

Yvonne et René Sortais

Géométrie de l'espace et du plan

SYNTHÈSE
DE COURS

EXERCICES
RÉSOLUS

Collection
Formation des enseignants
et formation continue



HERMANN

Sommaire

	pages
1 Droites et plans de l'espace , propriétés d'Incidence	
Synthèse de cours	1
1 Intersection de deux plans	4
2 Intersection d'une droite et d'un plan	5
3 Traces d'un plan sur trois autres plans	6
4 Intersections de trois plans	7
5 Transitivité de l'équipollence dans l'ensemble des bipoints de l'espace	8
6 Section d'un tétraèdre par un plan	9
7 Section d'un cube par un plan	11
8 Section " triangulaire " d'un tétraèdre	12
9 Section d'une pyramide par un plan	13
10 Section d'un parallélépipède par un plan	15
11 Une configuration de Desargues	17
12 Intersections d'un plan avec les plans des faces d'un cube	19
13 Une propriété de la diagonale d'un parallélépipède	21
2 Vecteurs de l'espace . Représentations paramétriques de droites et de plans Géométrie analytique	
Synthèse de cours	23
1 Trois parallélogrammes	29
2 Droite parallèle à un plan	29
3 Segment dont les extrémités sont les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre	30
4 Intersection d'une droite et d'un plan	31
5 Caractérisation d'un segment	32
6 Lieux géométriques	33
7 Trièdre fondamental d'un tétraèdre	35
8 Parallélépipède circonscrit à un tétraèdre	37
9 Quatre droites concourantes dans un quadrilatère inscrit	38
10 Intersections d'une droite avec les plans et les axes de coordonnées	39
11 Intersections de droites définies par des représentations paramétriques	41
12 Intersection d'une droite et d'un plan connus par des représentations paramétriques	42
13 Equation cartésienne d'un plan . Intersection de deux plans .	43
14 Intersections de trois plans . Interprétations de systèmes linéaires de 3 équations à 3 inconnues	45
15 Traces d'un plan sur les axes de coordonnées . Plan parallèle à un axe de coordonnées	47
16 Traces d'un plan sur les plans de coordonnées	51
17 Intersection de deux plans définis par des représentations paramétriques	54
18 Trapèze complet	55
3 Barycentre	
Synthèse de cours	59
1 Devinette : recherche des coefficients des points d'un système dont on connaît le barycentre	62
2 Centres de gravité de triangles	63
3 Isobarycentre des quatre sommets d'un tétraèdre	64
4 Alignements de points et droites concourantes	65
5 Isobarycentre des huit sommets d'un tétraèdre	67
6 Droites coplanaires	69
7 Ensembles de barycentres	72
4 Projections ponctuelles . Enoncés de Thalès	
Synthèse de cours	75
1 Théorème de Thalès dans l'espace	79
2 Pieds des hauteurs d'un triangle	81
3 Théorème de Ménélaüs dans le plan	83
4 Théorème de Ménélaüs dans l'espace	85
5 Section d'un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées	87

5 Homothéties

Synthèse de cours	88
1 Du théorème de Thalès.....aux homothéties	89
2 Aidons le dessinateur	94
3 Le dessinateur a encore besoin d'aide	95
4 Conservation du barycentre par une homothétie	97
5 Incrire un carré d'aire maximale dans un triangle donné	99
6 Triangles à côtés respectivement parallèles	102
7 Un problème de construction : triangles homothétiques	103
8 Cercle de Taylor	105
9 Droite de Newton d'un quadrilatère complet	107
10 Centres d'homothéties de trois cercles	109
11 Droite et cercle d'Euler	111
12 Image d'un cercle par une homothétie ou une translation	117
13 Homothéties et lieux géométriques	120

6 Produit scalaire

Synthèse de cours	122
1 Propriétés des hauteurs d'un triangle	126
2 Périmètre d'un triangle et somme des longueurs de ses médianes	127
3 Inégalités triangulaires	128
4 Un curieux point de concours	129
5 De la géométrie plane..... à la géométrie dans l'espace	130
6 Isobarycentre et relations métriques	131
7 Quadrilatère inscriptible orthodiagonal	133
8 Relations importantes déduites des " formules de la médiane "	136
9 Ensemble des points dont le rapport des distances à deux points donnés est constant	137
10 Al Kashi et Thalès	140
11 Puissance d'un point par rapport à un cercle . Polaire d'un point par rapport à un cercle	143

7 Orthogonalité dans l'espace

Synthèse de cours	145
1 Théorème des trois perpendiculaires	151
2 Peut-on projeter un tétraèdre sur un plan suivant un parallélogramme ?	151
3 Projection orthogonale d'un angle droit	152
4 Section d'un cube par un plan perpendiculaire à une diagonale du cube	153
5 Tétraèdre trirectangle	155
6 Section d'une surface prismatique par un plan	158
7 L'octaèdre régulier - dual du cube - et l'Etoile de Kepler	161
8 Cercles homothétiques dans l'espace	165
9 Points cosphériques	167
10 Trois lieux géométriques	171
11 Mesure du dièdre de deux faces d'une pyramide régulière	175
12 Lieu géométrique du milieu d'un segment de longueur constante dont les extrémités.....	179
13 Section d'une pyramide à base carrée par un plan perpendiculaire à sa base	183

8 Applications du produit scalaire

Synthèse de cours	189
1 Déterminations de tangentes à un cercle	197
2 Bissectrices d'une paire de droites	200
3 Intersection de deux sphères	201
4 Lignes de niveau	203
5 Lignes de niveau (solution géométrique)	205
5 Lignes de niveau (solution analytique)	207
6 Valeur minimale de $MA^2 + 2 MB^2$ quand M décrit un plan \mathcal{P} ne contenant ni A ni B	209
7 Ensemble des points M du plan tels que : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$	211
8 Equations des hauteurs d'un triangle . Cercle circonscrit à un triangle	213
9 Le seul instant de liberté du géomètre en analytique : le choix du repère .	217
10 Tétraèdre trirectangle en géométrie analytique	219
11 Aire maximale d'une section rectangulaire de tétraèdre	223

9 Angles orientés dans le plan

Synthèse de cours	226
1 Une construction du pentagone régulier	235
2 Evaluation de l'altitude d'une montgolfière par deux observateurs	237
3 Evaluation de la hauteur d'une antenne inaccessible par un observateur seul	238
4 Evaluation de hauteurs d'arbres par un observateur seul	239
5 Evaluation de la distance entre deux arbres situés sur la berge inaccessible d'un torrent	240
6 Distances des sommets d'un triangle équilatéral à un point de son cercle circonscrit	241
7 Aire maximale d'un triangle ABC dont le sommet A décrit un arc de cercle d'extrémités B et C	242
8 Mesures des angles d'un triangle	243
9 Volume d'un tétraèdre connaissant les longueurs des trois arêtes issues d'un même sommet et...	245
10 Volume d'un tétraèdre connaissant les longueurs de ses six arêtes	247
11 Attelage de chiens de traîneau	249
12 Problème d'Alhazen (miroir circulaire)	253
13 Trigonométrie appliquée au triangle	261

10 Symétries . Réflexion . Rotations dans un plan

Synthèse de cours	263
1 Construction d'un triangle dont on connaît trois médiatrices	269
2 Trajet de plus court chemin et trajectoire de lumière	271
3 Billard rectangulaire	273
4 Inscrire un quadrilatère de périmètre minimal dans un rectangle donné	275
5 Un problème de construction résolu grâce aux rotations	279
6 Construction d'un triangle dont on connaît trois bissectrices	283
7 Conservation du barycentre par une rotation	286
8 Recherche du centre et de l'angle d'une rotation en géométrie analytique	287
9 Un théorème attribué à.....Napoléon	289
10 Triangles isométriques	291
11 Composées de réflexions , de rotations et de translations . Décomposition d'une rotation	293
12 Isométries laissant globalement invariant l'ensemble des sommets d'un triangle équilatéral	297
13 Rotations et réflexions en géométrie analytique	300

Problèmes

Tétraèdre régulier	305
Tétraèdre orthocentrique	313
Tétraèdre équilatéral	330
Le fil à couper le cube	337
L'icosaèdre , le Dodécaèdre et l'Etoile de Poincaré	361
Etude d'une alvéole d'abeille	387

Ce livre d'exercices envisage la géométrie plane comme un cas particulier de la géométrie de l'espace. Il est original et conforme aux programmes.

Les exercices, gradués par niveau de difficulté, sont tous corrigés. Chaque chapitre comporte des rappels de cours concis et précis, sans démonstration.

On trouvera ici des démonstrations de cinq grands problèmes de la géométrie. Ainsi, l'étude du solide de Poinot, plus connu sous le nom de grand dodécaèdre, est présentée accompagnée de sa réalisation concrète ; on trouve également le pentagramme mystique de Pythagore, l'icosaèdre, le nombre d'or, etc. Les propriétés du tétraèdre orthocentrique y sont également développées qui généralisent les propriétés rencontrées en géométrie du triangle.



9 782705 614249

ISBN 2 7056 1424 9

180 F 27,4 €

HERMANN



ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS