

Sabin Lessard

# Initiation à la théorie des probabilités

Cours et exercices corrigés



**La côte de l'ouvrage : 2-519-277**

# Table des matières

<b>1 Espace probabilisé</b>	<b>1</b>
1.1. Définitions.....	1
1.2. Schéma de Bernoulli .....	2
1.3. Mesure de Lebesgue sur $(0, 1]$ .....	4
1.4. Propriétés d'une probabilité .....	7
1.5. Exemples.....	9
1.5.1. Probabilité de coïncidence .....	9
1.5.2. Probabilité d'extinction .....	9
1.6. Exercices .....	10
<b>2 Variables aléatoires</b>	<b>11</b>
2.1. Définitions.....	11
2.2. Exemples.....	13
2.3. Opérations sur les variables aléatoires.....	14
2.4. Fonction de distribution .....	16
2.4.1. Définitions .....	16
2.4.2. Propriétés.....	17
2.4.3. Types de variable aléatoire .....	18
2.4.4. Théorème de représentation de Skorokhod .....	20
2.5. Vecteurs aléatoires .....	21
2.6. Fonctions de variables aléatoires.....	23
2.7. Exercices .....	25
<b>3 Indépendance</b>	<b>27</b>
3.1. Définitions.....	27
3.2. Lemmes de Borel-Cantelli.....	28
3.3. Expansion dyadique d'un nombre dans $(0, 1]$ .....	30
3.4. Loi 0-1 de Kolmogorov .....	32
3.5. Exercices .....	34

<b>4</b>	<b>Espérance</b>	<b>37</b>
4.1.	Définitions.....	37
4.1.1.	Espérance d'une v.a. étagée .....	38
4.1.2.	Espérance d'une v.a. positive.....	39
4.1.3.	Espérance d'une v.a. quelconque .....	41
4.2.	Propriétés.....	41
4.3.	Espaces $L^p$ .....	49
4.4.	Exercices .....	53
<b>5</b>	<b>Modes de convergence et lois des grands nombres</b>	<b>55</b>
5.1.	Définitions.....	55
5.2.	Lois des grands nombres.....	56
5.3.	Relations entre modes de convergence.....	59
5.4.	Intégrabilité uniforme .....	66
5.5.	Convergence en loi.....	70
5.6.	Exercices .....	73
<b>6</b>	<b>Fonction caractéristique et théorème limite central</b>	<b>77</b>
6.1.	Fonction caractéristique.....	77
6.2.	Théorèmes d'unicité et de continuité.....	79
6.3.	Méthode des moments .....	87
6.4.	Théorème limite central.....	89
6.5.	Exercices .....	92
<b>7</b>	<b>Espérance conditionnelle et martingales</b>	<b>95</b>
7.1.	Définition de l'espérance conditionnelle.....	95
7.1.1.	Cas de deux v.a. étagées .....	95
7.1.2.	Cas de deux v.a. conjointement absolument continues.....	96
7.1.3.	Cas d'une v.a. par rapport à une sous-tribu.....	97
7.2.	Propriétés de l'espérance conditionnelle .....	99
7.3.	Martingales .....	100
7.3.1.	Définitions .....	100
7.3.2.	Exemples .....	101
	Exemple 1 : Somme de v.a. indépendantes .....	101
	Exemple 2 : Produit de v.a. indépendantes.....	101
	Exemple 3 : Rapport de vraisemblance .....	102
7.3.3.	Interprétation dans le contexte d'un jeu de hasard .....	102
7.4.	Temps d'arrêt .....	103
7.5.	Marches aléatoires .....	106
7.5.1.	Marche aléatoire asymétrique .....	106
7.5.2.	Temps espéré pour écrire un texte.....	109
7.5.3.	Marche aléatoire symétrique .....	110

7.6. Théorèmes de convergence des martingales.....	111
7.7. Sous-martingales et sur-martingales.....	120
7.7.1. Définitions et exemples.....	120
7.7.2. Propriétés.....	121
7.8. Exercices.....	123
<b>8 Introduction au mouvement brownien et aux diffusions</b>	<b>129</b>
8.1. Mouvement brownien standard.....	129
8.2. Construction du mouvement brownien standard.....	131
8.3. Mouvement brownien avec dérive et variance.....	132
8.4. Mouvement brownien géométrique.....	133
8.5. Formule de Black-Scholes.....	133
8.6. Diffusions.....	135
8.7. Formule d'Ito.....	135
8.8. Exercices.....	137
<b>9 Corrigés d'exercices</b>	<b>139</b>
Corrigés d'exercices du chapitre 1.....	139
Corrigés d'exercices du chapitre 2.....	140
Corrigés d'exercices du chapitre 3.....	142
Corrigés d'exercices du chapitre 4.....	143
Corrigés d'exercices du chapitre 5.....	144
Corrigés d'exercices du chapitre 6.....	147
Corrigés d'exercices du chapitre 7.....	148
Corrigés d'exercices du chapitre 8.....	153
<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>
<b>Index</b>	<b>157</b>