

ENSEIGNEMENT DE LA PHYSIQUE

L'outil mathématique

Distributions • convolution
Transformations de Fourier et de Laplace
Fonctions d'une variable complexe
Fonctions eulériennes

R. PETIT

MASSON 

4^e édition

TABLE DES MATIÈRES

<i>Avant-propos</i>	XI
<i>Avant-propos à la deuxième édition</i>	XIII
<i>Au sujet des deux dernières éditions</i>	XIV
<i>Notations</i>	XV
0 Rappels et compléments d'analyse	1
Sous-ensembles de \mathbb{R}	1
L'intégrale de Riemann et ses extensions.....	3
Convergence des suites de fonctions.....	7
Séries de fonctions	10
Fonctions définies par des intégrales : $f(x) = \int_a^b K(x,t) dt$	12
Fonctions définies par des intégrales généralisées.....	13
Convergence uniforme d'une intégrale généralisée.....	14
Critère de convergence uniforme pour les intégrales généralisées.....	14
Intégrales à limites variables : $f(x) = \int_a^{b(x)} K(x,t) dt$	15
Notions sommaires sur l'intégrale de Lebesgue	16
Le théorème de la convergence dominée (Lebesgue).....	19
L'intégrale de Lebesgue dans \mathbb{R}^n	21
Questions et conseils	25
I. Espaces fonctionnels, fonctionnelles, distributions	26
Espace fonctionnel	26
Fonctionnelle.....	26
Dual	27
L'espace \mathcal{D}	28
Les distributions de L. Schwartz	30
Support d'une distribution	34
L'espace \mathcal{E} et les distributions à support borné	34
Trois remarques importantes.....	36
II. Opérations sur les distributions	38
Combinaison linéaire de distributions.....	38
Dérivation d'une distribution.....	38
Translation d'une distribution.....	42
Distributions paires et impaires	43

La distribution $T\left(\frac{x}{a}\right)$	44
Produit de deux distributions	44
Suites et séries de distributions.....	47
Utilisation des distributions pour énoncer les lois physiques.....	50
Questions et conseils.....	54
III. Distributions de «plusieurs variables».....	56
Généralités	56
Les distributions associées aux fonctions localement sommables.....	56
Les distributions singulières $\delta(\vec{r}-\vec{a})$ et $\alpha\delta_S$	57
Dérivées partielles d'une distribution T	57
Un exemple très utile : dérivation des fonctions discontinues	58
Les distributions vectorielles dans \mathbb{R}^3	60
Quatre formules à bien connaître	60
Application à l'analyse vectorielle.....	62
Laplacien de $f(\vec{r}) = \frac{1}{r}$	63
Solutions élémentaires de l'équation de Helmholtz dans \mathbb{R}^3	64
Utilisation des distributions pour l'énoncé des lois physiques	65
Produit direct de distributions	66
Questions et conseils.....	69
IV. Produit de convolution.....	70
Produit de convolution de deux fonctions d'une variable	70
Produit de convolution de deux distributions.....	71
Commutativité et distributivité du produit de convolution.....	72
Support de $S * T$	72
Produit de convolution de plusieurs distributions.....	72
Résultats importants pour les applications	73
Autres propriétés importantes sur le plan théorique	75
Produit de convolution de distributions de plusieurs variables	77
Algèbre de convolution.....	79
Quelques applications de l'algèbre \mathcal{D}'_+	80
Les filtres linéaires	83
Questions et conseils.....	85
V. Transformation de Fourier des fonctions.....	86
Définition.....	86
Premiers exemples de transformées.....	87
Formule d'inversion	88
Propriétés souvent utilisées	89

Transformation de Fourier et produit de convolution	93
Formule de Parseval-Plancherel	94
Remarque utile pour la suite.....	94
VI. Transformation de Fourier des distributions	95
Introduction	95
L'espace \mathcal{S}	95
L'espace \mathcal{S}' des distributions tempérées	96
Exemples de distributions tempérées.....	97
Transformée de Fourier d'une distribution tempérée.....	98
Recherche des transformées de Fourier.....	101
VII. Notions sur la transformation des fonctions et distributions de plusieurs variables	106
La transformée des fonctions	106
Le cas des fonctions radiales.....	107
La transformée des distributions tempérées	109
Recherche des transformées.....	110
VIII. Notions sur la transformation de Fourier des distributions périodiques	112
Rappel	112
Transformée de Fourier du peigne de Dirac.....	112
Transformée de Fourier d'une distribution périodique.....	115
Série de Fourier.....	116
Théorème d'échantillonnage (Shannon-Wittaker).....	119
IX. Compléments sur quelques familles de fonctions et leurs transformées de Fourier	122
Les fonctions de carré sommable. L'espace L^2	122
La transformée de Fourier dans L^2	125
Les fonctions de L^2 en physique	126
Espace $L^2(a,b)$	129
Les fonctions dont la transformée de Fourier est à support borné.....	131
La transformée de Fourier des fonctions causales.....	132
Questions et conseils.....	135
X. Transformation de Laplace des fonctions	138
L'intégrale de Laplace.....	138
Transformée de Laplace d'une fonction	140
Propriétés fondamentales.....	141
Transformées de Laplace de quelques fonctions usuelles	145

XI. Transformation de Laplace des distributions	147
Définition.....	147
Transformation de Laplace et produit de convolution.....	148
Autres théorèmes constamment utilisés.....	148
Complément au formulaire du chapitre X, § 4.....	151
Applications à la physique mathématique	151
Original d'une fonction rationnelle.....	153
XII. Commentaires sur les transformations de Fourier et de Laplace. Inversion de la transformation de Laplace	154
Rappels et commentaires	154
Relations entre la T.F. et la T.L. d'une même fonction	155
Inversion de la transformation de Laplace.....	156
Questions et conseils.....	158
XIII. Fonctions d'une variable complexe	159
Définitions	159
Dérivée d'une fonction de variable complexe. Conditions de Cauchy.....	161
Fonction holomorphe dans un domaine	164
Fonctions usuelles	168
Intégration dans le plan complexe.....	177
Intégration des fonctions holomorphes.....	181
Série de fonctions d'une variable complexe.....	191
Séries entières	193
Série de Laurent	201
Points singuliers isolés d'une fonction de variable complexe.....	203
Théorème des résidus et applications	206
Questions et conseils.....	214
XIV. Fonctions eulériennes	216
La fonction $\Gamma(z)$, dite "fonction gamma".....	216
La Fonction $B(p,q)$	218
Formule des compléments	220
Étude de la fonction $y = \Gamma(x)$ pour x réel.....	221
La formule de Stirling	223
Développement de $\frac{1}{\Gamma}$ en produit infini.....	224
Développement de $\sin z$ en produit infini.....	226
Exercice	227
Formulaire	227

Annexe 1 : Produits infinis	229
Définitions et généralités.....	229
Étude de la convergence.....	230
Produit infini de fonctions.....	232
 Annexe 2 : Compléments sur les points singuliers et le prolongement analytique	234
Point-frontière isolé.....	234
Point-frontière singulier.....	234
Points singuliers et coupures.....	236
Quelques exercices sur la série de Taylor d'une fonction.....	237
Prolongement analytique et calcul numérique.....	238
Principe de réflexion (ou de symétrie) de Schwarz.....	239
 Annexe 3. Représentation conforme	241
Rappels et généralités.....	241
Définition d'une représentation conforme.....	242
Le problème fondamental de la représentation conforme.....	242
La représentation conforme et l'équation de Laplace.....	244
Quelques compléments utiles en pratique.....	246
 Annexe 4. La pratique de la transformation de Fourier	248
Définition de la T.F. et formule d'inversion.....	248
Règles de calculs.....	249
Transformée d'une fonction constante et de la distribution de Dirac.....	249
Produit de convolution.....	250
Formule de Parseval-Plancherel.....	250
Conclusion.....	250
 Bibliographie	252
 Index alphabétique des matières	254

ENSEIGNEMENT DE LA PHYSIQUE

L'outil mathématique

R. PETIT

Comme le laisse deviner son titre, cet ouvrage n'est pas destiné à la formation des mathématiciens ; il s'adresse surtout aux autres scientifiques désireux d'utiliser les mathématiques dans leur propre domaine de spécialisation. Le lecteur, qui est supposé avoir assimilé les connaissances générales enseignées dans le premier cycle de l'enseignement supérieur, est convié à une visite commentée d'une partie de l'arsenal des mathématiciens. L'itinéraire a été choisi compte tenu des besoins et des difficultés auxquels l'auteur a lui-même été confronté dans ses activités de recherche en physique mathématique : distributions, convolutions, transformation de Fourier et de Laplace, fonctions d'une variable complexe, fonctions eulériennes. Ainsi se trouvent réunies en quelques 250 pages des notions qui semblent aujourd'hui indispensables à une bonne formation générale. Même si les démonstrations de certains grands théorèmes ont été omises et si l'on s'éloigne volontiers du style austère des ouvrages théoriques, l'auteur s'efforce de rester précis et rigoureux ; on est loin d'une simple collection de recettes.

Ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud, agrégé et physicien de formation, Roger PETIT enseigna d'abord en classes préparatoires avant de rejoindre l'université. Il est actuellement professeur à Aix-Marseille III. Sa riche expérience de l'enseignement lui a permis de détecter les points sur lesquels butent généralement les étudiants et de les illustrer par de nombreux exemples, contre-exemples, recommandations et commentaires.

ISBN: 2-225-84813-0



9 782225 848131