

E. Weislinger

Mathématiques

POUR PHYSICIENS

2ème et 3èmes cycles
avec rappels de 1er cycle

ellipses

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	11
I Concepts dénués de notion métrique (munis d'un nombre croissant de lois de composition)	15
1 Mots primitifs	15
2 Ensembles	15
3 Groupes et symétrie	16, 17
4 Anneau	19
5 Idéal	19
6 Ensemble des parties, treillis, tribu borélienne, s-algèbre de Boole	20
7 Corps	23
8 Espace vectoriel sur un corps	24
9 a-module	25
10 Opérateur. Application linéaire	25
11 K- Algèbre linéaire	26
II Concepts liés à des notions métriques	31
12 Norme	31
13 Vecteur normé	31
14 Distance	31
15 Forme linéaire ou Fonctionnelle	32
16 Forme multilinéaire	32
17 Forme quadratique	33
18 Forme p-linéaire alternée	33
19 Forme extérieure	33
20 Produit scalaire	33
21 Vecteurs orthogonaux	34
22 Espace vectoriel métrique	34
23 Espace vectoriel normé	35
24 Espace vectoriel euclidien	35
25 Espace vectoriel hermitien complexe	35
26 Base orthonormée ou canonique	35
27 Contra- et covariance	36
28 Espace vectoriel orienté	37

29	Les matrices	37
30	La dualité	40
31	Somme directe de deux espaces vectoriels	42
32	Produit direct de deux espaces vectoriels	42
33	Les tenseurs	43
34	Les algèbres tensorielles	49
35	Les pseudo-tenseurs	52
36	Les algèbres de Clifford	55
37	L'algèbre de Pauli, les quaternions et les matrices de Pauli	64
38	L'algèbre de Pauli et le calcul vectoriel de Gibbs	66
39	L'algèbre de Dirac, matrices de Dirac	66
40	Les spineurs (nombres complexes, Pauli, Dirac), vecteurs de spin, j-spineurs et spineurs d'ordre supérieur	71
III Concepts liés à des notions topologiques		91
41	Espace ponctuel	91
42	Repère	91
43	Référentiel	92
44	Structure topologique ou topologie	92
45	Voisinage, axiome de Hausdorff ; espace séparé	93
46	Adhérence	93
47	Espace topologique compact	93
48	Application continue	93
49	Espace vectoriel topologique	94
50	Variété	96
51	Espace ponctuel continu	97
52	Espace ponctuel continu homogène	97
53	Espace ponctuel continu isotrope	97
IV Dérivations et différentielles		99
54	Dérivées	99
55	Equation différentielle d'ordre n	100
56	Exemples d'équations différentielles et méthodes pratiques de résolution	100
	A. Equations différentielles du premier ordre (Bernouilli, Lagrange, Clairault, Riccati)	100
	B. Equations différentielles du second ordre (homogènes, Euler, à coefficients constants)	102
	C. Equations différentielles linéaires d'ordre n	103

(coefficients constants, Cauchy, Legendre)	
D. Systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants	104
E. Résolution par la méthode des séries	104
F. Exemples d'équations différentielles utilisées en physique	105
a) Polynômes d'Hermite et fonctions associées	105
b) Polynômes de Legendre et fonctions associées	107
c) Polynômes de Laguerre et fonctions associées, fonctions hypergéométriques de Gauss	111
d) Fonctions cylindriques (Bessel, Neumann, Hankel)	114
e) Fonctions de Bessel sphériques	117
f) Solutions d'équations différentielles hypergéométriques généralisées	119
57 Dérivée partielle	124
58 Opérateurs de dérivation partielle (le Laplacien et le d'Alembertien)	125
59 Différentielle	125
60 Les équations aux dérivées partielles et aux différentielles totales	126
61 Forme différentielle	133
62 Une variété différentielle	134
V L'intégration	137
63 La mesure	137
64 Les probabilités	142
65 Pavé, clan de Lebesgue, application étagée, fonction en escalier et réglée	144
66 Intégrale de Riemann	145
67 Intégrale au sens de Lebesgue	147
68 Intégrale de Stieltjes	148
69 Techniques d'intégration et analyse vectorielle	149
70 Eléments d'analyse vectorielle concernant les champs de scalaires et de vecteurs ; généralisation, analyse tensorielle	154
VI Intégration et variables complexes	169
71 Intégration et fonctions à variables complexes	169
72 La fonction gamma $\Gamma(z)$	172
73 La fonction bêta $B(m, n)$	175
74 La convolution	175
75 Séries et transformées de Fourier	176
76 La transformation de Laplace	182

VII Fondements mathématiques de la mécanique quantique	191
Introduction	191
77 Les espaces de Lebesgue	194
78 Les espaces de Banach	198
79 Les espaces de Hilbert \mathcal{H}	199
80 Les espaces de Fréchet	203
81 Les distributions	206
82 Les fonctions de Green	227
83 L'espace de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ des opérateurs bornés continus sur \mathcal{H}	239
84 L'algèbre de Banach $\mathcal{A}(B)$ des opérateurs bornés continus sur \mathcal{H}	248
85 L'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ des opérateurs non bornés fermés dans \mathcal{H}	250
86 L'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ des opérateurs autoadjoints essentiels sur \mathcal{H}	254
87 Aperçu sur l'analyse spectrale	255
88 Résolvant et caractérisation du spectre d'un opérateur	257
89 Diagonalisation des opérateurs autoadjoints et unitaires	261
90 Réduction des opérateurs autoadjoints et unitaires et Irréductibilité	262
91 Ensemble complet d'opérateurs autoadjoints qui commutent (E.C.O.C.)	265
92 Décomposition (ou résolution) spectrale d'opérateurs autoadjoints et unitaires	269
93 Les opérateurs fonction d'opérateurs	275
94 Trace d'un opérateur et opérateur densité ; valeur moyenne, probabilités	278
95 La supersélection en théorie quantique	281
Annexes	283
I Nomenclature de tous les groupes et sous-groupes classiques	283
II L'algèbre géométrique de Clifford, ou calcul multivectoriel	285
III Application du langage tensoriel en mécanique et électro-magnétisme relativiste	292
IV Les Spineurs de \mathcal{V}_n	298
V Caractéristiques métriques de certains espaces	300
VI Axiomatique "orthodoxe" de la mécanique quantique	301
Bibliographie commentée succinctement	307
Index des auteurs cités	315
Index des sujets cités	319
Sens des symboles	337

Cet ouvrage, autonome par des rappels de 1er cycle, est destiné à des lecteurs du niveau de 2ème et 3ème cycles universitaires scientifiques. La progression est linéaire, les ensembles étant munis d'un nombre croissant de lois de composition, suivis de propriétés métriques puis topologiques. Les notions mathématiques utilisées en théorie quantique – les spineurs peu répandus dans les manuels traditionnels – distributions, espaces de Lebesgue, de Banach, de Hilbert, de Fréchet, l'algèbre des opérateurs sur ces espaces et l'analyse spectrale occupent une place étendue. On y trouve aussi les fonctions dites spéciales, solutions d'équations différentielles, les transformations de Fourier et de Laplace avec la convolution et les fonctions de Green. Les opérateurs grad, rot et div de « l'analyse vectorielle » sont introduits par leur « sens physique ». En annexe, la relativité restreinte est formulée à l'aide des tenseurs en dimension 4 et l'axiomatique quantique réexaminée avec plus de rigueur que de tradition.

Un index des auteurs, des sujets cités et du sens des symboles employés – sans double sens – en fait un document très maniable.