

Raymond A. Marie

Introduction aux probabilités

Applications en informatique
et télécommunications, fiabilité
et gestion d'incertitudes



La côte de l'ouvrage : 2-519-278

Table des matières

1	Introduction au calcul des probabilités	1
1.1	Motivations	1
1.2	Ensemble fondamental	2
1.3	Événements	4
1.4	Opérations sur les événements	5
1.5	Axiomes de structure de l'ensemble des événements	9
1.6	Axiomes des probabilités	12
1.7	Problèmes combinatoires	15
1.8	Probabilités conditionnelles	26
1.9	Indépendance d'événements	30
1.10	Suite d'épreuves de Bernoulli	33
1.11	Théorème des probabilités totales - formule de Bayes	35
1.12	Application à la fiabilité	41
1.13	D'autres exemples	49
2	Variables aléatoires discrètes	57
2.1	Définition	57
2.2	Loi d'une variable aléatoire et fonction de répartition	58
2.3	Exemples de distributions de VA discrètes	60
2.3.1	Loi de Bernoulli	60
2.3.2	Loi binomiale	61
2.3.3	Loi géométrique et loi géométrique modifiée	62
2.3.4	Loi binomiale négative	64
2.3.5	Loi de Poisson	65
2.3.6	Loi hypergéométrique	67
2.3.7	Loi uniforme discrète	68
2.3.8	Loi constante	69
2.3.9	Variable aléatoire indicatrice	69
2.4	Espérance et moments d'une variable aléatoire	69
2.4.1	Espérance	69

2.4.2	Espérance d'une fonction de VA discrète	73
2.5	Fonction génératrice	76
2.5.1	Généralités	76
2.5.2	Exemples d'application	77
2.6	Distributions conjointe et marginales	81
2.7	Variables aléatoires discrètes indépendantes	84
2.8	Somme de variables aléatoires discrètes indépendantes	86
2.8.1	Loi de la somme de variables aléatoires indépendantes	86
2.8.2	Espérance de la somme de variables aléatoires	89
2.9	MIN et MAX de variables aléatoires discrètes indépendantes	90
2.10	Tableau récapitulatif de lois de variables aléatoires discrètes	92
2.11	D'autres exemples	94
2.11.1	Transmission erronée d'un paquet (application de la loi binomiale)	94
2.11.2	Existence de deux versions d'un matériel (application de la loi hypergéométrique)	95
2.11.3	Diffusion aléatoire de séquences vidéo (application de la loi multinomiale)	97
3	Variables aléatoires continues	101
3.1	Généralités	101
3.1.1	Introduction	101
3.1.2	Définition d'une VA continue	102
3.1.3	Définition d'une fonction de répartition	102
3.1.4	Définition de la densité de probabilité	102
3.2	Exemples de distributions de VA continues	103
3.2.1	Loi exponentielle	104
3.2.2	Loi hyperexponentielle	105
3.2.3	Loi hypoexponentielle	106
3.2.4	Loi d'Erlang	107
3.2.5	Loi gamma	107
3.2.6	Loi de Gauss (ou loi normale)	109
3.2.7	Loi log-normale	112
3.2.8	Loi uniforme (continue)	113
3.2.9	Loi triangulaire	113
3.2.10	Loi de Weibull	115
3.2.11	Loi bêta	115
3.2.12	Loi du Khi-deux	118
3.2.13	Loi de Pareto	119
3.2.14	Existence d'autres Lois	119

3.3	Espérance et moments d'une VA continue	120
3.3.1	Espérance	120
3.3.2	Moments	121
3.4	Taux de hasard	126
3.5	Distributions jointes de VA continues - Indépendance	128
3.6	Somme de variables aléatoires continues indépendantes	132
3.6.1	Loi de la somme	132
3.6.2	Espérance de la somme	139
3.7	Fonctions de variables aléatoires continues	141
3.7.1	Fonction d'une variable aléatoire	141
3.7.2	Fonction de plusieurs variables aléatoires	159
3.7.3	Covariance, indice de corrélation, variance	173
3.7.4	Statistiques d'ordre	177
3.7.5	MIN et MAX de VA continues indépendantes	181
3.7.6	Fonctions de VA normales	184
3.8	Utilisation des transformées	189
3.8.1	Fonction caractéristique	191
3.8.2	Transformée de Laplace	192
3.8.3	Transformées de quelques lois de VA continues	193
3.8.4	Retour sur la somme de VA indépendantes	203
3.9	Distributions jointes de fonctions de VA continues	205
3.10	Application à la fiabilité	207
3.11	Inégalités - Théorèmes limites	212
3.11.1	Inégalité de Markov	212
3.11.2	Inégalité de Chebyshev	213
3.11.3	Inégalité de Chernoff	215
3.11.4	Loi faible des grands nombres	217
3.11.5	Loi forte des grands nombres	218
3.11.6	Théorème central limite	219
3.12	Variables aléatoires mixtes	220
3.13	Tableau récapitulatif de lois de variables aléatoires continues	222
3.14	D'autres exemples	222
3.14.1	Retour sur la loi de Pareto	222
3.14.2	Translation de la loi de Pareto	226
3.14.3	Retour sur la loi de Weibull	227
3.14.4	Approximation de la loi du Khi-deux d'ordre n	231
3.14.5	Dégradation par fissures (loi log-normale)	232
3.14.6	Carré du coefficient de variation d'une somme de VA	233

3.14.7	Schéma « <i>fork-join</i> » (Différence de deux lois exponentielles <i>iid</i>)	235
3.14.8	Espérance de la durée de vie en présence d'une incertitude sur le taux de défaillance (loi exponentielle)	237
3.14.9	Tolérance aux fautes des logiciels (loi du maximum de deux lois exponentielles indépendantes)	239
3.14.10	Loi de la somme de lois uniformes <i>iid</i>	241
3.14.11	Loi du rapport de deux lois uniformes indépendantes . .	244
3.14.12	Loi du produit de deux lois uniformes indépendantes . .	249
3.14.13	Étude de fiabilité (Comparaison entre loi exponentielle et loi de Weibull)	253
3.14.14	Redondance partielle m parmi n (Fiabilité de loi exponentielle des composants)	256
3.14.15	Budget d'un projet (Distributions jointes de fonctions de VA continues)	260
3.14.16	Disponibilité d'un système en présence d'incertitudes sur le temps moyen de bon fonctionnement (traduites par une loi uniforme)	262
3.14.17	Disponibilité d'un système en présence d'incertitudes sur le temps moyen de bon fonctionnement (traduites par une loi triangulaire)	268
3.14.18	Indisponibilité d'un système en présence d'incertitudes sur le MUT et sur le MDT (traduites par deux lois uniformes)	276
4	Distribution et espérance conditionnelles	287
4.1	Distribution conditionnelle d'une VAD par rapport à une autre VAD	287
4.2	Loi conditionnelle d'une VAC par rapport à une autre VAC . .	290
4.3	Situations mixtes	292
4.3.1	Distribution conditionnelle d'une VA continue par rapport à une VA discrète	292
4.3.2	Distribution conditionnelle d'une VA discrète par rapport à une VA continue	293
4.4	Loi conditionnelle d'une VA par rapport à un événement	294
4.5	Espérance conditionnelle	295
4.5.1	Principaux résultats	295
4.5.2	Espérance conditionnelle par rapport à un événement . .	298
4.5.3	Somme aléatoire de VA <i>iid</i>	300
4.6	D'autres exemples	302

4.6.1	Influence des données d'entrée sur le bon fonctionnement d'un logiciel (Distribution conditionnelle)	302
4.6.2	Exécution successive de deux modules (Espérance conditionnelle)	304
4.6.3	Exécution en parallèle de n modules	306
4.6.4	Calcul de la loi de fiabilité (incertitude sur le taux Λ)	307
4.6.5	Deux processeurs en parallèle	309
4.6.6	N appareils identiques alimentés à l'aide de $2N$ piles (application de la loi hypergéométrique)	310
4.6.7	Ventilation aléatoire de requêtes (application de la loi de Poisson et de la loi binomiale)	313
4.6.8	Test aléatoire d'un logiciel (application de la loi multinomiale)	314
4.6.9	Espérance de la disponibilité d'un système en présence d'incertitudes sur le MUT et sur le MDT (traduites par deux lois uniformes)	317

Annexes 319

A Compléments 319

A.1	Preuve du théorème 1.6.4	319
A.2	Une variante de la formule des probabilités composées	322
A.3	Preuve de l'inégalité 1.7	322
A.4	Combinatoire	323
A.5	Sur l'origine du nom de la loi binomiale négative	324
A.6	Calcul de l'espérance de la loi hypergéométrique	325
A.7	Calcul de la variance de la loi hypergéométrique	327
A.8	Preuve de la formule 2.5	328
A.9	Espérance du maximum de N va géométriques <i>iid</i>	328
A.10	Intégrale de la fonction densité de la loi normale	330
A.11	Compléments sur la loi log-normale	331
A.12	Calculs de l'espérance et de la variance d'une loi triangulaire	332
A.13	Espérance et variance d'une loi bêta	335
A.14	Limite de la loi de Student	336
A.15	Loi de Cox	337
A.16	Loi de Cauchy	339
A.17	Loi de Rayleigh	340
A.18	Loi logistique	342
A.19	Loi log-logistique	342
A.20	Le système de Pearson	343

A.21	Calcul de moments à l'aide de la fonction Gamma	345
A.21.1	Cas de la loi gamma	345
A.21.2	Cas de la loi Weibull	346
A.22	Calculs de l'espérance et de la variance de l'indisponibilité . . .	346
A.23	Preuve du théorème 3.4.2	348
A.24	Preuve du théorème 3.6.2	349
A.25	Complément à l'exemple 3.23 de la page 169	352
A.26	Calcul du résultat 3.40	353
A.27	Moments d'une somme de VA <i>iid</i>	354
A.28	Preuve du théorème 3.7.15	356
A.29	Preuve du théorème 3.11.4	357
A.30	Différents types de convergence	358
A.30.1	Convergence sûre	359
A.30.2	Convergence presque sûre	359
A.30.3	Convergence en probabilité	360
A.30.4	Convergence en loi	360
A.30.5	Convergence en moyenne quadratique	361
A.30.6	Liens entre les différentes convergences	362
A.31	Équivalence des expressions 3.60 et 3.61	362
B	Introduction à l'estimation statistique	365
B.1	La méthode des moments	366
B.2	La méthode du maximum de vraisemblance	367
B.3	Propriétés attendues d'un estimateur	369
B.4	Estimation par intervalle de confiance	373
C	Introduction à la simulation des SED	385
C.1	Généralités	385
C.1.1	Champ d'application	385
C.1.2	Différents types de simulation	387
C.1.3	Mécanismes de base	387
C.2	Exemples	390
C.2.1	Un serveur unique	390
C.2.2	Un serveur plus complexe	390
C.3	Génération des variables aléatoires	393
C.3.1	Génération à partir de VA uniformes	393
C.3.2	Génération de VA uniformes sur $[0,1]$	427
C.4	Analyse statistique des résultats de simulation	435
C.5	Langages dédiés à la simulation	436
C.5.1	Motivation	436

C.5.2	Comparaison entre langages généraux et langages dédiés à la simulation	436
C.5.3	Quelques compléments sur quelques langages de simulation	438
D	Introduction à l'usage des transformées	441
D.1	Généralités	441
D.2	Fonction génératrice élargie	447
D.3	Transformée en z unilatérale	461
D.4	Transformée de Laplace	478
E	Rappels	493
E.1	Sur les coefficients binomiaux	493
E.2	Sur la dérivation	493
E.2.1	Fonctions élémentaires	493
E.2.2	Règles de dérivation	494
E.3	Sur des limites	495
E.3.1	Limite d'une suite	495
E.3.2	Limite supérieure d'une suite	495
E.3.3	Limite inférieure d'une suite	495
	Principales notations utilisées	497
	Bibliographie	499
	Index	501