRANCE).
- aile delta « Δ » exp : AMDBA MIRAGE III.E (FRANCE).
- Aile en « fer de lance » : exp : LOCKEED SR 71 (USA)
- Aile « gothique » : exp : AEROSPATIALE BAC concorde
- TUPOLEV TU 144

III.2- THEORIE DE LA LIGNE PORTANTE DE

PRANDTL :

III.2.1- GENERALITES :

La première méthode utilisée pour calculer les caractéristiques aérodynamiques d'une aile finie a été développé par « LUDWING PRANDTL » et ses collègues à GOTTINGEM, durant la période 1911-1918.

La théorie de PRANDTL est très importante car elle est utilisée actuellement pour des calculs préliminaires des caractéristiques d'une aile.

III.2.2-DESCRIPTION DE LA THEORIE DE LA LIGNE

PORTANTE DE PRANDTL :

Le raisonnement de PRANDTL pour ce problème était comme suit : un tourbillon d'intensité Γ qui est d'une manière ou d'une autre limité à une situation constante de l'écoulement, va exercer une force $L = \rho_{\infty} v_{\infty} \Gamma$, « d'après le théorème de KUTTA - JOUKOWSKI ».

Ce tourbillon lié (Bound Vortex) ainsi qu'un tourbillon libre (FREE VORTEX), qui se déplacent avec les mêmes éléments du fluide partout dans l'écoulement.

Le modèle de PRANDTL considère que tous les tourbillons sont parallèles et peuvent être réunis en un seul segment dit segment porteur ou ligne portant, le long de laquelle la circulation $\Gamma(y)$ est continue.

Par conséquent, pour une aile plane, ayant OX comme axe de symétrie. La théorie de PRANDTL admet qu'une nappe tourbillonnaire plane s'étend vers l'infini dans le prolongement de l'aile. Cette nappe est formée de tourbillons libres superposés et de circulation $d\Gamma$ (fig III.2.1)

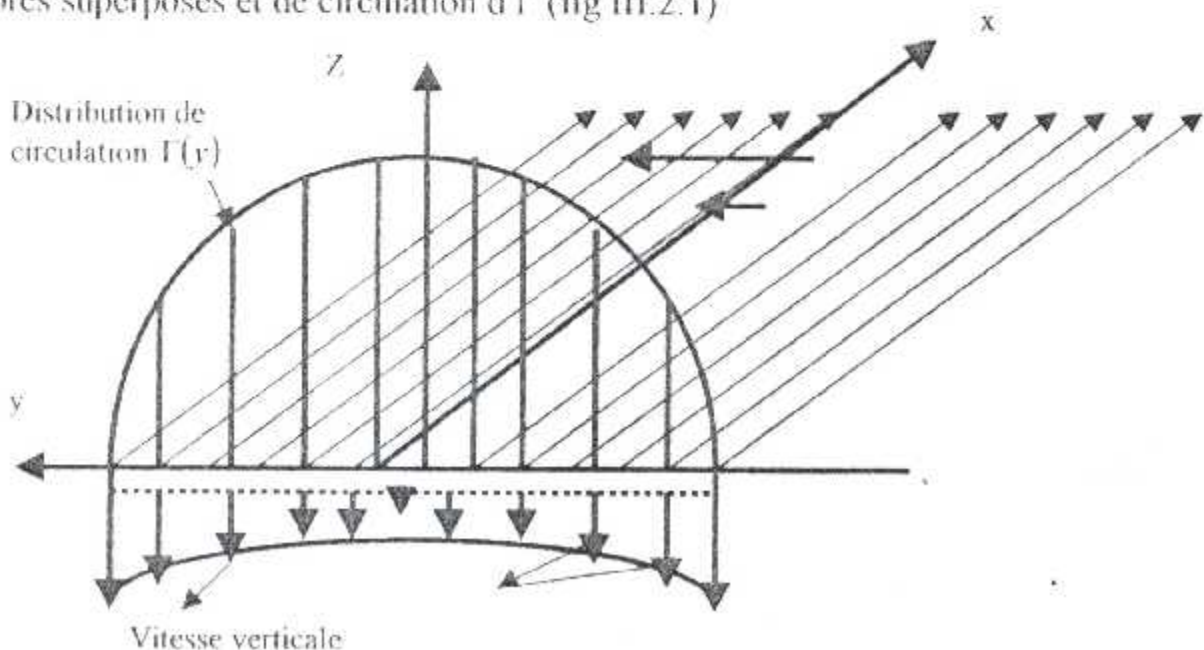


FIG III(2.1) Superposition d'un nombre fini de tourbillons en fer à cheval

Chaque paire de tourbillons est associée à un tourbillon en fer à cheval.

L'intensité de chaque tourbillon est égale à la variation de la circulation le long de la ligne portante.

La vitesse induite à y_0 par tous les tourbillons libres est définie par l'expression suivante :

$$w_i(y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)}{y_0 - y} dy \quad \text{III(2.1)}$$

III.2.3- PRINCIPES DE LA THEORIE DE LA LIGNE PORTANTE :

Cette théorie consiste à remplacer une aile par un modèle de la ligne portante le long de laquelle la circulation $\Gamma(y)$ varie sans interruption, le problème est de calculer la circulation $\Gamma(y)$ pour une aile donnée ou se trouve la portance total et la traîné induite .

L'angle d'attaque induit est donné par :

$$\alpha_i(y_0) = \tan^{-1} \left(\frac{-w(y_0)}{V_\infty} \right) \quad \text{III(2.2)}$$

Généralement w_i est très petite par rapport a V_∞ donc l'angle d'attaque induit peut être déterminé par :

$$\alpha_i(y_0) = \frac{-w_i(y_0)}{V_\infty} \quad \text{III(2.3)}$$

En substituant l'équation III(2-3) dans III(2-3), on obtient l'expression de l'angle d'attaque induit :

$$\alpha_i(y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)}{y_0 - y} dy \quad \text{III(2.4)}$$

L'équation fondamentale de la ligne portante qui détermine l'angle d'attaque géométrique à y_0 s'écrit :

$$\alpha(y_0) = -\frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_0(y_0) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)}{y_0 - y} dy \quad \text{III(2.5)}$$

III.2.3.1- LA DISTRIBUTION DE LA PORTANCE :

La distribution de portance est obtenue à partir du théorème de Kutta JOUKOWKI

$$L'(y_0) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0) \quad \text{III(2.6)}$$

III.2.3.2- LA PORTANCE TOTALE :

Elle est obtenue en intégrant l'équation III (2.6)

$$L_c = \int_{b/2}^{b/2} L'(y) dy \quad \text{III(2.7)}$$

ou bien

$$L_c = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) dy \Gamma(y) dy \quad \text{III(2.8)}$$

de cette équation on peut tirer la valeur du coefficient de portance

$$C_{L_i} = \frac{L}{q_{\infty} S} = \frac{2}{V_{\infty} S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad \text{III(2.9)}$$

III.2.3.3- LA TRAINEE INDUITE :

Et enfin la traînée induite totale est déterminée par l'équation suivante :

$$D_i = \rho_{\infty} V_{\infty} \int_{-B/2}^{B/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad \text{III(2.10)}$$

Le coefficient de traînée est donné par

$$C_{Di} = \frac{D_i}{q_{\infty} S} = \frac{2}{V_{\infty} S} \int_{-B/2}^{B/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad \text{III(2.11)}$$

III.2.4- DISTRIBUTION ELLIPTIQUE DE PORTANCE :

Considérons une distribution de circulation donnée par :

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad \text{III(2.12)}$$

Γ_0 est la circulation à l'origine, la circulation varie elliptiquement avec la distance y le long de l'envergure, elle est dite circulation elliptique.

Voir figure III(2.2)

Donc nous aurons une distribution elliptique de portance :

$$L'(y) = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad \text{III(2.14)}$$

$\Gamma(b/2) = \Gamma(-b/2) = 0$, ainsi la circulation et la portance tendent vers zéro à l'extrémité de l'aile.

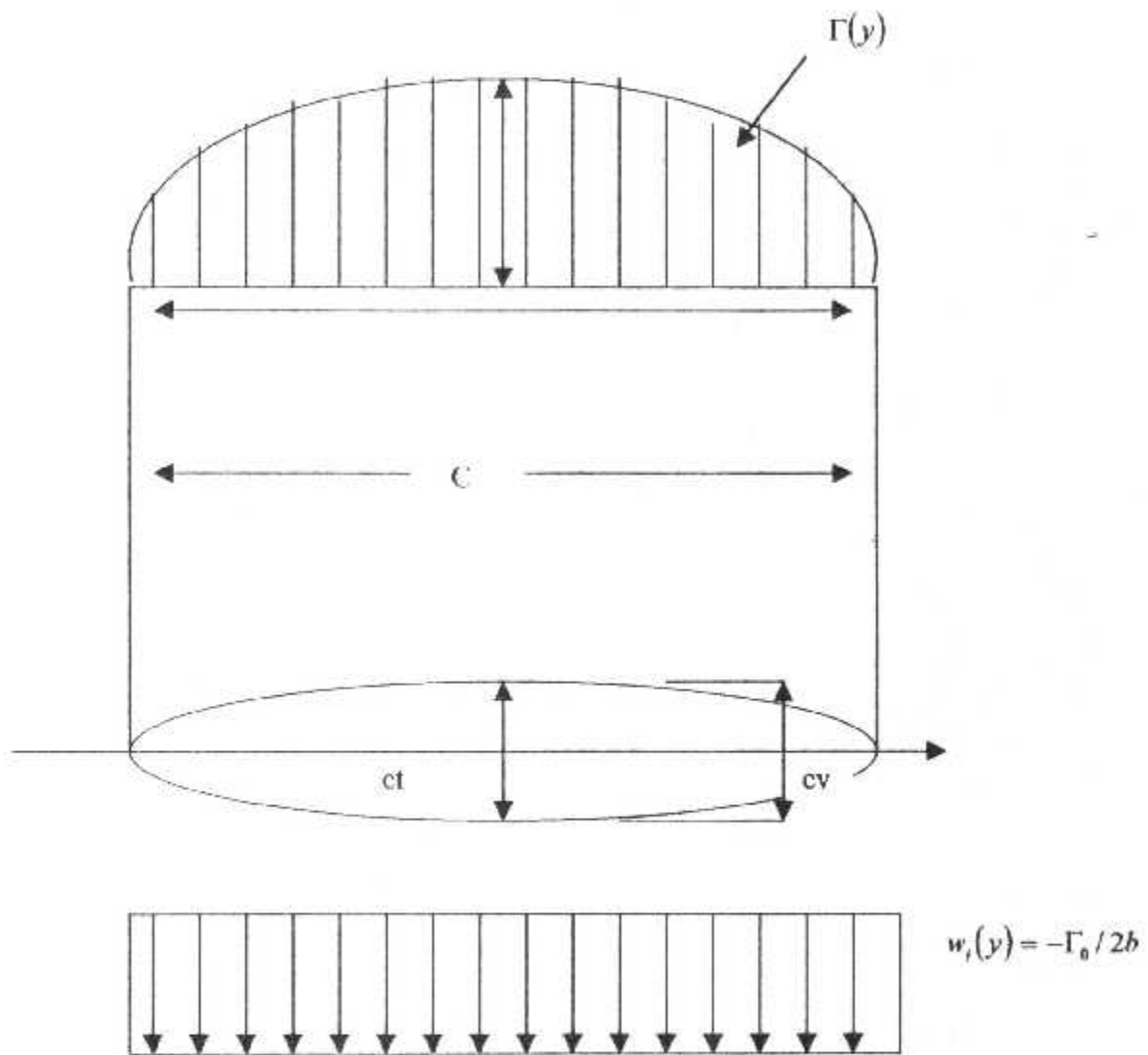


Fig III (2.2) Distribution elliptique de portance

III.2.4.1- PROPRIETES DYNAMIQUES :

Dans le but de déterminer les caractéristiques aérodynamiques pour une aile ayant une distribution elliptique, on calcul la déflexion des filets d'air vers le bas, on différencions l'équation III(2.12).

$$\frac{d\Gamma}{dy} = \frac{4\Gamma_0}{b^2} \frac{y}{(1 - 4y^2/b^2)^{1/2}} \quad \text{III(2.15)}$$

Substituons cette équation dans l'équation III(2.1) et on fait le changement de variable suivant :

$$y = b/2 \cos \theta$$

$$dy = -b/2 \sin \theta d\theta$$

on obtient :

$$w_i(\theta_0) = \frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta} d\theta \quad \text{III(2.16)}$$

nous évaluons cette intégrale :

$$w_i(\theta_0) = -\Gamma_0 / 2b \quad \text{III(2.17)}$$

ce qui signifie que la vitesse induite est constante le long de l'envergure pour une distribution elliptique de portance.

On remplace, l'équation III(2.18) dans l'équation III(2.4), l'angle d'attaque induit sera donné par :

$$\alpha_i = -w_i / v_\infty = \Gamma_0 / 2b v_\infty \quad \text{III(2-19)}$$

On substituons l'équation III(2.12) dans l'équation III(2.8), l'expression de la portance sera :

$$L = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_0 \int_{-b/2}^{b/2} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^{1/2} dy \quad \text{III(2.20)}$$

On faisons toujours la même transformation la valeur de l'intégrale sera :

$$L = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_0 \frac{b}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_0 \frac{b}{4} \Pi \quad \text{III(2.21)}$$

d'où :

$$\Gamma_0 = \frac{4L}{\rho_{\infty} V_{\infty} b \Pi} \quad \text{III(2.22)}$$

sachant que :

$$L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 SC_L$$

l'équation III(2.22) devient

$$\Gamma_0 = \frac{2V_{\infty} SC_L}{b \Pi} \quad \text{III(2.23)}$$

ensuite remplaçons la valeur de Γ_0 dans l'équation III (2.19), pour avoir l'expression de l'angle d'attaque induit qui est donné par :

$$\alpha_i = \frac{2V_\infty SC_L}{b\Pi} \frac{1}{2bV_\infty}$$

$$\alpha_i = \frac{SC_L}{\Pi b^2} \quad \text{III(2.24)}$$

Sachant que l'allongement AR qui est l'envergure au carré sur la surface :

$$AR = b^2 / s$$

L'équation III(2.25) aura la forme :

$$\alpha_i = \frac{SL}{\Pi AR} \quad \text{III(2.26)}$$

III.2.4.2-COEFFICIENT DE TRAINEE INDUITE :

Le coefficient de traînée induite est obtenu à partir de l'équation III(2.11).

$$C_{Di} = \frac{2\alpha_i}{V_\infty s} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \frac{2\alpha_i \Gamma_0}{V_\infty s} \frac{b}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{\Pi \alpha_i \Gamma_0 b}{2V_\infty s} \quad \text{III(2.27)}$$

Substituons l'équation III(2.23) et III(2.25) dans III(2.26) on obtient :

$$C_{Di} = \frac{\Pi b}{2V_\infty s} \left(\frac{C_L}{\Pi AR} \right) \left(\frac{2V_\infty SC_L}{b\Pi} \right)$$

$$CD_{Di} = \frac{C_L^2}{\Pi AR} \quad \text{III(2.28)}$$

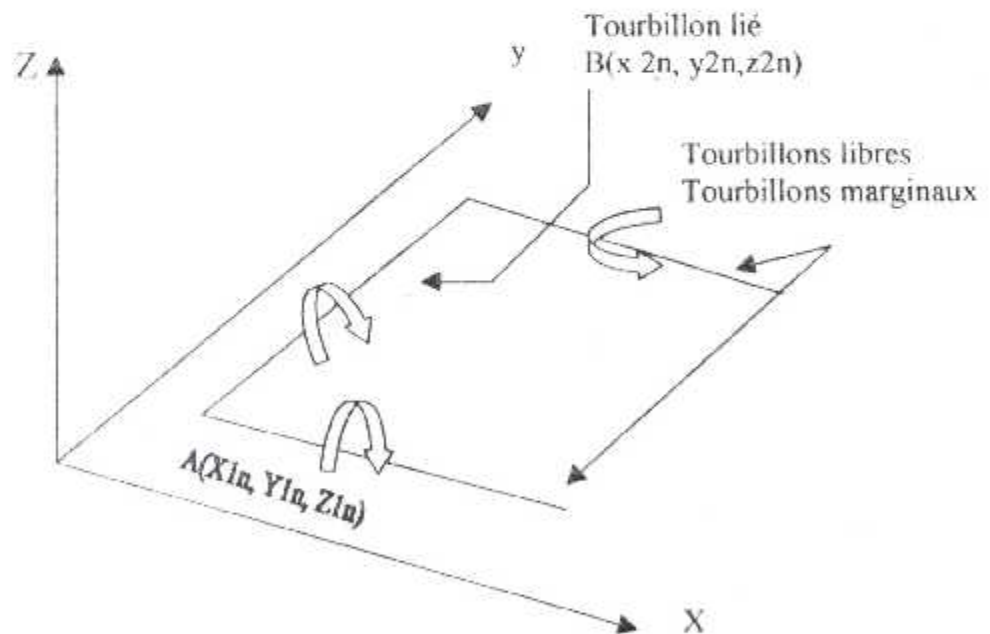
III.3- THEORIE DE LA SURFACE PORTANTE :

III.3.1- INTRODUCTION :

La méthode de PRANDTL donne des résultats satisfaisants pour les ailes de grand allongement et sans flèche, cependant, pour les ailes à faible allongement, les ailes en flèche et les ailes en delta, cette méthode n'est pas appropriée. Pour cela d'autres méthodes ont été développées pour détermination des caractéristiques aérodynamiques de ces ailes tel que la méthode des panneaux.

III.3.2- ASPECTS THEORIQUES :

Cette méthode consiste à diviser une aile en plusieurs panneaux, dont chacun comporte un tourbillon en fer à cheval, qui est formé de deux tourbillons aux extrémités (tourbillon marginaux) et un tourbillon en amont (vortex lié) (fig III.3.1).



*Fig (III.3.1) : Représentation d'un tourbillon en fer à cheval
(nappe tourbillonnaire)*

Le tourbillon lié coïncide avec le quart de la corde du panneau. Le point de contrôle de chaque panneau est situé au trois quart de la corde, au milieu entre deux tourbillons marginaux: Fig (III.3.2).

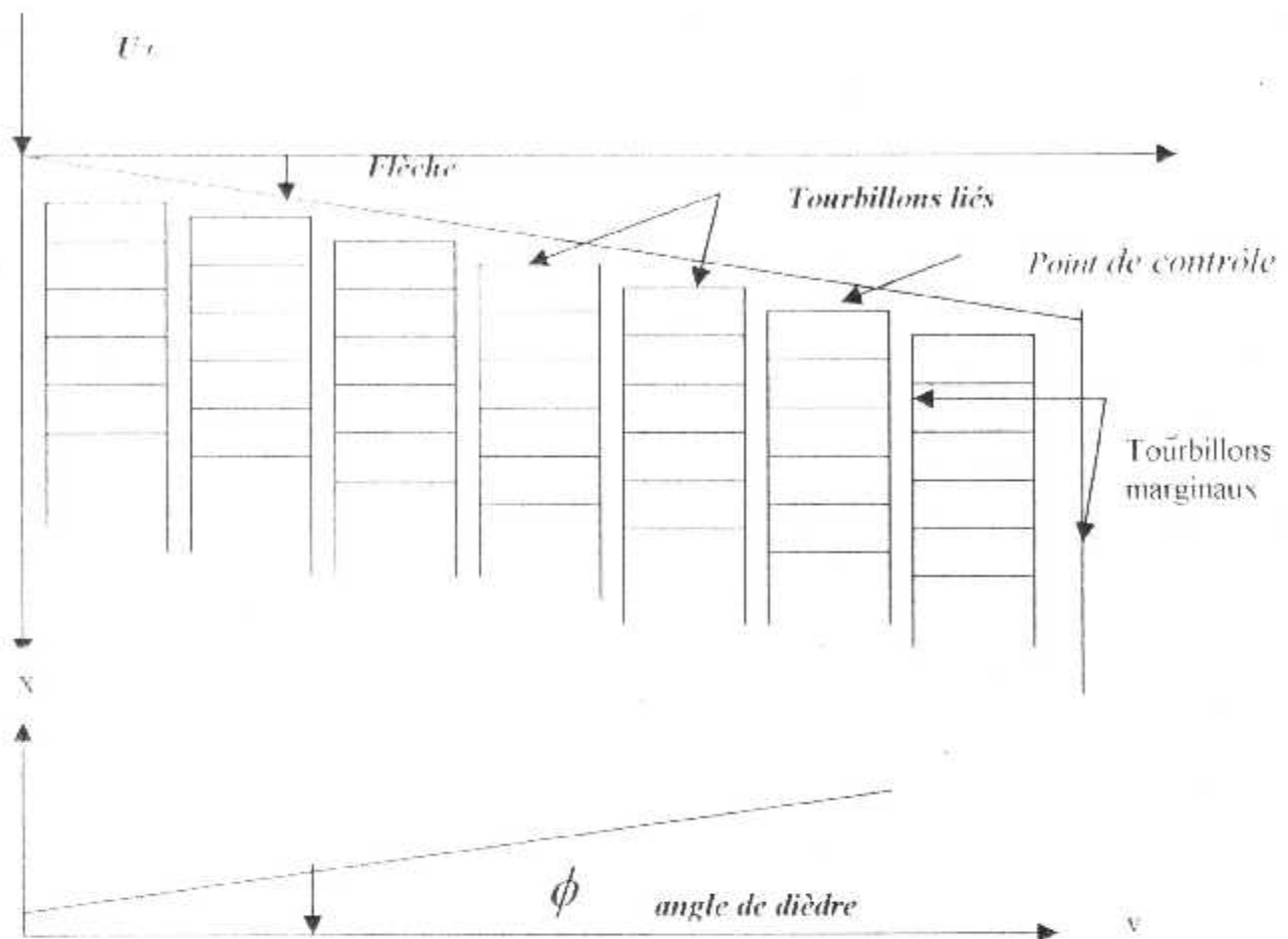


FIG III.3.2 Représentation des tourbillons en fer à cheval

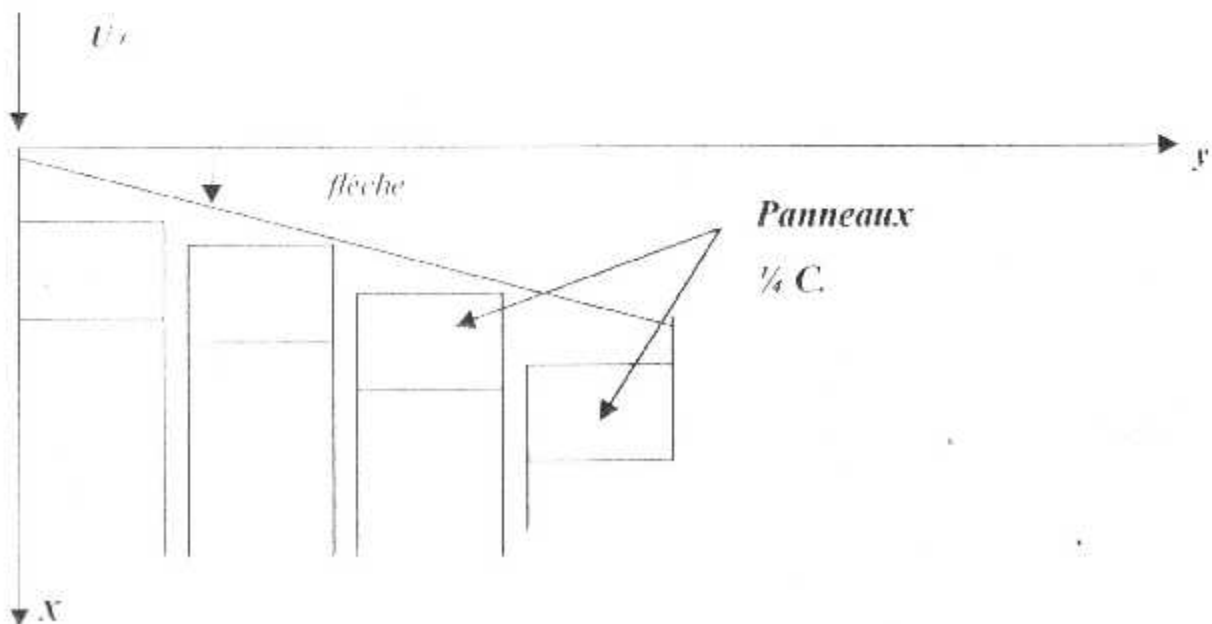


FIG III.3.3 Représentation des panneaux

Avec :

$$r = rp / \sin \theta \quad \text{et} \quad dl = rp (1 / \sin^2 \theta) d\theta$$

L'intégration entre A et B pour trouver l'expression de la vitesse induite :

$$v = \frac{\Gamma_r}{4\pi rp} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\Gamma_r}{4\pi rp} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad \text{III(3.3)}$$

Si le filament tourbillonnaire tend à l'infini dans toutes les directions, on aura : $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \Pi$ donc :

$$v = \frac{\Gamma_r}{2\pi rp} \quad \text{III(3.4)}$$

Qui est le résultat appliqué à un profil de longueur infinie.

D'autre part d'après la figure (III.3.4) on a :

$$rp = \frac{|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2|}{r_0}, \quad \cos \theta_1 = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2}{r_0 \cdot r_1}, \quad \cos \theta_2 = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1}{r_0 \cdot r_2}$$

Substituons ces expressions dans l'équation (III.3.3), on obtient :

$$V = \frac{\Gamma_r \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2}{4\pi |\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2|^2} \left[\vec{r}_0 \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1} - \frac{\vec{r}_2}{r_2} \right) \right] \quad \text{III(3.5)}$$

c'est l'expression fondamentale pour le calcul de vitesse induite de la méthode VLM, elle est utilisée en faisant attention à l'orientation des vortex.

III.3.3.1- CALCUL DE LA VITESSE INDUITE :

Utilisons l'équation (III.3.5) pour calculer la vitesse induite par le tourbillon en fer à cheval représenté dans la figure III(3.1).

Le segment AB représente un tourbillon lié du système tourbillonnaire (nappe tourbillonnaire) et coïncide avec le quart de la corde du panneau. Les vortex marginaux sont parallèles à l'axe x. Le vecteur résultant de la vitesse sera calculé, on considérons l'influence de tous les panneaux.

Pour les vortex lié du segment AB on a :

$$\vec{r}_0 = AB = (x_{2n} - x_{1n})\vec{i} + (y_{2n} - y_{1n})\vec{j} + (z_{2n} - z_{1n})\vec{k}$$

$$\vec{r}_1 = (x - x_{1n})\vec{i} + (y - y_{1n})\vec{j} + (z - z_{1n})\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = (x - x_{2n})\vec{i} + (y - y_{2n})\vec{j} + (z - z_{2n})\vec{k}$$

En utilisant ces résultats, la vitesse induite au point c(x,y,z) par le filament tourbillonnaire AB et :

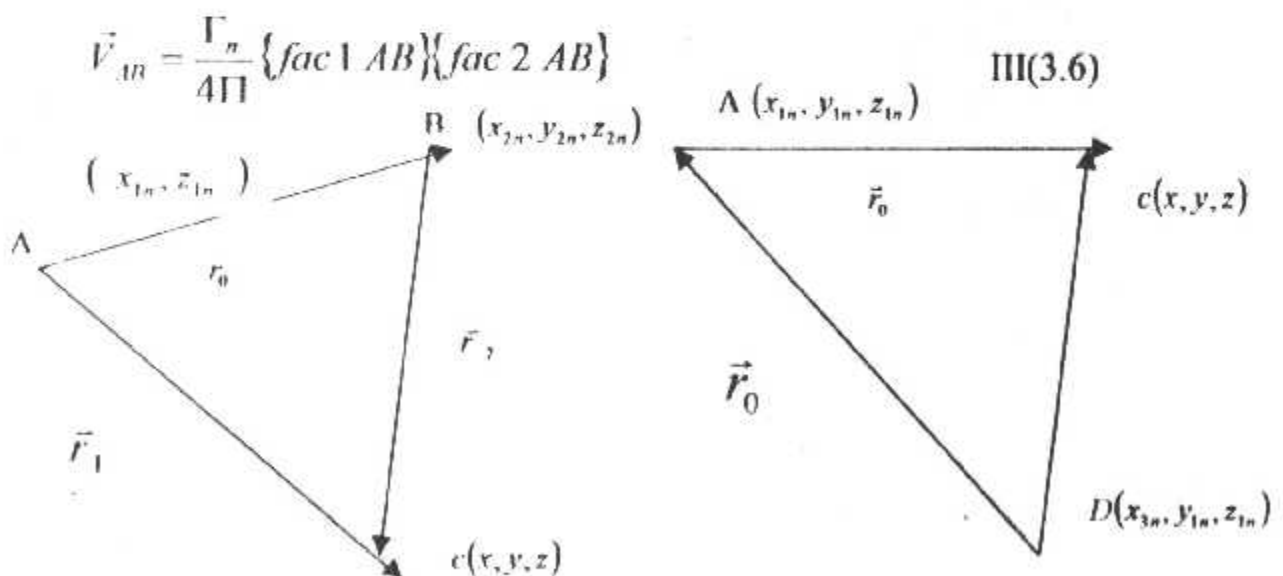


Fig III(3.5) représentation vectoriel des vitesses induites :

On aura donc :

$$\begin{aligned} \{Fac \ 1_{AB}\} &= \frac{\vec{r}_x \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_x \cdot \vec{r}_2|^2} \\ &= \left\{ (y-y_n)(z-z_{2n}) - (y-y_{2n})(z-z_{1n}) \right\} \vec{i} - \left\{ (x-x_{1n})(z-z_{2n}) - (x-x_{2n})(z-z_{1n}) \right\} \\ &+ \left\{ (x-x_{1n})(y-y_{2n}) - (x-x_{2n})(y-y_{1n}) \right\} \vec{k} \Big/ \left\{ (y-y_{1n})(z-z_{2n}) - (y-y_{2n})(z-z_{1n}) \right\}^2 \Big\} \vec{j} \\ &+ \left\{ (x-x_{1n})(z-z_{2n}) - (x-x_{2n})(z-z_{1n}) \right\}^2 + \left\{ (x-x_{1n})(y-y_{2n}) - (x-x_{2n})(y-y_{1n}) \right\}^2 \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \{Fac \ 2_{AB}\} &= \left(\vec{r}_0 \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1} - r_0 \cdot \frac{\vec{r}_2}{r_2} \right) \\ &= \left\{ (x_{2n} - x_{1n})(x - x_{1n}) + (y_{2n} - y_{1n})(y - y_{1n}) + (z_{2n} - z_{1n})(z - z_{1n}) \right\} / \\ &\sqrt{(x - x_{1n})^2 + (y - y_{1n})^2 + (z - z_{1n})^2} - \left\{ (x_{2n} - x_{1n})(x - x_{2n}) + (y_{2n} - y_{1n})(y - y_{2n}) \right. \\ &\left. + (z_{2n} - z_{1n})(z - z_{2n}) \right\} / \sqrt{(x - x_{2n})^2 + (y - y_{2n})^2 + (z - z_{2n})^2} \end{aligned}$$

Pour le calcul de la vitesse induite par le filament du point A à l'infini, nous calculons d'abord la vitesse induite par le filament de longueur finie qui tend de A à D. Il est à noter que le vecteur \vec{r}_0 est dans la direction tourbillon.

$$\vec{r}_0 = D\vec{A} = (x_{1n} - x_{3n})\vec{i}$$

$$\vec{r}_1 = (x - x_{3n})\vec{i} + (y - y_{1n})\vec{j} + (z_{2n} - z_{1n})\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = (x - x_{1n})\vec{i} + (y - y_{1n})\vec{j} + (z_{2n} - z_{1n})\vec{k}$$

D'après la figure précédente III(3.6), la vitesse induite est :

$$\vec{V}_{AD} = \frac{\Gamma_n}{4\pi} \{fac 1 AD\} \{fac 2 AD\}$$

Avec :

$$\{fac 1 AD\} = \frac{(z - z_{1N})\vec{j} + (y_{1n} - y)\vec{k}}{(z - z_{1N})^2 + (y_{1n} - y)^2 + (x_{3n} - x_{1n})^2} \{fac 2 AB\}$$

et

$$\{fac 2 AD\} = (x_{3n} - x_{1n}) \left\{ \frac{x_{3n} \cdot x}{\sqrt{(x - x_{3n})^2 + (y - y_{1n})^2 + (z - z_{1n})^2}} + \frac{x - x_{1n}}{\sqrt{(x - x_{1n})^2 + (y - y_{1n})^2 + (z - z_{1n})^2}} \right\}$$

III.3.4- CALCUL DES COORDONNES :

Le tourbillon en fer à cheval est constitué d'un tourbillon lié situé en amont du panneau et de deux tourbillon libres situés aux extrémités latérales du panneau comme il est montré sur la figure (III.6).

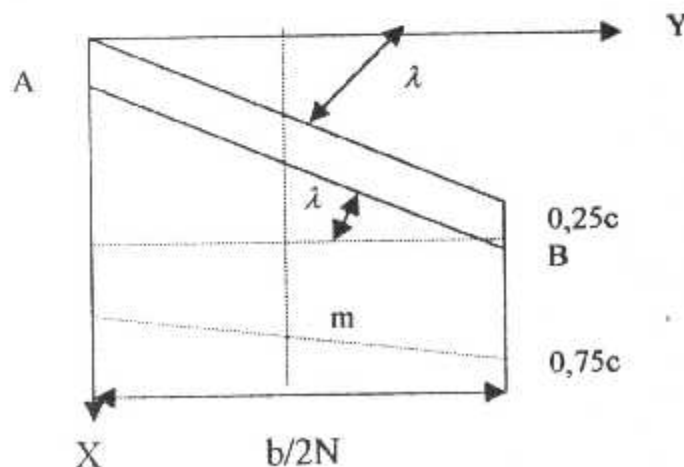


Fig III(3.6) Les coordonnées des ailes

III.3.4.1- LES COORDONNEES DU TOURBILLON EN FER A CHEVAL :

➤ l'aile est subdivisé en N panneaux et chaque panneaux est représenté par un tourbillon en fer à cheval.

(I) indique le numéro de panneaux.

$$y_A = b/2N(I-1)$$

avec y_A représente la coordonnée de l'extrémité gauche du tourbillon en fer à cheval suivant l'axe des y.

$$y_B(I) = I.b/2N$$

C'est la coordonnée de l'extrémité droite .

$$x_A(I) = C/4 + (I-1)y_A(I)tg(x)$$

avec x_A représente la coordonnée de l'extrémité gauche du tourbillon en fer à cheval suivant l'axe des x.

$$x_B(I) = C/4 + (I-1)y_B(I)tg(x)$$

x_B est la coordonnée de l'extrémité droite du tourbillon en fer à cheval.

III.3.4.2- LES COORDONNEES DU POINT DU CONTROLE :

Sachant que les points de contrôles sont situés aux trois quarts de la corde,

on a : $y_m(I) = Y_A + (b/4_n)$ y_m : représente la coordonnée du point de contrôle suivant l'axe des y

$$x_m = 0,75 + Ym(I) \cdot \cos(\Pi/2 - \lambda) \sin(\Pi/2 - \lambda)$$

III.3.5- CALCUL DES CARACTERISTIQUES**AERODYNAMIQUES :****III.3.5.1- CALCUL DU COEFFICIENT DE PORTANCE :**

Après avoir déterminé l'intensité de chaque tourbillon, la portance de l'aile peut être évaluée.

Puisque les panneaux tendent du bord d'attaque au bord de fuite, la portance agissant en N^{ème} panneau est :

$$\Delta L_n = \rho_\infty U_\infty \Gamma_n \quad \text{III(3.7)}$$

Qui est la la portance par unité de longueur, par symétrie, la portance totale de l'aile est :

$$L = 2 \int_0^{0,5b} \rho_\infty U_\infty \Gamma(y) dy \quad \text{III(3.8.a)}$$

ou bien :

$$L = 2 \rho_\infty U_\infty \sum_{n=1}^N \Gamma_n \Delta y_n \quad \text{III(3.8.b)}$$

Le coefficient de portance est alors donné :

$$C_L = L / q_\infty \cdot s \quad \text{III(3.9)}$$

III.3.5.2- CALCUL DU COEFFICIENT DE TRAINEE INDUITE :

La traînée induite pour cette méthode (V.L.M) sera calculée de la même manière que celle calculée par la méthode de la ligne portante de PRANDTL.

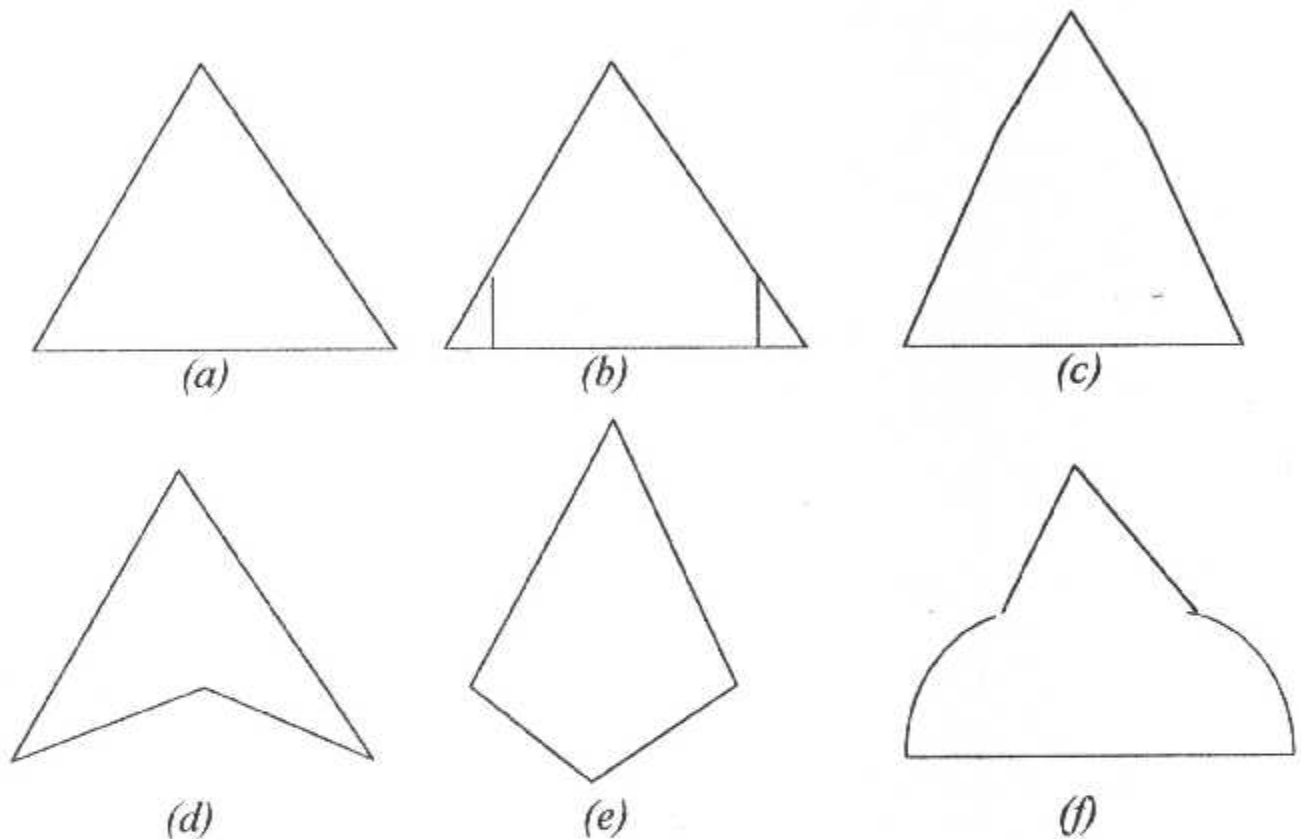
On aura donc :

$$C_D = C_L^2 / \pi \cdot AR \quad \text{III(3.10)}$$

III.4- AILE DELTA

III.4.1- LES AILES ELANCEES ET LEUR DOMAINE DE VOL:

Les ailes Δ ainsi que les ailes qui dérivent de cette forme telles que les ailes Δ à bouts tranquès (b), à double Δ (c), les ailes en queue d'hirondelle (d), les ailes en fer de lance (e) et les ailes gothiques (f).



Toutes ces ailes ont en commun la propriété d'être élancées c'est à dire d'avoir un très faible allongement et une grande flèche ou encore d'avoir la dimension prise suivant le sens de l'écoulement nettement plus grande que les autres dimensions (envergure et épaisseur).

III.4.2-Aile en delta :

Elles sont définis en plan par leur flèche au bord d'attaque uniquement. Angle que fait le bord d'attaque avec la perpendiculaire au plan de symétrie. (fig III.4.1)

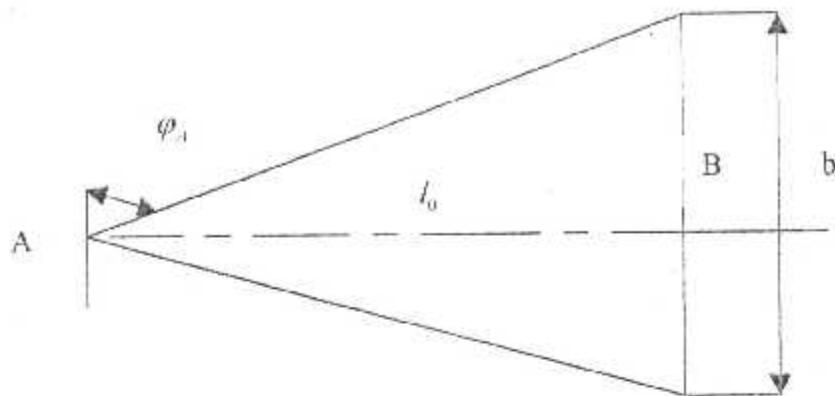


Fig (III.4.1) l'ail delta

- Flèche du bord d'attaque $\varphi_A = \varphi$
- Flèche du bord de fuite = 0
- Effilement $\varepsilon = 0$
- Elancement $E = \frac{l_0}{b}$

- Calcul de l'allongement :

$$A = \frac{b^2}{s} \quad \text{III(4.1)}$$

$$S = \frac{AB \cdot b}{2}$$

donc :

$$s = b/2 \tan \varphi \cdot b/2 = b^2/4 \tan \varphi \quad \text{III(4.2)}$$

d'après l'équation III(4.2) on aura :

$$\tan \varphi = \frac{AB}{b/2}$$

On obtient :

$$AB = b/2 \tan \varphi$$

D'où :

$$A = \frac{b^2}{\left(\frac{b^2}{4}\right) \tan \varphi} = 4 \cdot \frac{1}{\tan \varphi}$$

ou bien :

$$A = 4 \cot \alpha n (\varphi) \quad \text{III(4.3)}$$

done :

$$E = \frac{\tan \varphi}{2}$$

alors :

$$\text{l'élanement} \quad - \quad \frac{l_0}{b} = \frac{\tan \varphi}{2} = E \quad \text{III(4.4)}$$

Le calcul de la valeur du coefficient de portance est donné par :

$$C_L = k_p \sin \alpha \cos^2 \alpha + k_v \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad \text{III(4.5)}$$

on a :

$$k_p \text{ et } k_v = f(A, M)$$

Le coefficient de traînée aussi est donné par :

$$C_{Di} = k_p \sin^2 \alpha \cos \alpha + k_v \sin^3 \alpha \quad \text{III(4.6)}$$

$$C_D = C_{D0} + C_{Di} \quad \text{III(4.7)}$$

Une aile $\Delta 60$ est une aile dont la flèche ρ est égale à 60° .

La surface S a pour valeur $s = b^2 \operatorname{tg} \varphi$ et par suite l'allongement AR a pour expression :

$$A : 4 \operatorname{cotg} \varphi$$

La corde de référence la plus souvent employée est la corde du profil central.

Conclusion :

La génération de l'aile delta se fait à partir du profil central situé dans le plan de symétrie. La génération peut être :

- conique, le sommet du cône est l'extrémité de l'aile, la directrice est le profil central.
- Par profils transversaux. Les profils transversaux, symétriques par rapport au plan de symétrie, s'appuient sur le profil central. Ces profils peuvent être losangiques, lenticulaires (circulaires, elliptiques ou paraboliques) ou quelconques.

CHAPITRE IV: RESULTATS ET COMMENTAIRES

IV.1- INTRODUCTION:

Les résultats obtenus par le programme informatique [ANNEXE 1] réalisé consiste à déterminer les caractéristiques aérodynamiques d'une aile delta, comme on fait une comparaison entre les résultats obtenus par ce programme et les résultats expérimentaux.

IV.1- COEFFICIENT DE PORTANCE :

La variation du coefficient de portance en fonction de l'incidence est représenté dans les figures (IV.1), (IV.2) et (IV.3) qui sont des courbes linéaires. Ces figures montrent qu'une augmentation déterminée de l'incidence entraîne une augmentation du coefficient de portance.

Dans un écoulement subsonique incompressible ou compressible la courbe qui décrit la variation du coefficient de portance en fonction de l'incidence est une droite dont la pente varie respectivement avec l'allongement.

A partir des courbes représentées dans les figures (IV.1), (IV.2) et (IV.3) pour les différentes valeurs d'allongement 1, 1.5, 2 on peut déduire que la portance croit avec l'allongement c'est à dire que la droite $c_l = f(\alpha)$ varie proportionnellement avec l'allongement.

On remarque que les valeurs des coefficients de portance obtenus par ce programme de calcul est en bon accord avec ceux obtenus expérimentalement sauf une légère différence à un allongement $AR = 2$. [7]

IV.2- COEFFICIENT DE TRAINEE :

L'effet d'incidence apparaît également dans la figure (IV.4) où l'augmentation de la valeur de l'angle d'incidence entraîne aussi l'augmentation de coefficient de traînée.

On remarque aussi que l'augmentation de traînée est très faible comparé à l'augmentation de portance.

IV.4- FINESSE :

La courbe de la finesse fig (IV.5) qui fait apparaître la relation entre la portance et la traînée à différentes angle d'incidence.

La courbe de portance nous indique que l'on a la plus grande portance à environ 18° , la courbe de traînée que l'on a la plus faible traînée à environ 0° , mais ces deux angles sont des extrêmes le rapport de la portance à la traînée est s'appelle la finesse .

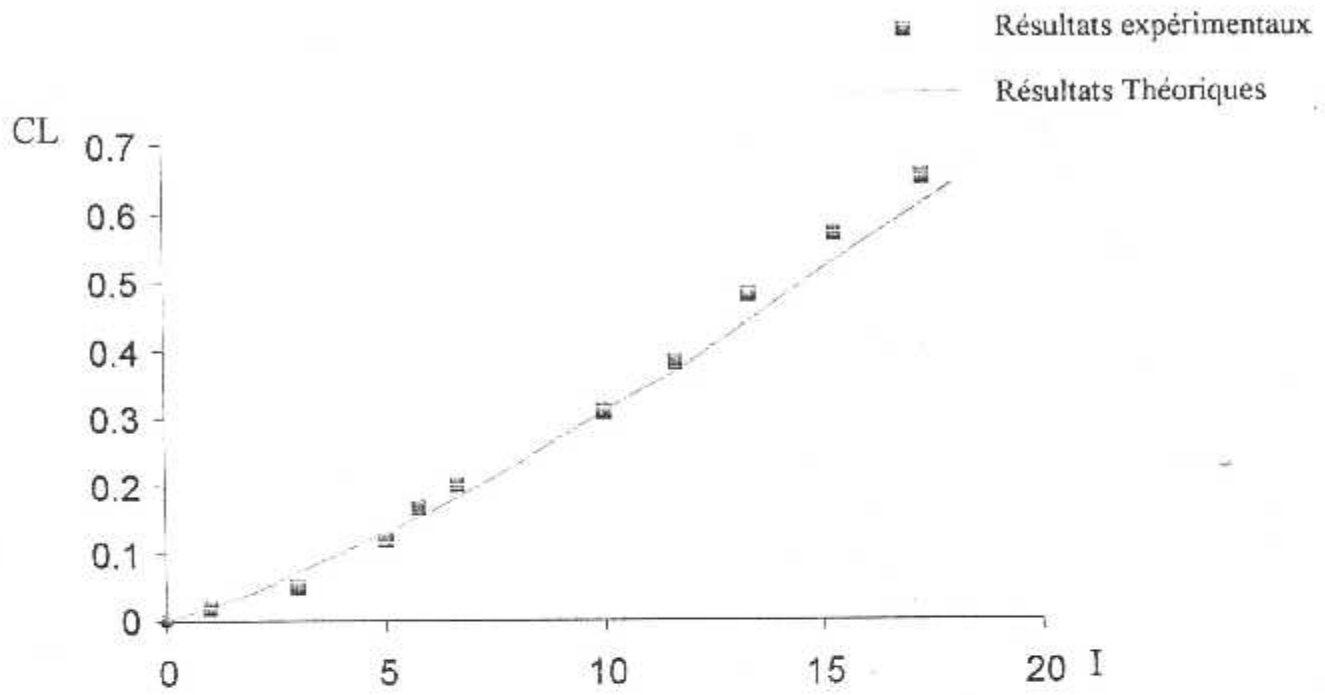


Figure.IV-1. La variation du coefficient de portance en fonction de l'incidence avec une allongement $AR=1$

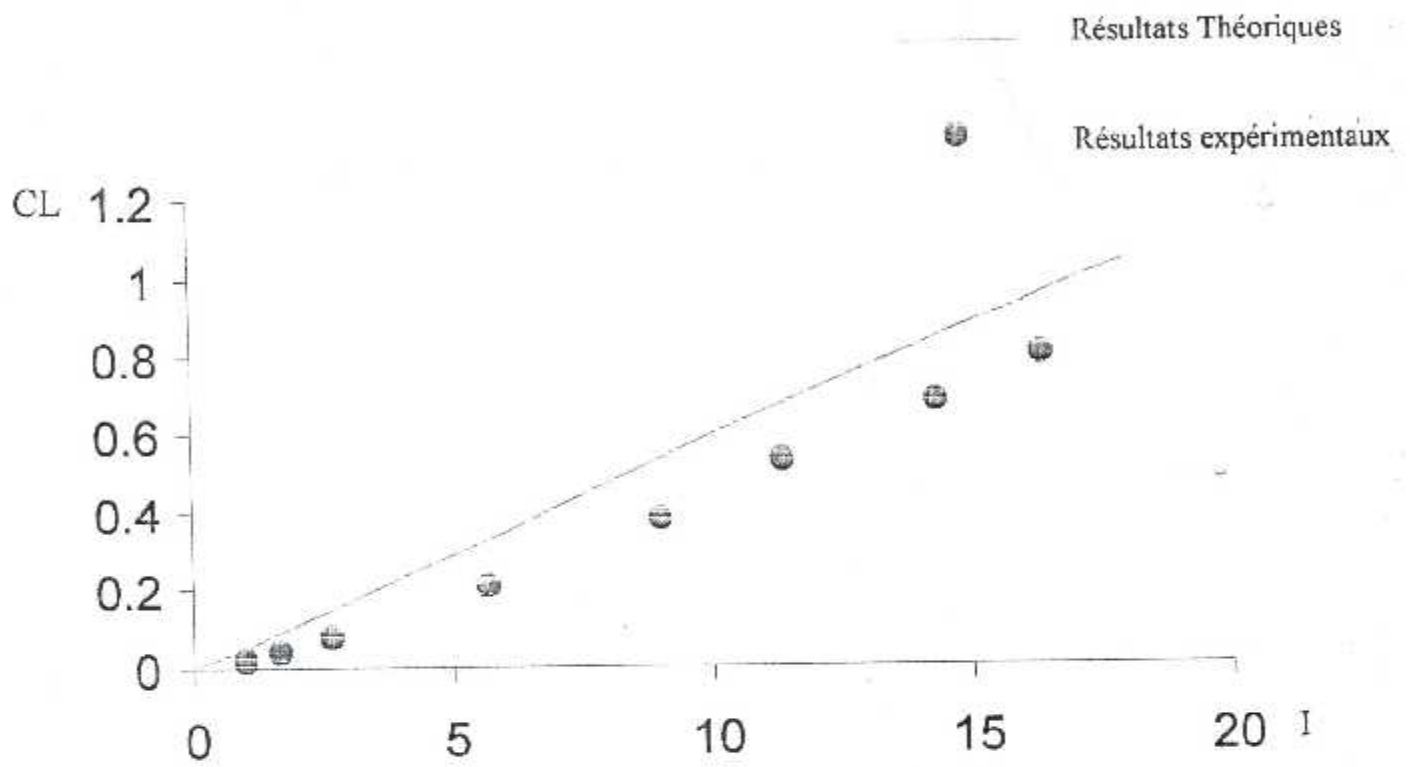


Figure.IV-2 La variation du coefficient de portance en fonction de l'incidence avec une allongement $AR=1.5$

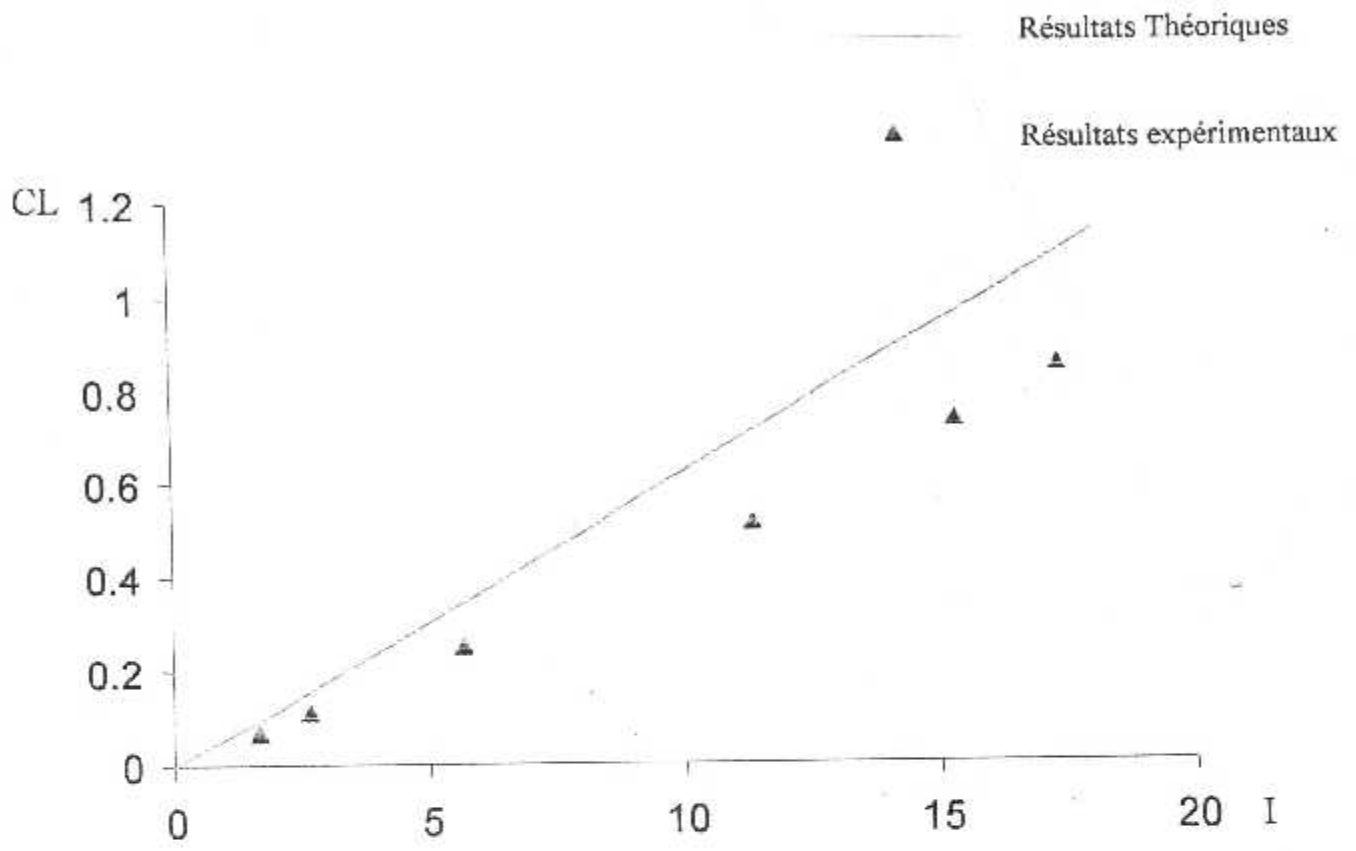


Figure.IV-3 La variation du coefficient de portance en fonction de l'incidence avec une allongement AR=2

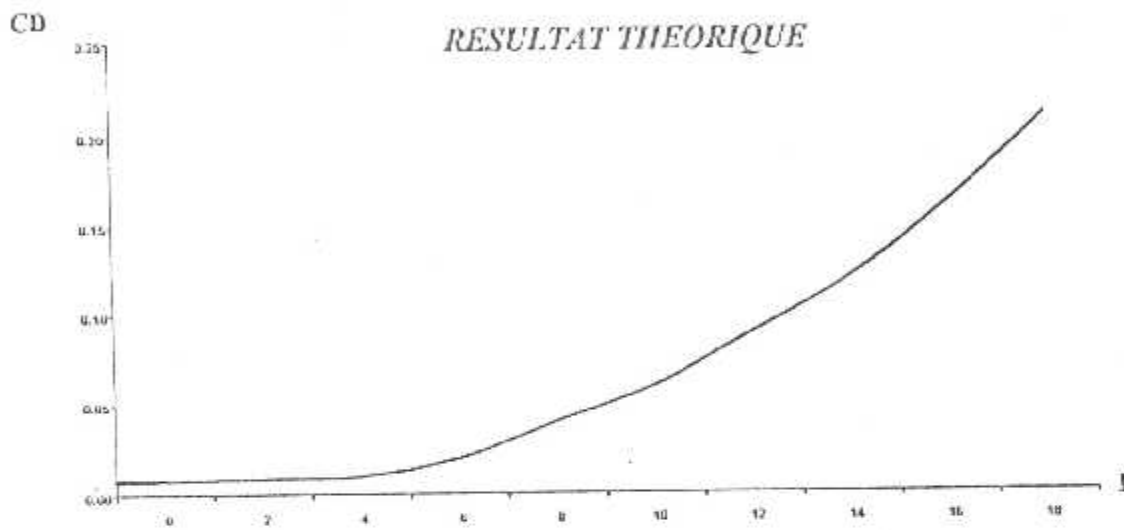


FIG. IV-4 LA VARIATION DE COEFFICIENT DE TAINEE EN FONCTION DE L'INCIDENCE

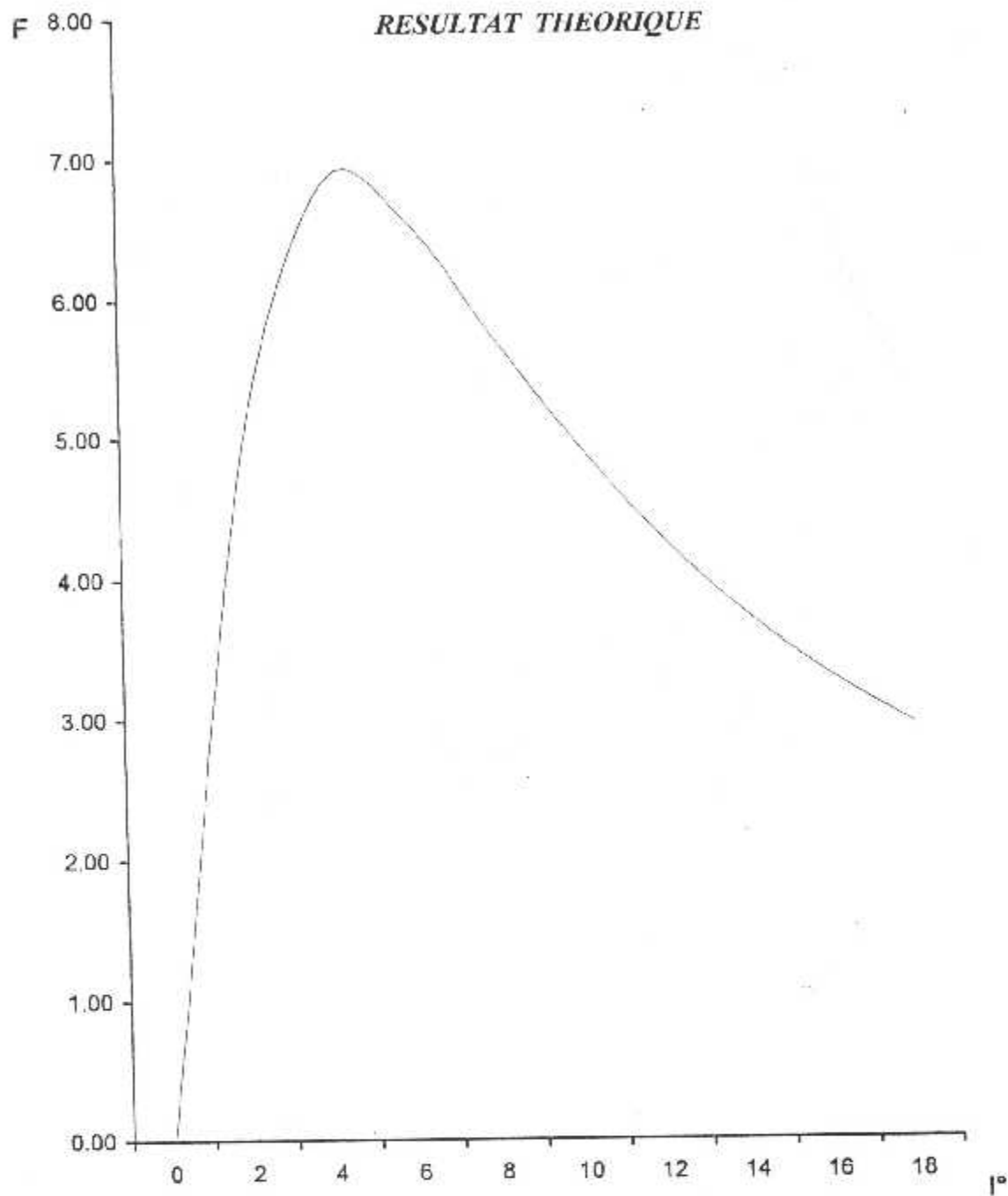


FIG IV-5 LA VARIATION DE LA FINESSE EN FONCTION DE L'INCIDENCE

CHAPITRE V :

CONCLUSION GENERALES

CONCLUSION GENERALE

Notre projet consiste à calculé les caractéristiques aérodynamiques concernant les ailes Δ delta en appliquant une méthode théorique approprié.

Ce travail nous a permis de faire une description général sur les méthodes de calcules aérodynamique pour les profils et les ailes qui sont :

- Théorie des profils minces.
- Théorie de distribution des singularités.
- Théorie de la ligne portante.
- Théorie de la surface portante.

Le programme de calcule réalisé pour déterminer les caractéristiques concernant les ailes delta a permis d'obtenir des résultats satisfaisantes, comme on a constaté que les résultats théoriques son très proches des résultats expérimentaux.

ANNEXE

PROGRAMME DE DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES AERODYNAMIQUES D'AIL EN DELTA

I : Incidence.
Clp : Coefficient de portance des potentielles.
Clv : Coefficient de portance des tourbillons.
Cl : Coefficient de portance totale.
Cdp : Coefficient de trainée de potentiels.
Cdv : Coefficient de trainée des tourbillons.
Cd : coefficient de trainée totale.
F : Finesse.
Kp : Potentiel flow.
Kv : Vortex flow.

```
real cd0, f, kp, kv, cl, cdi, cd, i
read(*,*) cd0, kp, kv
open(1, file='clp.dat')
open(2, file='clv.dat')
open(3, file='cl.dat')
open(4, file='cdp.dat')
open(5, file='cdv.dat')
open(6, file='cd.dat')
open(7, file='f.dat')
write(*,*) 'incidence, coefficient portance'
write(*,*) 'coefficient train,e, finesse'
write(*,*) ' potentiel, tourbillon, total'
do 10 i=0,18,2
a=i*(3.14/180)
clp=kp*sin(a)+cos(a)*cos(a)
clv(kv*sin(a)+sin(a)*cos(a)
cl=clp+clv
cdp=clp*tan(a)
cdv=clv*tan(a)
cdi=cdp+cdv
cd=cd0+cdi
f=cl/cd
write(*,*)i, clp, clv, cl, cdp, cdv, cd, f
write(1,*)clp
write(2,*)clv
write(3,*)cl
write(4,*)cdp
write(5,*)cdv
write(6,*)cd
write(7,*)f
pause
10 continue
stop
end
```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] George, Jf. VERNET, Jc. WANNER
Mécanique de vol
- [2] Jean. MERNOZ
Aérodynamique, Mécanique du vol
Edition 1983
- [3] I. TOUREL
Aérodynamique Expérimentale
Aérodynamique des Profils et des Ailes. Tome 1
E.N.S.I.C.A, Toulouse 1981
- [4] I. TOUREL
Aérodynamique des Profils et des Ailes. Tome 2
- [5] KARA et ABDELALLI
Détermination des Caractéristiques
Aérodynamiques des Ailes d' Avion
par généralisation des théories: Ligne
Portante et Surface Portante, 1996
(TS) institut aéronautique université de Blida
- [6] CHEGRANI Ahmed
Etude des Caractéristiques Aérodynamiques
de la Combinaison Aile-Fuselage en Régime
Subsonique par la Méthode des Singularités
1995
(Magistère) institut aéronautique université de Blida
- [7] John J. BERTIN
Michael .L. SMITH
Aerodynamics for Engineers.