

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE SAAD DAHLAB BLIDA 1
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE ET ELECTROTECHNIQUE



Mémoire de MASTER

Filière : Automatique.

Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle

Synchronisation entre deux
systèmes hyper-chaotiques

Présenté par les étudiants :

- BENAYAD Hamza
- ELMOKREFI Abderrezak

Proposé par le professeur :

- Mr Ferdjouni Abdelaziz

Année universitaire : 2021/2022

REMERCIEMENTS

Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH pour la santé, la volonté et la patience qu'il nous a donné pour accomplir ce travail.

Nous remercions du fond de nos cœurs, nos parents pour le soutien inconditionnel et les sacrifices qu'ils ont faits pour que nous terminons nos études.

Nous tenons à remercier globalement notre encadreur Professeur." Mr FERDJOUNI Abdelaziz"

Pour ses précieux conseils, son grand soutien scientifique et moral, et pour tous les efforts et les encouragements qu'il nous a apportés durant toute la période du travail.

Notre sincère remerciement aux membres de jury qui ont accepté de juger notre travail.

Nous remercions vivement tous les enseignants du département d'électronique qui nous aident tout au long des années de notre scolarité.

Enfin, nous tenons à remercier tous les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

ملخص

تشكل الأنظمة الديناميكية الفوضوية فئة من الأنظمة غير الخطية

تنشأ مشكلة التزامن بين اثنين من الأنظمة الديناميكية الفوضوية للتطبيقات في نقل البيانات الآمن، الهدف من هذا العمل هو حساب قوانين التحكم التي تجعل من الممكن الحصول على التزامن بين اثنين من الأنظمة الديناميكية الفوضوية، مع افتراض أن خصائص السيد غير معروفة

تم اعتماد نهج قائم على نظرية الإستقرار ل لياپونوف

الكلمات المفتاحية، الأنظمة الديناميكية الفوضوية، الفوضى، التزامن، قوانين التحكم

Résumé :

Les systèmes dynamiques chaotiques(SDC) forment une classe des systèmes non linéaires.

Le problème de la synchronisation entre deux SDC se pose pour les applications en transmission sécurisée des données. L'objectif de ce travail est de calculer les lois de commandes permettant d'obtenir la synchronisation entre deux SDC avec l'hypothèse que les paramètres du Maître sont inconnus. Une approche par la théorie de stabilité de Lyapunov est adoptée.

Mots clé : SDC, SCI, Chaos, synchronisation.

Abstract :

Chaotic dynamical systems (CDS) form a class of nonlinear systems.

They find many applications in the technical field. The problem of synchronization between two SDCs arises for applications in secure data transmission. The objective of this work is to calculate the control laws in order to synchronize two SDCs with the assumption that the parameters of the Master are poorly known. An approach based on Lyapunov's stability theory is adopted.

Keywords: CDS, Chaos, synchronization, Lyapunov's stability.

Table des matières :

Résumé

Liste des figures

Introduction générale.....1

1. Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques

1.1 Introduction.....5

1.2 Généralités sur les systèmes chaotiques.....6

1.2.1 Les systèmes dynamiques6

1.2.2 Sensibilité aux conditions initiales.....6

1.2.3 Les exposants de Lyapunov.....7

1.2.4 Section de Poincaré.....7

1.2.4.1 Avantages de La méthode.....8

1.3 Les attracteurs8

1.3.1 Définition d'Attracteurs.....8

1.3.2 Les différents types d'attracteurs8

1.3.3 Attracteurs réguliers.....8

1.3.4 Attracteurs étranges10

1.4 Notion de stabilité.....12

1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov.....12

1.4.2 Points d'équilibre.....13

1.5 Bifurcation.....13

1.5.1 Bifurcation nœud-col.....14

1.5.2 Bifurcation transcritique.....15

1.5.3 Bifurcation fourche.....16

1.5.4 Bifurcation Hopf.....18

1.6 Conclusion.....18

2. Théorie de synchronisation

2.1 Introduction20

2.2 Définition de la synchronisation20

2.3 Classes de synchronisation.....20

2.3.1 Synchronisation par couplage bidirectionnel.....21

2.3.2 Synchronisation unidirectionnelle.....22

2.3.3 Synchronisation via couplage bidirectionnel et unidirectionnelle.....23

2.4 Différents types de synchronisation.....24

2.4.1 Synchronisation identique24

2.4.2 Synchronisation généralisée25

2.4.3 Anti-Synchronisation.....26

2.4.4 Synchronisation retardée27

2.4.5 Synchronisation projective.....27

2.5 Méthodes de synchronisation27

2.5.1 Méthode du contrôleur actif28

2.5.2 Méthode du Backstepping29

2.5.3 Méthode du mode glissant30

2.6 Conclusion31

3. Application de la synchronisation au système hyper chaotique de Qi

3.1 Introduction :	33
3.2 Définition	33
3.3 Analyse du système hyper chaotique de Qi	33
3.3.1 Etude des points fixes	33
3.3.2 Utilisation du Simulink Matlab	34
3.4 La synchronisation entre les deux systèmes chaotiques.	38
3.4.1 Cas où la synchronisation est réalisée.	43
3.5 Conclusion.	49
Conclusion générale.	50
Références bibliographiques.	51
Annexe.	52

Liste des figures :

Figure 1.1 : Section de Poincaré.....	7
Figure 1.2 : Attracteur réguliers.....	9
Figure 1.3 : Points fixes attracteurs.....	10
Figure 1.4 : Cycles limites	11
Figure 1.5 : Les solutions de Lorenz x,y,z en fonction de temps.....	11
Figure 1.6 : Attracteur étrange du système de Lorenz (x; y; z)	12
Figure 1.7 : Diagramme de bifurcation noeud-col.....	14
Figure 1.8 : Diagramme de bifurcation transcritique.	15
Figure 1.9 : Diagramme de bifurcation fourche.....	16
Figure 1.10 : Diagramme de bifurcation hopf.....	17
Figure 2.1 : Attracteur de système Rössler.....	21
Figure2.2 : signaux x (Maitre) et x_1 (esclave)	22
figure2.3 : signaux y (Maitre) et y_1 (esclave).....	23
Figure2.4 : signaux z (Maitre) et z_1 (esclave)	23
Figure2.5 : évolution de l'erreur e_1	23
Figure2.6 : évolution de l'erreur e_2	24
Figure2.7 : évolution de l'erreur e_3	24
Figure2.8 : Etats synchronisés de Rössler	24
Figure 3.1 : circuit sur Simulink.....	34
Figure 3.2: graphe $X=f(t)$	35
Figure 3.3: graphe $y=f(t)$	35
Figure 3.4: Graphe $z=f(t)$	36
Figure 3.5: Graphe $w=f(t)$	36
Figure 3.6 : les graphes xyzw en fct du temps.....	37
Figure 3.7 : circuit de synchronisations des deux systèmes de Qi.....	38
Figure 3.8 : x_1 en fonction de y_1	44

Figure 3.9 : x_2 en fonction de y_2	45
Figure 3.10 : x_3 en fonction de y_3	45
Figure 3.11 : x_4 en fonction de y_4	46
Figure 3.12 : $e_1(t)$	46
Figure 3.13 : $e_2(t)$	47
Figure 3.14 : $e_3(t)$	47
Figure 3.15 : $e_4(t)$	48

Introduction générale :

Le "chaos" est un phénomène d'apparence aléatoire. Il forme une classe de systèmes non linéaires, déterministe et très sensible aux conditions initiales. Il définit un état d'un système dont le comportement ne se répète jamais.

De très nombreux systèmes ont été présentés ces dernières années exploitant les comportements chaotiques dans les domaines physiques [9], chimiques [10], biologiques [11] et économiques [12], etc. L'étude de tels systèmes est liée à la théorie du chaos qui a été reconnue à partir des années 1960, grâce aux travaux d'un grand nombre de chercheurs notamment ceux de Lorenz [13], et grâce à la découverte de nouveaux outils de calculs.

Le concept d'utilisation de la théorie du chaos pour les systèmes de communication a été essentiellement inspiré des travaux de Pecora et Carroll en 1990 [14]. Ils ont découvert que deux systèmes chaotiques identiques avec des conditions initiales différentes peuvent se synchroniser s'ils sont convenablement couplés.

La transmission chaotique est un mode de communication sécurisée qui est née par l'inclusion du chaos dans les systèmes de transmissions. L'idée principale consiste à injecter le message dans un signal chaotique pour masquer cette information et de l'envoyer vers le récepteur à travers un canal public. Ainsi, après la synchronisation des deux systèmes (émetteur et récepteur), l'information cryptée est donc récupérée au niveau du récepteur.

Les phénomènes de synchronisation du chaos ont fait l'objet d'un intérêt particulier dans l'étude des systèmes dynamiques chaotiques, car ils peuvent s'appliquer à de vastes domaines de l'ingénierie et des sciences de l'information, notamment en communication sécurisée et cryptologie.

La configuration de base d'un système de synchronisation est constituée de deux systèmes : l'un est dit système émetteur et l'autre est dit système récepteur. On rappelle que ces systèmes peuvent être identiques avec des conditions initiales différentes. Le système émetteur synchronise le système récepteur via un signal ou plusieurs signaux d'accouplement. Dans la littérature, plusieurs méthodes de contrôle ont été appliquées pour réaliser la synchronisation, à savoir le contrôle continu, le contrôle adaptatif, le contrôle par mode de glissement et le contrôle adaptatif flou. À l'aide de ces méthodes, plusieurs concepts de synchronisation chaotique d'ordre entier ont été également étendus, à savoir la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation généralisée, la synchronisation projective, la synchronisation projective modifiée et la synchronisation généralisée de type Q-S [6].

Récemment, la synchronisation des systèmes chaotiques et hyper chaotique d'ordre fractionnaire est encore considérée comme un sujet de recherche stimulant en raison de

leurs applications nombreuses et potentielles. Par exemple, dans, les auteurs ont recherché la synchronisation des réseaux de neurones chaotiques d'ordre fractionnaire.

Le mémoire est composé en trois chapitres. Le premier est réservé pour les généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques. Ensuite, on entame le deuxième chapitre concernant la théorie de synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques.

Le troisième chapitre concerne la synchronisation de deux systèmes hyperchaotiques de Qi, et enfin une conclusion générale termine le mémoire.

Chapitre 1 : Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques

1-Introduction.

2-Généralités sur les systèmes chaotiques

3- Attracteur.

4-Notion de stabilité.

5- Bifurcation.

6-Conclusion.

1.1 Introduction

Dans l'usage courant, le «chaos» signifie "un état de désordre". Cependant, dans la théorie du chaos, le terme est défini plus précisément. La théorie du chaos est un domaine des études en mathématiques, avec des applications dans plusieurs disciplines comme la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie, la météorologie, la sociologie et la philosophie. La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales. De petites différences dans les conditions initiales (telles que celles dues à des erreurs d'arrondi dans le calcul numérique) produisent des résultats très divergents pour de tels systèmes dynamiques, ce qui rend la prévision à long terme impossible en général. Cela se produit même si ces systèmes sont déterministes, ce qui signifie que leur comportement futur est entièrement déterminé par leurs conditions initiales, sans éléments aléatoires impliqués. Ce comportement est connu sous le nom de chaos déterministe, ou tout simplement le chaos. Il n'existe pas de définition à la fois formelle et générale du chaos. Cependant, le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique qui inclut :

-la non-linéarité : l'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéarités.

-le déterminisme : un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.

-la sensibilité : le système manifeste une très haute sensibilité aux changements de conditions.

-l'imprévisibilité : en raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

-l'irrégularité : l'ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques.

Le comportement chaotique peut être observé dans de nombreux systèmes naturels, comme les conditions météorologiques et le climat. Ce comportement peut être étudié par l'analyse d'un modèle mathématique chaotique, ou par des techniques d'analyse telles que des parcelles de récurrence et de section de Poincaré.

Dans ce présent chapitre, nous donnons une brève étude quantitative sur le chaos. Définition du chaos, quelques outils mathématiques de quantification du chaos et différentes routes vers le chaos sont les grandes lignes de ce chapitre [4].

1.2 Généralités sur les systèmes chaotiques :

1.2.1 Les systèmes dynamiques :

En mathématiques, en chimie ou en physique, un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système. Ce peut être l'évolution d'une réaction chimique au cours du temps, le mouvement des planètes dans le système solaire (régé par la loi universelle de la gravitation de Newton) ou encore l'évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un programme informatique. Formellement on distingue les systèmes dynamiques à temps discrets (comme un programme informatique) des systèmes dynamiques à temps continu (comme une réaction chimique) Ce développement peut être décrit par un ensemble limité d'équations pouvant prendre plusieurs formes mathématiques, équations différentielles, équations de récurrence.

Dans le cas où le temps est continu le système dynamique est représenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(X, t, \mu), X \in \Omega, t \in \mathbb{R}. \quad 1.1$$

Avec :

$X \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mu \in D \subseteq \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres. $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé champ de vecteur sur Ω .

Dans le cas discret, le système dynamique est représenté par une application itérative :

$$X_{k+1} = f(X_k, \mu), K \in \mathbb{N}. \quad 1.2$$

1.2.2 Sensibilité aux conditions initiales :

La sensibilité aux conditions initiales est un phénomène découvert pour la première fois, dès la fin du 19^{ème} siècle par Poincaré, puis a été redécouvert en 1963 par Lorenz lors de ses travaux en météorologie. Cette découverte a entraîné

Chapitre 1 : Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques

un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur le long terme. Le degré de sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système [4].

1.2.3 Les exposants de Lyapunov :

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système. Un système de dimension « n » possède « n » exposants de Lyapunov qui mesurent le taux de divergence suivant un des axes de l'espace de phase. L'apparition du chaos exige l'existence d'un exposant positif selon au moins un axe, tout en rendant compte que la somme des exposants est négative (respectivement nulle) pour les systèmes dissipatifs (respectivement conservatifs).

Un exposant de Lyapunov positif selon une direction indique, qu'une divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps.

1.2.4 Section de Poincaré :

La section de Poincaré est une technique classique d'analyse de systèmes dynamiques. Il remplace le flux d'un système en temps continu d'ordre n avec un ordre $(n - 1)$ d'un système à temps discret. La définition de la section de Poincaré garantit que les limites du système à temps discret correspondent aux ensembles limites du flux sous-jacent. L'utilité de la section de Poincaré réside dans la réduction de l'ordre et dans le fait qu'elle l'écart entre les systèmes à temps continu et à temps discret [2].

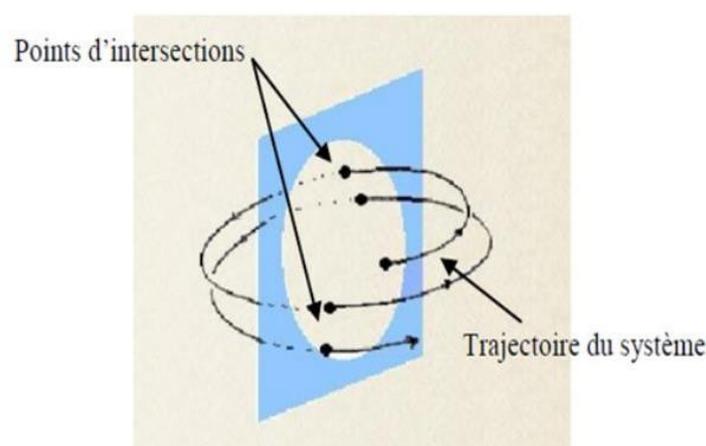


Figure 1.1 : Section de Poincaré

La technique de la section de Poincaré offre deux avantages :

Chapitre 1 : Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques

–D'une part, la recherche des attracteurs autres que les points fixes est possible et leur étude est simplifiée via les applications.

–Par ailleurs, la représentation des résultats est simplifiée. La description et l'interprétation de la dynamique est notamment plus simple dans le plan que dans l'espace pour des systèmes de dimension trois [2].

1.2.4.1 Les avantages de La méthode :

La technique de la section de Poincaré offre deux avantages :

- D'une part, la recherche des attracteurs autres que les points fixes est possible et leur étude est simplifiée via les applications.

- Par ailleurs, la représentation des résultats est simplifiée. La description et l'interprétation de la dynamique est notamment plus simple dans le plan que dans l'espace pour des systèmes de dimension trois [2].

1.3 Les attracteurs :

1.3.1 Définition d'Attracteurs :

La région de l'espace de phases vers laquelle convergent toutes les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle un attracteur. Les attracteurs sont donc des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques.

1.3.2 Les différents types d'attracteurs :

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

1.3.2.1 Attracteurs réguliers :

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

- **Un point fixe** : est le plus simple attracteur, la trajectoire du pendule dissipatif simple (dans l'espace des phases représentant son altitude et sa vitesse), par exemple, tend vers l'origine du repère, quelles que soient la position et la vitesse initiales.
- **Un cycle limite** : il représente la trajectoire du pendule idéal dans ce même espace des phases.
- **Un tore** : Il est caractérisé par un régime quasi-périodique, qui correspond à l'attracteur obtenu par les mouvements résultant de deux oscillations indépendantes, par exemple : les oscillateurs électriques.

Chapitre 1 : Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques

Pour tous les attracteurs réguliers, c'est à dire pour tous les systèmes non chaotiques, des trajectoires qui partent de points proches l'un de l'autre dans l'espace des phases restent indéfiniment voisines. On sait donc prévoir l'évolution à long terme de ces systèmes, à partir d'une situation connue [2].

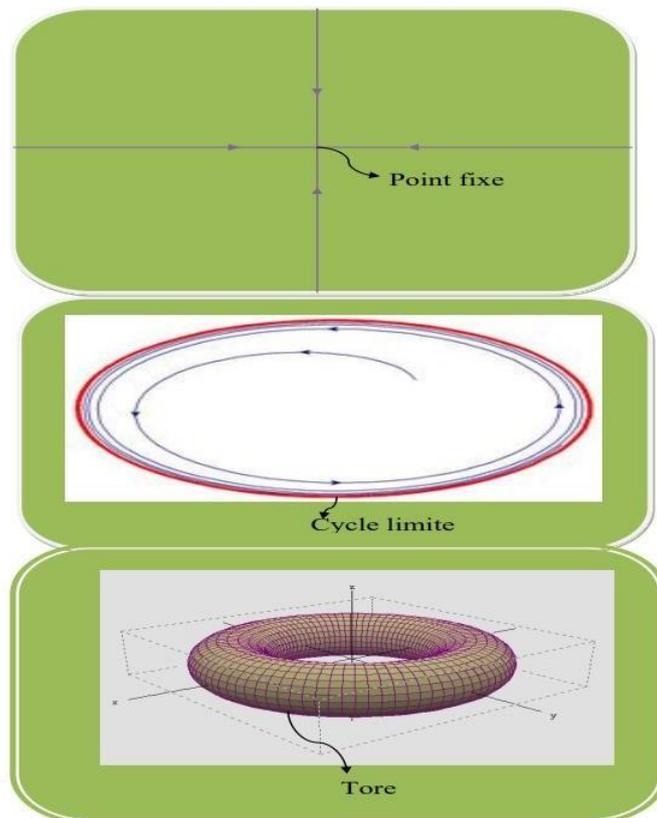


Figure 1.2 : Attracteur réguliers

1.3.2.2 Attracteurs étranges :

Le terme attracteur étrange a été utilisé pour la première fois par David Ruelle et Floris Takens en 1971, afin de décrire l'attracteur obtenu par une série de bifurcations d'un système modélisant le courant d'un liquide. En fait, avant l'article Ruelle et Floris, les attracteurs avaient déjà l'objet de publications mais ils sont restés ignorés. Cette appellation d'attracteur étrange fait appel à leur propriété peu commune, qui est leur dimension fractale. En effet la structure géométrique des trajectoires générées par un système chaotique est extrêmement complexe à cause des étirements, repliements et contractions s'opérant dans une région bornée de l'espace d'état. La section de Poincaré d'une trajectoire chaotique est constituée d'une infinité des couches fines, ce qui suppose que les trajectoires tendent à remplir un espace de dimension non entière, c'est-à-dire fractale. Les attracteurs étranges sont l'une des caractéristiques de l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange [5].

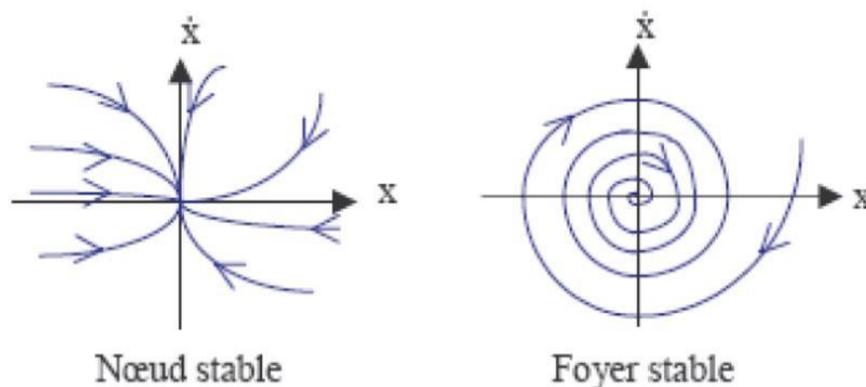


Figure 1.3 : Points fixes attracteurs

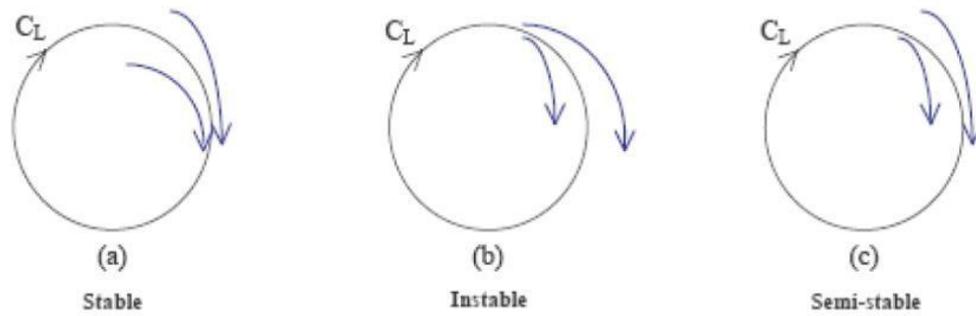


Figure 1.4 : Cycles limites

Le système d'équations de l'attracteur de Lorenz est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\delta x_1 + \delta x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 x_2 - \beta x_3 \end{cases} \quad 1.3$$

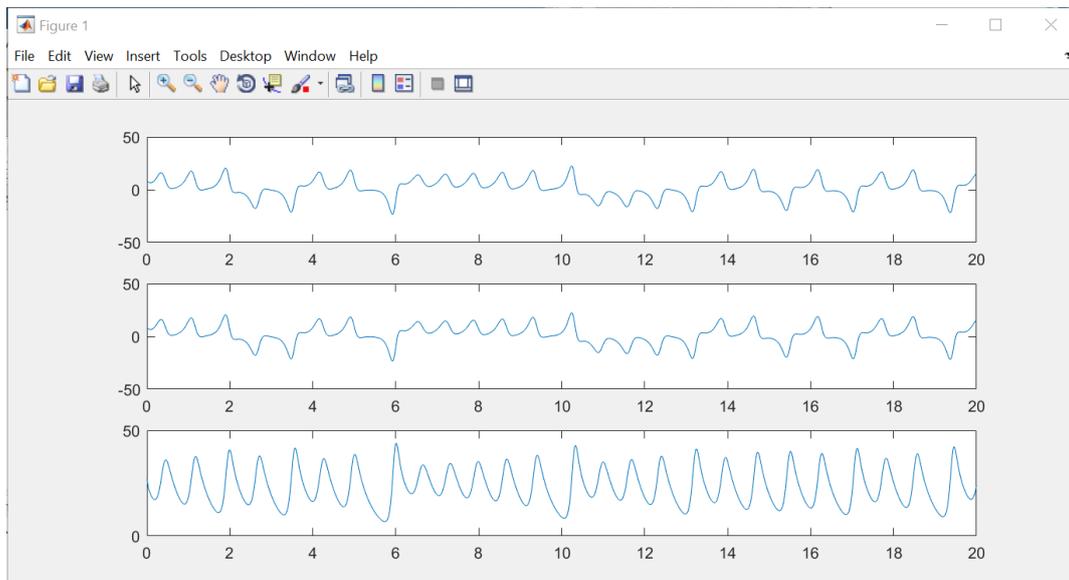


Figure 1.5 : Les solutions de Lorenz x_1, x_2, x_3 en fonction de temps

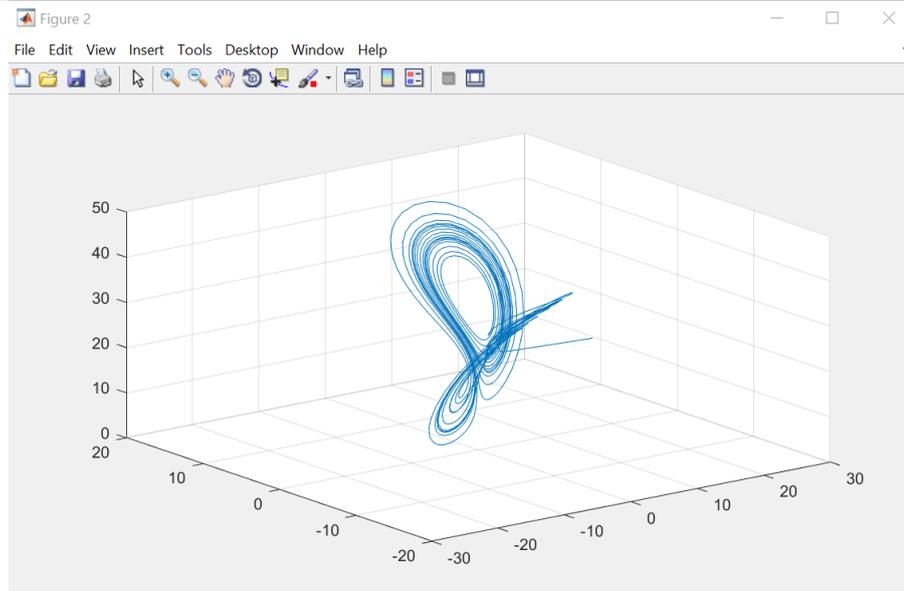


Figure 1.6 : Attracteur étrange du système de Lorenz (x; y; z)

1.4 Notion de stabilité :

La stabilité est l'un des aspects les plus essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques.

1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov :

La méthode de Lyapunov est l'une des méthodes fondamentales pour l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques.

Considérons le système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \quad 1.6$$

Avec f une fonction non linéaire.

Le point d'équilibre X_0 du système (1.6) est

1-Stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|\mathbf{X}(0) - X_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{X}(t) - X_0\| < \epsilon, \forall t \geq t_0. \quad 1.7$$

2-Asymptotiquement stable si X_0 est stable et si :

$$\exists \delta > 0 : \|\mathbf{X}(0) - X_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}(t) - X_0\| = 0. \quad 1.8$$

3-Exponentiellement stable s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X(0) - X_0\| < \delta \\ \Rightarrow \|X(t) - X_0\| < \alpha \|X(0) - X_0\| \exp(-\beta t), \quad \forall t > t_0 \end{aligned} \quad 1.9$$

4-Instable si l'équation (1.7) n'est pas satisfaite. [7]

1.4.2 Points d'équilibre

Un point d'équilibre (ou point singulier, ou point stationnaire, ou point critique) du système est un point X_0 de l'espace des phases vérifiant l'équation :

$$f(X_0) = 0 \quad 1.10$$

Remarque : Par un changement de variable : $Y = X - X_0$. On peut ramener le point X_0 à l'origine (0).

1.5 Bifurcation

Une bifurcation est un changement radical du comportement du système étudié, ce qui concerne les points d'équilibre, un changement de stabilité lors de la variation d'un paramètre est une bifurcation.

Nous présentons ici les quatre bifurcations (nœud-col, Transcritique, fourche et Hopf) [7] .

1.5.1 Bifurcation nœud-col

La bifurcation nœud-col est caractérisée par l'existence de deux points fixes simultanément (un stable et un instable), sa forme normale est l'équation :

$$\dot{x} = r - x^2 \quad 1.11$$

Cherchons les points fixes : on a $f(x, r) = rx - x^2 = 0$ 1.12

Alors on obtient 3 cas :

► Si $r < 0$, l'équation $f(x, r) = 0$ n'admet pas de solution alors on n'a pas de points fixes.

► Si $r > 0$, on a $f(x, r) = r - x^2 = 0 \Leftrightarrow X_0 = \pm\sqrt{r}$.

Chapitre 1 : Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques

Alors (1.12) admet deux points fixes : $(\sqrt{r}, -\sqrt{r})$.

Etudions leur stabilité :

$$f'(x) = -2x \Rightarrow \begin{cases} f'(x_{0+}) = -2\sqrt{r} < 0. \\ f'(x_{0-}) = 2\sqrt{r} > 0. \end{cases} \quad 1.13$$

Selon le signe de $f'(x_0)$, on voit que :

$$\begin{aligned} x_{0+} &= +\sqrt{r} \text{ est stable} \\ x_{0-} &= -\sqrt{r} \text{ est instable} \end{aligned}$$

► Si $r = 0$ les deux points fixes fusionnent en un point fixe $x = 0$ qu'est semi stable.

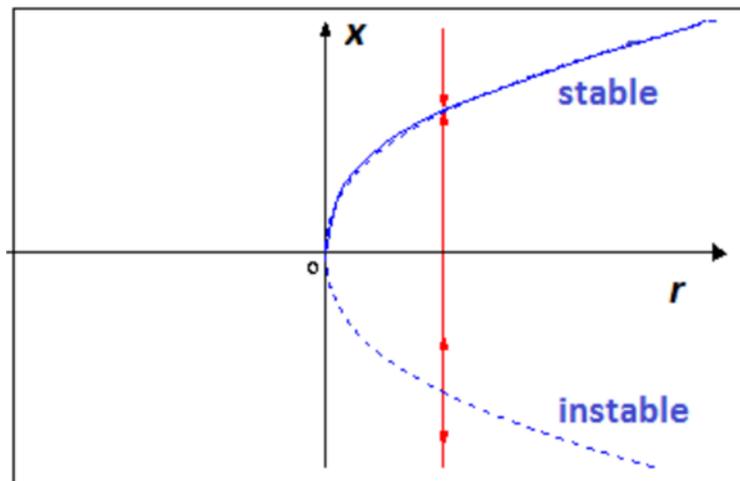


Figure 1.7 : Diagramme de bifurcation nœud-col

1.5.2 Bifurcation Transcritique

C'est une fourchette locale dans lequel, pour faire varier le paramètre, il y a un échange de stabilité des points d'équilibre. Sa forme normale est :

$$\dot{x} = rx - x^2 \quad 1.14$$

On a $f(x, r) = x(r - x^2) = 0$

Chapitre 1 : Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques

Alors l'équation admet 2 points fixes.

$$f'(x) = r - 2x = \begin{cases} r & \text{si } x = 0. \\ -r & \text{si } x = r. \end{cases} \quad 1.15$$

Et par suite :

- ▶ Si $r < 0$ le point fixe $x_0 = 0$ est stable, mais $x = r$ est instable.
- ▶ Si $r > 0$ le point fixe $x_0 = 0$ est instable, mais $x = r$ est stable.
- ▶ Si $r = 0$ le seul point fixe $x_0 = 0$ est semi stable (stable si $x_0 > 0$ et instable si $x_0 < 0$) [7].

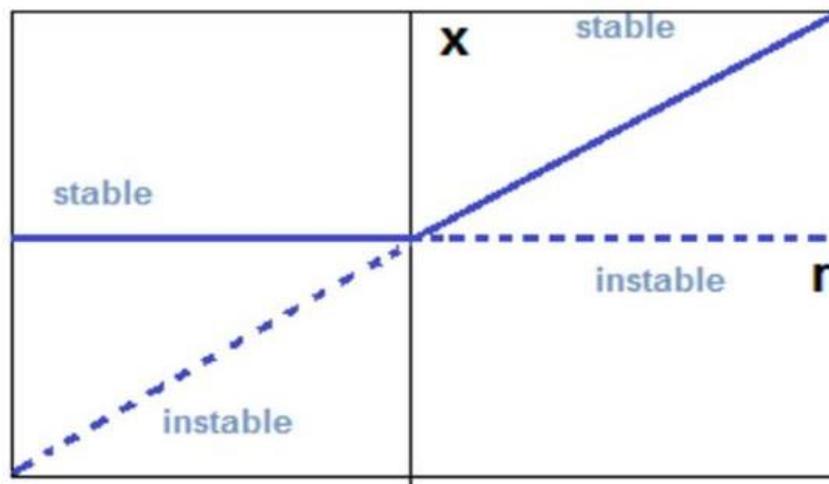


Figure 1.8 : Diagramme de bifurcation transcritique.

1.5.3 Bifurcation fourche

La stabilité d'un point d'équilibre change au profit de la naissance d'une paire de points d'équilibre [7].

La forme normale d'une bifurcation fourche super-critique est :

$$\dot{x} = rx - x^3 \quad 1.16$$

Et pour la sous-critique est :

$$\dot{x} = rx + x^3 \quad 1.17$$

Chapitre 1 : Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques

Dans le cas d'une bifurcation fourche super-critique on a :

$$f(x, r) = x(r - x^2) = 0 \Leftrightarrow \{x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{r} \text{ ou } x = -\sqrt{r}\} \quad 1.18$$

- Si $r < 0$ un seul point fixe $x = 0$.
- Si $r > 0$ (1.12) admet trois points fixes $\{0, \sqrt{r}, -\sqrt{r}\}$.

Stabilité de ces points fixes :

$$f'(x) = r - 3x^2 \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = r. \\ f'(\pm\sqrt{r}) = -2r. \end{cases} \quad 1.19$$

- Si $r < 0$ un seul point fixe $x = 0$ est stable.
- Si $r > 0$ le point fixe $x = 0$ est instable, mais $x = \pm\sqrt{r}$ sont stables.
- Si $r = 0$ un échange dans le nombre des points fixes dans la stabilité.

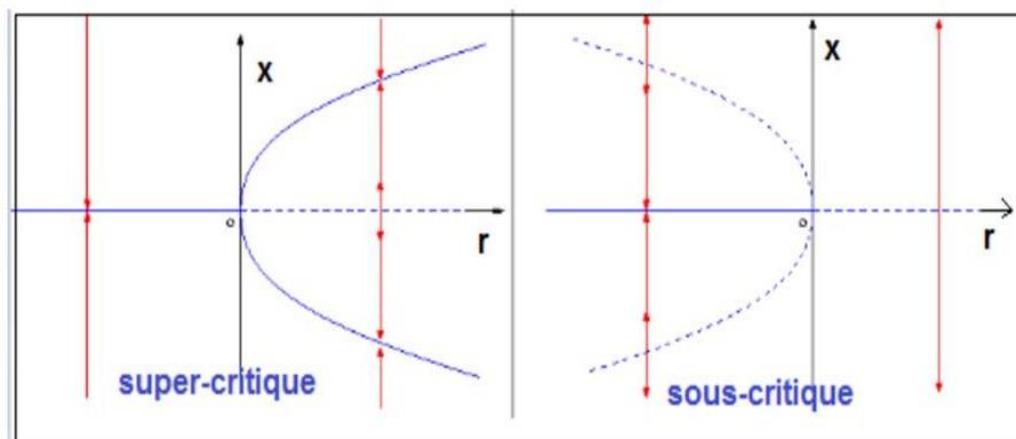


Figure 1.9: Diagramme de bifurcation fourche.

1.5.4 Bifurcation Hopf :

La bifurcation de Hopf correspond à la transformation d'un point fixe en un cycle limite par variation d'un paramètre du système dynamique, avec un changement du type de stabilité de l'équilibre existant [7].

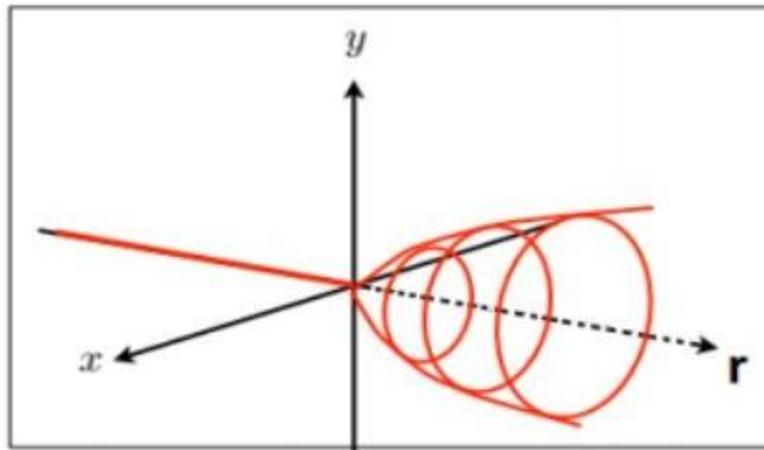


Figure 1.10: Diagramme de bifurcation hopf.

1.6 Conclusion :

On a étudié dans ce chapitre la théorie sur les systèmes dynamique et ainsi leurs caractéristiques tels que les points fixes et la stabilité, et enfin l'étude de la bifurcation.

Chapitre 2 :

Théorie de la synchronisation

1- Introduction

2- Définition de la synchronisation

3-Classes de synchronisation

4- Types de synchronisation

5- Méthodes de synchronisation

6- conclusion

Chapitre 2 : Théorie de synchronisation

2.1 Introduction :

Le phénomène de synchronisation est manifesté lorsque deux systèmes dynamiques évoluent d'une manière identique en fonction du temps. L'une des configurations de synchronisation les plus populaires est la configuration maître-esclave pour laquelle un système dynamique appelé système esclave (récepteur) suit le rythme et la trajectoire imposés par un autre système dynamique appelé système maître (émetteur). Les perspectives de l'utilisation du chaos dans diverses applications ont motivé les chercheurs à étudier la question de l'éventuelle possibilité de synchroniser deux systèmes chaotiques. Cette synchronisation paraît difficile à réaliser, car à la différence de la synchronisation où l'on cherche à reproduire seulement une période d'oscillation, la synchronisation chaotique présente plus de contraintes.

Le principe de ce chapitre est de donner la définition, types et méthodes de synchronisation.

2.2 Définition de la synchronisation :

Définition1 : Synchronisation est un mot grec décomposé en deux parties : (Syn) veut dire ensemble et (Chrono) veut dire temps. C'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations, en fonction du temps.[3]

Définition2 : La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.[3]

2.3 Classes de synchronisation :

Il existe deux classes de synchronisation suivant le sens dont l'énergie est échangée entre les deux systèmes chaotiques ;

- la synchronisation par couplage unidirectionnel
- la synchronisation par couplage bidirectionnel.

Chapitre 2 : Théorie de synchronisation

2.3.1 Synchronisation par couplage bidirectionnel :

Dans le couplage bidirectionnel, l'énergie est transférée entre les systèmes dans les deux sens, c'est à dire chaque système peut jouer le rôle d'un système maître et un système esclave en même temps.

Afin d'observer le comportement de synchronisation, nous considérons deux systèmes chaotiques n - dimensionnels identiques avec différentes conditions initiales. Les systèmes maître et esclave sont décrits respectivement par les relations 2.1 et 2.2. Le troisième terme du côté droit a été ajouté à la dynamique des systèmes à des fins de conception de commande.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + k_1 (y(t) - x(t)) \quad 2.1$$

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + k_2(x(t) - y(t)) \quad 2.2$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non linéaire continue, k_1 et k_2 sont des matrices diagonales qui sont utilisés comme gains de rétroaction à calculer.

En considérant :

$$e(t) = y(t) - x(t) \quad 2.3$$

$$f(y) - f(x) = M_{x,y}e \quad 2.4$$

avec : $M_{x,y}$: la matrice des coefficients (x et y).

La dynamique d'erreur peut s'écrire :

$$\dot{e}(t) = (A + M_{x,y} - (k_1 - k_2)) e(t) \quad 2.5$$

Puisqu'un système chaotique a des trajectoires bornées, $M_{x,y} = M(x, y)$ est une matrice bornée. Le théorème suivant donne la condition suffisante pour que le système (2.5) soit globalement stable [2].

Théorème 1 : S'il existe une matrice constante symétrique définie positive P et une constante $\varepsilon > 0$, telles que :

$$(A + M_{x,y} - (k_1 - k_2))^T P + P(A + M_{x,y} - (k_1 - k_2)) \leq -\varepsilon I \quad 2.6$$

Chapitre 2 : Théorie de synchronisation

Est satisfaite uniformément pour tout x et y , où I est la matrice d'identité, alors le système de dynamique d'erreur (2.5) est globalement stable, c'est-à-dire que les systèmes (2.1) et (2.2) sont synchronisés. [2]

2.3.2 Synchronisation unidirectionnelle

–**Le maître** : est un système indépendant.

–**L'esclave** : est un système dépendant du système maître.

Lors d'une synchronisation par couplage unidirectionnel, le transfert de l'énergie d'un système à l'autre entre deux systèmes est réalisé à l'aide d'un élément fonctionnant dans un seul sens, donc on n'a qu'un seul système maître qu'est l'émetteur et un seul système esclave qu'est le récepteur.

Par rapport au théorème précédent, le résultat peut être simplifié comme la condition de couplage unidirectionnel lorsque $k_1 = 0$ ou $k_2 = 0$.

Soit le système de Rössler :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = xz - bz + c \end{cases} \quad 2.7$$

Où $a = 0.2$, $b = 5.7$, $c = 0.2$. Le système Rössler est l'un des systèmes de temps continu les plus simples qui présentent des comportements chaotiques.

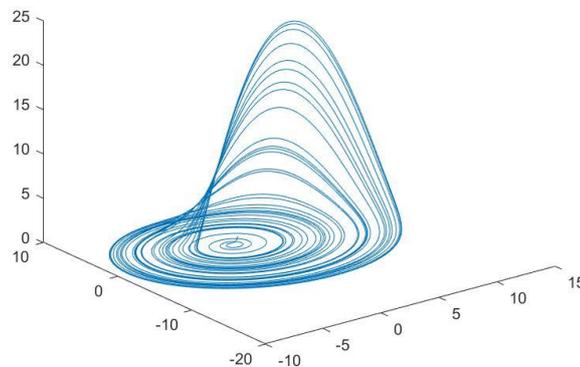


Figure 2.1 : Attracteur de système Rössler

2.3.3 Synchronisation via couplage bidirectionnel et unidirectionnel :

La sélection de ε et P comme précédemment, et du paramètre de couplage $k_1 = k_2 = \text{diag}\{8, 8, 15\}$ pour bidirectionnel et $k_1 = 0, k_2 = \text{diag}\{16, 16, 30\}$ pour la méthode unidirectionnelle pour satisfaire la condition qui est requise par le théorème 1. Tous les états sont synchronisés dans le système couplé Rössler avec couplage bidirectionnel et unidirectionnel [2] .

$$a=0.2$$

$$b=5.7$$

$$c=0.2$$

$$k1=16$$

$$k2=16$$

$$k3=30$$

On définit les erreurs de synchronisation par :

$$e_x(t) = x(t) - x_1(t), \quad e_y(t) = y(t) - y_1(t), \quad e_z(t) = z(t) - z_1(t),$$

figure(1);plot(t,x,'r',t,x1,'g')

figure(2);plot(t,y,'r',t,y1,'g')

figure(3);plot(t,z,'r',t,z1,'g')

figure(4);plot(t,(x-x1))

figure(5);plot(t,(y-y1))

figure(6);plot(t,(z-z1))

figure(7);plot(t,(x-x1),'r',t,(y-y1),'g',t,(z-z1))

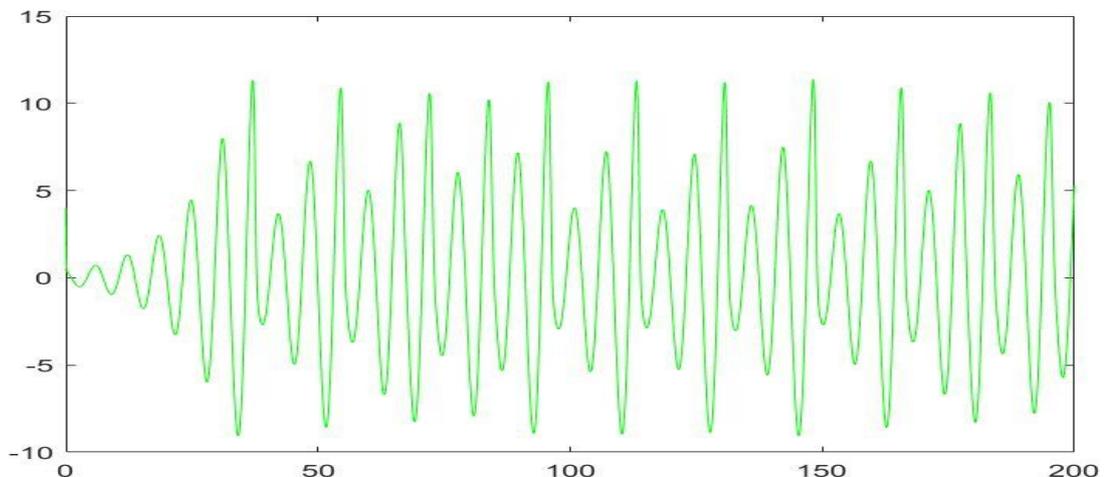


Figure2.2 : signaux x (Maitre) et x_1 (esclave)

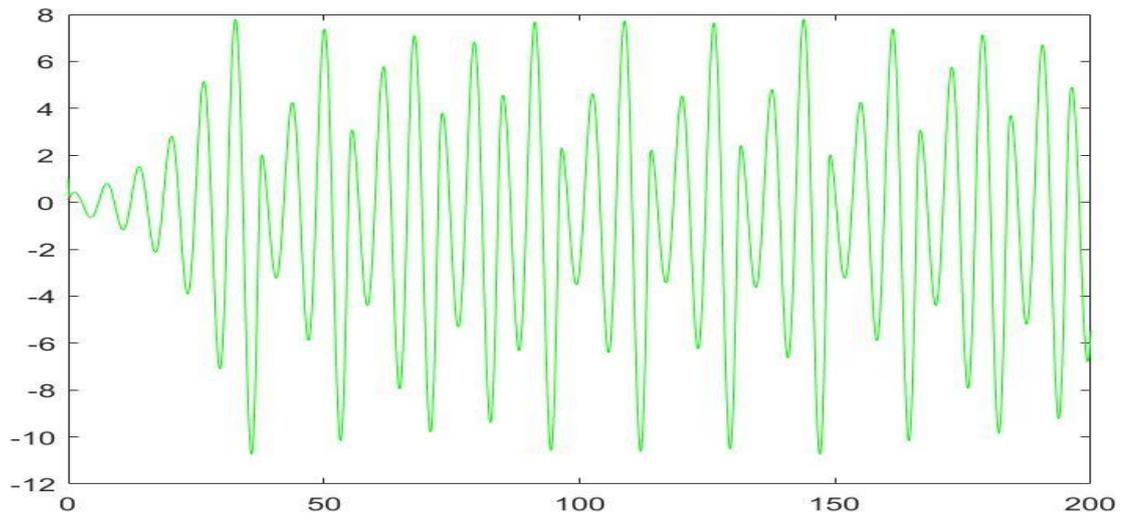


figure2.3 : signaux y (Maitre) et y_1 (esclave)

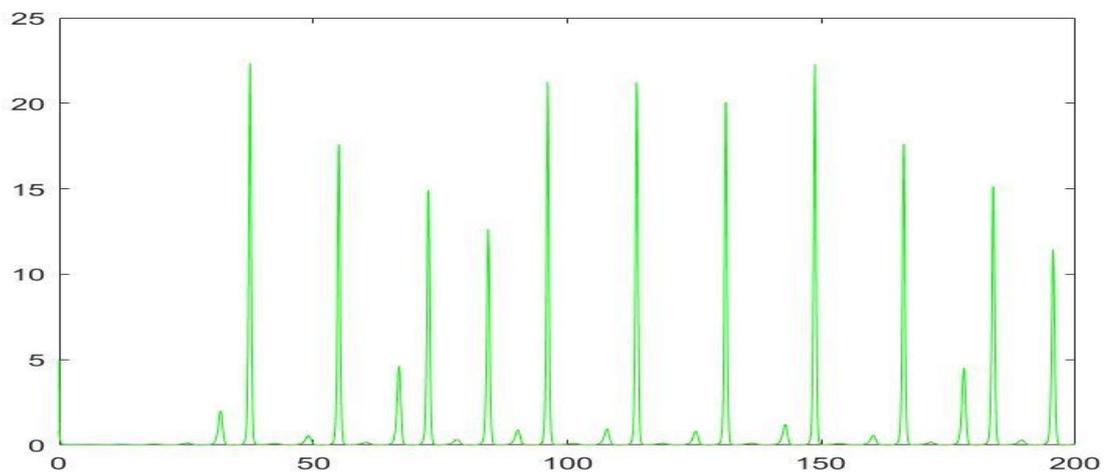


Figure2.4 : signaux z (Maitre) et z_1 (esclave)

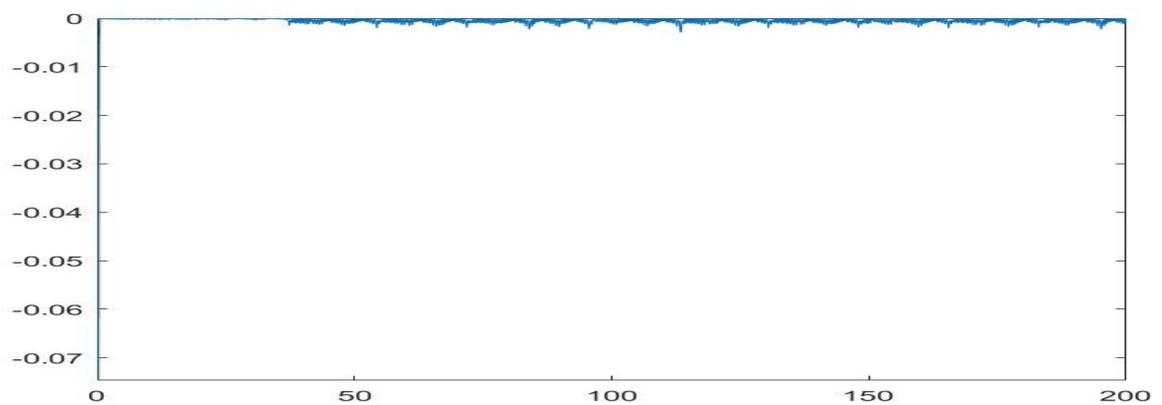


Figure2.5 : évolution de l'erreur e_1

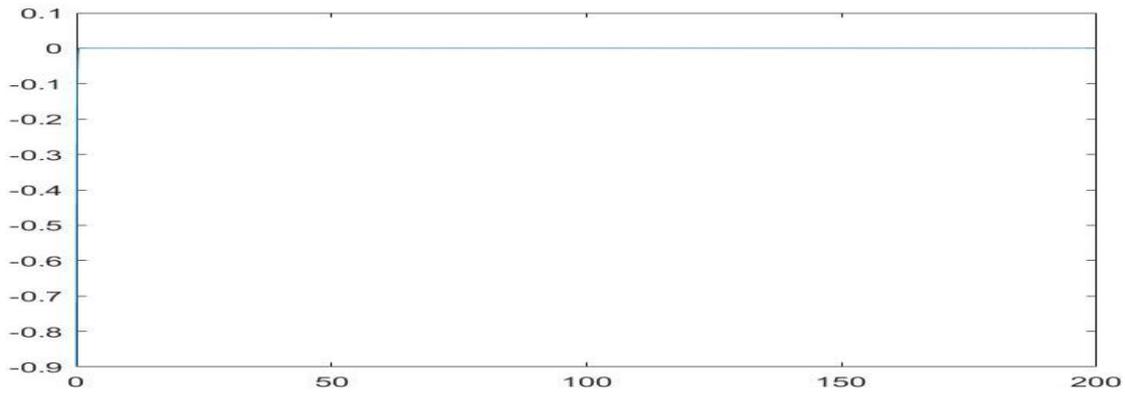


Figure2.6 : évolution de l'erreur e_2

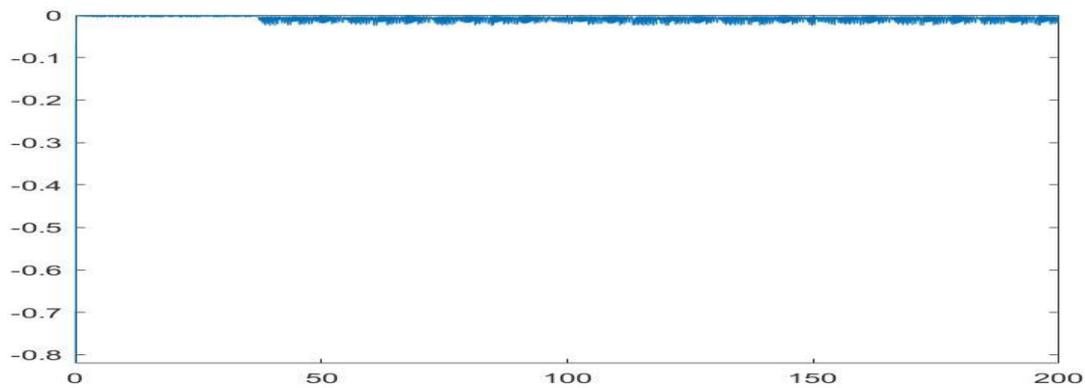


Figure2.7 : évolution de l'erreur e_3

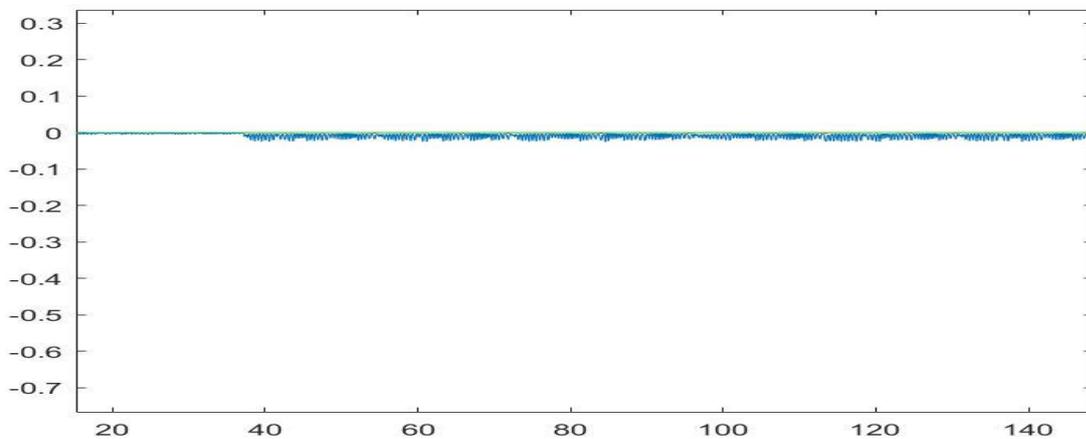


Figure2.8 : Etats synchronisés de Rössler

2.4 Différents types de synchronisation :

Dans cette section, nous introduisons différents types de synchronisation à savoir la synchronisation identique, la synchronisation généralisée, la synchronisation de phase, et la synchronisation retardée. [1]

2.4.1 La synchronisation identique :

La synchronisation identique ou la synchronisation complète a été réalisée grâce

Chapitre 2 : Théorie de synchronisation

aux effets des forces d'accouplement unidirectionnelles des systèmes dynamiques. Elle peut être détectée non seulement dans les systèmes autonomes, mais aussi dans les systèmes non autonomes. Et le plus intéressant c'est que ce phénomène rassemble tous les autres types de synchronisation (la synchronisation généralisée, de phase, à retard). Elle est basée sur les propriétés d'accouplement de deux systèmes ou plus, si ces systèmes sont identiques, on parle de la synchronisation identique, et s'ils sont différents on parle de la synchronisation généralisée.

Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques identiques liées par d'accouplement unidirectionnel, et représentés par les équations suivantes :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad 2.8$$

$$\dot{y} = g(y, x, t) \quad 2.9$$

On dit qu'il y a une synchronisation identique entre ces deux systèmes si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |Y(t) - X(t)| = 0 \quad 2.10$$

Pour tout conditions initiales $X(0)$, $Y(0)$ des deux systèmes. [1]

D'après cette définition on peut conclure que l'étude de la synchronisation nous ramène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine d'un nouveau système à qui on donne le nom du "système erreur". Ce dernier représente la perturbation qui peut exister entre le système émetteur et le système récepteur. La question qu'on peut poser ici : est-ce que cette perturbation va tendre vers le zéro exponentiellement ou non. A cet effet, on va supposer que l'erreur entre les deux systèmes est donnée par l'équation :

$$e = y - x \quad 2.11$$

Cette dernière se développe par rapport au temps est donner par :

$$\frac{de}{dt} = g(x, y) - f(x). \quad 2.12$$

2.4.2 Synchronisation généralisée :

Dans le concept de la synchronisation identique sous l'effet d'accouplement unidirectionnel il a été indiqué que le système récepteur est identique au système

Chapitre 2 : Théorie de synchronisation

émetteur C. Cependant, on va essayer d'imaginer la situation pratique intéressante où le système récepteur est différent du système émetteur.

En général, quand il existe une différence essentielle entre les systèmes couplés, on ne peut pas être sûr du premier coup d'œil d'affirmer que les systèmes chaotiques non identiques peuvent être synchronisés, mais plusieurs travaux ont démontré que ce type de synchronisation chaotique peut exister en généralisant le concept de la synchronisation pour inclure le non identification entre les systèmes couplés, et on a appelé ce phénomène la synchronisation généralisée. [1]

Pour définir la synchronisation généralisée pour deux systèmes chaotiques couplés de façon unidirectionnelle, on va travailler avec des systèmes non-linéaires composés d'un système émetteur autonome avec les variables dynamiques x dans un espace de phase x couplés à un système récepteur avec des variables dynamiques y dans l'espace d'état y . La dynamique des systèmes émetteur et récepteur est donnée par :

$$\dot{x} = F(x, t) \quad 2.13$$

$$\dot{y} = G(y(t), g, x(t)) \quad 2.14$$

Avec g une constante qui caractérise la force d'accouplement unidirectionnel. [1]

Définition : Quand $g = 0$, s'il existe une fonction $\Phi : x \rightarrow y$, telles que toutes les trajectoires du système émetteur et du système récepteur, avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \Phi(x(t))\| = 0. \quad 2.15$$

Pour tout $t \rightarrow \infty$, quel que soit $x(0)$ et $y(0)$.

Alors les deux systèmes chaotiques (2.12) et (2.13) se synchronisent au sens généralisé par rapport la fonction Φ . [1]

2.4.3 Anti-Synchronisation :

Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. L'erreur

Chapitre 2 : Théorie de synchronisation

d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit [4] :

$$e(t) = y(t) + x(t) \quad 2.16$$

2.4.4 Synchronisation retardée :

Les chercheurs ont découvert que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un décalage en temps. On dit qu'on a une synchronisation retardée (ou anticipée) si les variables d'état $y(t)$ du système chaotique esclave converge vers les variables d'état $x(t)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous [4] :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) - x(t - \tau) = 0 \quad 2.17$$

Avec : τ : est un nombre positif très petit.

2.4.5 Synchronisation projective :

On dit qu'on a une synchronisation projective si les variables d'état $y_i(k)$ du système chaotique esclave $Y(k) = (y_i(k))_{1 \leq i \leq n}$ se synchronisent avec une constante multiple de l'état $x_i(k)$ du système chaotique maître $X(k) = (x_i(k))_{1 \leq i \leq n}$, tels que :

$$\exists \alpha_i \neq 0 \lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(k) - \alpha_i x_i(k)\| = 0, \forall (x(0), y(0)), i = 1, 2, \dots, n. \quad 2.18$$

Le cas où tous les α_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète. Le cas où tous les α_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation complète.

2.5 Méthodes de synchronisation :

Cette section est consacrée à la présentation de diverses méthodes de synchronisation les plus performantes et les plus rencontrées.

2.5.1 Méthode du contrôleur actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques, a été proposée par Bai et Lonngren [18], c'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme. Soit deux systèmes chaotiques à synchroniser, maître et esclave, définis par :

Chapitre 2 : Théorie de synchronisation

$$x(k + 1) = F(x(k)). \quad 2.19$$

$$y(k + 1) = G(y(k)) + U. \quad 2.20$$

D'où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $U = (u_i)$ est un contrôleur à déterminer. Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Cette erreur est obtenue comme suit :

$$y(k + 1) - x(k + 1) = G(y(k)) - F(x(k)) + U. \quad 2.21$$

Si on peut écrire la quantité $G(y(k)) - F(x(k))$ de la façon suivante

$$G(y(k)) - F(x(k)) = Ae(k) + N(x(k), y(k)). \quad 2.22$$

L'erreur peut être exprimée comme suit :

$$e(k + 1) = Ae(k) + N(x(k), y(k)) + U. \quad 2.23$$

D'où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et N une fonction non linéaire. Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V - N(x(k), y(k)). \quad 2.24$$

D'où V est le contrôleur actif, défini par :

$$V = -L \cdot e(k). \quad 2.25$$

D'où : L est une matrice de contrôle inconnue.

On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$$e(k+1) = (A - L) e(k) \quad 2.26$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître (2.18) et le système esclave (2.19) est transformé en problème de zéro stabilité du système (2.25). Maintenant, le Théorème qui suit est un résultat immédiat de la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires discrets. [6]

Chapitre 2 : Théorie de synchronisation

2.5.2 Méthode du Backstepping :

La méthode du Backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov avec la conception du contrôleur nécessaire. En considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad 2.27$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 = f_2(y_1, y_2, y_3) \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad 2.28$$

D'où f_1 est une fonction linéaire, f_i ($i = 2, 3, \dots, n$), sont des fonctions non-linéaires et u est un contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les systèmes (2.27) et (2.28). L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1 \\ e_2 = y_2 - x_2 \\ \vdots \\ e_n = y_n - x_n \end{cases} \quad 2.29$$

Alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = g_1(e_1, e_2) \\ \dot{e}_2 = g_2(e_1, e_2, e_3) \\ \vdots \\ \dot{e}_n = g_n(e_1, e_2, \dots, e_n) \end{cases} \quad 2.30$$

D'où : e_i est une fonction linéaire, et g_i ($i = 2, 3, \dots, n$), sont des fonctions non-linéaires. L'objectif est de calculer une loi de contrôle u qui assure la convergence du système e_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), vers l'origine en utilisant l'algorithme Backstepping. Pour cela, le système d'erreur (2.29) doit être décomposé en sous-système :

$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3), \dots, (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n),$

Chapitre 2 : Théorie de synchronisation

Et pour chaque sous-système on définit une fonction de Lyapunov V positive :
 $V_j = (e_j, u_j, \alpha_j)$.

D'où j est l'ordre du sous-système, u_j α_j représentent, respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous-système d'ordre j . u_j et α_j (sont calculés à chaque fois de tel sorte que $V_j < 0$. [6]

2.5.3 Méthode du mode glissant

Dans la théorie du contrôle robuste, la méthode du mode glissant est souvent pratiquée en raison de ses avantages inhérents, telles que la réalisation facile, la réponse rapide et une bonne performance transitoire ainsi que sa sensibilité aux incertitudes des paramètres et des perturbations externes. Soit les systèmes chaotiques maître et esclave donnés par les formes suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)). \quad 2.31$$

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + u \quad 2.32$$

D'où : $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice constante, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non-linéaire et $u \in \mathbb{R}^n$ est un contrôleur à déterminer. L'erreur entre le système maître (2.30) et le système esclave (2.31) est définie par : $e = y - x$.

La dynamique de l'erreur peut s'écrire comme suit :

$$\dot{e} = Ae + \eta(x, y) + u. \quad 2.33$$

$$D'où : \eta(y, x) = f(y(t)) - f(x(t))$$

Si on se base sur le principe du contrôle actif pour éliminer la partie non-linéaire du système d'erreur (2.32), la loi de contrôle u est choisie comme suit :

$$u = Bv - \eta(x, y). \quad 2.34$$

D'où v c'est le contrôleur actif et B un vecteur constant de gain qui doit être calculé de telle sorte que le couple (A, B) soit contrôlable. En substituant (2.34) dans (2.33), la dynamique de l'erreur est simplifiée comme suit :

Chapitre 2 : Théorie de synchronisation

$$\dot{e} = Ae + Bv. \quad 2.35$$

Ainsi, le problème de synchronisation peut être remplacé par un équivalent problème de la stabilisation de la solution $e = 0$ du système (2.34) par un choix approprié du contrôleur en mode glissant. Dans la méthode du mode glissant, nous définissons la surface de glissement s , comme suit :

$$s(e) = Ce = \sum_{j=1}^n c_j e_j. \quad 2.36$$

D'où C : est un vecteur constant à déterminer, et le système contrôlé doit satisfaire : $s(e) = 0$, $s'(e) = 0$. [6]

2.6 CONCLUSION :

Le deuxième chapitre est dédié à la théorie de la synchronisation où on a donné une série de définitions qui conduisent à une définition mathématique de la synchronisation, ensuite on a présenté les classes de synchronisation puis on a présenté les différents types de la synchronisation, en particulier on a discuté la synchronisation identique, en clôturant ce chapitre par les méthodes de la synchronisation identique.

Chapitre 3 :

Application de la synchronisation au système hyper chaotique de Qi

3.1 Introduction :

On va étudier dans ce chapitre le comportement d'un système hyper chaotique, et ensuite on va calculer les gains pour étudier la synchronisation entre les deux systèmes maître esclave.

3.2 Définition :

Le système hyper chaotique de Qi est donné par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + yz. \\ \dot{y} = b(x + y) - xz. \\ \dot{z} = -cz - rw + xy. \\ \dot{w} = fz - dw + xz. \end{cases} \quad 3.1$$

On initialise les valeurs des paramètres :

$a=42, b=24, c=13, d=20, r=50, f=40, s=0.01.$

3.3 Analyse du système hyper chaotique de Qi :

3.3.1 Etude des points fixes :

Pour déterminer les points fixes de ce système, on résout les équations (3.2) ci-dessous.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + yz = 0 \\ \dot{y} = b(x + y) - xz = 0 \\ \dot{z} = -cz - rw + xy = 0 \\ \dot{w} = fz - dw + xz = 0 \end{cases} \quad 3.2$$

$x = y = z = w = 0$: est le premier point fixe.

Il en existe d'autres. On calcule maintenant la matrice jacobienne J au point fixe :

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & -r \\ 0 & 0 & f & -d \end{bmatrix}$$

On calcule le déterminant : $(\lambda I - J) = 0$

$$[(\lambda + a)(\lambda - b) - ba][(\lambda + c)(\lambda + d) + rf] = 0. \quad 3.3$$

Avec :

I : une matrice identité.

La résolution de l'équation caractéristique nous donne les racines suivantes :

$$\lambda_1 = -40.4081 + 17.1011i$$

$$\lambda_2 = -40.4081 - 17.1011i$$

$$\lambda_3 = 20.4081 + 20.3112i$$

$$\lambda_4 = 20.4081 - 20.3112i$$

Remarque :

La solution est composée de quatre valeurs propres complexes, où deux ont la partie réelle positive et les deux autres ont la partie réelle négative.

Alors on peut dire qu'on a un point fixe instable.

3.3.2 Utilisation du Simulink Matlab :

Pour visualiser l'évolution du système de Qi, on a réalisé son schéma de simulation sous Simulink. Ce schéma est donné par la figure (III-1)

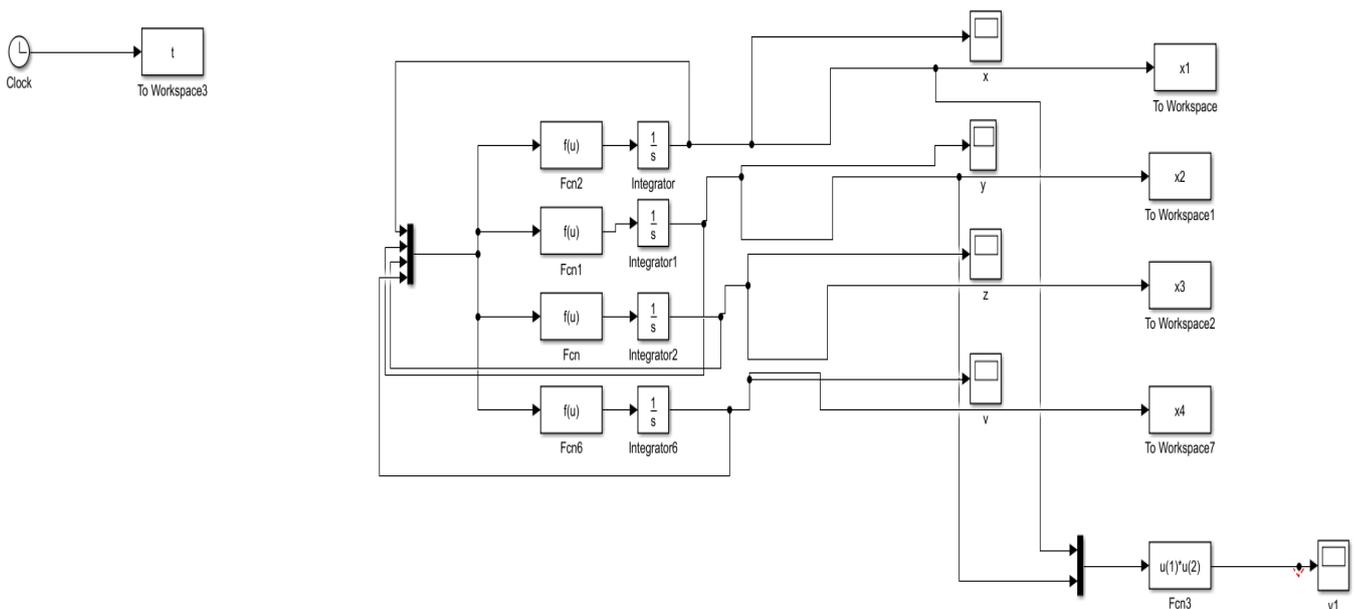


Figure 3.1 : circuit sur Simulink

Les résultats de simulations sont donnés par les figures (III-2-6) :

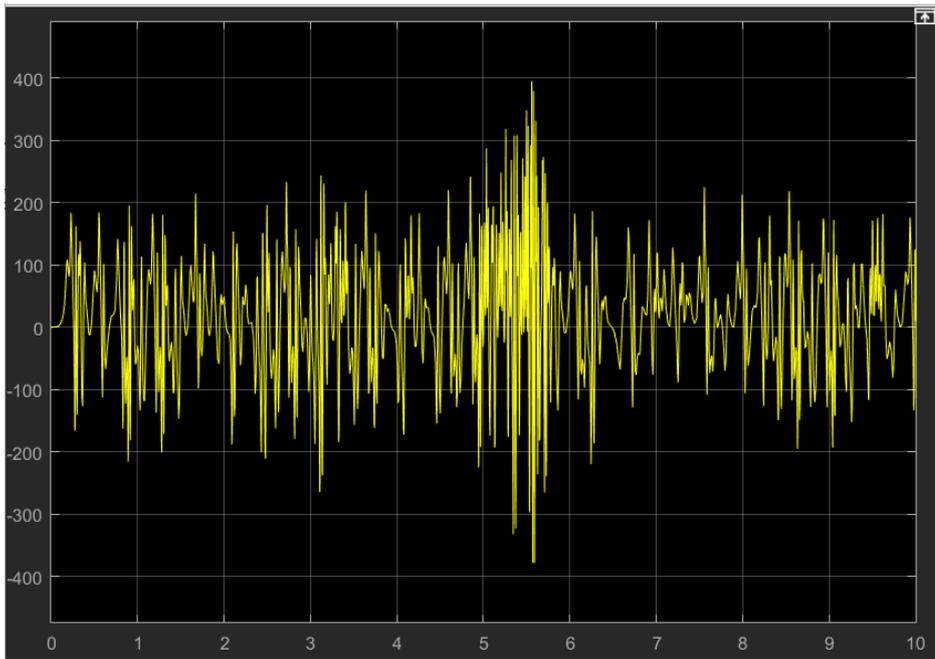


Figure 3.2 : graphe $X=f(t)$

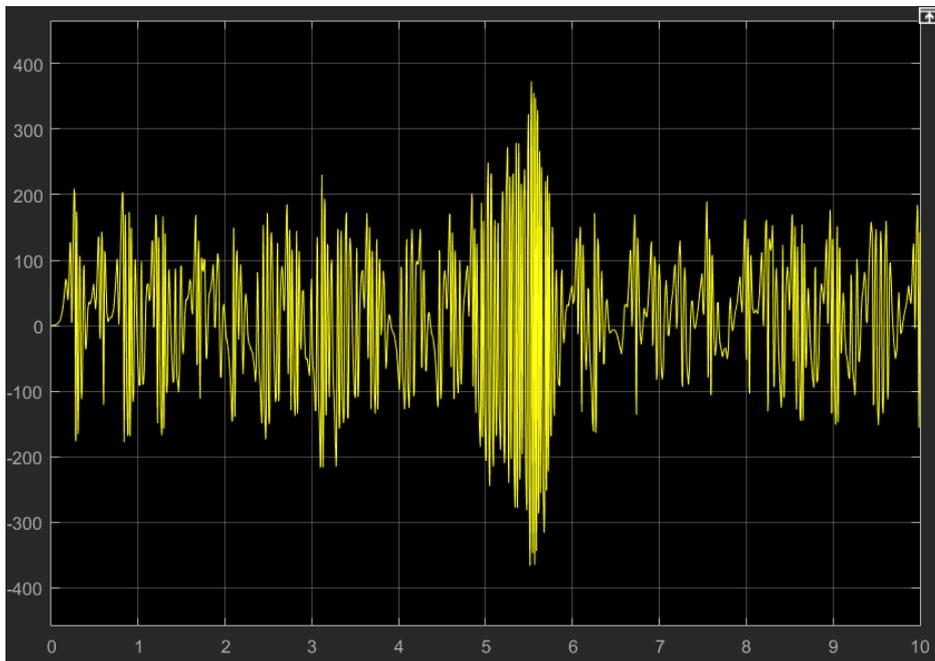


Figure 3.3 : graphe $y=f(t)$

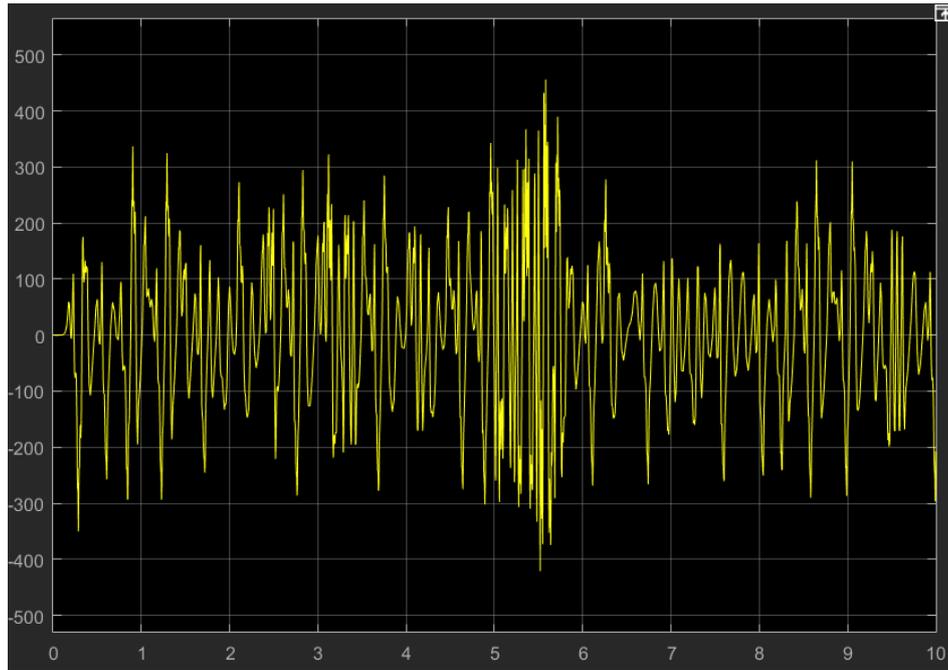


Figure 3.4 : Graphe $z=f(t)$

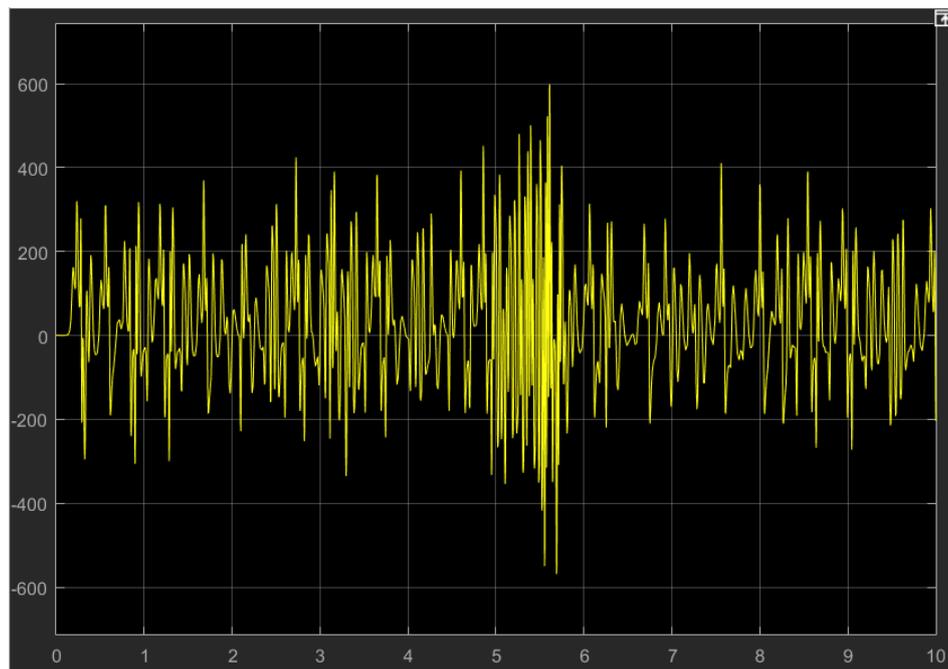


Figure 3.5 : Graphe $w=f(t)$

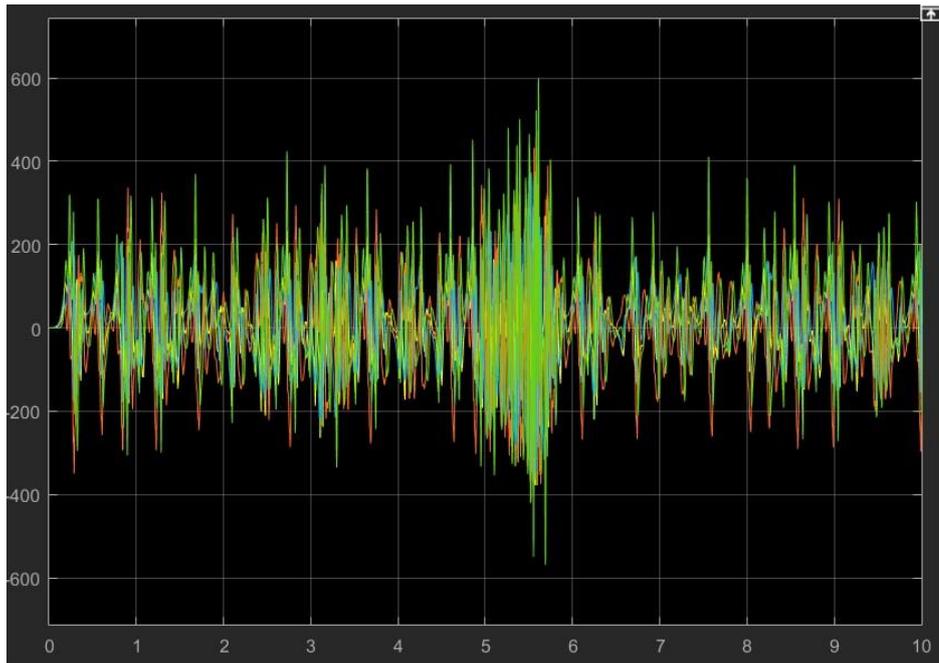


Figure 3.6 : les graphes xyzw en fonction du temps

3.4 La synchronisation entre les deux systèmes chaotiques :

La synchronisation des deux systèmes chaotiques peut être effectuée, c'est les valeurs des coefficients $[k_1, k_2, k_3, k_4]$ qui sont responsables de cette synchronisation.

Les équations du maître ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_2 - x_1) + x_2x_3 \\ \dot{y}_1 = (x_1 + x_2) - x_1x_3 \\ \dot{z}_1 = -cx_3 - rx_4 + x_1x_2 \\ \dot{w}_1 = fx_4 - dx_3 + x_1x_3 \end{cases} \quad 3.4$$

Et des équations de l'esclave ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = (y_2 - y_1) + y_2y_3 + k_1e_1 \\ \dot{y}_2 = (y_1 + y_2) - y_1y_3 + k_2e_2 \\ \dot{z}_2 = -cy_3 - ry_4 + y_1y_2 + k_3e_3 \\ \dot{w}_2 = fy_4 - dy_3 + y_1y_3 + k_4e_4 \end{cases} \quad 3.5$$

On réalise après le circuit de la synchronisation dans le Simulink :

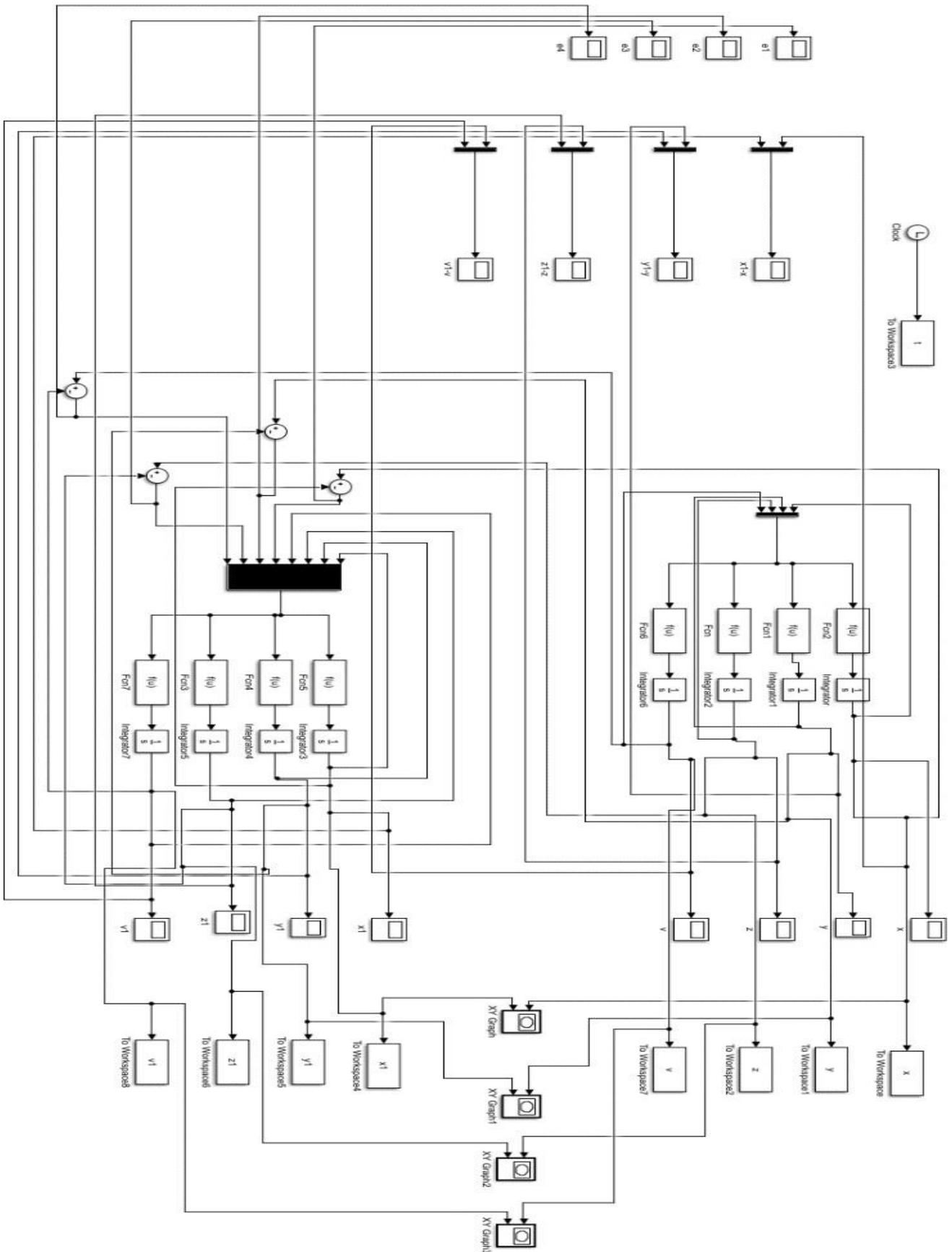


Figure 3.7 : circuit de synchronisations des deux systèmes de Qi

L'erreur entre les deux systèmes est défini par :

$$e_1 = x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, e_3 = z_2 - z_1, e_4 = w_2 - w_1 \quad 3.6$$

Et sa dérivée :

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_2 - \dot{x}_1, \dot{e}_2 = \dot{y}_2 - \dot{y}_1, \dot{e}_3 = \dot{z}_2 - \dot{z}_1, \dot{e}_4 = \dot{w}_2 - \dot{w}_1 \quad 3.7$$

Après simplification :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (e_2 - e_1) + e_2e_3 + x_3e_2 + x_2e_3 + k_1e_1 \\ \dot{e}_2 = (e_1 + e_2) - e_1e_3 + x_3e_1 + x_1e_3 + k_2e_2 \\ \dot{e}_3 = -ce_3 - re_4 + e_1e_2 + x_2e_1 + x_1e_2 + k_3e_3 \\ \dot{e}_4 = fe_4 - de_3 + e_1e_3 + x_3e_1 + x_1e_3 + k_4e_4 \end{cases} \quad 3.8$$

L'équation devient donc :

$$\dot{e} = (A + M_{x,y} - D) e. \quad 3.9$$

Avec :

$$M_{x,y} = \begin{bmatrix} 0 & y_3 & x_2 & 0 \\ y_3 & 0 & x_1 & 0 \\ y_2 & x_1 & 0 & 0 \\ y_3 & 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & -r \\ 0 & 0 & f & -d \end{bmatrix}$$

Le théorème : s'il existe une matrice symétrique définie positive (P) et un constant $\epsilon > 0$ tels que : [8]

$$(A + M - D)^T P + P(A + M - D) \leq -\epsilon I. \quad 3.10$$

Avec :

I : matrice identité.

Donc la dynamique de l'erreur du système est globalement stable et le système x et le système y synchronisent.

La preuve :

Considérant l'équation de LYAPUNOV suivante :

$$V(t) = e^T(t) P e(t). \quad 3.11$$

On calcule sa dérivée :

$$\dot{V} = e^T(t) (A + M - D)^T P + P(A + M - D) e(t) \leq -\epsilon e^T(t) e(t) < 0 \quad 3.12$$

Après simplification on aura une matrice qu'on peut la nommer AA et son équation est :

$$AA = (((A + M - D)^T) * P) + P * (A + M - D) + \epsilon * I. \quad 3.13$$

Après avoir exécuté le calcul sur Matlab, on obtient la matrice AA :

```
AA =
[      s - 2*p1*(a + k1), p1*(a + y3) + p2*(b - y3),      p1*x2 + p3*y2,          p4*y3]
[ p1*(a + y3) + p2*(b - y3),      s + 2*p2*(b - k2),      p3*x1 - p2*x1,          0]
[      p1*x2 + p3*y2,          p3*x1 - p2*x1,      s - 2*p3*(c + k3), p4*(f + x1) - p3*r]
[      p4*y3,          0, p4*(f + x1) - p3*r,      s - 2*p4*(d + k4)]
```

Avec : $s = \epsilon$

Chapitre 3: Application de la synchronisation au système hyper chaotique de Qi

Ensuite on calcule les déterminants afin d'obtenir les équations des gains de synchronisation :

$$det1 = f(k1)$$

$$det2 = (k1, k2)$$

$$det3 = (k1, k2, k3)$$

$$det4 = (k1, k2, k3, k4)$$

D'après le théorème ci-dessus, la matrice AA doit être définie négative, Pour qu'elle soit définit négative il faut que :

$$det1 < 0$$

$$det2 > 0$$

$$det3 < 0$$

$$det4 > 0$$

Après avoir calculé les déterminant et extrait les gains de synchronisation (k1, k2, k3, k4), on retourne au fichier Simulink et on observe la synchronisation à partir des scoops.

3.4.1 Cas où la synchronisation est réalisée :

D'abord on propose la matrice :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice AA devient donc comme suit :

```
AA =  
[ - 2*k1 - 8399/100,          66,          x2 + y2,          y3]  
[          66, 4801/100 - 2*k2,          0,          0]  
[          x2 + y2,          0, - 2*k3 - 2599/100,          x1 - 10]  
[          y3,          0,          x1 - 10, - 2*k4 - 3999/100]  
>>
```

On donne des valeurs fixes pour les x,y :

$$x1 = 230, x2 = 295, y1 = 300, y2 = 300, y3 = 300$$

La matrice AA va se simplifier encore et devient comme suit :

```
AA =  
[ - 2*k1 - 8399/100,      66,      595,      300]  
[      66, 4801/100 - 2*k2,      0,      0]  
[      595,      0, - 2*k3 - 2599/100,      220]  
[      300,      0,      220, - 2*k4 - 3999/100]  
  
>>
```

Donc les gains obtenu après le calcule seront :

$$k1 = 40,95$$

$$k2 = 1114,05$$

$$k3 = 6800,55$$

$$k4 = 1.6698e+11$$

Remarque :

Les gains obtenus ont réalisés la synchronisation, mais ils peuvent causer un problème de bruit l'ors de la transmission.

Solution :

On doit trouver d'autres gains plus petits et qui réalisent la synchronisation, et pour le faire, on doit faire un programme sur Matlab qui doit changer la matrice P à chaque fois et de faire des itérations jusqu'à obtenir les valeurs favorisées qui atteignent le critère d'arrêt :

Après l'exécution du programme, on a trouvé le vecteur des gains :

$$v = \begin{bmatrix} 10 \\ 712 \\ 789 \\ 901 \end{bmatrix}$$

On a testé ces valeurs au niveau du Simulink et on extrait les graphes de l'esclave en fonction maître, et par la suite les erreurs de synchronisation.

Et on a obtenu les figures ci-dessous :

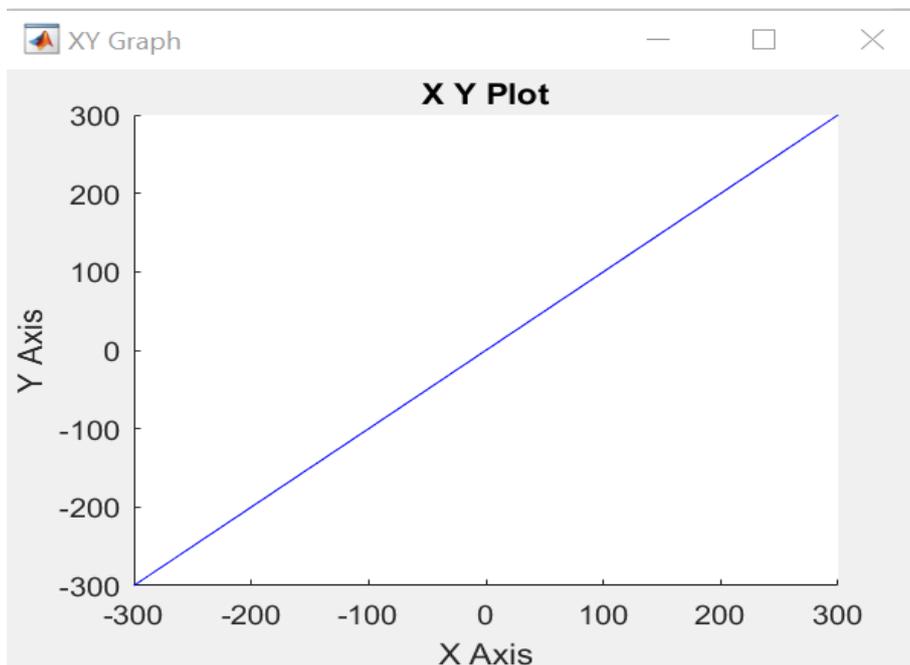


Figure 3.8 : x1 en fonction de y1

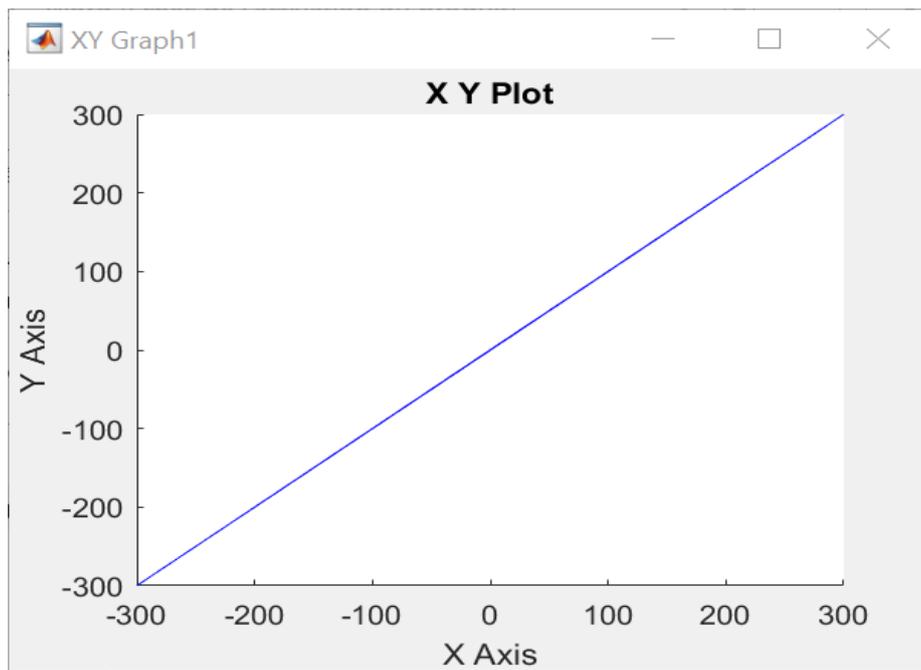


Figure 3.9 : x_2 en fonction de y_2

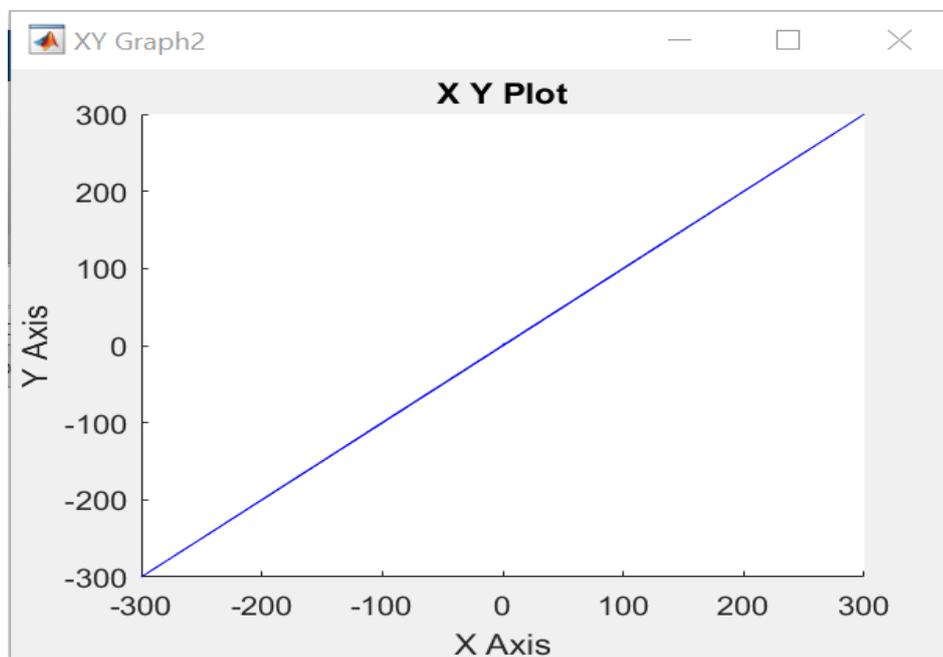


Figure 3.10 : x_3 en fonction de y_3

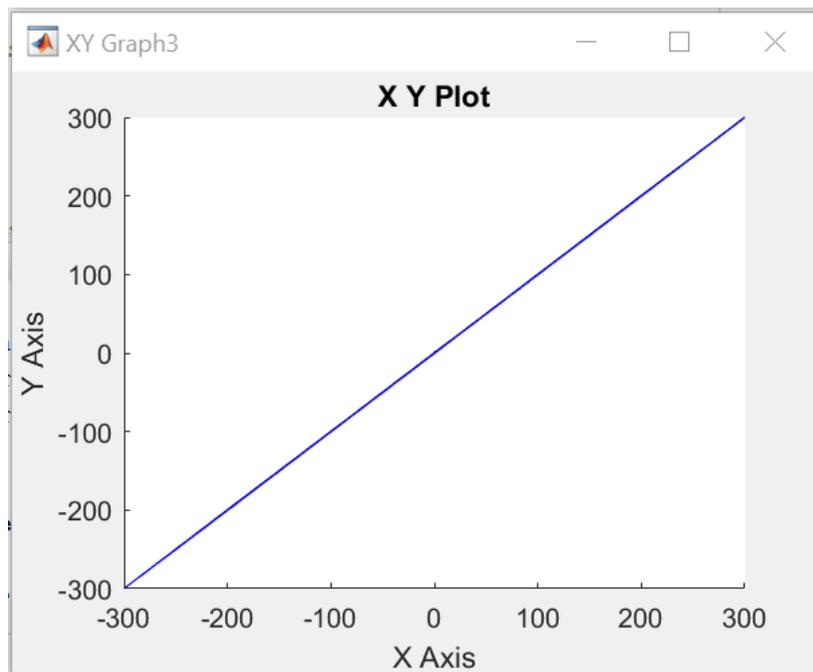


Figure 3.11 : x_4 en fonction de y_4

On extrait après les figures des erreurs de synchronisation :

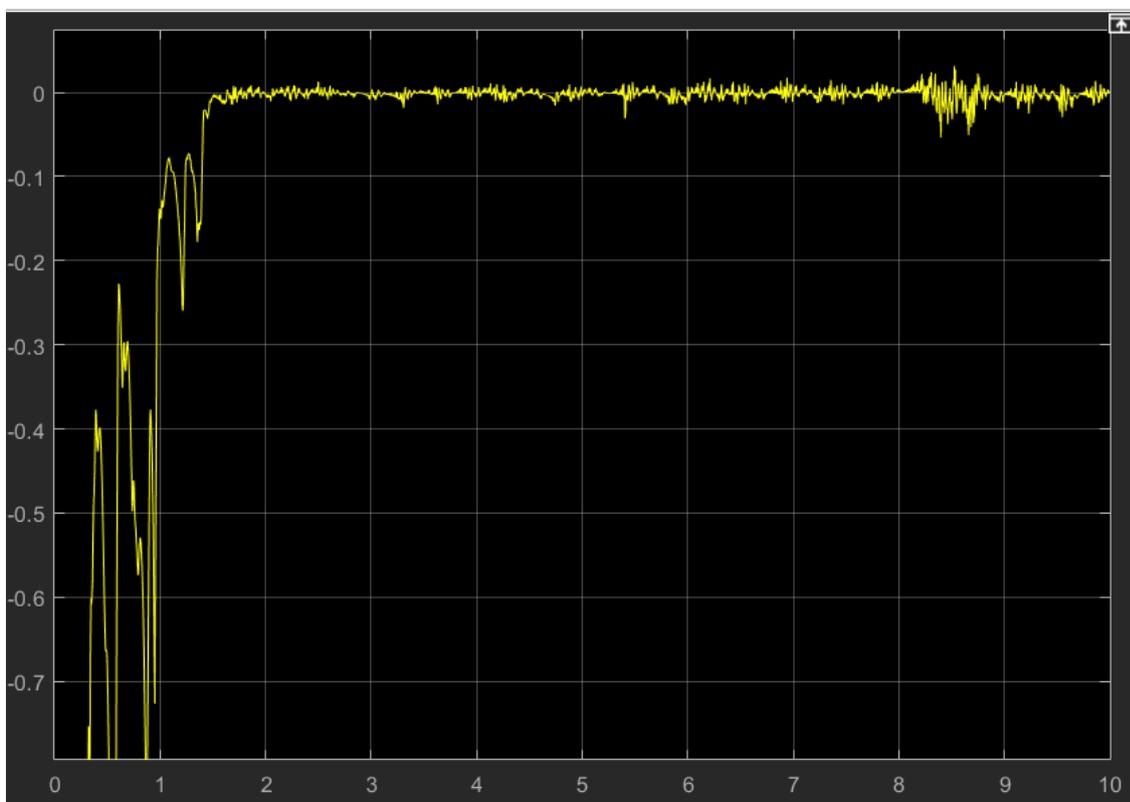


Figure 3.12 : $e_1(t)$

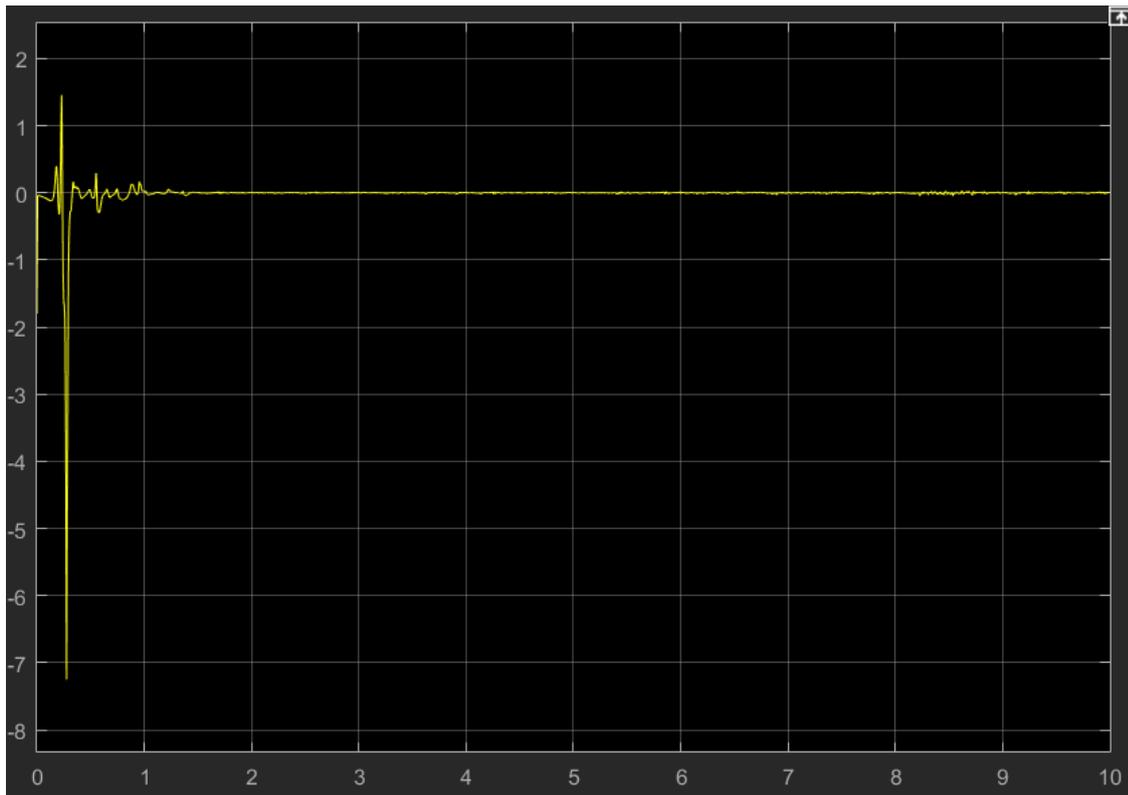


Figure 3.13 : $e_2(t)$

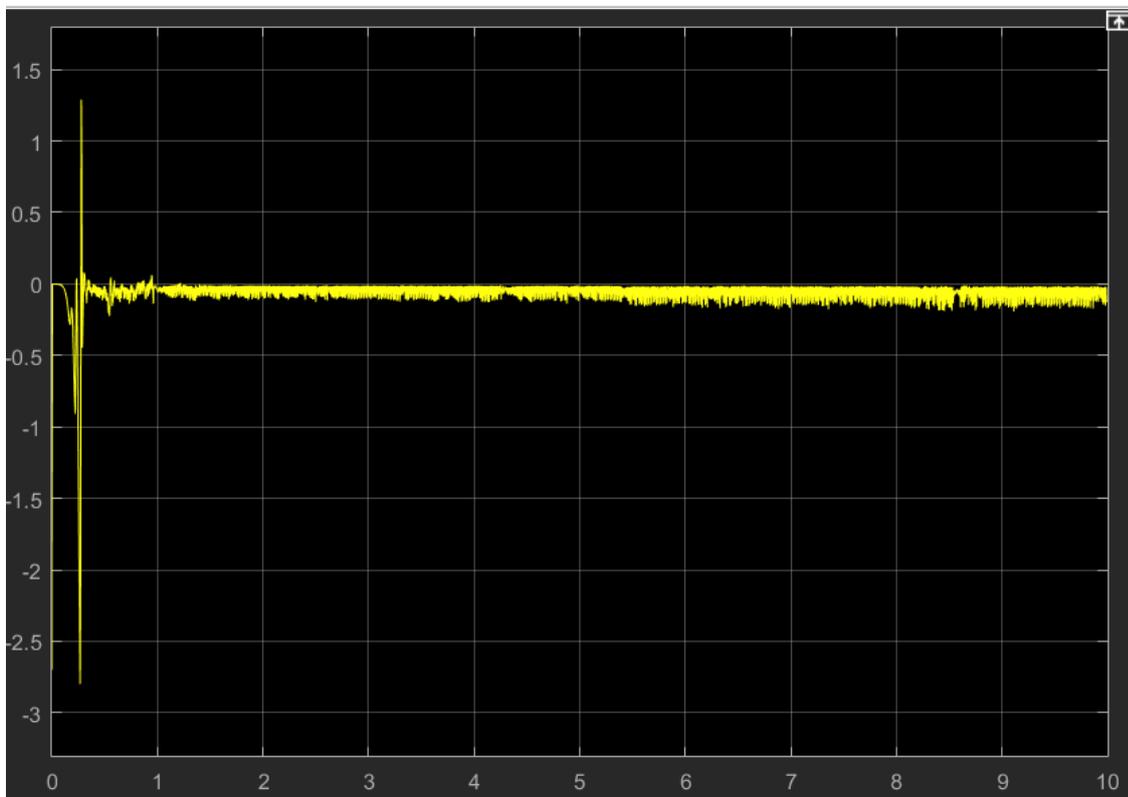


Figure 3.14 : $e_3(t)$

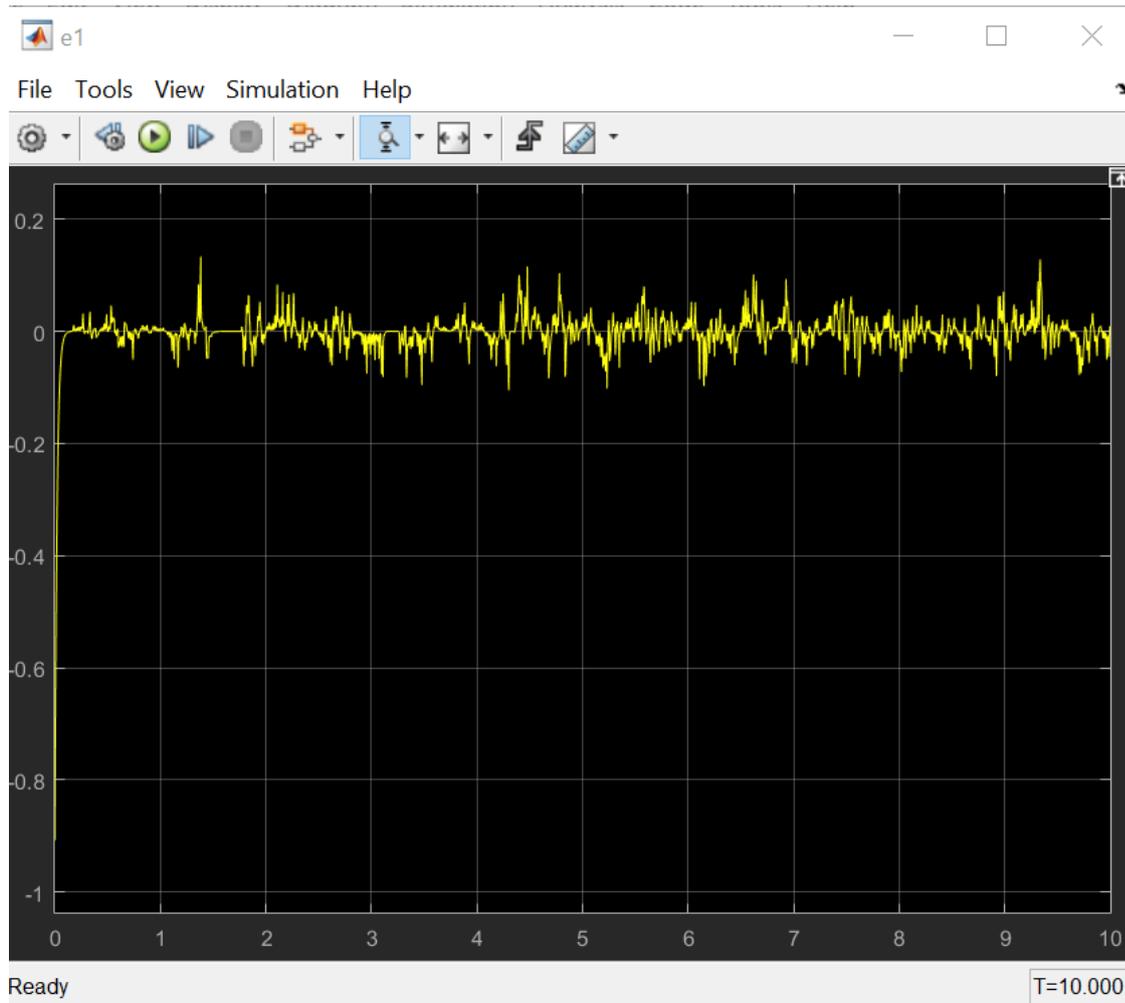


Figure 3.15 : $e_4(t)$

3.4 Conclusion :

On a étudié dans ce chapitre le comportement et les caractéristiques du système hyper chaotique de Qi, et on a exécuté la simulation sur le Matlab Simulink afin de visualiser le comportement de ce système, et ainsi de vérifier la synchronisation unidirectionnel des deux systèmes étudié.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié le système dynamique hyper chaotique de Q_i , ainsi que la synchronisation maître-esclave de deux systèmes de Q_i .

Le premier chapitre présente les notions de base sur les systèmes dynamiques chaotiques. Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié le comportement du système hyper chaotique de Q_i , cette étude a été mise en évidence à l'aide de simulations. Le chapitre 3 a été consacré à l'étude du phénomène de la synchronisation entre deux systèmes de Q_i .

La contribution de ce travail a été la synchronisation de deux systèmes hyper chaotique identiques. Des lois de commande sont calculées pour obtenir la synchronisation. Une première loi de commande, basée sur l'optimisation de la matrice P définie positive de système de Q_i .

Nous avons montré par simulation que dans cette approche, les états de système maître et ceux de système esclave sont asymptotiquement synchronisés.

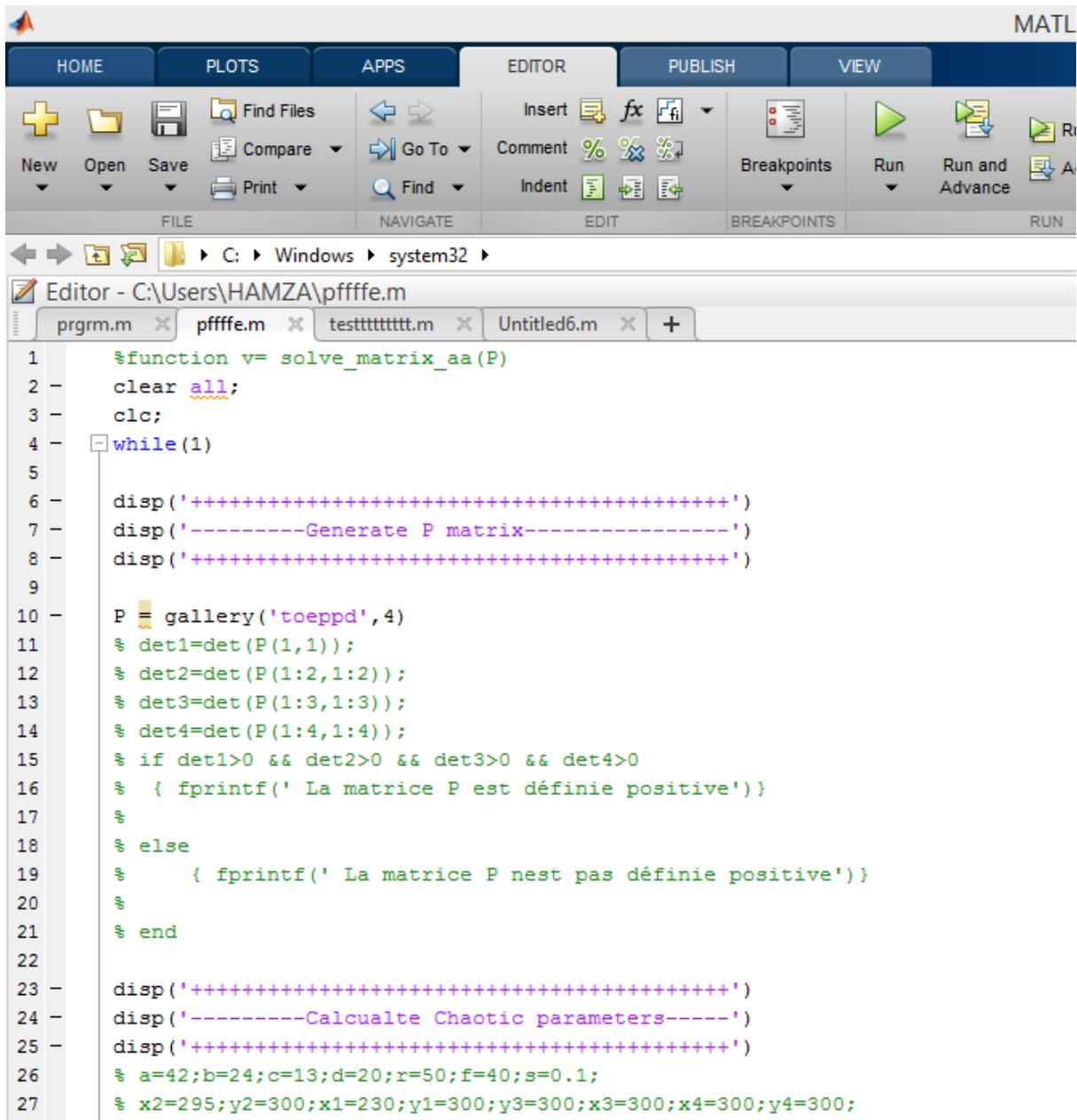
Références bibliographiques :

- [1] CHOUMAT Soumia « Synchronisation Identique des Systèmes Chaotiques ». thèse de master. Université MOHAMED KHIDER, BISKRA.2019
- [2] Mme Senouci Assia.«Systèmes dynamiques chaotiques et Synchronisation » Thèse Doctorat en Mathématiques. Université MOHAMED KHIDER, BISKRA.2020.
- [3] MEGHERBI Ouerdia. « Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques ». Mémoire de magister en Automatique .Université Mouloud MAMERI TIZI-OUZOU. (2013).
- [4] Adel Ouannas « La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets ». Thèse doctorat en sciences. Université Frères Mentouri à Constantine.2015
- [5] Tidjani Menacer « Synchronisation des Systèmes dynamiques Chaotiques à dérivée fractionnaire ». thèse doctorat en sciences en mathématiques Université CONSTANTINNE 1.2014.
- [6] KAOUACHE Smail « Synchronisation des systèmes chaotiques et hyper chaotique » Thèse doctorat en sciences .Université Frères Mentouri à Constantine.2020.
- [7] Saadi Alima« Les systèmes chaotiques et leurs applications dans la sécurité de communication »thèse master. Université MOHAMEDKHIDER, BISKRA.2021.
- [8] Yu, Y., & Zhang, S. (2004). The synchronization of linearly bidirectional coupled chaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(1), 189-197. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2003.12.088>.
- [9] Roy, R., Murphy Jr, T. W., Maier, T. D., Gills, Z, Hunt, E. R. Dynamical control of a chaotic laser : Experimental stabilization of a globally coupled system. *Physical Review Letters* 68 (9) (1992) 1259–1262.
- [10] Petrov, V., Gaspar, V., Masere, J. and Showalter, K. Controlling chaos in the Belousov—Zhabotinsky reaction. *Nature* 361 (6409) (1993) 240–243.
- [11] Garfinkel, A., Weiss, J. N., Ditto, W. L. and Spano, M. L. Chaos control of cardiac arrhythmias. *Trends in Cardiovascular Medicine* 5 (2) (1995) 76–80.
- [12] Ding, J. and Yao, H.X. Chaos control of a kind of non-linear finance system. *Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)* 25 (6) (2004) 500–504.
- [13] Lorenz, E. N. Deterministic non periodic flow. *Journal of the atmospheric sciences* 20(2) (1963) 130–141.

- [14]Carroll, T. L and Pecora, L. M. Synchronizing chaotic circuits. IEEE Trans. Circuits Syst. 38 (4) (1991) 453-456.
- [15]Jesus, I.S and Machado,J.T. Fractional control of heat diffusion systems. Nonlinear Dynamics 54 (3) (2008) 263–282.
- [16]Schmidt, V.H. and Drumheller, J.H. Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate. Physical Review B 4 (1971) 4582–4597.
- [17] Chai, Y., Chen, L., Wu, R. and Dai, J. Q – S synchronization of the fractional-order unified system, Pramana J. Physics, 80, (2013) 449–461.
- [18]Bai, E., Lonngren, K.E. (2008), “Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control,” Chaos Solitons Fractals, Vol. 11, pp. 1041-1044.

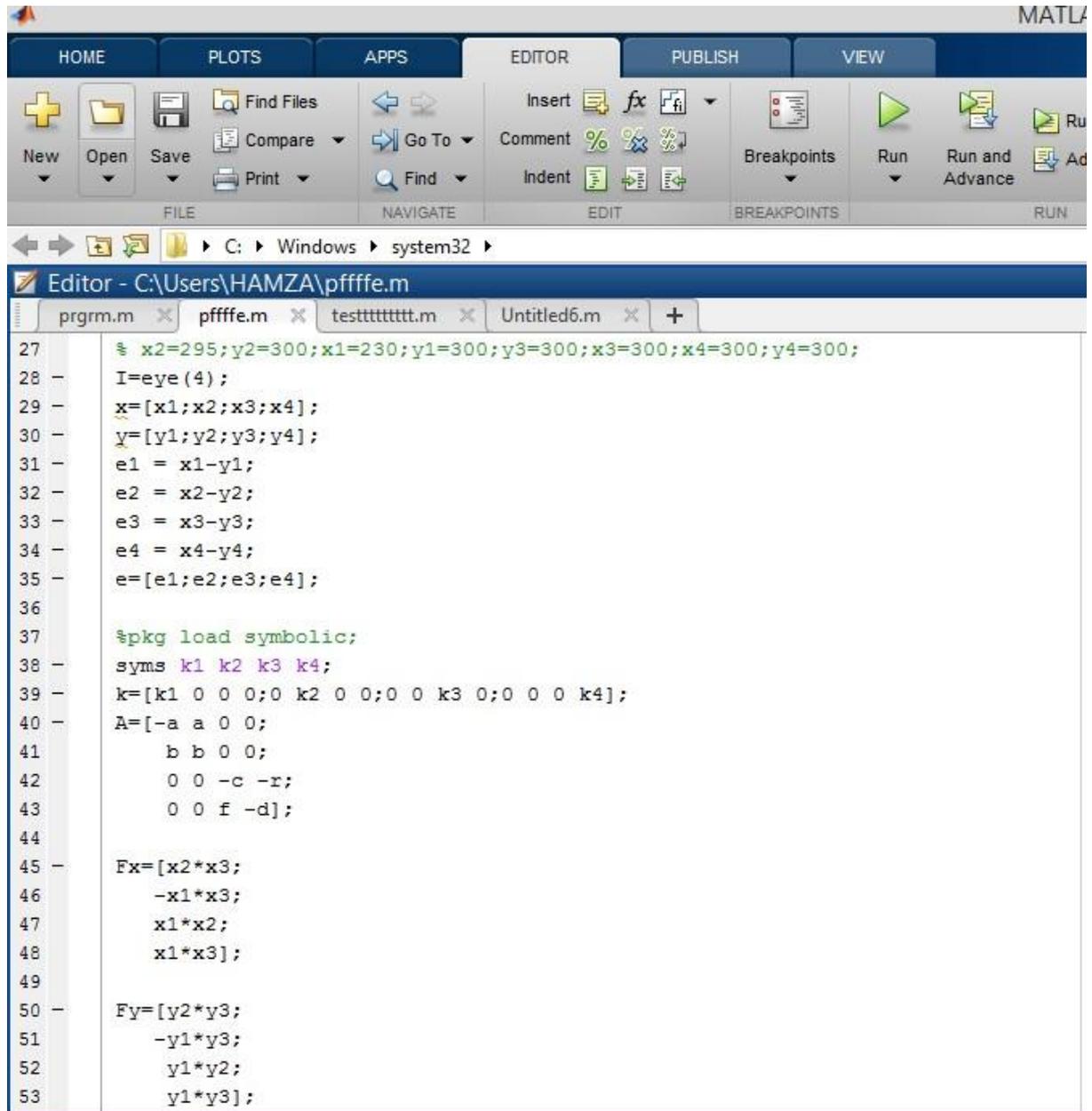
Annexe :

Annexe 1 : Programme Matlab pour la synchronisation des deux systèmes de Qi :



The screenshot displays the MATLAB software interface. The top menu bar includes 'HOME', 'PLOTS', 'APPS', 'EDITOR', 'PUBLISH', and 'VIEW'. Below the menu bar are several toolbars with icons for file operations (New, Open, Save, Find Files, Compare, Print), navigation (Go To, Find), editing (Insert, Comment, Indent), breakpoints, and execution (Run, Run and Advance). The main window shows the 'Editor' with the file path 'C:\Users\HAMZA\pffffe.m'. The script content is as follows:

```
1 %function v= solve_matrix_aa(P)
2 clear all;
3 clc;
4 while(1)
5
6 disp('+++++')
7 disp('-----Generate P matrix-----')
8 disp('+++++')
9
10 P = gallery('toeppd',4)
11 % det1=det(P(1,1));
12 % det2=det(P(1:2,1:2));
13 % det3=det(P(1:3,1:3));
14 % det4=det(P(1:4,1:4));
15 % if det1>0 && det2>0 && det3>0 && det4>0
16 % { fprintf(' La matrice P est définie positive')}
17 %
18 % else
19 % { fprintf(' La matrice P nest pas définie positive')}
20 %
21 % end
22
23 disp('+++++')
24 disp('-----Calcualte Chaotic parameters-----')
25 disp('+++++')
26 % a=42;b=24;c=13;d=20;r=50;f=40;s=0.1;
27 % x2=295;y2=300;x1=230;y1=300;y3=300;x3=300;x4=300;y4=300;
```



The image shows the MATLAB Editor interface. The top menu bar includes HOME, PLOTS, APPS, EDITOR, PUBLISH, and VIEW. The toolbar contains icons for New, Open, Save, Find Files, Compare, Print, Go To, Find, Insert, Comment, Indent, Breakpoints, Run, Run and Advance, and Run. The current file is 'pffffe.m' located at 'C:\Users\HAMZA\system32'. The code in the editor is as follows:

```
27 % x2=295;y2=300;x1=230;y1=300;y3=300;x3=300;x4=300;y4=300;
28 - I=eye(4);
29 - x=[x1;x2;x3;x4];
30 - y=[y1;y2;y3;y4];
31 - e1 = x1-y1;
32 - e2 = x2-y2;
33 - e3 = x3-y3;
34 - e4 = x4-y4;
35 - e=[e1;e2;e3;e4];
36
37 %pkg load symbolic;
38 - syms k1 k2 k3 k4;
39 - k=[k1 0 0 0;0 k2 0 0;0 0 k3 0;0 0 0 k4];
40 - A=[-a a 0 0;
41 -     b b 0 0;
42 -     0 0 -c -r;
43 -     0 0 f -d];
44
45 - Fx=[x2*x3;
46 -     -x1*x3;
47 -     x1*x2;
48 -     x1*x3];
49
50 - Fy=[y2*y3;
51 -     -y1*y3;
52 -     y1*y2;
53 -     y1*y3];
```

MATLAB

HOME PLOTS APPS EDITOR PUBLISH VIEW

New Open Save Find Files Compare Print Go To Find Insert Comment Indent Breakpoints Run Run and Advance

FILE NAVIGATE EDIT BREAKPOINTS RUN

C:\Windows\system32

Editor - C:\Users\HAMZA\pffffe.m

prgrm.m pffffe.m testttttttt.m Untitled6.m

```
54
55 - M=[0 y3 x2 0;
56     -y3 0 -x1 0;
57     y2 x1 0 0;
58     y3 0 x1 0];
59
60 - amk = A+M-k;
61 - AA=amk.'*P+P*amk+s*I;
62
63 - det1=det(AA(1,1));%<0
64 - det2=det(AA(1:2,1:2));%>0
65 - det3=det(AA(1:3,1:3));%<0
66 - det4=det(AA(1:4,1:4));%>0
67 - dett4=vpa(det4)
68 % solve det1
69 - d1 = vpa(solve(det1,k1),2);
70 % remplacer la valeur de k1 dans l'expression de det2
71 - x = subs(det2,k1,d1);
72 % solve det2
73 - k22 = vpa(solve(x,k2),2);
74 - d2 = k22(1);
75 % remplacer la valeur de k1 dans l'expression de det3
76 - y = subs(det3,k1,d1);
77 % remplacer la valeur de k2 dans l'expression de det3
78 - z = subs(y,k2,d2);
79 % solve det3
80 - k33 = vpa(solve(z,k3),2);
```

MATLAB R2016a

HOME PLOTS APPS EDITOR PUBLISH VIEW

New Open Save Find Files Compare Print Go To Find Insert Comment Indent Breakpoints Run Run and Advance Run and Time

FILE NAVIGATE EDIT BREAKPOINTS RUN

C:\Windows\system32

Editor - C:\Users\HAMZA\pffffe.m

prgm.m pffffe.m testttttttt.m Untitled6.m

```
73 - k22 = vpa(solve(x,k2),2);
74 - d2 = k22(1);
75 - % remplacer la valeur de k1 dans l'expression de det3
76 - y = subs(det3,k1,d1);
77 - % remplacer la valeur de k2 dans l'expression de det3
78 - z = subs(y,k2,d2);
79 - % solve det3
80 - k33 = vpa(solve(z,k3),2);
81 - d3 = real(k33(1));
82 - % remplacer la valeur de k1 dans l'expression de det4
83 - a = subs(det4,k1,d1);
84 - % remplacer la valeur de k2 dans l'expression de det4
85 - b = subs(a,k2,d2);
86 - % remplacer la valeur de k3 dans l'expression de det4
87 - c = subs(b,k3,d3);
88 - % solve det4
89 - k44 = vpa(solve(c,k4),2);
90 - d4 = k44(1);
91 - v = round([d1; d2; d3; d4])
92 - if d1<-2000 || d1>2000 || d2<-2000 || d2>2000 || d3<-2000 || d3>2000 || d4<-2000 || d4>2000
93 -     continue;
94 - else
95 -     break
96 - end
97 - end
98
99
```