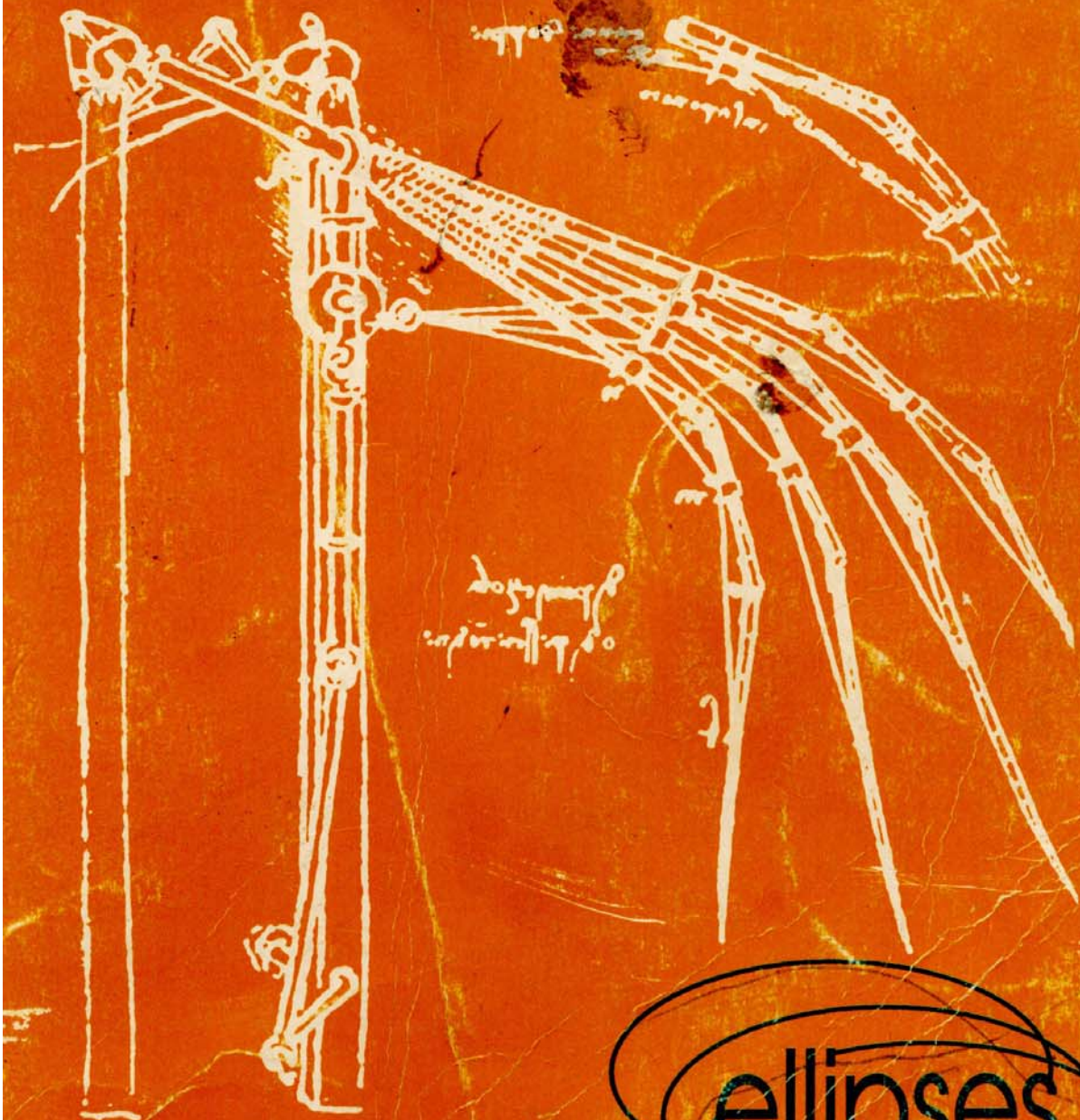


INTRODUCTION À L'OPTIMISATION



ellipses

par Christophe CULIOLI

Table des Matières

Introduction	7
1 Prologue	11
1.1 Algorithmes	11
1.2 Optimisation unidimensionnelle	13
1.2.1 Méthode de dichotomie	14
1.2.2 Méthode de la section dorée	16
1.3 Résolution d'équations en dimension 1	18
1.3.1 Méthode de Newton Raphson	19
1.3.2 Méthode de la sécante	22
1.4 Brefs rappels d'analyse matricielle	23
1.4.1 Définitions et résultats classiques	23
1.4.2 Quelques considérations numériques	26
1.4.3 Méthodes de résolution de systèmes linéaires	29
2 Méthodes de descente	37
2.1 Minimum et descente	37
2.2 Conditions d'optimalité	38
2.2.1 Cas différentiable	38
2.2.2 Cas convexe	41
2.2.3 Application : la transformation de Legendre-Fenchel	47
2.3 Algorithmes	50
2.3.1 Méthode du gradient	50
2.3.2 Variante : l'algorithme de gradient à pas fixe.	55
2.3.3 Méthode de relaxation	57
2.3.4 Méthode de Newton	60
2.3.5 Méthodes de gradient conjugué	62
2.3.6 Méthodes de Quasi-Newton	66
2.4 Retour sur la recherche linéaire	73
2.5 Optimisation non-différentiable et stochastique	76
2.5.1 Inapplicabilité des algorithmes classiques	76
2.5.2 Existence du sous-différentiel pour les fonctions convexes	79
2.5.3 Algorithmes de sous-gradient	82
2.5.4 Méthode de faisceaux	86
2.5.5 Algorithme de gradient stochastique	88
3 Optimisation non-linéaire sous contraintes	93
3.1 Introduction	93
3.2 Approche non-linéaire	93
3.2.1 Théorème des fonctions implicites	93

3.2.2	Contraintes égalité : multiplicateurs de Lagrange	95
3.2.3	Interprétation des multiplicateurs de Lagrange.	100
3.2.4	Contraintes inégalité : multiplicateurs de Karush, Kuhn et Tucker	103
3.2.5	Conditions d'optimalité du second ordre	108
3.3	Approche minimax	109
3.3.1	Un petit jeu à somme nulle	109
3.3.2	Théorème de point selle	111
3.3.3	Application à la minimisation sous contraintes	112
3.3.4	Cas convexe	114
3.3.5	Existence d'un point selle	116
3.4	Algorithmes	118
3.4.1	Méthodes admissibles	118
3.4.2	Pénalisation extérieure et intérieure.	122
3.4.3	Forme généralisée du théorème de Karush, Kuhn et Tucker (Fritz John)	126
3.4.4	Méthodes de Lagrangien (méthodes duales)	129
3.4.5	Méthode "prox" et Lagrangien augmenté	137
3.4.6	Interprétation géométrique des algorithmes d'Uzawa avec Lagrangien et Lagrangien augmenté	146
3.4.7	Méthode directe ou minimisation d'une fonction de mérite	149
4	Programmation Linéaire	153
4.1	Un essai de résolution à la main	155
4.2	Le théorème fondamental	157
4.3	Le Simplexe	161
4.3.1	L'algorithme classique du simplexe	161
4.3.2	Non-dégénérescence et cyclage	163
4.3.3	Initialisation (phase I)	163
4.3.4	Algorithme du Simplexe sous forme révisée (phase II)	163
4.4	Existence et dualité	165
4.4.1	Définitions et lemme de Farkas	165
4.4.2	Existence	168
4.4.3	Problème dual et théorème de dualité	168
4.5	Approches non linéaires : leurs qualités	171
4.6	Algorithme de Karmarkar	172
4.7	Algorithme primal-dual intérieur	177
4.8	Algorithme affine	182
4.9	Remarques sur la phase I : admissibilité	185
4.10	Complexité et convergence polynômiale	188
5	Calcul des variations	195
5.1	Problème élémentaire du Calcul des variations	197
5.1.1	Espaces de courbes, critères et minima	197
5.1.2	Les contraintes	199

5.1.3	Principe du Calcul des variations	200
5.2	Conditions nécessaires d'Euler (ou du premier ordre)	202
5.2.1	Équation d'Euler élémentaire	202
5.2.2	Équation d'Euler vectorielle	204
5.2.3	Détermination d'intégrales premières	205
5.3	Applications de l'équation d'Euler	206
5.3.1	Principe de Hamilton	206
5.3.2	Calcul de géodésiques	208
5.4	Conditions de transversalité	210
5.4.1	Extrémité assujettie à se déplacer sur une courbe	210
5.4.2	Extrémité libre soumise à un coût. Condition limite naturelle.	213
5.5	Problèmes isopérimétriques : équation d'Euler-Lagrange	214
5.6	Autres conditions d'optimalité	216
5.6.1	Condition suffisante du premier ordre : convexité conjointe	216
5.6.2	Condition nécessaire du second ordre (Legendre)	217
5.6.3	Problème secondaire et condition suffisante de Jacobi	218
5.6.4	Variation forte : condition de Weierstrass	221
5.6.5	Transformation de Legendre et équations canoniques	223
6	Principe du Maximum de Pontryaguine	225
6.1	Le problème de la Commande optimale	225
6.1.1	État et commande	225
6.1.2	Stabilité, commandabilité, observabilité, détectabilité	228
6.2	Principe du Maximum de Pontryaguine	233
6.2.1	Typologie des problèmes de commande optimale	233
6.2.2	Origine du Principe du Maximum	234
6.2.3	Un énoncé assez général	236
6.2.4	Démonstration du Principe du Maximum	238
6.3	Contraintes intégrales, instantanées, et contraintes d'état	241
6.4	Exemples d'application	243
6.4.1	Commande en temps minimal	243
6.4.2	Problème linéaire-quadratique et problèmes plus généraux	244
7	Programmation Dynamique	247
7.1	Introduction	247
7.2	Principe d'optimalité en temps discret	248
7.3	Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman discrète	251
7.3.1	Problème de plus Court Chemin	251
7.3.2	Problème de Commande Optimale en temps discret	254
7.3.3	Problème Linéaire Quadratique	258
7.4	Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman continue	261
7.4.1	Problème Linéaire Quadratique	263
7.5	Complexité	264

8 Problèmes de grande taille	267
8.1 Méthodes classiques de décomposition	268
8.1.1 Décomposition par les prix	268
8.1.2 Décomposition par les quantités	270
8.2 Principe du Problème Auxiliaire	272
8.3 Méthodes de coupes (plans sécants) et de faisceaux	276
8.3.1 Méthode de coupe ou des plans sécants	276
8.3.2 Les méthodes de faisceaux	279
Références	283
9 Solutions des exercices	287
Index	313

INTRODUCTION À L'OPTIMISATION

