

Marie-Line Chabanol
Jean-Jacques Ruch

Probabilités et statistiques

pour l'épreuve
de modélisation à l'agrégation
de mathématiques



La côte de l'ouvrage : 2-519-282

Table des matières

Avant-propos	3
Chapitre I. Introduction à la théorie des probabilités	11
1. Rappels sur les espaces probabilisés	11
2. Probabilités discrètes	13
3. Probabilités conditionnelles, événements indépendants	14
4. Lemme de Borel-Cantelli	16
5. Exercices	17
Chapitre II. Variables aléatoires	21
1. Définitions	21
2. Tribu engendrée par une variable aléatoire	22
3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire	23
4. Vecteur aléatoire	25
5. Variables aléatoires indépendantes	26
6. Complément : Statistiques d'ordre	31
7. Exercices	33
Chapitre III. Espérance	35
1. Définition	35
2. Moments d'une variable aléatoire	36
3. Propriétés	37
4. Covariance et corrélation	39
5. Fonction génératrice	41
6. Fonctions caractéristiques	43
7. Exercices	46
Chapitre IV. Convergence de variables aléatoires	49
1. Les différentes notions de convergences	49
2. Loi des grands nombres ; théorème de Glivenko Cantelli	53
3. Loix faibles des grands nombres et démonstrations	55
4. La convergence en loi	57
5. Propriétés et liens avec les autres convergences	60
6. Théorème central limite	62
7. Convergence vers la loi de Poisson	64
8. Démonstration de la loi forte des grands nombres	64
9. Exercices	70

Chapitre V.	Espérance conditionnelle	73
1.	Introduction	73
2.	Définition de l'espérance conditionnelle	75
3.	Propriétés de l'espérance conditionnelle analogues à celles de l'espérance	78
4.	Propriétés spécifiques à l'espérance conditionnelle	79
5.	Calculs d'espérance conditionnelle, loi conditionnelle	80
6.	Exercices	83
Chapitre VI.	Martingales	87
1.	Introduction	87
2.	Définition des martingales	88
3.	Surmartingale et sous-martingale	90
4.	Temps d'arrêt	91
5.	Propriétés des martingales par rapport aux temps d'arrêts	93
6.	Théorèmes d'arrêt	94
7.	Inégalités maximales	96
8.	Convergence des martingales	97
9.	Convergence des martingales L^2	101
10.	Complément : convergence dans L^1	102
11.	Exercices	104
Chapitre VII.	Chaînes de Markov	109
1.	Définitions	109
2.	Exemples	112
3.	La relation de Chapman-Kolmogorov	114
4.	Classification des états	117
5.	Périodicité	119
6.	Etats récurrents et transitoires	120
7.	Lois de probabilités stationnaires	124
8.	Exercices	138
Chapitre VIII.	Processus de Poisson	145
1.	Introduction	145
2.	Caractérisation par des variables exponentielles	147
3.	Loi des grands nombres et théorème central limite	150
4.	Paradoxe de l'autobus	151
5.	Processus de Poisson dans \mathbb{R}^d	152
6.	Complément : Autre caractérisation des processus de Poisson	152
7.	Exercices	154
Chapitre IX.	Vecteurs aléatoires gaussiens	157
1.	Rappels sur les vecteurs aléatoires	157
2.	Vecteurs aléatoires gaussiens	160
3.	Théorème de Cochran	163
4.	Exercices	166
Chapitre X.	Estimation	171

1. Estimation ponctuelle	171
2. Estimation par intervalle	178
3. Exercices	192
Chapitre XI. Généralités sur les tests	197
1. Introduction	197
2. Principe des tests	198
3. Risques d'erreur	200
4. Puissance d'un test	201
Chapitre XII. Répartition empirique et tests	203
1. Introduction	203
2. Test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov	204
3. Test d'homogénéité de Kolmogorov-Smirnov	205
Chapitre XIII. Test paramétriques	207
1. Test de la moyenne	207
2. Test de la variance	208
3. Test de la fréquence	209
4. Test de comparaison de deux moyennes	210
5. Test de comparaison de deux variances	212
6. Test de comparaison de deux proportions	212
Chapitre XIV. Test du χ^2	213
1. Construction du test	213
2. Première application : test d'ajustement (loi discrète)	215
3. Deuxième application : test d'ajustement (loi continue)	216
4. Troisième application : test d'ajustement (famille de lois)	216
5. Quatrième application : test d'indépendance	217
6. Exercices	217
Chapitre XV. Régression linéaire	221
1. Régression linéaire simple - modèle théorique	221
2. Ajustement du modèle sur des données	223
3. Le cas du modèle linéaire gaussien	225
4. Tests dans le modèle linéaire gaussien	226
5. Régression linéaire multiple	229
6. Exercices	232
Texte 1. Evolution d'une population : processus de branchement	235
Texte 2. Problème de décision : quand s'arrêter ?	243
Texte 3. Election dans un arbre	251
Texte 4. Régression saisonnière	259
Fiche TP I. Premiers pas avec Scilab	265

Fiche TP II.	Représentations graphiques d'échantillons statistiques	271
Fiche TP III.	Génération aléatoire	273
Fiche TP IV.	Illustration numérique de convergences en loi	275
Fiche TP V.	Illustration numérique de convergences presque sûres	279
Fiche TP VI.	Martingales	283
Fiche TP VII.	Chaînes de Markov	285
Fiche TP VIII.	Processus de Poisson	289
Fiche TP IX.	Vecteurs gaussiens	291
Fiche TP X.	Estimation	293
Fiche TP XI.	Test de Kolmogorov-Smirnov	297
Fiche TP XII.	Tests	299
Fiche TP XIII.	Régression linéaire	301
	Correction des Travaux Pratiques	303
Appendice A.	Simulation de variables aléatoires	345
Appendice B.	Contexte d'apparition des lois usuelles	351
	Bibliographie	355
	Index	357