

Recherche opérationnelle

Aspects mathématiques et applications



Frédéric Bonnans
Stéphane Gaubert



Table des matières

1 Premiers pas en recherche opérationnelle	1
1.1 Quelques problèmes d'optimisation	1
1.2 Rudiments de complexité	10
2 Convexité, polyédralité et dualité	13
2.1 Séparation d'ensembles convexes en dimension finie	13
2.2 Quelques résultats sur les polyèdres	16
2.3 Intégrité des points extrêmes	22
2.4 Dualité	27
2.5 Calcul sous-différentiel	34
2.6 Notes	46
3 Problèmes de flots	47
3.1 Flots dans un graphe : premières propriétés	47
3.2 Algorithmes de flots	54
3.3 Notes	66
4 Programmation dynamique déterministe	67
4.1 Cadre général	68
4.2 Problème en horizon fini	70
4.3 Quelques applications du problème en horizon fini	72
4.4 Problème arrêté	74
4.5 Problème actualisé	77
4.6 Problème ergodique	78
4.7 Notes	84
5 Séparation, évaluation, relaxation	85
5.1 Séparation et évaluation (branch and bound)	85
5.2 Relaxation de problèmes combinatoires	91
5.3 Notes	105
6 Algorithme du simplexe	107
6.1 Méthodes de gradient réduit	107

6.2	Algorithme du simplexe	112
6.3	Notes	122
7	Coupes d'intégrité	125
7.1	Principe des coupes d'intégrité	125
7.2	Coupes mixtes	134
7.3	Coupes spécifiques	136
7.4	Coupes d'optimalité	137
7.5	Compléments sur la théorie des coupes	138
7.6	Notes	148
8	Décomposition	151
8.1	Principe de décomposition de Benders	151
8.2	Génération de colonnes	156
8.3	Optimisation avec recours multiples	163
8.4	Notes	166
9	Inégalités matricielles	167
9.1	Introduction : le problème SDP	167
9.2	Dualité SDP	172
9.3	Quelques problèmes combinatoire	178
9.4	Optimisation polynomiale	185
9.5	Notes	194
10	Algorithmes de points intérieurs	195
10.1	Pénalisation logarithmique	195
10.2	La méthode prédicteur-correcteur	198
10.3	Analyse de l'algorithme prédicteur-correcteur	199
10.4	Algorithme de grands voisinages	203
10.5	Aspects pratiques	203
10.6	Compléments	205
10.7	Notes	206
11	Correction des exercices	207
11.1	Convexité, polyédralité et dualité	207
11.2	Problèmes de flots	212
11.3	Programmation dynamique déterministe	215
11.4	Séparation, évaluation, relaxation	219
11.5	Algorithme du simplexe	226
11.6	Coupes d'intégrité	231
11.7	Décomposition	236
11.8	Inégalités matricielles	239
12	Problèmes	245
12.1	Théorème des mariages de Hall	245

12.2	Sac à dos robuste	246
12.3	Extension de constante de Lipschitz minimale	248
12.4	Formulation alternative pour le problème de la p médiane	250
12.5	Linéarisation	252
12.6	Gestion d'un parc de grues	254
12.7	Optimisation du remplissage d'un vol avec escales	259
12.8	Élimination en championnat	260
12.9	Plus court chemin avec critère hiérarchique	262
12.10	Ordonnancement d'un atelier de type "jobshop" par programmation dynamique	263
12.11	Nombre d'Horton-Strahler de réseaux hydrographiques, évaluation d'expressions arithmétiques, et problème d'affectation goulot	265
12.12	Planification à court terme d'unités de production électrique	267
12.13	Optimisation du revenu d'un site web	270
12.14	Bornes géométriques pour le problème du voyageur de commerce	273
12.15	Connectique de Steiner	276
12.16	Polytope des arbres couvrants	277
12.17	Théorème de Helly	280
12.18	Solutions optimales concises en programmation linéaire	281
12.19	Inégalités du peigne ("comb inequalities") pour le problème du voyageur de commerce	282
12.20	Sac à dos en variables entières	283
12.21	Coupes pour le sac à dos minimal	284
12.22	Coupes de couvertures en programmation entière	286
12.23	Représentation semi-définie de la somme des k plus grandes valeurs propres	288
12.24	Instrumentation d'un réseau télécom	289
12.25	Approximation des polyèdres par des ellipsoïdes et formulations SDP	291
12.26	Approche SDP du coloriage de graphe	293
12.27	Capacité de Shannon d'un graphe	295

13 Correction des problèmes **297**

13.1	Théorème des mariages de Hall	297
13.2	Sac à dos robuste	298
13.3	Extension de constante de Lipschitz minimale	300
13.4	Formulation alternative pour le problème de la p médiane	305
13.5	Linéarisation	306
13.6	Gestion d'un parc de grues	309
13.7	Optimisation du remplissage d'un vol avec escales	314
13.8	Élimination en championnat	315
13.9	Plus court chemin avec critère hiérarchique	318
13.10	Ordonnancement d'un atelier de type "jobshop" par programmation dynamique	319

13.11	Nombre d'Horton-Strahler de réseaux hydrographiques, évaluation d'expressions arithmétiques, et problème d'affectation goulot	322
13.12	Planification à court terme d'unités de production électrique	325
13.13	Optimisation du revenu d'un site web	328
13.14	Bornes géométriques pour le problème du voyageur de commerce	332
13.15	Connectique de Steiner	335
13.16	Polytope des arbres couvrants	336
13.17	Théorème de Helly	339
13.18	Solutions optimales concises en programmation linéaire	341
13.19	Inégalités du peigne ("comb inequalities") pour le problème du voyageur de commerce	342
13.20	Sac à dos en variables entières	343
13.21	Coupes pour le sac à dos minimal	345
13.22	Coupes de couvertures en programmation entière	348
13.23	Représentation semi-définie de la somme des k plus grandes valeurs propres	352
13.24	Instrumentation d'un réseau télécom	354
13.25	Approximation des polyèdres par des ellipsoïdes et formulations SDP	357
13.26	Approche SDP du coloriage de graphe	361
13.27	Capacité de Shannon d'un graphe	363

A Algorithme glouton pour le problème de l'arbre couvrant de coût minimum 367

A.1	Généralités sur les méthodes gloutonnes	367
A.2	Algorithme de Kruskal pour le problème de l'arbre couvrant de coût minimum	368