

Cours

Série E. Ramis

Claude Deschamps
André Warusfel

Jean François Ruaud • François Moulin
Jean-Claude Sifre • Anne Miquel

Mathématiques 2^e année

Cours et exercices corrigés

2^e année MP, PC, PSI

l'intégrale



DUNOD

Table des matières

I Algèbre	1
1 Dénombrabilité	3
1. Ensembles dénombrables	3
2. Suites exhaustives de parties finies	4
3. Exemples d'ensembles dénombrables	5
4. Non dénombrabilité de \mathbb{R}	7
2 Groupes et actions de groupe	13
1. Généralités	13
1.1 Groupe produit	13
1.2 Sous groupe engendré par une partie	14
1.3 Partie génératrice	16
1.4 Groupe monogène et groupe cyclique	18
2. Action d'un groupe sur un ensemble	19
2.1 Définitions et exemples classiques	19
2.2 Orbites et stabilisateurs	24
2.3 Théorème de Lagrange et formule des classes	27
3. Groupes associés à \mathbb{Z}	30
3.1 Sous-groupes de \mathbb{Z}	30
3.2 Relation de congruence modulo $n \in \mathbb{N}$	31
3.3 Groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	34
4. Ordre d'un élément d'un groupe	36
4.1 Ordre d'un élément	36
4.2 Structure du sous-groupe engendré par un élément	38
5. Groupes monogènes	39
5.1 Structure des groupes monogènes	39
5.2 Générateurs des groupes cycliques	40
5.3 Sous-groupes des groupes monogènes	40

3 Anneaux et algèbres	47
1. Idéaux d'un anneau commutatif	47
1.1 Idéaux	47
1.2 Divisibilité	49
2. Arithmétique de \mathbb{Z}	52
2.1 Idéaux de \mathbb{Z}	52
2.2 Caractérisation du PGCD et du PPCM de deux entiers relatifs	52
2.3 Congruences dans \mathbb{Z} et anneaux quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	54
2.4 Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et caractéristique d'un corps	57
2.5 Utilisation arithmétique de la notion de congruence et des anneaux quotients	58
2.6 Applications aux nombres premiers	61
3. Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$	64
3.1 Idéaux de $\mathbb{K}[X]$	64
3.2 Caractérisation du PGCD et du PPCM de deux polynômes	65
4. Sous-algèbres monogènes d'une \mathbb{K} -algèbre	67
4.1 Morphismes d'évaluation	67
4.2 Idéal annulateur et polynôme minimal	69
4.3 Structure d'une sous-algèbre monogène	73
4 Algèbre linéaire	81
1. Familles génératrices, familles libres et bases	81
1.1 Combinaisons linéaires	81
1.2 Familles génératrices, familles libres et bases	83
1.3 Détermination d'une application linéaire	89
2. Produit, somme et somme directe	89
2.1 Produit d'une famille d'espaces vectoriels	89
2.2 Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels	91
2.3 Somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels	92
2.4 Décomposition en somme directe	93
3. Applications linéaires	98
3.1 Sous-espaces stables	98
3.2 Isomorphisme associé à une application linéaire	101
3.3 Codimension et théorème du rang	102
3.4 Hyperplans et formes linéaires	104
5 Matrices	111
1. Représentation matricielle	111
1.1 Matrices équivalentes et rang	111
1.2 Matrices semblables et trace	113
1.3 Matrices par blocs	116
1.4 Représentation matricielle par blocs	121
2. Opérations élémentaires	125
2.1 Opérations élémentaires	125
2.2 Calcul du rang, du déterminant et de l'inverse	129
2.3 Applications à $GL_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{K})$	133

6	Dualité en dimension finie	139
1.	Espace dual et base duale	139
1.1	Base duale	139
1.2	Orthogonalité	143
1.3	Application linéaire associée à une famille finie de vecteurs ou de formes linéaires	145
2.	Systèmes d'équations linéaires	147
2.1	Systèmes d'équations linéaires	147
2.2	Résolution d'un système linéaire	150
2.3	Représentation des sous-espaces par des systèmes d'équations . . .	154
7	Formes bilinéaires symétriques	159
1.	Définitions	159
1.1	Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques	159
1.2	Formes positives et définies positives	161
1.3	Matrice d'une forme bilinéaire symétrique	164
2.	Réduction d'une forme bilinéaire symétrique	167
2.1	Réduction d'une forme bilinéaire symétrique	167
2.2	Méthode de décomposition de Gauss	169
2.3	Réduction lorsque \mathbf{K} est égal à \mathbb{C}	171
2.4	Réduction lorsque \mathbf{K} est égal à \mathbb{R}	172
8	Réduction des endomorphismes	179
1.	Polynômes d'endomorphisme	179
1.1	Morphisme d'évaluation	179
1.2	Idéal annulateur et polynôme minimal	182
1.3	Sous-algèbre engendrée par un endomorphisme	185
1.4	Idéal annulateur d'un vecteur	187
1.5	Lemme des noyaux	190
2.	Éléments propres d'un endomorphisme	195
2.1	Valeurs propres et vecteurs propres	195
2.2	Sous-espaces propres	200
2.3	Polynôme caractéristique	201
2.4	Endomorphismes scindés et scindés simples	208
2.5	Théorème de Hamilton-Cayley	209
3.	Réduction des endomorphismes diagonalisables	211
3.1	Endomorphismes diagonalisables	211
3.2	Réduction des endomorphismes diagonalisables	217
3.3	Caractérisation des endomorphismes diagonalisables par leur polynôme minimal	219
4.	Réduction des endomorphismes scindés	221
4.1	Endomorphismes trigonalisables	221
4.2	Décomposition de Jordan des endomorphismes scindés	227
4.3	Réduction de Jordan des endomorphismes scindés	232

II	Analyse 1	245
9	Séries numériques	247
1.	Généralités	247
1.1	Séries convergentes	247
1.2	Suites et séries	250
2.	Séries à termes positifs	251
2.1	Convergence par comparaison directe	251
2.2	Règle de Riemann	253
2.3	Comparaison à une série géométrique	255
2.4	Comparaison logarithmique	256
2.5	Complément : cas de convergence lente	258
2.6	Sommation des relations de comparaison	260
3.	Développement décimal d'un réel positif	262
3.1	Valeurs approchées décimales	262
3.2	Développements décimaux	267
4.	Séries à termes complexes	270
x 4.1	Suites de Cauchy	270
4.2	Critère de Cauchy pour les séries	271
4.3	Convergence absolue	271
4.4	Comparaison série-intégrale	273
4.5	Séries alternées	279
4.6	Complément : la transformation d'Abel (hors programme)	281
4.7	Sommation par tranches	282
4.8	Complément : permutation des termes	284
4.9	Produit de Cauchy	286
5.	Estimation du reste d'une série convergente	288
5.1	Développement asymptotique du reste	288
5.2	Vitesse de convergence	291
10	Espaces vectoriels normés et espaces métriques : définitions générales	305
1.	Normes et distances	305
1.1	Espaces vectoriels normés	305
x 1.2	Espaces métriques	315
1.3	Parties bornées et applications lipschitziennes	320
2.	Suites et séries	328
2.1	Suites et séries convergentes	328
2.2	Valeurs d'adhérence	330
2.3	Relations de comparaison	331
3.	Topologie	333
3.1	Voisinages et ouverts	333
3.2	Fermés	336
3.3	Intérieur, adhérence et frontière d'une partie	338
3.4	Topologie d'un sous-espace métrique	345

4.	Limites et continuité	348
4.1	Limite et continuité en un point	348
4.2	Relations de comparaison	356
4.3	Continuité	357
4.4	Continuité uniforme	362
4.5	Applications linéaires continues	362
4.6	Normes équivalentes	369
11	Espaces vectoriels normés et espaces métriques : théorèmes fondamentaux	377
1.	Complétude	377
1.1	Suites de Cauchy	377
1.2	Espaces métriques complets	380
1.3	Espaces de Banach	383
1.4	Applications à valeurs dans un espace complet	392
2.	Compacité	395
2.1	Définition	395
2.2	Propriétés des espaces métriques compacts	403
2.3	Applications continues sur un compact	406
3.	Connexité par arcs	408
3.1	Arcs et connexité par arcs	408
3.2	Propriétés des espaces connexes par arcs	410
4.	Espaces vectoriels normés de dimension finie	413
4.1	Complétude des espaces vectoriels normés de dimension finie	413
4.2	Applications linéaires	414
4.3	Parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie	416
4.4	Équivalence des normes en dimension finie	418
5.	Espaces d'applications linéaires continues	419
5.1	Espace vectoriel normé des applications linéaires continues	420
5.2	Cas des espaces de dimension finie	424
5.3	Suite équilipschitzienne d'applications linéaires	427
12	Suites et séries de fonctions	437
1.	Suites de fonctions	437
1.1	Différents modes de convergence	437
1.2	Espace des applications bornées sur A	442
1.3	Conservation des propriétés par convergence uniforme	444
1.4	Le théorème de Dini (Hors programme)	446
2.	Espaces de fonctions classiques	447
2.1	Les fonctions continues par morceaux	447
2.2	Les fonctions affines par morceaux	449
2.3	Théorème de Weierstrass	450
2.4	Théorème de Weierstrass trigonométrique	452
3.	Séries de fonctions	452
3.1	Différents modes de convergence	453
3.2	Conservation des propriétés par convergence uniforme	460

13	Intégration sur un segment	471
1.	Intégrale d'une fonction continue par morceaux	472
1.1	Intégrale d'une fonction en escalier	472
1.2	Intégrale d'une fonction continue par morceaux	472
2.	Propriétés de l'intégrale	474
2.1	Inégalité triangulaire	474
2.2	Invariance par translation	475
2.3	Image par une application linéaire	476
2.4	Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration	477
2.5	Cas des fonctions réelles : positivité, croissance	478
2.6	Inégalité de la moyenne	480
2.7	Sommes de Riemann	481
2.8	Notation	482
3.	Propriétés topologiques	484
3.1	Norme de la convergence en moyenne	484
3.2	Intégration sur un segment d'une suite de fonctions continues	485
3.3	Intégration terme à terme d'une série	488
3.4	Approximation en moyenne d'une fonction continue par morceaux	490
3.5	Norme de la convergence en moyenne quadratique	492
3.6	Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre	494
14	Dérivation et intégration	499
1.	Dérivation	500
1.1	Dérivée en un point	500
1.2	Caractérisation des fonctions constantes	501
1.3	Fonctions de classe C^1	502
1.4	Fonctions de classe C^k	505
1.5	Fonctions de classe C^k par morceaux	507
2.	Primitives et intégrale	509
2.1	Primitives des fonctions continues	509
2.2	Théorème fondamental	509
2.3	Cas des fonctions continues par morceaux	510
2.4	Inégalité des accroissements finis	512
2.5	Théorème du relèvement	515
3.	Calcul d'intégrales	517
3.1	Intégration par parties	518
3.2	Changement de variable	519
4.	Formules de Taylor	521
4.1	Formule de Taylor avec reste intégral	521
4.2	Inégalité de Taylor-Lagrange	522
4.3	Développements limités	523
4.4	Formule de Taylor-Young	523
5.	Dérivation d'une limite ou d'une intégrale	524
5.1	Primitivation et dérivation d'une limite	524
5.2	Dérivation sous le signe \int	528
5.3	Théorème de Fubini	533

15	Intégration sur un intervalle quelconque	539
1.	Intégrabilité des fonctions à valeurs réelles positives	539
1.1	Définition	539
1.2	Conditions d'intégrabilité	542
1.3	Utilisation des séries	547
2.	Intégrale des fonctions à valeurs vectorielles	549
2.1	Intégrabilité	549
2.2	Intégrale des fonctions sommables	551
2.3	Propriétés de l'intégrale	553
2.4	Calcul d'une intégrale	555
2.5	Intégration des relations de comparaison	558
2.6	Convergence en moyenne et en moyenne quadratique	562
3.	Théorèmes de convergence	567
3.1	Convergence uniforme	567
3.2	Convergence monotone	568
3.3	Convergence dominée	574
4.	Intégrales dépendant d'un paramètre	577
4.1	Continuité sous le signe \int	577
4.2	Dérivation sous le signe \int	579
4.3	Un exemple : la fonction Γ	583
5.	Démonstration des théorèmes de convergence (hors programme)	586
5.1	Approximation par des fonctions continues	586
5.2	Théorème de convergence monotone	587
5.3	Théorème de convergence dominée	589
16	Familles sommables	601
1.	Familles sommables positives	602
1.1	Définition, cas des suites	602
1.2	Propriétés	604
1.3	Suites doubles	610
2.	Familles sommables à valeurs vectorielles	611
2.1	L'espace $\ell^1(I, F)$	611
2.2	Cas des familles à support fini	612
2.3	Somme d'une famille sommable	613
2.4	Propriétés	614
2.5	Calcul d'une somme	618
2.6	Les espaces $\ell^1(I, F)$ et $\ell^2(I, \mathbb{C})$	622
3.	Applications	625
3.1	Produit de Cauchy de deux séries	625
3.2	Support d'une famille sommable	626

17 Séries entières	637
1. Généralités	637
1.1 Définition d'une série entière	637
1.2 Opérations sur les séries entières	638
2. Convergence d'une série entière et fonction somme	638
2.1 Rayon de convergence d'une série entière	638
2.2 Convergence uniforme et séries entières	646
3. Propriétés de la fonction somme d'une série entière	647
3.1 Continuité de la fonction somme	647
3.2 Intégration de la fonction somme	648
3.3 Dérivabilité de la fonction somme	649
3.4 Problèmes sur le bord	650
4. Séries entières classiques	653
4.1 Séries entières complexes	653
4.2 Séries entières réelles	661
5. Fonctions développables en série entière	665
5.1 Généralités	665
5.2 Opérations sur les fonctions développables en série entière	670
5.3 Méthode de l'équation différentielle	672
III Analyse 2	683
18 Espaces préhilbertiens	685
1. Espaces préhilbertiens	685
1.1 Formes sesquilinéaires	685
1.2 Produit scalaire, espaces préhilbertiens	687
1.3 Norme	690
1.4 Orthogonalité	694
2. Espaces euclidiens ou hermitiens	702
2.1 Bases orthonormées	702
2.2 Calculs dans une base orthonormée	704
2.3 Relation entre l'espace et son dual	705
2.4 Arcs paramétrés d'un espace euclidien	706
3. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie	709
3.1 Supplémentaire orthogonal	709
3.2 Distance à un sous-espace	710
3.3 Inégalité de Bessel	711
3.4 Égalité de Parseval-Bessel	712

19 Endomorphismes des espaces euclidiens ou hermitiens	721
1. Endomorphismes d'un espace euclidien	721
1.1 Adjoint d'un endomorphisme	721
1.2 Endomorphismes symétriques	725
1.3 Endomorphismes orthogonaux	730
1.4 Réduction des endomorphismes symétriques	737
1.5 Réduction des endomorphismes normaux	744
2. Endomorphismes d'un espace hermitien	747
2.1 Adjoint d'un endomorphisme	747
2.2 Endomorphismes hermitiens	750
2.3 Endomorphismes unitaires	753
2.4 Réduction des endomorphismes hermitiens	756
2.5 Réduction des endomorphismes normaux	760
20 Séries de Fourier	767
1. Fonctions périodiques	767
1.1 Espaces de fonctions périodiques	767
1.2 Produit scalaire et semi-normes usuelles	771
1.3 Fonctions exponentielles et polynômes trigonométriques	773
1.4 Séries trigonométriques	777
2. Coefficients et sommes de Fourier	781
2.1 Coefficients, sommes et série de Fourier	781
2.2 Propriétés des coefficients de Fourier	783
2.3 Inégalité de Bessel	788
3. Convergence ponctuelle	790
3.1 Théorème de Dirichlet	790
3.2 Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue et continûment dérivable par morceaux	795
3.3 Théorème de Fejér	800
4. Convergence en moyenne quadratique	804
4.1 Espace des fonctions périodiques continues	804
4.2 Espace des fonctions périodiques continues par morceaux	809
IV Analyse 3	819
21 Calcul différentiel	821
1. Applications continûment différentiables	821
1.1 Dérivée suivant un vecteur	821
1.2 Applications différentiables	824
1.3 Applications continûment différentiables	829
1.4 Caractérisation des applications continûment différentiables par leurs dérivées partielles	831

2.	Exemples d'applications continûment différentiables	835
2.1	Applications linéaires et bilinéaires	835
2.2	Applications d'une variable réelle	836
2.3	Applications à valeurs réelles	837
3.	Opérations sur les applications de classe C^1	838
3.1	Composition	838
3.2	Propriétés algébriques	844
4.	Théorème des accroissements finis	848
4.1	Formules des accroissements finis	848
4.2	Caractérisation des applications constantes	850
4.3	Point critique d'une application numérique	850
5.	Applications de classe C^k	852
5.1	Applications de classe C^k	852
5.2	Théorème de Schwarz	856
5.3	Développement de Taylor	863
5.4	Condition suffisante d'extremum local	864
22	Géométrie différentielle	873
1.	Difféomorphismes	873
1.1	Difféomorphismes et applications étales	873
1.2	Théorème d'inversion locale	874
1.3	Caractérisation globale des difféomorphismes	878
1.4	Transformation des opérateurs différentiels linéaires par difféomorphisme	880
2.	Théorème des fonctions implicites	887
2.1	Théorème des fonctions implicites	887
2.2	Courbes planes	893
2.3	Courbes et surfaces de l'espace	894
3.	Formes différentielles et champs de vecteurs	901
3.1	Définitions	901
3.2	Intégrale curviligne d'une forme différentielle	903
3.3	Formes exactes et fermées	907
23	Équations différentielles : cas linéaire	921
1.	Équations différentielles linéaires du premier ordre	922
1.1	Définitions et propriétés élémentaires	922
1.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz	925
1.3	Espace des solutions de l'équation homogène	931
1.4	Espace des solutions de l'équation complète	934
2.	Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants	937
2.1	Espace des solutions de l'équation homogène	937
2.2	Espace des solutions de l'équation complète	944
2.3	Méthodes pratiques de résolution	945

3.	Équations différentielles linéaires scalaires	950
3.1	Définitions	950
3.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz	952
3.3	Espace des solutions de l'équation homogène	954
3.4	Espace des solutions de l'équation complète	963
3.5	Équations à coefficients constants	967
24	Équations différentielles : cas général	979
1.	Équations différentielles autonomes du premier ordre	979
1.1	Solutions d'une équation différentielle	979
1.2	Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz	983
1.3	Propriétés géométriques élémentaires des solutions	988
1.4	Propriétés topologiques des solutions	991
2.	Équations différentielles générales	997
2.1	Solution d'une équation différentielle	997
2.2	Théorème de Cauchy	998
2.3	Équations différentielles particulières	1000
25	Quadriques	1013
1.	Définition et équation réduite	1013
1.1	Définitions	1013
1.2	Équation réduite et quadriques propres	1014
2.	Quadriques propres à centres	1018
2.1	Quadriques propres de rang deux	1026
2.2	Quadriques impropres	1031
	Solutions des exercices	1036
	Index	1447

J'INTÈGRE
Série E. Ramis

sous la direction de
Claude Deschamps • André Warusfel

MATHÉMATIQUES 2^e ANNÉE

Cours et exercices corrigés

Cet ouvrage couvre, en un seul volume, la totalité des programmes de mathématiques de 2^e année des filières MP, PC et PSI.

Conçu spécialement pour tous ceux qui souhaitent avoir une vision globale du cours dans le strict respect des programmes, il se compose de 25 chapitres structurés en quatre grandes parties :

- Algèbre
- Analyse 1
- Analyse 2
- Analyse 3

Chaque chapitre est suivi d'une série d'exercices d'entraînement, dont toutes les solutions sont données en fin de volume.

Le cours, rédigé par Jean François Ruaud et François Moulin, se veut clair et concis. Les exercices, quant à eux, ont été conçus par Jean-Claude Sifre et Anne Miquel de sorte que tout étudiant puisse y trouver une source d'apprentissage adaptée à son niveau.

Par ses qualités scientifiques et pédagogiques, ce livre, à l'instar de son alter ego pour la première année, *Mathématiques 1^{re} année*, s'avère le digne successeur de la célèbre série dirigée par Edmond Ramis.

J'intègre

2^e année
MP
PC
PSI

COURS

CLAUDE DESCHAMPS,
ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, est professeur de Mathématiques Spéciales MP* au lycée Louis-le-Grand.

ANDRÉ WARUSFEL,
ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de Mathématiques Spéciales MP* au lycée Louis-le-Grand et Inspecteur Général de Mathématiques.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE



DUNOD



9 782100 054121

ISBN 2 10 005412 0
Code 045412

<http://www.dunod.com>