

**SYSTÈMES  
AUTOMATISÉS**

**Information - Commande - Communication**

# **La commande optimale des systèmes dynamiques**

*sous la direction de*  
**Hisham Abou-Kandil**

**hermes**

*Lavoisier*

---

# Table des matières

<b>Chapitre 1. Principe du maximum</b> . . . . .	15
Henri BOURLÈS	
1.1. Introduction. . . . .	15
1.1.1. Genèse du Principe du maximum. . . . .	15
1.1.2. Vers une formulation du Problème de Pontriaguine . . . . .	16
1.1.3. Calcul des variations . . . . .	18
1.1.3.1. Calcul des variations et Problème de Pontriaguine . . . . .	18
1.1.3.2. Variations faibles. . . . .	18
1.1.3.3. Variations fortes .. . . .	19
1.1.4. Commande optimale discrète . . . . .	20
1.1.5. Esprit de ce chapitre . . . . .	22
1.2. Éléments de la théorie de l'optimisation . . . . .	22
1.2.1. Convexité et cônes . . . . .	22
1.2.1.1. Convexité . . . . .	23
1.2.1.2. Cônes . . . . .	24
1.2.1.3. Coupole . . . . .	27
1.2.2. Conditions d'optimalité du premier ordre. . . . .	29
1.2.2.1. Condition d'Euler. . . . .	29
1.2.2.2. Minimum sous contrainte égalité . . . . .	30
1.2.2.3. Minimum sous contraintes de type inégalité et égalité : formulation large (ou « de Fritz John »). . . . .	32
1.2.2.4. Minimum sous contraintes de type inégalité et égalité : formulation stricte (ou « de Karush-Kuhn-Tucker »). . . . .	34
1.2.3. Conditions d'optimalité du second ordre sous contrainte égalité. . . . .	37
1.3. Commande optimale discrète . . . . .	38
1.3.1. Position du problème . . . . .	38
1.3.2. Deux formulations . . . . .	38
1.3.2.1. Reformulation du problème dans le formalisme de F. John et de Karush, Kuhn et Tucker . . . . .	38

1.3.2.2. Formulation large . . . . .	3
1.3.2.3. Formulation stricte . . . . .	4
1.3.3. Problème linéaire quadratique . . . . .	4
1.3.4. Première et seconde variation pour le problème discret de Pontriaguine . . . . .	4
1.4. Principe du maximum de Pontriaguine. . . . .	4
1.4.1. Hypothèses et variations fortes de la commande. . . . .	4
1.4.2. Cas d'un instant final fixé . . . . .	4
1.4.3. Instant final libre . . . . .	5
1.4.4. Condition suffisante d'optimalité globale. . . . .	5
1.4.5. Commande en temps minimal . . . . .	5
1.4.6. Problème linéaire quadratique . . . . .	5
1.4.7. Première et seconde variation pour le problème de Pontriaguine . . . . .	6
1.5. Calcul des variations . . . . .	6
1.5.1. Formalisme de Hamilton. . . . .	6
1.5.2. Formalisme de Lagrange. . . . .	6
1.5.3. Application à la dynamique d'un système holonôme . . . . .	6
1.6. Exercices . . . . .	6
1.7. Bibliographie. . . . .	6
<b>Chapitre 2. Programmation dynamique. . . . .</b>	<b>7</b>
Jean-Louis CALVET	
2.1. Introduction. . . . .	7
2.2. Une méthode de décomposition directe . . . . .	7
2.2.1. Décomposition en N sous-systèmes . . . . .	7
2.2.2. Reconstruction des solutions . . . . .	7
2.2.3. Quelques commentaires . . . . .	7
2.2.4. Exemples . . . . .	7
2.2.4.1. Problème 1 . . . . .	7
2.2.4.2. Problème 2 . . . . .	7
2.3. Une méthode de commande optimale en boucle fermée. . . . .	7
2.3.1. Formulation du problème . . . . .	7
2.3.2. Equation fonctionnelle standard . . . . .	8
2.3.3. Equation fonctionnelle inverse . . . . .	8
2.3.4. Elimination explicite des commandes . . . . .	8
2.3.5. Equation fonctionnelle explicite . . . . .	8
2.4. Quelques méthodes de calcul . . . . .	8
2.4.1. Calcul formel . . . . .	8
2.4.1.1. Exemple non linéaire . . . . .	8
2.4.1.2. Le Problème LQ. . . . .	8
2.4.1.3. Solution généralisée d'équations de Riccati . . . . .	8

2.4.2. Calcul numérique . . . . .	89
2.4.2.1. Equation fonctionnelle standard . . . . .	89
2.4.2.2. Elimination explicite des commandes . . . . .	94
2.4.2.3. Equation fonctionnelle explicite étendue . . . . .	98
2.4.2.4. Equation fonctionnelle explicite réduite . . . . .	99
2.4.3. Calcul parallèle . . . . .	102
2.4.3.1. Calcul formel : solution partitionnée d'équations de Riccati . . . . .	103
2.4.3.2. Calcul numérique : solution discrète d'équations fonctionnelles . . . . .	103
2.5. Programmation dynamique et approximations successives . . . . .	104
2.5.1. Programmation dynamique différentielle . . . . .	105
2.5.2. Méthodes de décomposition-coordination . . . . .	109
2.6. Bibliographie . . . . .	114
<b>Chapitre 3. Systèmes linéaires . . . . .</b>	<b>117</b>
Gilles DUC	
3.1. Introduction . . . . .	117
3.2. Le régulateur linéaire-quadratique en temps discret . . . . .	119
3.2.1. Définition du problème . . . . .	119
3.2.2. Solution du problème . . . . .	119
3.2.3. Exemple . . . . .	121
3.3. Le régulateur linéaire-quadratique en temps continu . . . . .	122
3.3.1. Définition du problème . . . . .	122
3.3.2. Solution du problème . . . . .	123
3.3.3. Résolution de l'équation différentielle de Riccati . . . . .	125
3.3.4. Exemple . . . . .	126
3.4. Le régulateur linéaire-quadratique en présence de bruit . . . . .	128
3.4.1. Le cas continu . . . . .	128
3.4.2. Le cas discret . . . . .	130
3.5. Le régulateur linéaire-quadratique à horizon infini . . . . .	131
3.5.1. Problème en temps continu . . . . .	132
3.5.2. Exemple . . . . .	135
3.5.3. Résultats en temps discret . . . . .	136
3.5.4. Exemple . . . . .	137
3.5.5. Résultats en présence de bruit . . . . .	137
3.5.6. Choix des matrices de pondération . . . . .	138
3.5.7. Exemple : asservissement du mouvement latéral d'un avion . . . . .	139
3.5.8. Résolution de l'équation algébrique de Riccati . . . . .	140
3.6. Reconstruction de l'état par filtre de Kalman . . . . .	142
3.6.1. Filtre de Kalman en temps continu . . . . .	143
3.6.2. Propriété de l'innovation . . . . .	147

- 3.6.3. Comportement asymptotique dans le cas invariant . . . . . 149
- 3.6.4. Utilisation du filtre de Kalman dans un contexte déterministe . . . 150
- 3.6.5. Résultats en temps discret. . . . . 151
- 3.7. Le régulateur linéaire-quadratique avec filtre de Kalman. . . . . 153
  - 3.7.1. Commande en temps continu à horizon fini . . . . . 153
  - 3.7.2. Commande en temps discret à horizon fini . . . . . 156
  - 3.7.3. Commande stationnaire à horizon infini . . . . . 157
  - 3.7.4. Analyse critique des théorèmes de séparation . . . . . 158
  - 3.7.5. Exemple : asservissement du mouvement latéral d'un avion . . . 159
- 3.8. Prise en compte de références et de perturbations constantes . . . . . 161
  - 3.8.1. Calcul du retour d'état. . . . . 162
  - 3.8.2. Reconstruction de l'état et de la perturbation . . . . . 163
  - 3.8.3. Exemple : commande d'un système masses-ressort. . . . . 164
- 3.9. Bibliographie . . . . . 167

**Chapitre 4. Commande optimale non linéaire en boucle fermée. . . . . 169**

Didier GEORGES

- 4.1. Introduction. . . . . 169
- 4.2. Commande optimale non linéaire en boucle fermée en temps continu . 172
  - 4.2.1. Résolution par le principe d'optimalité de Bellman . . . . . 172
  - 4.2.2. Commande optimale non linéaire à horizon infini. . . . . 175
  - 4.2.3. Equations aux dérivées partielles en l'état adjoint. . . . . 176
    - 4.2.3.1. Exemple . . . . . 178
- 4.3. Analyse de stabilité et de robustesse de la commande optimale non linéaire à horizon infini. . . . . 179
  - 4.3.1. Stabilité de la commande optimale non linéaire . . . . . 180
  - 4.3.2. Condition de différence de retour . . . . . 181
- 4.4. Quelques solutions explicites de problèmes de commande optimale non linéaire en boucle fermée. . . . . 185
  - 4.4.1. Les systèmes non linéaires Lagrangiens non sous-actionnés . . . 185
  - 4.4.2. Les problèmes de régulation optimale non linéaire scalaires . . . 189
    - 4.4.2.1. Exemple académique . . . . . 190
    - 4.4.2.2. La commande optimale non linéaire du flux d'un moteur asynchrone. . . . . 191
- 4.5. Méthodes de résolution approchée . . . . . 196
  - 4.5.1. Méthode du développement en séries de Taylor . . . . . 197
    - 4.5.1.1. Exemple . . . . . 198
  - 4.5.2. Méthode des caractéristiques . . . . . 200
    - 4.5.2.1. Résolution numérique . . . . . 201
    - 4.5.2.2. Exemple . . . . . 202
  - 4.5.3. Méthode des résidus pondérés . . . . . 203

4.5.3.1. Régulation optimale non linéaire . . . . .	205
4.5.3.2. Problèmes instationnaires affines-quadratiques en la commande . . . . .	207
4.5.3.3. Exemples . . . . .	212
4.6. Commande optimale non linéaire inverse: une approche constructive .	215
4.6.1. Formulation et intérêt de l'approche . . . . .	216
4.6.2. Fonctions de Lyapunov de Commande, linéarisation et backstepping . . . . .	217
4.6.2.1. Exemple . . . . .	219
4.6.2.2. Synthèse de commande optimale inverse par linéarisation . . . . .	220
4.6.2.3. Exemple . . . . .	221
4.6.2.4. Synthèse de commande inverse par backstepping. . . . .	222
4.7. Bibliographie . . . . .	225

## **Chapitre 5. Introduction à la théorie des jeux . . . . . 227**

Hisham ABOU-KANDIL, Marc JUNGERS

5.1. Introduction. . . . .	227
5.2. Définitions et concepts fondamentaux . . . . .	229
5.2.1. Structure d'information dans un jeu . . . . .	230
5.2.1.1. Stratégie avec une structure d'information en boucle ouverte .	231
5.2.1.2. Stratégie avec une structure d'information en boucle fermée . . . . .	231
5.2.1.3. Stratégie avec une structure d'information échantillonnée .	231
5.2.2. Définitions des principales stratégies . . . . .	231
5.2.2.1. La stratégie du Min-Max . . . . .	232
5.2.2.2. La stratégie de Pareto . . . . .	232
5.2.2.3. La stratégie de Nash. . . . .	233
5.2.2.4. La stratégie de Stackelberg. . . . .	234
5.2.3. Jeux différentiels linéaires-quadratiques . . . . .	235
5.3. Commande par la stratégie de Nash . . . . .	236
5.3.1. Stratégie de Nash en boucle ouverte pour les jeux linéaires-quadratiques . . . . .	238
5.3.2. Stratégie de Nash en boucle fermée pour les jeux linéaires-quadratiques . . . . .	240
5.3.3. Discussion sur les stratégies de Nash en boucle ouverte et en boucle fermée. . . . .	241
5.3.4. Autres remarques sur la stratégie de Nash . . . . .	242
5.3.4.1. Consistance en temps des stratégies de Nash . . . . .	242
5.3.4.2. Différence entre équilibre et solution des équations de Riccati	242
5.3.4.3. Conditions d'existence et d'unicité d'un équilibre de Nash .	243

5.4. Commande par la stratégie de Stackelberg . . . . .	243
5.4.1. Conditions nécessaires pour le suiveur . . . . .	244
5.4.2. Conditions nécessaires pour le leader . . . . .	245
5.4.3. Remarques sur la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte. . . . .	246
5.4.3.1. Inconsistance en temps des stratégies de Stackelberg . . . . .	246
5.4.3.2. Conditions d'existence et d'unicité d'un équilibre de Stackelberg . . . . .	247
5.4.4. Stratégie de Stackelberg en boucle ouverte pour les jeux linéaires-quadratiques . . . . .	247
5.5. Résolution des équations différentielles de Riccati couplées rectangulaires . . . . .	250
5.5.1. Linéarisation d'une équation de Riccati . . . . .	251
5.5.2. Solution analytique d'une équation différentielle de Riccati rectangulaire. . . . .	252
5.5.3. Applications aux stratégies de Nash et Stackelberg en boucle ouverte. . . . .	255
5.5.3.1. Application à la stratégie de Nash en boucle ouverte. . . . .	255
5.5.3.2. Application à la stratégie de Stackelberg en boucle ouverte. . . . . .	255
5.6. Cas des critères à horizon infini . . . . .	256
5.6.1. Résolution des équations algébriques de Riccati rectangulaires. . . . .	257
5.6.1.1. Relaxation des conditions initiales dans la représentation des solutions de l'équation différentielle . . . . .	257
5.6.1.2. Passage à la limite de la représentation des solutions de l'équation différentielle . . . . .	258
5.6.1.3. Méthode de résolution par les espaces invariants de $M$ . . . . .	258
5.6.1.4. Une éventuelle solution particulière : la solution dichotomique . . . . .	262
5.7. Bibliographie . . . . .	264
<b>Index</b> . . . . .	267