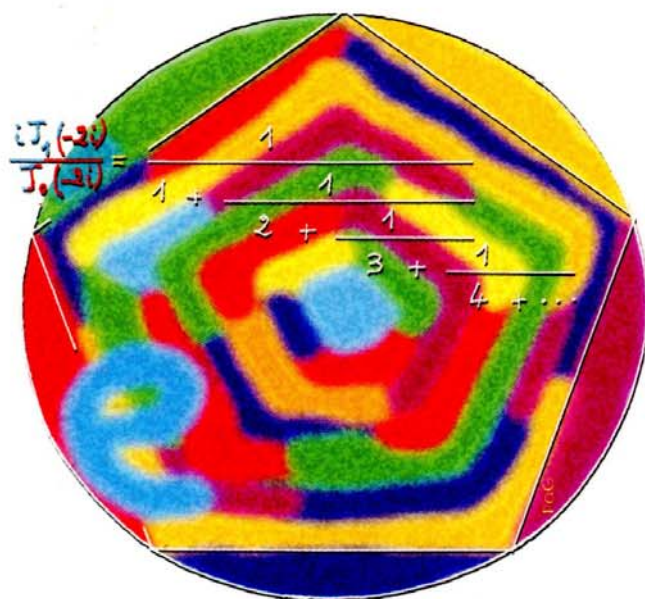


Daniel Duverney

2^e CYCLE

Théorie des nombres

Cours et exercices corrigés



DUNOD

Table des matières

Avant-propos	ix
Structure du livre	xi
CHAPITRE 1 • Irrationalité et approximation diophantienne	1
1.1 Irrationalité de \sqrt{d}	1
1.2 Irrationalité de e	1
1.3 Irrationalité de π	2
1.4 Irrationalité des valeurs de la fonction de Tschakaloff	3
1.5 Approximation diophantienne	4
1.6 Remarques méthodologiques	6
Exercices	7
CHAPITRE 2 • Développement des nombres réels en séries et produits infinis	9
2.1 Développement p -adique d'un nombre réel	9
2.2 Développement d'un nombre réel en série de Engel	12
2.3 Produit infini de Cantor	13
Exercices	15
CHAPITRE 3 • Fractions continues	17
3.1 Introduction	17
3.2 Un critère de convergence	20
3.3 L'art et la manière de diviser par zéro	22
3.4 Développement en fraction continue dans Σ	24
3.5 Un quotient de fonctions de Bessel	25
3.6 Fractions continues et irrationalité	27
Exercices	30
CHAPITRE 4 • Fractions continues régulières	33
4.1 Développement d'un nombre réel positif en fraction continue régulière	33
4.2 Développement de e en fraction continue régulière	36

4.3	L'équation diophantienne $ax + by = c$	37
4.4	Fractions continues régulières et approximation diophantienne	38
4.5	Nombres irrationnels quadratiques et fractions continues	40
4.6	L'équation de Pell	42
	Exercices	44
CHAPITRE 5 • Corps de nombres quadratiques et équations diophantiennes		47
5.1	Corps de nombres quadratiques	47
5.2	Anneau des entiers d'un corps de nombres quadratiques	48
5.3	Unités de l'anneau des entiers d'un corps de nombres quadratiques	49
5.4	Décomposition en produit de facteurs premiers dans \mathbb{Z}	51
5.5	Éléments premiers et éléments irréductibles	53
5.6	Anneaux euclidiens	55
5.7	Équations diophantiennes	56
	Exercices	58
CHAPITRE 6 • Carrés et sommes de carrés		61
6.1	Sommes de deux carrés	61
6.2	Structures algébriques finies	62
6.3	Le symbole de Legendre	64
6.4	Calcul dans \mathbb{F}_p^*	68
6.5	Formes quadratiques binaires à coefficients entiers	68
6.6	Sommes de quatre carrés	73
	Exercices	75
CHAPITRE 7 • Fonctions arithmétiques		79
7.1	Fonction génératrice ordinaire	79
7.2	Séries de Lambert	81
7.3	La formule du triple produit de Jacobi	83
7.4	Sommes de deux carrés	85
7.5	Théorème de Jacobi sur les sommes de quatre carrés	87
7.6	L'indicateur d'Euler $\varphi(n)$	87
7.7	Majoration de PPCM $(1, 2, \dots, n)$	89
7.8	Valeur moyenne de $r_2(n)$	90
	Exercices	92

CHAPITRE 8 • Approximants de Padé	97
8.1 Généralités	97
8.2 Fonction hypergéométrique de Gauss et approximants de Padé du binôme $f(x) = (1 - x)^\alpha$	98
8.3 Fonction hypergéométrique confluyente et approximants de Padé de l'exponentielle	101
8.4 Applications arithmétiques	102
Exercices	105
CHAPITRE 9 • Nombres algébriques et mesures d'irrationalité	107
9.1 Nombres algébriques	107
9.2 Entiers algébriques	108
9.3 Nombres transcendants et théorème de Liouville	111
9.4 Mesures d'irrationalité	112
9.5 Équations diophantiennes et mesures d'irrationalité	115
9.6 Théorèmes de Thue et de Roth	117
Exercices	119
CHAPITRE 10 • Corps de nombres algébriques	123
10.1 Corps de nombres algébriques	123
10.2 Conjugués, normes et traces	125
10.3 Anneau des entiers d'un corps de nombres	127
10.4 Unités	128
10.5 Discriminants et bases entières	130
10.6 L'équation de Fermat $x^5 + y^5 = z^5$	133
Exercices	135
CHAPITRE 11 • Idéaux	139
11.1 Idéaux d'un corps de nombres	139
11.2 Arithmétique des idéaux entiers	141
11.3 Norme d'un idéal	142
11.4 Décomposition de $\langle p \rangle$, p premier, en produit d'idéaux premiers	144
11.5 Nombre de classes d'idéaux	146
11.6 Application à l'équation de Mordell $y^2 = x^3 + k$	149
Exercices	150

CHAPITRE 12 • Introduction aux méthodes de transcendance	153
12.1 Fonctions algébriques et fonctions transcendentes	153
12.2 Maison d'un nombre algébrique	155
12.3 La méthode de transcendance de Mahler	156
12.4 Remarques méthodologiques ; lemme de Siegel	158
12.5 Le théorème de Hermite-Lindemann	159
12.6 Le théorème de Gelfond-Schneider	161
12.7 La méthode de Siegel-Shidlovski	161
Exercices	163
Solutions des exercices du chapitre 1	165
Solutions des exercices du chapitre 2	168
Solutions des exercices du chapitre 3	172
Solutions des exercices du chapitre 4	177
Solutions des exercices du chapitre 5	183
Solutions des exercices du chapitre 6	191
Solutions des exercices du chapitre 7	197
Solutions des exercices du chapitre 8	206
Solutions des exercices du chapitre 9	213
Solutions des exercices du chapitre 10	220
Solutions des exercices du chapitre 11	227
Solutions des exercices du chapitre 12	233
Références bibliographiques	241
Index	243

SCIENCES SUP

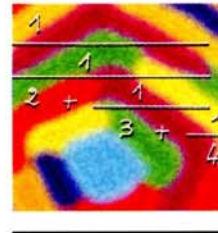
Daniel Duverney

THÉORIE DES NOMBRES

Cours et exercices corrigés

Cet ouvrage propose une introduction à la théorie des nombres sous ses différents aspects : problèmes d'irrationalité et de transcendance, fractions continues, équations diophantiennes, formes quadratiques, fonctions arithmétiques et théorie algébrique des nombres. Les différents chapitres, très largement indépendants, se terminent par des exercices intégralement corrigés qui permettent au lecteur d'assimiler les notions étudiées.

Destiné principalement aux étudiants de second cycle de mathématiques, il s'adresse également aux candidats au CAPES et à l'agrégation, ainsi qu'à toute personne qui apprécie la théorie des nombres pour la simplicité de ses énoncés et la variété de ses méthodes.



DANIEL DUVERNEY est professeur de mathématiques spéciales au lycée Baggio de Lille. Titulaire de l'habilitation à diriger des recherches, ses travaux portent sur des problèmes d'approximation diophantienne, d'irrationalité et de transcendance.



MATHÉMATIQUES



PHYSIQUE



CHIMIE



SCIENCES DE L'INGÉNIEUR



INFORMATIQUE



SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE



9 782100 104102
ISBN 2 10 004102 9
Code 044102

<http://www.dunod.com>

