

B. 116



Mécanique des milieux continus déformables
APPLICATION À LA MÉCANIQUE
DES LIQUIDES PARFAITS
ET DES LIQUIDES NEWTONIENS

Pierre Pernès



Cemagref
EDITIONS

Table des matières

1	Généralités	
	Cinématique de Lagrange et d'Euler Définition des principaux écoulements	3
1.1.	Introduction : hypothèse de continuité d'un milieu matériel	3
1.2.	Définition d'une particule au sens de la mécanique des milieux continus	5
1.3.	Description du mouvement d'un milieu continu	6
1.4.	Cinématique de Lagrange	7
1.5.	Application relative à la cinématique de Lagrange	9
1.6.	Cinématique d'Euler	11
1.7.	Application relative à la cinématique d'Euler	15
1.8.	Dérivée suivant le mouvement	17
1.9.	Écoulement externe, écoulement interne	18
1.10.	Écoulement permanent, écoulement transitoire	18
1.11.	Écoulement à champ de vitesse solénoïdal	19
1.12.	Écoulement rotationnel et irrotationnel	20
1.13.	Écoulement permanent en moyenne	21
1.14.	Principe de résolution d'un problème de mécanique des liquides	21
1.15.	Conditions aux limites relatives à un écoulement	24
1.16.	Unités de mesure et équations aux dimensions des grandeurs physiques utilisées	27
1.17.	Application : étude d'un écoulement en cinématique d'Euler	30
1.18.	Résumé des idées essentielles à retenir du premier chapitre	35
2	Calcul des dérivées particulières	37
2.1.	Définition générale d'une dérivée particulière	37
2.2.	Dérivée particulière d'un vecteur défini par un bipoint infiniment petit	38
2.3.	Dérivée particulière du produit scalaire défini par deux bipoints infiniment petits ayant un point en commun	41
2.4.	Dérivée particulière du produit vectoriel défini par deux bipoints infiniment petits ayant un point en commun	44
2.5.	Dérivée particulière d'un élément de volume orienté	47
2.6.	Dérivée particulière d'un élément de longueur dans un repère local	50
2.7.	Dérivée particulière du produit scalaire défini par deux bipoints infiniment petits ayant un point en commun quand on utilise un système de coordonnées curvilignes	51
2.8.	Dérivée particulière du produit vectoriel défini par deux bipoints infiniment petits ayant un point en commun quand on utilise un système de coordonnées curvilignes	52
2.9.	Dérivée particulière d'un élément de surface orienté et d'un élément de volume exprimés à l'aide de coordonnées curvilignes	54
2.10.	Dérivée particulière d'une grandeur scalaire en cinématique d'Euler	55
2.11.	Dérivée particulière d'une grandeur scalaire en cinématique de Lagrange	56
2.12.	Dérivée particulière d'une grandeur physique scalaire exprimée dans un système de coordonnées curvilignes en cinématique d'Euler	57
2.13.	Dérivée particulière d'une grandeur physique vectorielle en cinématique d'Euler	58
2.14.	Vitesse d'une particule considérée comme la dérivée particulière de son déplacement	59
2.15.	Vitesse d'une particule en cinématique Lagrange	60
2.16.	Accélération d'une particule considérée comme la dérivée particulière de sa vitesse	61

2.17. Expression de l'accélération en coordonnées curvilignes	63
2.18. Accélération d'une particule en cinématique de Lagrange	65
2.19. Le théorème de dérivation sous le signe somme	66
2.20. Volume matériel en mouvement, volume de contrôle en mouvement, volume de contrôle fixe	69
2.21. Dérivée particulaire relative à une grandeur physique portée par un volume matériel en mouvement	70
2.22. Dérivée particulaire du flux d'un champ vectoriel	75
2.23. Dérivée particulaire d'une circulation	79
2.24. Dérivée particulaire d'une circulation s'effectuant sur une courbe fermée	83
2.25. Dérivée particulaire de la circulation du vecteur vitesse sur une courbe fermée	84
2.26. Remarque sur le calcul des dérivées particulières relatives à des intégrales finies	85
2.27. Dérivée particulaire portant sur un volume de contrôle	86
2.28. Dérivée particulaire relative à un milieu matériel dans lequel se propage une onde	88
2.29. Résumé des idées essentielles à retenir du second chapitre	93
3 Mécanique des milieux continus déformables	95
3.1. Introduction	96
3.2. Loi de la dynamique du point matériel dans un repère galiléen et dans un repère non galiléen	97
3.3. Grandeur physique objective en mécanique newtonienne	101
3.4. Lemme fondamental de la mécanique des milieux continus déformables - Théorème de l'intégrale nulle	108
3.5. Volume et masse d'un milieu matériel	109
3.6. Conservation de la masse en cinématique de Lagrange	111
3.7. Conservation de la masse en cinématique d'Euler	113
3.8. Équation locale de la conservation de la masse lorsque le milieu matériel présente une surface de discontinuité	116
3.9. Milieu continu déformable isovolume, homogène, incompressible. Champ de vitesse solénoïdal	117
3.10. Débit-volume et débit-masse	121
3.11. Mouvement permanent, solénoïdal, d'un liquide incompressible présentant une symétrie dans l'espace	124
3.12. Conservation de la masse pour un écoulement unidimensionnel	132
3.13. Conservation de la masse pour un écoulement unidimensionnel dans lequel se propage une onde	134
3.14. Dérivée particulaire d'une intégrale prise par rapport à une distribution de masse et conservation de la masse	135
3.15. Système cinétique ou des quantités de mouvement - Dérivée particulaire d'un système cinétique	136
3.16. Dérivée particulaire d'un système cinétique dans deux repères galiléens	137
3.17. Classification des forces en mécanique des milieux continus déformables	139
3.18. Axiomes des quantités de mouvement - Loi fondamentale de la dynamique	142
3.19. Loi de l'action et de la réaction	144
3.20. Le tenseur des contraintes (présentation dans un repère orthonormé avec des coordonnées cartésiennes)	145
3.21. Loi locale de la MMCD (présentation dans un repère orthonormé avec des coordonnées cartésiennes)	149
3.22. Symétrie du tenseur des contraintes (présentation dans un repère orthonormé avec des coordonnées cartésiennes)	150
3.23. Loi locale de la mécanique des milieux continus déformables	151
3.24. Expression des composantes scalaires de la loi locale de la MMCD dans un repère local avec des coordonnées curvilignes	152
3.25. Expression des composantes scalaires de la loi locale de la MMCD dans le cadre des coordonnées curvilignes orthogonales	153

3.26. Équation locale de la MMCD lorsque le milieu matériel présente une surface de discontinuité	156
3.27. Représentation graphique du vecteur contrainte, les cercles de Mohr	159
3.28. Le tenseur taux de déformation	173
3.29. Expression des composantes scalaires du tenseur taux de déformation dans le cadre des coordonnées curvilignes orthogonales	178
3.30. Premier invariant du tenseur taux de déformation et divergence du champ de vitesse	179
3.31. Puissance des forces extérieures d'un milieu matériel en mouvement	180
3.32. Principe des puissances virtuelles ou principe de d'Alembert	181
3.33. Énergie cinétique, énergie interne, énergie totale d'un milieu matériel en mouvement ; dérivées particulières de ces trois grandeurs physiques	182
3.34. Théorème de l'énergie cinétique	183
3.35. Taux de chaleur reçue par rayonnement et par conduction	184
3.36. Principe de l'énergie totale	185
3.37. Principe de l'énergie interne	186
3.38. Loi phénoménologique de Fourier - Équation de la chaleur	186
3.39. Équation locale relative au principe de l'énergie totale lorsque le milieu matériel présente une surface de discontinuité	187
3.40. Enthalpie et enthalpie totale	191
3.41. Deuxième principe de la thermodynamique	193
3.42. Calcul de la source d'entropie dans un système ouvert dans lequel se produit un ensemble de réactions chimiques	197
3.43. Variation de l'entropie massique à travers une onde de choc	202
3.44. Résumé des idées essentielles à retenir du troisième chapitre	203
4 Liquides parfaits	207
4.1. Introduction	207
4.2. Loi de comportement d'un fluide compressible parfait	208
4.3. Loi de comportement d'un fluide incompressible parfait	210
4.4. Vecteur contrainte d'un liquide parfait	210
4.5. Définition des différents écoulements	211
4.6. Équation d'Euler pour les liquides parfaits incompressibles	212
4.7. Équation d'Euler-Helmholtz pour les liquides parfaits incompressibles	212
4.8. Équation d'Euler-Helmholtz pour un liquide parfait, incompressible, pesant. Charge hydraulique	213
4.9. Théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent et irrotationnel	214
4.10. Théorème de Bernoulli pour un écoulement transitoire et irrotationnel	214
4.11. Théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent et rotationnel	216
4.12. Théorème de Bernoulli pour un écoulement transitoire et rotationnel	218
4.13. Courbes gauches, trièdre de Serret, formules de Frenet	219
4.14. Théorème de Bernoulli dans le repère local de Serret	224
4.15. Théorème de Bernoulli obtenu à partir du théorème de l'énergie cinétique	227
4.16. Théorèmes de Bernoulli en mouvement relatif	231
4.17. Application : formule de Torricelli	239
4.18. Application : mesure du débit d'une canalisation par un venturi	240
4.19. Application : mesure de la vitesse en un point par le tube de Pitot	242
4.20. Application : pendule hydraulique	244
4.21. Application : vidange du liquide contenu dans un tube ayant la forme d'une spire d'hélice cylindrique de section circulaire	246
4.22. Application : célérité des ondes linéaires à la surface libre d'un liquide parfait	249
4.23. Application : le moulin de Barker	257
4.24. Liquide parfait en évolution barotrope	260
4.25. Théorème d'Euler pour des écoulements permanents et unidimensionnels de liquides parfaits : détermination de la force exercée par le liquide circulant sur la surface latérale de la canalisation qui le contient	263
4.26. Application : Force exercée par un liquide sur un coude horizontal	268

4.27. Tenseur taux de rotation, vecteur tourbillon, vecteur vortacité	271
4.28. Lignes de vortacité, surface de vortacité, tube de vortacité, filet de vortacité	272
4.29. Circulation du vecteur vitesse, dérivée particulière de la circulation du vecteur vitesse	273
4.30. Géométrie des lignes de vortacité	274
4.31. Vortacité et liquide parfait	276
4.32. Théorème de Kelvin	279
4.33. Théorème de Lagrange	279
4.34. Théorème d'Helmholtz	280
4.35. Étirement et gauchissement d'un tube de vortacité	281
4.36. Champ de vitesse induit par le champ de vortacité d'un liquide incompressible occupant tout l'espace	282
4.37. Application : champ de vitesse généré par une ligne de vortacité rectiligne de longueur infinie	287
4.38. Le vortex de Rankine	289
4.39. Résumé des idées essentielles à retenir du quatrième chapitre	296
5 Liquides newtoniens	299
5.1. Introduction	300
5.2. Loi de comportement d'un fluide newtonien	300
5.3. Loi de comportement d'un liquide newtonien incompressible	305
5.4. Définition générale d'un fluide newtonien	306
5.5. Vecteur contrainte d'un fluide newtonien et d'un liquide incompressible newtonien .	307
5.6. Interprétation physique de la viscosité dynamique d'un liquide incompressible newtonien	312
5.7. Équation de Navier-Stokes	318
5.8. Équation de Navier-Stokes - Helmholtz pour un liquide newtonien incompressible .	321
5.9. Équation locale de l'énergie interne par unité de masse pour un fluide newtonien et pour un liquide newtonien incompressible	323
5.10. Viscosité dynamique et cinématique de l'air et de l'eau	325
5.11. Principe de résolution d'un problème d'écoulement d'un liquide newtonien incompressible	328
5.12. Conditions aux limites pour un liquide newtonien incompressible	329
5.13. Application : écoulements de Couette plan avec gradient de pression	329
5.14. Écriture de l'équation de Navier-Stokes pour un liquide incompressible newtonien en coordonnées curvilignes	336
5.15. Équation de Navier-Stokes pour un liquide newtonien incompressible en coordonnées cylindro-polaires	337
5.16. Application : écoulement d'un liquide newtonien incompressible dans une canalisation cylindrique de section circulaire en régime permanent	339
5.17. Application : établissement à partir du repos de l'écoulement d'un liquide newtonien, incompressible, pesant, en régime laminaire dans une canalisation cylindrique de section circulaire	347
5.18. Application : écoulement d'un liquide newtonien incompressible dans une canalisation cylindrique dont la section transversale droite est un triangle équilatéral, en régime permanent	361
5.19. Application : écoulement d'un liquide newtonien incompressible en régime permanent dans l'espace annulaire compris entre deux cylindres circulaires coaxiaux de rayons R_1 et R_2	368
5.20. Application : écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux, verticaux, de section circulaire, en régime permanent	373
5.21. Application : mesure de la viscosité dynamique d'un liquide à l'aide d'un viscosimètre de Couette	379
5.22. Instabilité de Taylor - Couette	381
5.23. Équation de Navier-Stokes pour un liquide newtonien incompressible en coordonnées sphériques	383
5.24. Application : écoulement permanent autour d'une sphère fixe d'un liquide newtonien incompressible l'écoulement étant supposé rampant	385

5.25. Application : écoulement permanent autour d'une sphère fixe d'un liquide parfait incompressible	397
5.26. Application : champ de vitesse induit dans un liquide newtonien tournant à une vitesse angulaire constante autour d'un axe vertical : spirale d'Ekman	404
5.27. Application : champ de vitesse généré dans un liquide newtonien, incompressible, pesant, indéfini, initialement au repos, par le mouvement de la paroi frontière imperméable horizontale inférieure qui le limite	411
5.28. Vorticité des liquides newtoniens	418
5.29. Vorticité et fonction de courant pour les écoulements plans des liquides newtoniens incompressibles	420
5.30. Vorticité et fonction de courant pour les écoulements à symétrie axiale des liquides newtoniens incompressibles	422
5.31. Équation de Navier-Stokes et théorème de l'énergie cinétique ; notion de perte de charge	423
5.32. Couche limite laminaire relative à une plaque plane , mince, lisse, indéfinie, à incidence nulle	432
5.33. Résumé des idées essentielles à retenir du cinquième chapitre	441
6 Écoulements permanents en moyenne des liquides newtoniens en régime turbulent	445
6.1. Introduction	445
6.2. Expérience de Reynolds : écoulement laminaire, écoulement turbulent	446
6.3. Description sommaire d'un écoulement en régime turbulent. Définition d'un écoulement permanent en moyenne	449
6.4. Anémomètre à fil ou à film chaud	455
6.5. Moyenne temporelle de grandeurs physiques intervenant dans les écoulements turbulents	457
6.6. Équation de la conservation de la masse d'un liquide incompressible en régime turbulent	461
6.7. Accélération d'un liquide incompressible en régime turbulent et en écoulement permanent en moyenne	462
6.8. Équation de Reynolds, loi de comportement d'un liquide newtonien dans un écoulement permanent en moyenne. Le problème de fermeture	465
6.9. Expression de la dérivée particulaire suivant l'écoulement moyen du tenseur $\overline{V' \otimes V'}$	469
6.10. Loi du champ de vitesse moyenne issue de la théorie de la longueur de mélange de Prandtl pour un écoulement turbulent, permanent en moyenne et unidimensionnel	472
6.11. Équation locale de l'énergie cinétique pour un écoulement turbulent	476
6.12. Couche limite turbulente sur une plaque plane immobile, lisse, de dimensions indéfinies ayant un angle d'incidence nul par rapport au champ de vitesse uniforme à l'amont de la plaque	481
6.13. Coefficient de frottement d'une plaque plane lisse en régime turbulent. Épaisseur de la couche limite turbulente	488
6.14. Application : construction du champ de vitesse dans une couche limite turbulente	492
6.15. Équation de Reynolds pour un liquide newtonien incompressible en coordonnées cylindro-polaires	493
6.16. Écoulement permanent en moyenne en régime turbulent dans une canalisation cylindrique de section circulaire dont la paroi est lisse	494
6.17. Débit-volume d'une canalisation cylindrique de section circulaire dont la paroi est lisse en écoulement permanent en moyenne et en régime turbulent. Formule de von Kármán	501
6.18. Longueur de mélange et tenseur des contraintes de turbulence dans une canalisation cylindrique de section circulaire	503
6.19. Équation de Reynolds pour un liquide newtonien incompressible en coordonnées sphériques	504
6.20. Extension de la formule de Stokes pour la sphère aux grands nombres de Reynolds	506
6.21. Résumé des idées essentielles à retenir du sixième chapitre	508

Pierre Pernès a enseigné le calcul tensoriel, la mécanique des fluides et l'hydraulique dans plusieurs écoles d'ingénieurs du ministère de l'Agriculture, notamment à l'École Nationale du Génie de l'Eau et de l'Environnement de Strasbourg, à l'École Nationale du Génie Rural des Eaux et des Forêts et à l'Institut National Agronomique de Paris-Grignon.

Professeur et ingénieur, Pierre Pernès a toujours insisté, dans son enseignement, pour que les outils mathématiques nécessaires à la mécanique des milieux continus déformables soient appréhendés avec beaucoup de rigueur.

Prix : 37 € TTC
ISBN 2-85362-613-X
Cemagref Éditions 2003



9 782853 626132

Cours de l'ENGEES