

Passeport pour l'informatique

LE SYSTÈME MAPLE

Introduction au calcul symbolique et aux mathématiques expérimentales

Daniel Krob et Stéphane Legros

Tome 1



Table des matières

Préface	xiii
1 Introduction au calcul formel	1
1.1 Les systèmes de calcul formel	1
1.1.1 Introduction	1
1.1.2 Les systèmes existants	2
1.1.3 Structure d'un système de calcul formel	3
1.2 Premiers pas en Maple	4
1.2.1 Arithmétique élémentaire	4
1.2.2 Polynômes et fractions rationnelles	5
1.2.3 Analyse élémentaire	6
1.2.4 Algèbre linéaire	11
1.2.5 Un peu de programmation	13
Exercices	16
2 Le système Maple	23
2.1 Présentation générale du système	23
2.1.1 Généralités	23
2.1.2 L'interpréteur	24
2.1.3 Les bibliothèques	26
2.2 Les structures de données	30
2.2.1 Les objets Maple	30
Structure arborescente des objets Maple	30
Les constructeurs Maple	32
Comment accéder aux parties d'un objet Maple	38
2.2.2 Le mécanisme d'évaluation	40
Evaluation d'un objet Maple	40

	Désévaluation	44
2.2.3	Les constantes mathématiques	46
2.2.4	Nombres et chaînes de caractères	48
	Entiers et rationnels	48
	Réels et complexes	49
	Chaînes de caractères	53
2.2.5	Intervalles	56
2.2.6	Suites, listes et ensembles	57
	Suites	57
	Listes	60
	Ensembles	62
2.2.7	Tables et tableaux	64
	Tables	64
	Tableaux	74
	Matrices et vecteurs	83
2.2.8	Séries formelles	83
2.3	Le langage de programmation	87
2.3.1	Les procédures	87
	Syntaxe d'une procédure Maple	88
	Les variables locales	90
	Retour d'une matrice ou d'une table	91
	Les options	93
2.3.2	Les instructions	100
	Les instructions itératives.	101
	Les instructions conditionnelles.	103
	Comment sortir d'une procédure.	106
2.4	Les utilitaires de la bibliothèque standard	108
2.4.1	Les entrées/sorties	108
	Lecture/écriture dans des fichiers.	108
	L'affichage de résultats.	110

2.4.2	Simplifier !	112
	L'instruction <code>simplify</code>	116
	L'instruction <code>normal</code>	118
	L'instruction <code>expand</code>	118
	L'instruction <code>combine</code>	119
2.4.3	Quelques utilitaires de manipulation d'expressions	121
	La substitution.	121
	L'instruction <code>collect</code>	123
	L'instruction <code>sort</code>	125
2.4.4	L'opérateur fonctionnel <code>map</code>	128
	Comment écrire un interpréteur syntaxique	130
2.5	Les fonctions mathématiques de la bibliothèque standard	134
2.5.1	Opérations sur les polynômes	134
	Factoriser un polynôme.	134
	Division euclidienne, pgcd et ppcm.	136
	Coefficients, degré et valuation.	138
	Résultant et discriminant.	140
	Polynômes d'interpolation de Lagrange.	143
2.5.2	Opérations sur les fractions rationnelles	146
	La décomposition en éléments simples.	146
	La décomposition en fraction continue.	147
2.5.3	Sommations et produits	150
	L'instruction <code>sum</code>	150
	L'instruction <code>product</code>	153
2.5.4	Développements asymptotiques et en séries	156
	Développements en série formelle.	156
	Autres développements en série.	161
	Développements asymptotiques.	165
2.5.5	Calculs de limites	167
2.5.6	Résolution d'équations	170
	L'instruction <code>solve</code>	170
	L'instruction <code>fsolve</code>	181
	L'instruction <code>msolve</code>	184

2.5.7	Suites récurrentes	186
2.5.8	Calcul intégral	190
	Intégrales définies et impropres.	190
	Calcul de primitives.	193
2.5.9	Calcul différentiel	194
	Dérivation d'une fonction.	194
	Résolution formelle d'équations différentielles.	195
	Développement en série d'une solution.	198
	Résolution numérique d'équations différentielles.	200
2.5.10	Fonctions arithmétiques et combinatoires	210
	Changements de base.	210
	Coefficients binomiaux.	211
	Nombres premiers.	212
	Pgcd, ppcm, décomposition en facteurs premiers dans \mathbb{N}	212
2.5.11	Fonctions spéciales	215
	Fonctions définies par des expressions intégrales.	215
	Fonctions définies par des développements en séries.	216
	Quelques exemples.	217
2.5.12	Génération de nombres aléatoires	218
2.6	Dessiner !	223
2.6.1	Tracé de courbes dans le plan	223
	Comment tracer plusieurs courbes à la fois.	229
	Problèmes de singularités.	235
	Problèmes de recollements.	239
2.6.2	Tracé de surfaces en dimension 3	243
2.7	Les bibliothèques spécialisées	248
2.7.1	La bibliothèque student	248
	Changement de variables dans une intégrale.	248
	Intégration par parties.	249
2.7.2	La bibliothèque combinat	250
	Partitions d'un entier.	250
	Compositions d'un entier.	252
	Arrangements et permutations.	253

	Combinaisons.	257
	Parties d'un ensemble.	258
	Quelques grandeurs combinatoires classiques.	259
2.7.3	La bibliothèque <code>numtheory</code>	262
	Polynômes cyclotomiques.	262
	Diviseurs.	265
	Fonction de Möbius.	265
	Nombres de Mersenne et de Fermat.	267
2.7.4	La bibliothèque <code>orthopoly</code>	269
	Les polynômes ultrasphériques de Gegenbauer.	271
	Les polynômes d'Hermite.	272
	Les polynômes de Jacobi.	273
	Les polynômes de Laguerre généralisés.	274
	Les polynômes de Laguerre.	275
	Les polynômes de Legendre.	275
	Les polynômes de Tchebychev de première espèce.	276
	Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce.	277
	Quelques exemples d'utilisation.	277
2.7.5	La bibliothèque <code>powseries</code>	281
	Représentation d'une série formelle.	281
	Opérations sur les séries formelles.	282
	Résolution d'équations différentielles linéaires.	284
2.8	Quelques conseils pratiques	285
	Exercices	287
	Programmation Maple.	287
	Algèbre générale.	292
	Suites numériques.	293
	Polynômes et fractions rationnelles.	294
	Analyse réelle.	297
	Développements asymptotiques et en séries.	298
	Equations différentielles.	300
	Génération aléatoire.	302
	Tracé de courbes.	305

La bibliothèque <code>combinat</code>	306
La bibliothèque <code>numtheory</code>	311
La bibliothèque <code>orthopoly</code>	312
Annexe A – Les fonctions Maple	315
A.1 Fonctions d'entrées-sorties	315
A.2 Fonctions systèmes	315
A.3 Opérations sur les objets Maple	316
A.3.1 Opérateurs généraux	316
A.3.2 Opérations sur les chaînes de caractères	316
A.3.3 Opérations sur les suites et les ensembles	317
A.3.4 Opérations sur les tables	317
A.3.5 Fonctions d'évaluation	317
A.3.6 Utilitaires de simplification	318
A.4 Fonctions mathématiques	318
A.4.1 Fonctions usuelles	318
A.4.2 Fonctions trigonométriques usuelles et hyperboliques	319
A.4.3 Fonctions arithmétiques	320
A.4.4 Fonctions spéciales	321
A.4.5 Représentation des nombres complexes	322
A.4.6 Opérations sur les fractions rationnelles	322
A.4.7 Opérations sur les polynômes	322
A.4.8 Résolution d'équations	323
A.4.9 Opérations diverses	324
A.5 Utilitaires de dessin	325
A.6 Les bibliothèques spécialisées	325
A.6.1 Algèbre linéaire : la bibliothèque <code>linalg</code>	325
A.6.2 Analyse élémentaire : la bibliothèque <code>student</code>	326
A.6.3 Combinatoire : la bibliothèque <code>combinat</code>	326
A.6.4 Polynômes orthogonaux : la bibliothèque <code>orthopoly</code>	327
A.6.5 Séries formelles : la bibliothèque <code>powseries</code>	328
A.6.6 Statistiques : la bibliothèque <code>stats</code>	329
A.6.7 Théorie des nombres : la bibliothèque <code>numtheory</code>	329

Annexe B – Tables	331
B.1 Grandeurs combinatoires	331
B.1.1 Nombres de Catalan	331
B.1.2 Nombre de partitions de n à k parts	332
B.1.3 Nombres de Stirling de première espèce	333
B.1.4 Nombres de Stirling de seconde espèce	333
B.2 Nombres et polynômes de Bernoulli	334
B.3 Polynômes cyclotomiques	335
B.4 Polynômes orthogonaux	336
B.4.1 Polynômes d’Hermite	336
B.4.2 Polynômes de Laguerre	337
B.4.3 Polynômes de Legendre	338
B.4.4 Polynômes de Tchebychev de première espèce	339
B.4.5 Polynômes de Tchebychev de seconde espèce	340
Annexe C – Références bibliographiques	341
C.1 Maple	341
C.2 Calcul formel	341
C.3 Aspects mathématiques de l’informatique	342
Index	343



Ce livre est le premier d'une série de quatre tomes qui constituent un ouvrage intitulé « Introduction au calcul symbolique et aux mathématiques expérimentales ». Cet ouvrage s'adresse tant aux élèves des classes préparatoires qu'aux étudiants en informatique, en mathématiques, en physique ou en chimie désireux d'en savoir plus sur le calcul symbolique, une nouvelle manière d'appréhender les mathématiques. Son objectif est de présenter le calcul symbolique par une approche résolument algorithmique et expérimentale, en utilisant Maple comme système sous-jacent.

Ce tome est le support à l'ensemble de l'ouvrage. Il a cependant été conçu de manière à pouvoir être lu indépendamment des autres tomes et à servir de manuel de référence pour l'utilisation de Maple.

Fruit d'une collaboration d'un professeur de classes préparatoires et d'un spécialiste de calcul symbolique, ce livre de cours et d'exercices de Maple a été spécialement fait pour les étudiants de Maths-Sup/Maths-Spé. Il contient d'une part une introduction au calcul symbolique, et d'autre part une description du systè-

me Maple. Le premier chapitre est une introduction au calcul formel permettant au lecteur de faire ses premiers pas dans ce domaine. Le second chapitre est une description détaillée du système Maple, où les auteurs présentent et commentent la quasi-totalité des procédures Maple d'utilisation courante. Le lecteur y trouvera :

- une présentation générale de Maple ;
- l'étude des différents objets que l'on peut manipuler en Maple ;
- la description du langage de programmation que Maple offre à ses utilisateurs ;
- la description du noyau dur de Maple représenté par la bibliothèque standard ;
- une présentation de quelques bibliothèques spécialisées d'usage courant.

Le CD-ROM accompagnant ce livre contient les versions de démonstration du système Maple pour PC sous Windows 3.1 et 95, Macintosh (Power PC et non PowerPC), Unix (Linux, SunOS, Solaris 2.3, HP-UX et Dec). Avec cette version de Maple, le lecteur pourra tester les exemples présentés tout au long du livre.

LES AUTEURS

DANIEL KROB est chargé de recherches au LITP (CNRS). Il enseigne à l'Ecole normale supérieure et à l'Ecole polytechnique. Ses travaux portent sur l'algorithmique, le calcul symbolique, la combinatoire et la théorie des automates.

STÉPHANE LEGROS est un ancien élève de l'Ecole normale supérieure de Saint-Cloud. Il est actuellement professeur en mathématiques spéciales au lycée Corneille de Rouen.



INTERNATIONAL
THOMSON
PUBLISHING
FRANCE

ISBN 2-84180-038-5



9 782841 800384