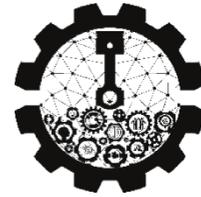


**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DEL'ENSEIGNEMENTS SUPERIEURET DELARECHERCHESCIENTIFIQUE**



**UNIVERSITE SAAD DAHLAB BLIDA 1**  
**FACULTE DE TECHNOLOGIE**  
**DEPARTEMENT DE MECANIQUE**

Projet de Fin d'Etudes  
Pour l'obtention du Diplôme de Master en  
Fabrication Mécanique

Thème :

**Torsion axisymétrique d'une bicouche élastique  
avec une inclusion circulaire à l'interface**

**Proposé et encadré par**

- Mr.MADANI Fateh

**Réalisé par:**

- BAHLOUL nassim

- DJERRAR mohamed

**Année universitaire 2023/2024**

# *Remerciements*

Nous tenons à remercier en premier lieu notre Dieu de nous avoir donné le courage et la patience dans la réalisation de notre travail jusqu'à sa fin.

Au terme de ce modeste travail nous tenons à remercier vivement :

Nos parents pour la confiance qu'ils nous ont accordé, leurs conseils, leurs soutiens, et pour tous les efforts qu'ils ont fournis pour nous durant notre parcours.

Notre encadreur Mr MADANI Fateh pour son aide, son orientation, ses conseils et sa disponibilité.

Comme, nous remercions également tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# *Dédicace*

*À ceux qui ont illuminé notre chemin et donné un sens à notre parcours,*

*Aujourd'hui, Nous prenons notre plume pour vous exprimer toute la profondeur de nos sentiments et la gratitude qui emplit notre cœur.*

*À nos professeurs, guides bienveillants qui ont su éveiller notre curiosité et nourrir nos esprits, Nous vous remercions pour ces précieuses connaissances transmises avec passion et dévouement. Votre patience et vos encouragements ont été des piliers essentiels dans notre réussite.*

*À nos chers camarades de classe, compagnons de galère et de joie, c'est ensemble que nous avons affronté les défis, partagé les rires et essuyé les larmes. Votre amitié et votre soutien inconditionnel resteront à jamais gravés dans notre mémoire.*

*À mes parents Ali et Kelthoum , à mes frères Majid et Abd el rahman et ma sœur, à mes amis, vous avez été mes anges gardiens, mes remparts face à l'adversité, mes sources inépuisables d'amour et de réconfort. Vos sacrifices et votre soutien indéfectible ont été les fondations sur lesquelles j'ai pu bâtir mon avenir.*

*(Bahloul Nassim)*

*À ma grand grand mère Bakhta mon premier amour, mes parents Lorabi et Gania les lunes de ma vie, à mes frères Abdelbasset, Abdelmalek et Fethi, à mon professeur de lycée Mr boualem Benamer.*

*(Djerrar Mohamed)*

*À Benhamadi Lina et Bennai Meriem,*

*Merci pour vos précieux conseils et votre soutien inconditionnel qui ont été des moteurs de réussite.*

*À tous ceux qui ont croisé notre chemin, nous ont encouragé, inspiré, aidé, on vous dédie ce modeste ouvrage en tant que témoignage de notre reconnaissance et de notre admiration.*

*Avec toute l'émotion qui nous habite, je vous adresse nos plus sincères remerciements.*

*Avec un amour infini,*

*Bahloul Nassim, Djerrar mohamed*

## **Résumé**

Dans cette étude, nous examinons le problème de la torsion axisymétrique d'une bicouche élastique comportant une inclusion circulaire à l'interface. La bicouche est prise en sandwich entre deux demi-espaces élastiques, avec deux disques situés symétriquement par rapport aux interfaces entre les deux milieux. Le problème des conditions limites mixtes est transformé à l'aide de la transformation intégrale de Hankel en une équation intégrale duale, qui est ensuite réduite à une équation intégrale de Fredholm du deuxième type. Des méthodes numériques sont employées pour convertir le système résultant en un ensemble d'équations algébriques infinies. Nous calculons et présentons numériquement certaines grandeurs physiques telles que le facteur d'intensité de contrainte et le moment en fonction de paramètres pertinents. Nos résultats numériques montrent que les discontinuités autour des disques et de l'inclusion entraînent une forte augmentation des contraintes, qui décroissent avec l'éloignement du disque chargé.

De plus, nous observons la dépendance du facteur d'intensité de contrainte par rapport à la taille du disque, à la distance entre le disque interfaciale et le disque, ainsi qu'au paramètre de cisaillement.

### **Mots clés :**

Torsion axisymétrique, équation intégrale duale, équation intégrale de Fredholm, facteur d'intensité de contrainte, bicouche élastique.

## **Abstract**

In this study, we examine the axisymmetric torsion problem of an elastic bilayer with a circular inclusion at the interface. The bilayer is sandwiched between two elastic half spaces, with two discs located symmetrically to the interfaces between the two media. The problem of mixed boundary conditions is transformed using the Hankel integral transformation into a dual integral equation, which is then reduced to a second type Fredholm integral equation. Numerical methods are used to convert the resulting system into a set of infinite algebraic equations. We compute and numerically present some physical quantities such as the stress intensity factor and the moment according to relevant parameters. Our numerical results show that the discontinuities around the disks and the inclusion lead to a strong increase of the constraints, which decrease with the distance of the loaded disk.

In addition, we observe the dependence of the stress intensity factor on the disk size, the distance between the interfacial disk and the disk, and the shear parameter.

### **Keywords:**

Axisymmetric torsion, dual integral equation, Fredholm integral equation, stress intensity factor, elastic bilayer.

## ملخص

في هذه الدراسة، نبحث مشكلة الالتواء المحوري للطبقة الثنائية المرنة في هذه الدراسة، نقوم بفحص مشكلة الالتواء المحورية لطبقة ثنائية مرنة مع تضمين دائري في الواجهة. الطبقة الثنائية محصورة بين مساحتين نصف مرنة، مع قرصين موجودين بشكل متماثل مع الواجهات بين الوسياتين. يتم تحويل مشكلة ظروف الحدود المختلطة باستخدام تحويل هانكل المتكامل إلى معادلة ثنائية التكامل، والتي يتم اختزالها بعد ذلك إلى معادلة تكامل من النوع الثاني لفريدهولم. تستخدم الطرق العددية لتحويل النظام الناتج إلى مجموعة من المعادلات الجبرية اللانهائية. نحن نحسب ونقدم عددًا بعض الكميات الفيزيائية مثل عامل شدة الإجهاد واللحظة وفقًا للمعايير ذات الصلة. تظهر نتائجنا العددية أن الانقطاعات حول الأقرص والتضمين تؤدي إلى زيادة قوية في القيود، والتي تتخفف مع مسافة القرص المحمل.

بالإضافة إلى ذلك، نلاحظ اعتماد عامل شدة الإجهاد على حجم القرص، والمسافة بين القرص البيني والقرص، ومعامل القص.

**الكلمات الرئيسية:** الدوران المحوري، المعادلة المتكاملة المزدوجة، المعادلة المتكاملة الفريدة، عامل كثافة الإجهاد، الطبقة المزدوجة المرنة.

# Table des matières

Introduction générale.....	1
<b>Chapitre I : Analyse d'une Torsion Axisymétrique .....</b>	<b>2</b>
<b>I.1. Introduction.....</b>	<b>5</b>
<b>I.2. Les Caractéristiques de la Bicouche Élastique : .....</b>	<b>5</b>
I.2.1 Deux Couches de Matériaux : .....	5
<b>I.3. Propriétés Élastiques d'une bicouche élastique :.....</b>	<b>7</b>
I.3.1. L'acier de construction : .....	7
I.3.2. Fonte grise : .....	9
<b>I.4. -Adhérence entre les Couches :(liaison fixe) .....</b>	<b>11</b>
I.4.1 Importance de l'adhérence entre les couches : liaison fixe entre les deux couches .....	11
I.4.2 Transmission efficace des contraintes et des déformations :.....	11
<b>I.5. les secteurs et contextes spécifiques où ce problème se manifeste : :.....</b>	<b>11</b>
I.5.1. Les principales causes de la torsion axisymétrique dans une bicouche élastique : .....	15
<b>I.6. Conclusion : .....</b>	<b>19</b>
<b>Chapitre II : Rappels sur l'élasticité.....</b>	<b>20</b>
<b>II.1. Introduction .....</b>	<b>21</b>
<b>II.2. Quelques définitions : .....</b>	<b>21</b>
III.2.1 L'élasticité classique.....	21
II.2.2 Elasticité axisymétrique .....	21
II.2.3 Les concepts généraux de l'élasticité.....	21
<b>II.3. Les modules élastiques : .....</b>	<b>22</b>
II.3.1- Module d'Young.....	22
II.3.2- Coefficient de Poisson .....	23
II.3.3- Module de Coulomb .....	23
<b>II.4. Les équations de l'élasticité :.....</b>	<b>23</b>
II.4.1 Loi de comportement - Loi de Hooke.....	23

II.4.2 Équations supplémentaires .....	24
<b>II.4. Phénomène de la rupture .....</b>	<b>24</b>
II.4.1 Critères de limite élastique .....	25
II.4.2 La rupture fragile .....	25
II.4.3 La rupture ductile .....	26
II.4.4 Définition d'une fissure .....	26
<b>II.5. Conclusion .....</b>	<b>28</b>
<b>Chapitre III : Rappels mathématiques .....</b>	<b>29</b>
<b>III.1 Introduction : .....</b>	<b>30</b>
<b>III.2 Equations intégrales : .....</b>	<b>30</b>
III.2.1 Equation de Fredholm : .....	30
III.2.2 Equations de Volterra : .....	31
III.2.3 Equation d'intégrale d'Abel : .....	32
III.2.4 Équation de Bessel : .....	32
III.2.5 Transformé de Hankel : .....	36
<b>III.3. Méthodes d'intégration numériques : .....</b>	<b>36</b>
III.3.1. Méthode des trapèzes : .....	37
III.3.2. Méthode de Simpson : .....	37
<b>III.4. Conclusion : .....</b>	<b>38</b>
<b>Chapitre 04 : La Partie Analytique .....</b>	<b>39</b>
<b>IV.1. Introduction : .....</b>	<b>40</b>
<b>IV.2. Équations de base du problème .....</b>	<b>40</b>
IV.2.1. Conditions de limites et de continuités .....	41
<b>IV.3. Réduction des équations intégrales duales .....</b>	<b>42</b>
<b>IV.4. Résultats numériques et discussion .....</b>	<b>45</b>
IV.4.1. Facteur d'intensité de contrainte .....	46
<b>IV.5. Résultats de Simulation de problème : .....</b>	<b>51</b>
IV.5.1. Simulation sur l'ansys (mechanical apdl) : .....	51



# Liste des figures

<b>Figure 1</b> : Problème de Florence, 1961.....	2
<b>Figure 2</b> : Problème de Pak et Saphores, 1991 .....	2
<b>Figure 3</b> : problème de la torsion axisymétrique entre deux disk ( Déplacement ).....	3
<b>Figure 4</b> : exprimer une bicouche élastique de deux couches (Deux matière différente) .....	5
<b>Figure 5</b> : exprimé la couche externe d'une bicouche élastique de demi espace (milieux continue) .....	6
<b>Figure 6</b> : exprimé la couche interne d'une bicouche élastique (disque) .....	7
<b>Figure 7</b> : exprimé les composantes d'un disque d'embrayage .....	12
<b>Figure 8</b> : les composantes d'un moteur d'avion .....	12
<b>Figure 9</b> : le disque d'une turbine.....	13
<b>Figure 10</b> : les composantes d'une poteaux de fondation.....	13
<b>Figure 11</b> : arbre de transmission d'un voiture .....	14
<b>Figure 12</b> : les composantes d'un compresseur centrifuge .....	14
<b>Figure 13</b> : les composantes d'un générateur.....	15
<b>Figure 14</b> : Présenté la déclaration Aciers de constructions en work benche( ansys).....	17
<b>Figure 15</b> : Présenté la déclaration de La fonte grise en work benche (ansys) .....	18
<b>Figure 16</b> : Géométrie de la variation des contrainte sur la bicouche élastique.....	22
<b>Figure 17</b> : Tenseur des contraintes.....	22
<b>Figure 18</b> : Diagramme déformation contrainte.....	25
<b>Figure 19</b> : Les différents modes de fissure .....	27
<b>Figure 20</b> : Graphe de la fonction de Bessel de première espèce dans Matlab.....	33
<b>Figure 21</b> : Graphe de la fonction de Bessel de deuxième espèce .....	34
<b>Figure 22</b> : Graphe exprimé l'intersection des deux fonctions de bissel.....	35
<b>Figure 23</b> : Dessin explicatif sur la méthode de trapèze .....	37
<b>Figure 24</b> : Dessin explicatif sur la méthode de Simpson .....	38
<b>Figure 25</b> : Géométrie et coordonnées de système.....	41
<b>Figure 26</b> : la variation du facteur d'intensité des contraintes normalisé au bord de l'inclusion interfaciale rigide en fonction de $c$ .....	48
<b>Figure 27</b> : la variation du facteur d'intensité des contraintes normalisé au bord de l'inclusion interfaciale rigide en fonction de $\gamma$ .....	49
<b>Figure 28</b> : la variation du facteur d'intensité des contraintes normalisé au bord de l'inclusion chargée rigide en fonction de $c$ .....	49
<b>Figure 29</b> : la variation du facteur d'intensité des contraintes normalisé au bord de l'inclusion chargée rigide en fonction de $\gamma$ .....	50

<b>Figure 30:</b> Champ de déplacement .....	51
<b>Figure 31:</b> Variation du contrainte (VAN MISES) .....	51
<b>Figure 32:</b> Facteurs d'intensité du contrainte kIII .....	52
<b>Figure 33:</b> Bicouche élastique .....	52
<b>Figure 34:</b> déclaration de maillage de cette bicouche élastique .....	53
<b>Figure 35:</b> Champ de déplacement .....	53
<b>Figure 36:</b> Contrainte de cisaillemnt au niveau de disc .....	54
<b>Figure 37:</b> interface de la création d'un projet .....	57
<b>Figure 38:</b> exprimé l'option Shell de deux matériaux différent .....	57
<b>Figure 39:</b> exprimé la déclaration de module d'élasticité et coefficient de poisson de première matières (aciers de construction) .....	58
<b>Figure 40:</b> Déclaration du deuxième matériau .....	58
<b>Figure 41:</b> Déclaration de module d'élasticité et coefficient de poisson de deuxième matériau (fonte grise) .....	59
<b>Figure 42:</b> déclarations d'ID de matière de l'acier de constructions .....	59
<b>Figure 43:</b> déclaration d'ID de la matière de la fonte grise .....	60
<b>Figure 44:</b> exprimé les coordonnée de notre rectangle .....	60
<b>Figure 45:</b> exprimé le rectangle et les coordonné de 1 ère disc .....	61
<b>Figure 46:</b> expiré notre Corp. et les coordonnée du deuxième disc .....	61
<b>Figure 47:</b> exprimé deux disc symétrique dans un rectangle. Un disc à l'intérieur et un disc à l'extérieur de ce rectangle .....	62
<b>Figure 48:</b> enlèvement de deuxième disc de l'intérieur de ce rectangle .....	62
<b>Figure 49:</b> Module de ajouter le disc à l'intérieur de ce rectangle de même matière à l'extérieur .....	63
<b>Figure 50:</b> exprimé la fixation de deuxième disc à l'intérieur de rectangle .....	63
<b>Figure 51 :</b> Déclaration de la matière de rectangle (acier de construction) .....	64
<b>Figure 52:</b> Déclaration de la matière de les deux disc (fonte grise) .....	64
<b>Figure 53:</b> exprimé le mech de rectangle et de les deux disc ensemble .....	65
<b>Figure 54:</b> fixation de rectangle et rotation de première disc sur l'axe Y .....	66
<b>Figure 55:</b> exprimé la partie de solution de déplacement .....	66
<b>Figure 56:</b> le champ de déplacement du premier disc sur le rectangle et sur le deuxième disc .....	67
<b>Figure 57:</b> exprimé la somme des vecteurs des déplacements .....	67
<b>Figure 58:</b> exprimé la variation des contraintes (Von mises stress) .....	68
<b>Figure 59:</b> exprimé le facteur d'intensité au niveau de deuxième disc. ....	68
<b>Figure 60:</b> exprimé le graphe de déplacement du premier disc sur le rectangle et le deuxième disc. ....	69
<b>Figure 61 :</b> les étapes qui permet à nous de dessiné le graphe de contrainte. ....	69

**Figure 62:** exprimé le graphe qui exprimes la variation des contraintes .....70

# **Introduction générale**

## **Introduction générale**

La torsion axisymétrique des structures élastiques est un domaine d'étude fondamental en mécanique, offrant un aperçu précieux sur le comportement des matériaux composites complexes. Lorsque nous considérons une bicouche élastique, composé de deux matériaux distincts et une inclusion circulaire à leur interface. Cette configuration non seulement met en lumière les interactions entre les différentes couches, mais également l'effet singulier de l'inclusion sur la distribution des contraintes et des déformations.

L'étude de la torsion axisymétrique, en tant que méthode de chargement, permet une analyse approfondie des déformations et des contraintes induites dans ces systèmes complexes. Dans ce contexte, l'ajout d'une inclusion circulaire à l'interface des couches apporte une dimension supplémentaire, où les effets de bord et les interactions matérielles jouent un rôle crucial.

L'objectif de cette étude est d'analyser le comportement mécanique d'une bicouche élastique soumis à une torsion axisymétrique, en tenant compte de la présence d'une inclusion circulaire à l'interface. Nous cherchons à comprendre comment cette inclusion modifie la répartition des contraintes et des déformations dans les deux couches, ainsi que les interactions complexes qui se produisent à l'interface. Le problème de la torsion des milieux élastiques apparaît dans différents domaines d'ingénierie. Dans ce cas, plusieurs travaux ont été réalisés. Généralement, Le problème de la distorsion d'un milieu infiniment élastique par inclusions (profondeur Considéré par *Selvadurai* [1,2]. Les résultats sont basés sur la dureté rotationnelle et traduction des disques intégrés.

*Pak et Saphores* [3] ont étudié le problème de torsion axisymétrique Disque adhésif rigide avec demi-espace élastique. En outre, Par ailleurs *Bacci et Bennati* [4] ont considéré la torsion du disque rigide circulaire adhérent à la surface La partie supérieure de la couche élastique est fixée sur un support indéformable.

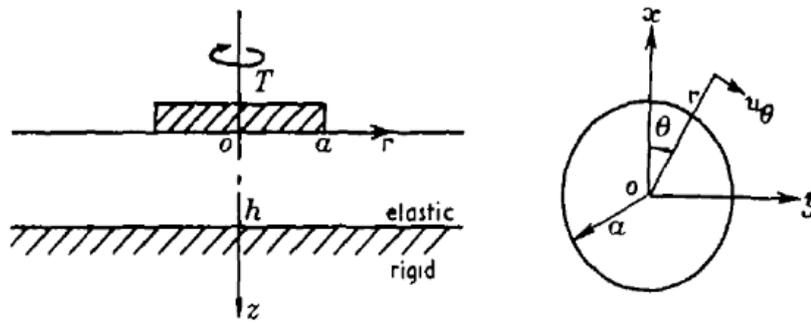
La méthode de la transformation intégrale de Hankel a été employée dans les travaux précédents. Il est possible de réduire ces problèmes aux conditions limites mixtes à un système d'équations intégrales duales. Cela renvoie également les problèmes analysés aux équations intégrales de Fredholm. La méthode itérative des séries entières permet généralement d'obtenir des solutions approximatives pour ces dernières équations.

Cette investigation revêt une importance significative dans divers domaines, notamment dans la conception de matériaux composites avancés, où la maîtrise des contraintes et des déformations est essentielle pour garantir des performances optimales. En explorant les réponses mécaniques de ce système, nous espérons contribuer à une meilleure compréhension de la torsion axisymétrique des

bicouches élastiques, ouvrant ainsi la voie à des applications plus efficaces et durables dans divers secteurs industriels.

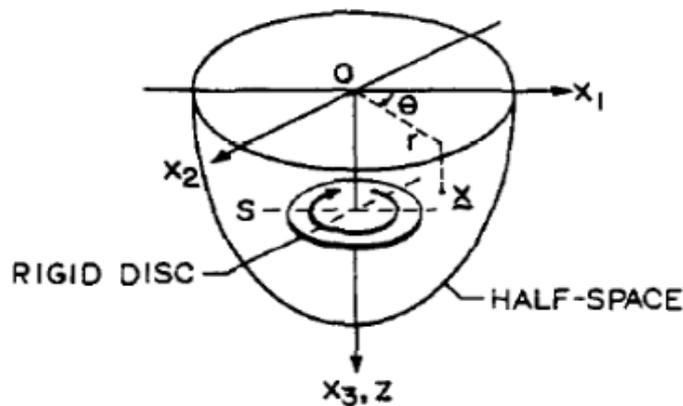
Dans cette perspective, cette étude s'articule autour d'une analyse théorique approfondie, soutenue par des simulations numériques, visant à élucider les mécanismes sous-jacents de la torsion axisymétrique dans ce système complexe. Les résultats obtenus offriront des perspectives précieuses pour l'optimisation et la conception de structures composites plus performantes et résilientes. Pour avoir une meilleure idée sur le problème étudié, nous préférons donner quelques descriptions de quelques travaux déjà publiés et qu'ils ont une certaine similarité avec notre étude :

Florence [6] dans son étude, s'est intéressé à une solution analytique de la répartition des contraintes, dues à la torsion d'un disque rigide d'une couche élastique épaisse, encastrée à une fondation rigide. Le disque est fixé sur la surface libre de la couche. Dans l'analyse qui relève de la théorie classique d'élasticité linéaire, le problème est ramené à un système d'équations intégrales duales. La solution du système est évaluée en utilisant la méthode de Cooke.



*Figure 1 : Problème de Florence, 1961.*

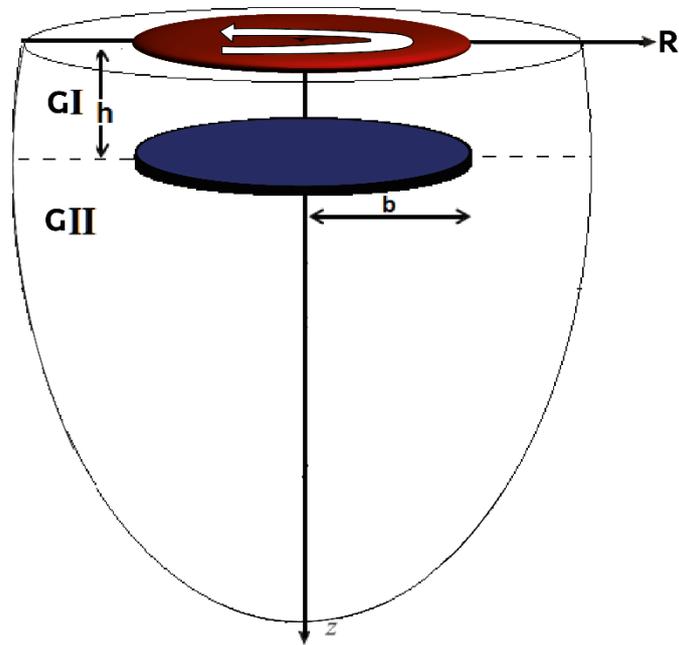
Le problème élastostatique de la torsion axisymétrique d'un disque rigide noyé dans un demi-espace élastique a été considéré par Pak et Saphores [5].



*Figure 2: Problème de Pak et Saphores, 1991*

Notre problème de la torsion axisymétrique d'une bicouche élastique comportant une inclusion

circulaire à l'interface. La bicouche est prise en sandwich entre deux demi-espaces élastiques similaires, avec deux disques en forme de "V" situés symétriquement par rapport aux interfaces entre les deux milieux. [ *Figure 3* ]



*Figure 3 : problème de la torsion axisymétrique entre deux disques ( Déplacement )*

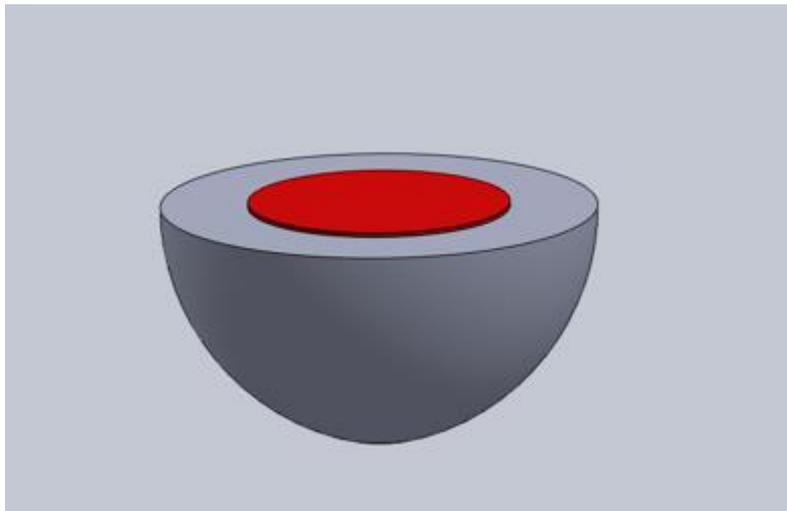
# **Chapitre I**

**Analyse d'une Torsion Axisymétrique dans  
un Bicouche Élastique avec Inclusion circulaire à l'Interface**

## **I.1.Introduction**

La torsion axisymétrique dans une bicouche élastique avec inclusion à l'interface est un phénomène complexe qui se produit dans de nombreux matériaux composites et structures multicouches. Cette analyse vise à étudier en profondeur les causes, les matériaux concernés, les inconvénients associés, et les méthodes de résolution de ce problème. Comprendre ces aspects est crucial pour améliorer la conception et la performance des structures élastiques dans divers domaines tels que l'ingénierie civile, l'aérospatiale et la mécanique des matériaux.

Une bicouche élastique est une structure composée de deux couches de matériaux élastiques distincts superposées l'une sur l'autre. Cette configuration est souvent utilisée dans diverses applications pour exploiter les propriétés combinées des deux matériaux et pour répondre à des besoins spécifiques en termes de performances mécaniques, de résistance, de flexibilité, ou d'autres caractéristiques requises.



**Figure 4 :** exprimer une bicouche élastique de deux couches (Deux matière différente)

## **I.2 Les Caractéristiques de la Bicouche Élastique :**

### **I.2.1 Deux Couches de Matériaux :**

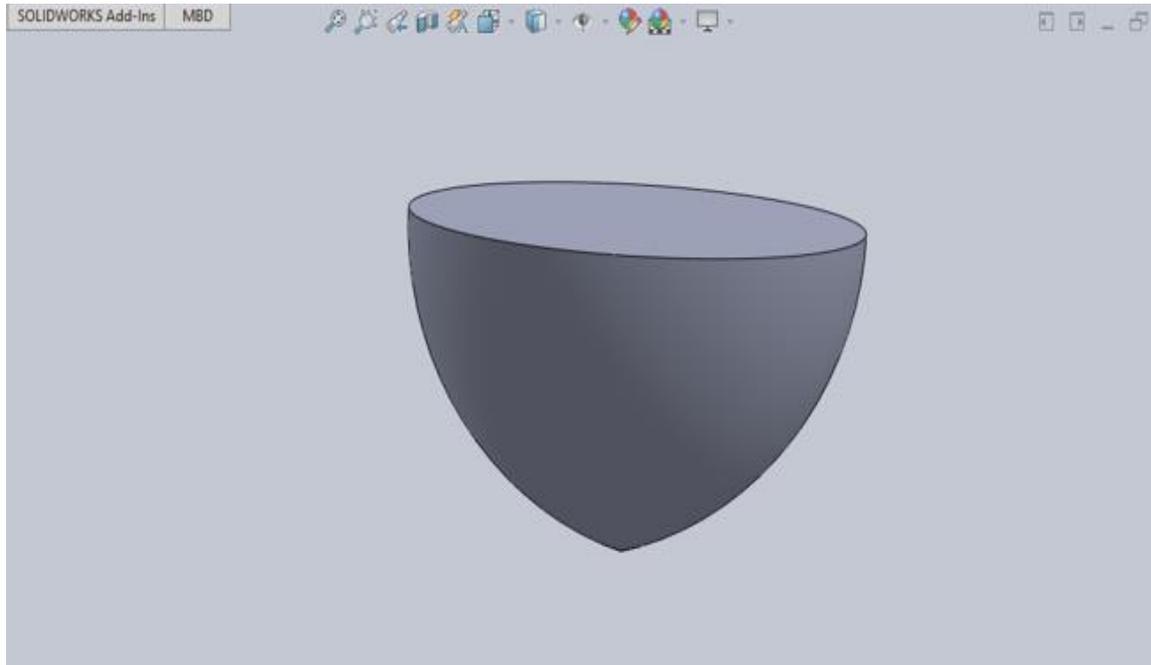
Une bicouche élastique est composée de deux couches de matériaux distincts, chacune ayant ses Propres propriétés élastiques et ces deux couches sont :

#### **a-Couche externe :**

La couche externe d'une bicouche élastique est généralement conçue pour fournir des propriétés spécifiques en termes de résistance à l'usure, à l'abrasion et à d'autres agressions externes. . Elle est

## *Chapitre 1 : Analyse d'une Torsion Axisymétrique dans un Bicouche Élastique avec Inclusion circulaire à l'Interface*

souvent composée de matériaux plus durs et résistants, tels que des aciers des constructions, fonte grise. des caoutchoucs spéciaux ou même des mélanges de matériaux composites extr..... .Cette couche est en contact direct avec l'environnement extérieur et doit donc être capable de résister aux contraintes mécaniques, aux variations de température, à l'humidité, aux produits chimiques



**Figure 5 :** exprimé la couche externe d'une bicouche élastique de demi espace (milieu continue)

### **b-Couche interne (disque) :**

La couche interne d'une bicouche élastique est souvent conçue pour fournir des propriétés d'élasticité, de flexibilité et de résilience. Elle est généralement composée de matériaux plus souples et élastiques, tels que des caoutchoucs naturels ou synthétiques, des élastomères, ou d'autres polymères qui peuvent se déformer sous contrainte. Cette couche a pour fonction de permettre à la bicouche dans son ensemble de se déformer, de s'adapter aux irrégularités de surface, aux chocs et aux vibrations, offrant ainsi une conduite plus confortable et une meilleure absorption des chocs. Dans un pneu, cette couche interne est celle qui aide à absorber les chocs des obstacles sur la route, à maintenir l'adhérence du pneu et à fournir une conduite plus silencieuse et plus confortable.



**Figure 6 :** exprimé la couche interne d'une bicouche élastique (disque)

### **I.3. Propriétés Élastiques d'une bicouche élastique :**

Les matériaux utilisés dans une bicouche élastique sont généralement choisis pour leurs propriétés élastiques, ce qui signifie qu'ils peuvent subir une déformation réversible sous l'effet d'une contrainte externe et revenir à leur forme initiale une fois que la contrainte est relâchée. Les matériaux élastiques utilisés dans la fabrication de bicouches élastiques artificielles en mécanique peuvent différer de ceux utilisés dans les membranes biologiques. En mécanique et dans le domaine des matériaux, on utilise souvent des matériaux synthétiques pour créer des bicouches élastiques avec des propriétés spécifiques.

Et les matériaux élastiques mécaniquement couramment utilisés dans la fabrication de bicouches élastiques sont :

#### **I.3.1. L'acier de construction :**

L'acier de construction est largement utilisé dans l'industrie du génie civil en raison de ses nombreuses qualités remarquables. Ses avantages sont divers, notamment sa robustesse, sa malléabilité et sa durabilité. Voici un aperçu des avantages, des inconvénients, ainsi que des propriétés de densité et de rigidité de ce matériau crucial :

##### **I.3.1.1. Avantages de l'acier de construction :**

**-Résistance élevée :** L'acier est célèbre pour sa résistance exceptionnelle, ce qui en fait un matériau idéal pour supporter des charges importantes dans les structures de grande envergure comme les gratte-ciel et les ponts.

**-Malléabilité :** Il peut être transformé et façonné de diverses manières sans perdre sa résistance, permettant une grande flexibilité dans la conception architecturale.

**-Durabilité** : L'acier est durable et peut résister aux éléments naturels comme la corrosion grâce à des traitements de revêtement appropriés.

Facilité de construction : Sa disponibilité, sa manipulabilité et sa facilité d'assemblage en font un choix privilégié pour des projets de construction rapide.

**-Recyclabilité** : L'acier est hautement recyclable, réduisant ainsi son empreinte carbone et ses coûts environnementaux tout au long de son cycle de vie.

**-Inconvénients de l'acier de construction :**

Sensibilité à la corrosion : Bien que l'acier soit durable, il peut être sujet à la corrosion s'il n'est pas correctement protégé, ce qui nécessite des stratégies de maintenance régulières.

**-Poids élevé** : Comparé à certains nouveaux matériaux comme les composites, l'acier a une densité relativement élevée, ce qui peut augmenter la charge totale sur les structures.

**-Coût initial** : Bien que largement utilisé, l'acier peut être plus coûteux à l'achat et à l'installation que d'autres matériaux alternatifs dans certaines applications spécifiques.

**-Propriétés de densité et de rigidité de l'acier de construction :**

-Densité : L'acier a une densité d'environ  $7850 \text{ kg/m}^3$  ( $7,85 \text{ g/cm}^3$ ), ce qui en fait un matériau relativement dense par rapport à certains alliages légers et aux composites.

-Rigidité : L'acier possède une rigidité élevée, caractérisée par un module de Young d'environ 200 GPa (giga pascals), ce qui lui permet de maintenir sa forme et de résister à la déformation sous des charges importantes.

**I.3.1.2. Domaine d'utilisation de l'acier de construction :**

L'acier de construction est largement utilisé dans de nombreux domaines du génie civil et de la construction en raison de ses propriétés mécaniques exceptionnelles et de sa polyvalence. Voici les principaux domaines d'utilisation de l'acier de construction :

**-Bâtiments et structures** : L'acier est couramment utilisé dans la construction de bâtiments commerciaux, industriels et résidentiels en raison de sa résistance élevée et de sa capacité à supporter des charges importantes. Il est utilisé pour les poutres, les colonnes, les charpentes métalliques, les planchers et les toitures.

**-Ponts** : L'acier est un matériau privilégié pour la construction de ponts en raison de sa capacité à supporter de grandes portées tout en étant relativement léger par rapport à d'autres matériaux comme le béton. Il est utilisé pour les tabliers, les poutres et les câbles de suspension.

**-Industrie maritime** : Dans l'industrie maritime, l'acier est utilisé pour la construction navale, y compris les navires commerciaux, les plateformes offshore et les structures portuaires en raison de

sa résistance à la corrosion et de sa durabilité.

**-Structures souterraines** : L'acier est utilisé dans la construction de tunnels, de métros et de conduites souterraines en raison de sa capacité à résister aux contraintes mécaniques et à supporter des charges dynamiques.

**-Équipements et machineries** : L'acier est utilisé pour la fabrication d'équipements industriels, de machineries lourdes, d'équipements de manutention et d'installations de traitement en raison de sa résistance et de sa fiabilité.

**-Structures temporaires et de secours** : L'acier est également utilisé pour les structures temporaires telles que les échafaudages, les tribunes temporaires pour événements sportifs et culturels, ainsi que pour les abris d'urgence en raison de sa facilité d'assemblage et de démontage.

**-Infrastructure de transport** : En plus des ponts, l'acier est utilisé dans la construction de voies ferrées, de barrières de sécurité routière, de pylônes pour lignes électriques et de structures pour téléphériques.

**-Installations industrielles** : L'acier est essentiel dans les installations industrielles telles que les usines, les centrales électriques, les raffineries et les installations de traitement chimique en raison de sa robustesse et de sa capacité à résister à des environnements corrosifs et à des températures élevées.

### **I.3.2. Fonte grise :**

La fonte grise est un matériau métallique connu pour sa structure micrographique particulière, caractérisée par la présence de graphite sous forme de lamelles dans une matrice de fer et de carbone. Ce matériau est largement utilisé dans l'industrie en raison de sa capacité à être moulé facilement, de sa bonne usinabilité et de ses propriétés spécifiques adaptées à diverses applications.

#### **I.3.2.1. Avantages de la fonte grise :**

**-Facilité de moulage** : La fonte grise est facile à mouler dans des formes complexes, ce qui la rend idéale pour la production de pièces moulées de grande taille et de formes variées.

**-Usinabilité** : Elle est relativement facile à usiner après moulage, ce qui facilite l'ajustement et l'assemblage des pièces.

**Absorption des vibrations** : La présence de graphite lamellaire confère à la fonte grise une bonne capacité à absorber les vibrations, ce qui en fait un choix populaire pour les pièces soumises à des charges dynamiques.

**-Coût** : Elle peut être moins coûteuse à produire par rapport à certains alliages métalliques plus complexes.

### **I.3.2.2. Inconvénients de la fonte grise :**

**-Fragilité à la traction :** La fonte grise a une résistance à la traction relativement faible par rapport à d'autres matériaux métalliques, ce qui limite son utilisation dans des applications nécessitant une grande résistance mécanique.

**-Sensibilité à la corrosion :** Bien que certaines fontes grises puissent être résistantes à la corrosion, elles peuvent être sujettes à la rouille dans des environnements humides ou corrosifs sans traitement de surface adéquat.

**-Poids élevé :** La densité de la fonte grise est relativement élevée, ce qui peut augmenter le poids des pièces fabriquées en comparaison avec des matériaux plus légers comme certains alliages d'aluminium.

### **I.3.2.3. Propriétés de densité et de rigidité de la fonte grise :**

**-Densité :** La densité de la fonte grise varie généralement entre 6,8 et 7,2 g/cm<sup>3</sup>, ce qui en fait un matériau relativement dense par rapport à certains métaux légers comme l'aluminium.

**-Rigidité :** La rigidité de la fonte grise est modérée, avec un module de Young typiquement compris entre 100 et 170 GPa, ce qui lui permet de maintenir sa forme et de résister à des charges modérées sans se déformer excessivement.

### **I.3.2.4. Domaine d'utilisation de ce matériau :**

**-Industrie automobile :** La fonte grise est largement utilisée dans l'industrie automobile pour la fabrication de blocs moteurs, de carters de transmission, de tambours de frein et d'autres composants critiques. Sa capacité à absorber les vibrations et sa bonne usinabilité en font un choix privilégié pour les applications où la précision et la résistance sont nécessaires.

**-Machines-outils et équipements industriels :** Elle est utilisée dans la construction de machines-outils, de presses, de cylindres hydrauliques et d'autres équipements industriels en raison de sa résistance aux contraintes mécaniques et de sa capacité à maintenir des tolérances précises après usinage.

**-Applications de plomberie et de drainage :** La fonte grise est utilisée pour la fabrication de tuyaux, de raccords et de pièces de drainage dans les systèmes de plomberie et de gestion des eaux usées en raison de sa résistance à la corrosion et de sa durabilité.

**-Construction et génie civil :** Elle est utilisée dans certains types de structures de génie civil, comme les regards et les grilles d'égout, en raison de sa résistance aux charges lourdes et de sa capacité à résister aux environnements extérieurs difficiles.

**-Applications architecturales :** Elle peut être utilisée dans des applications architecturales telles

que des lampadaires, des grilles décoratives et des éléments de façade en raison de sa capacité à être moulée dans des formes complexes et à maintenir une finition esthétique.

#### **I.4. -Adhérence entre les Couches :(liaison fixe)**

Il est essentiel que les deux couches de la bicouche soient bien liées ensemble pour assurer une transmission efficace des contraintes et des déformations entre les couches.

##### **I.4.1 Importance de l'adhérence entre les couches : liaison fixe entre les deux couches**

L'adhérence entre les couches dans une bicouche élastique est un aspect crucial pour assurer le bon fonctionnement et la durabilité de la structure. Cette adhérence se réfère à la capacité des deux couches, généralement une couche de revêtement et une couche de base, à rester solidement liées l'une à l'autre. Voici une explication détaillée sur l'importance de cette adhérence et ses applications

##### **I.4.2 Transmission efficace des contraintes et des déformations :**

Lorsque des charges sont appliquées sur la surface de la bicouche, que ce soit par le trafic routier, les variations de température ou d'autres forces externes, ces charges doivent être réparties uniformément sur les deux couches. Une bonne adhérence permet une transmission efficace de ces contraintes entre les couches.

Les déformations qui se produisent dans la couche de surface doivent être transmises à la couche inférieure pour éviter des fissures ou des dégradations localisées. Une adhérence faible peut entraîner des décollements, des déformations non uniformes et une dégradation prématurée de la structure.

##### **a-Amélioration de la résistance structurelle :**

Une adhérence adéquate garantit que la structure agit comme un tout cohérent plutôt que comme deux couches distinctes. Cela contribue à renforcer la résistance globale de la bicouche contre les charges de fatigue et les contraintes.

##### **b- Résistance aux infiltrations d'eau :**

L'adhérence entre les couches aide à réduire les risques d'infiltration d'eau entre celles-ci. Une bonne adhérence empêche l'eau de s'infiltrer et de causer des dommages à la couche inférieure, notamment en gelant et en provoquant des dégradations par cycles de gel-dégel

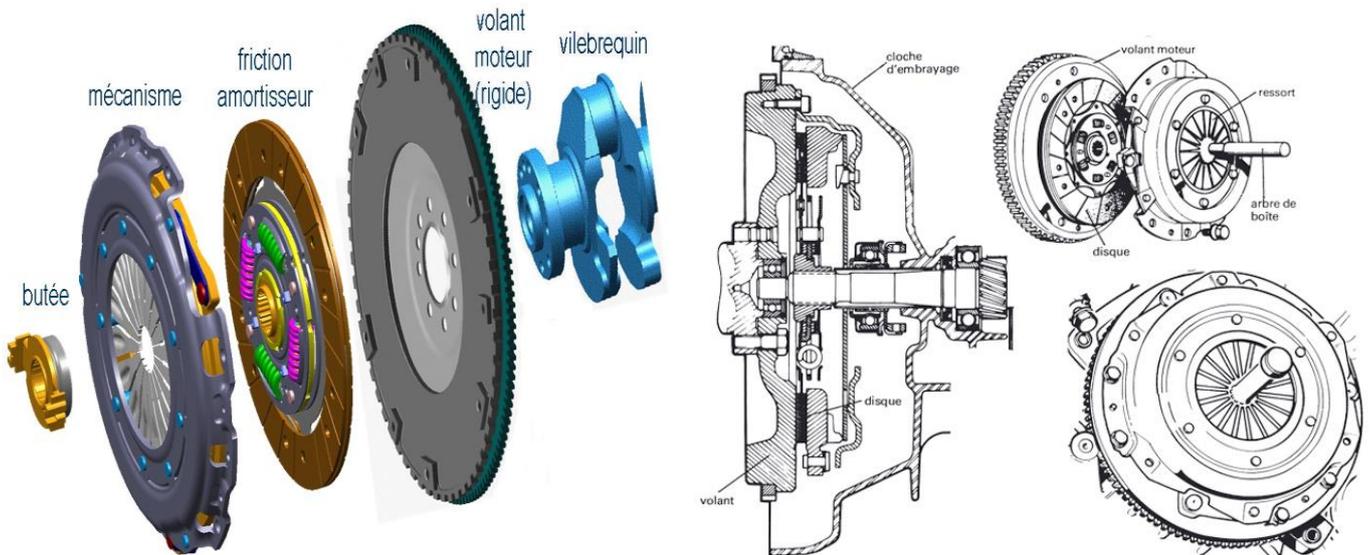
##### **c- Durabilité et longévité de la structure :**

Une adhérence insuffisante peut entraîner un décollement prématuré de la couche de surface, nécessitant des réparations coûteuses et répétées. En assurant une bonne adhérence, la structure peut maintenir son intégrité et sa fonctionnalité sur une plus longue période.

#### **I.5. les secteurs et contextes spécifiques où ce problème se manifeste :**

**-Disques d'embrayage :**

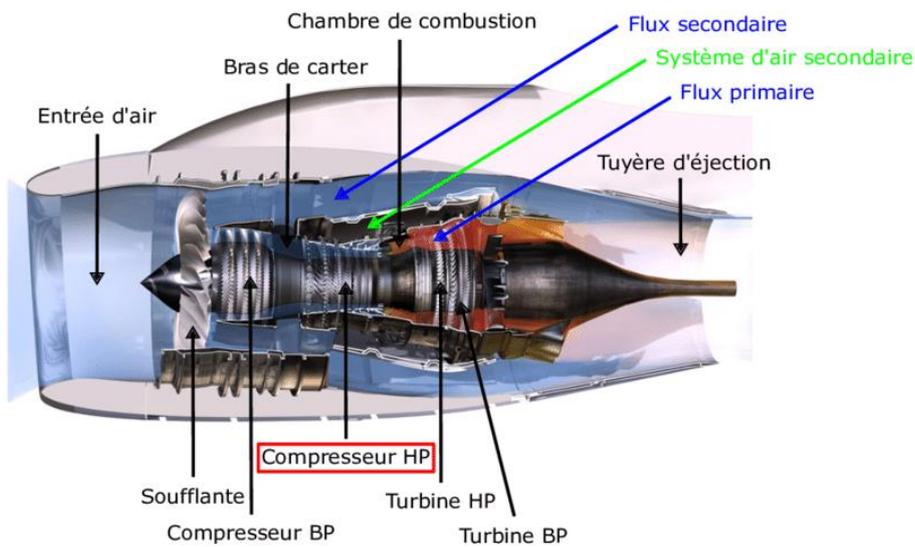
Dans les systèmes de transmission de véhicules, les disques d'embrayage doivent supporter des charges de torsion importantes. L'étude de la torsion axisymétrique permet de mieux comprendre les déformations et les contraintes qui apparaissent dans ces composants lorsqu'ils sont soumis à des couples moteurs.



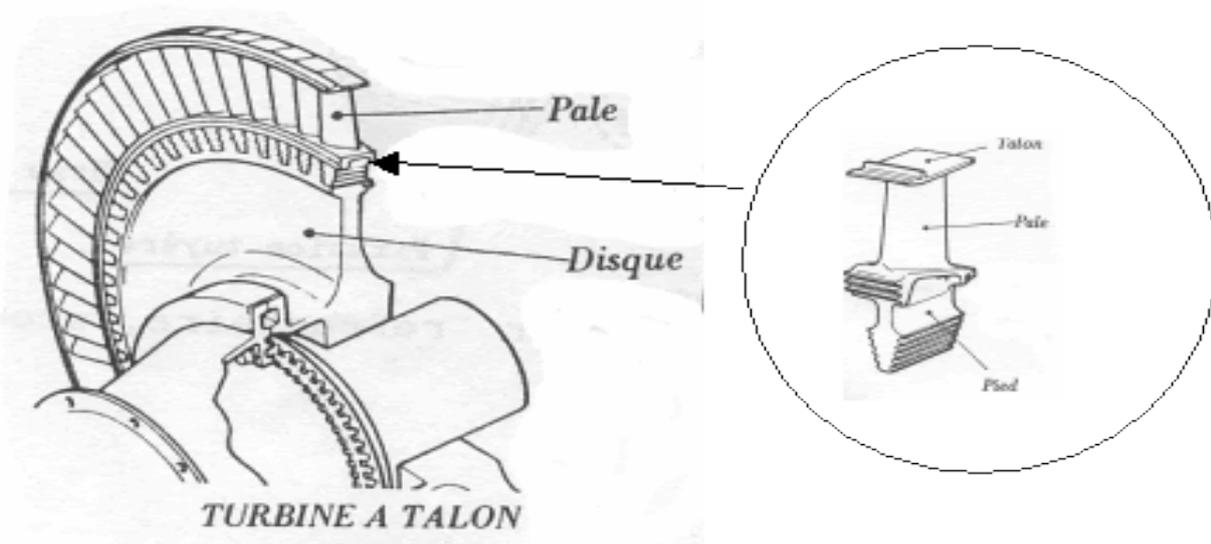
**Figure 7 :** exprimé les composantes d'un disque d'embrayage

**-Turbines à gaz :**

Les disques de turbines à gaz, qui sont des composants critiques dans les moteurs d'avions et les centrales électriques, subissent des charges de torsion importantes en raison des forces aérodynamiques et des variations de température. Une analyse de la torsion axisymétrique est essentielle pour garantir la fiabilité et la performance de ces composants.



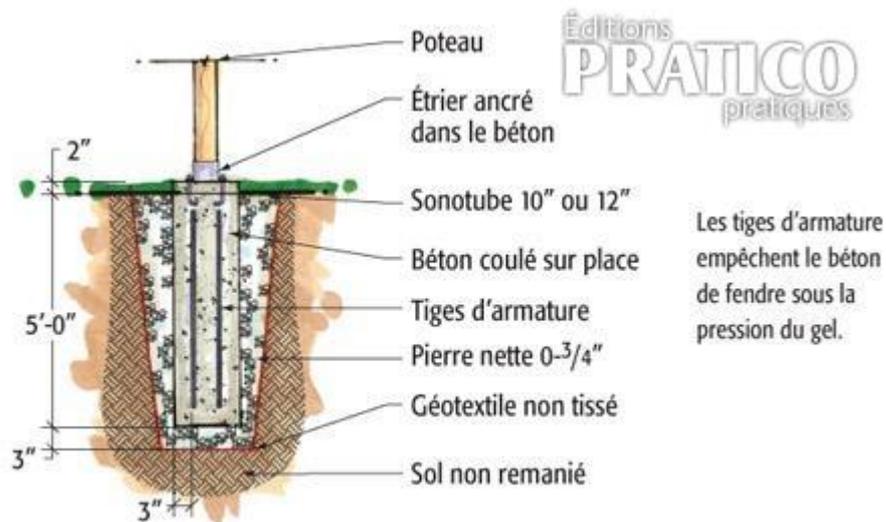
**Figure 8 :** les composantes d'un moteur d'avion



**Figure 9 :** le disque d'une turbine

**-Poteaux de Fondation :**

Les poteaux utilisés pour les fondations des bâtiments et des ponts peuvent subir des charges de torsion en raison de mouvements de terrain ou de forces latérales appliquées par le vent ou les séismes. Analyser la torsion axisymétrique permet de mieux comprendre la distribution des contraintes et de concevoir des fondations plus résistantes.



**Figure 10 :** les composantes d'une poteaux de fondation

**-Arbres de Transmission :**

Les arbres de transmission, qui transfèrent la puissance du moteur aux roues ou à d'autres composants mécaniques, subissent des forces de torsion importantes. L'utilisation de matériaux

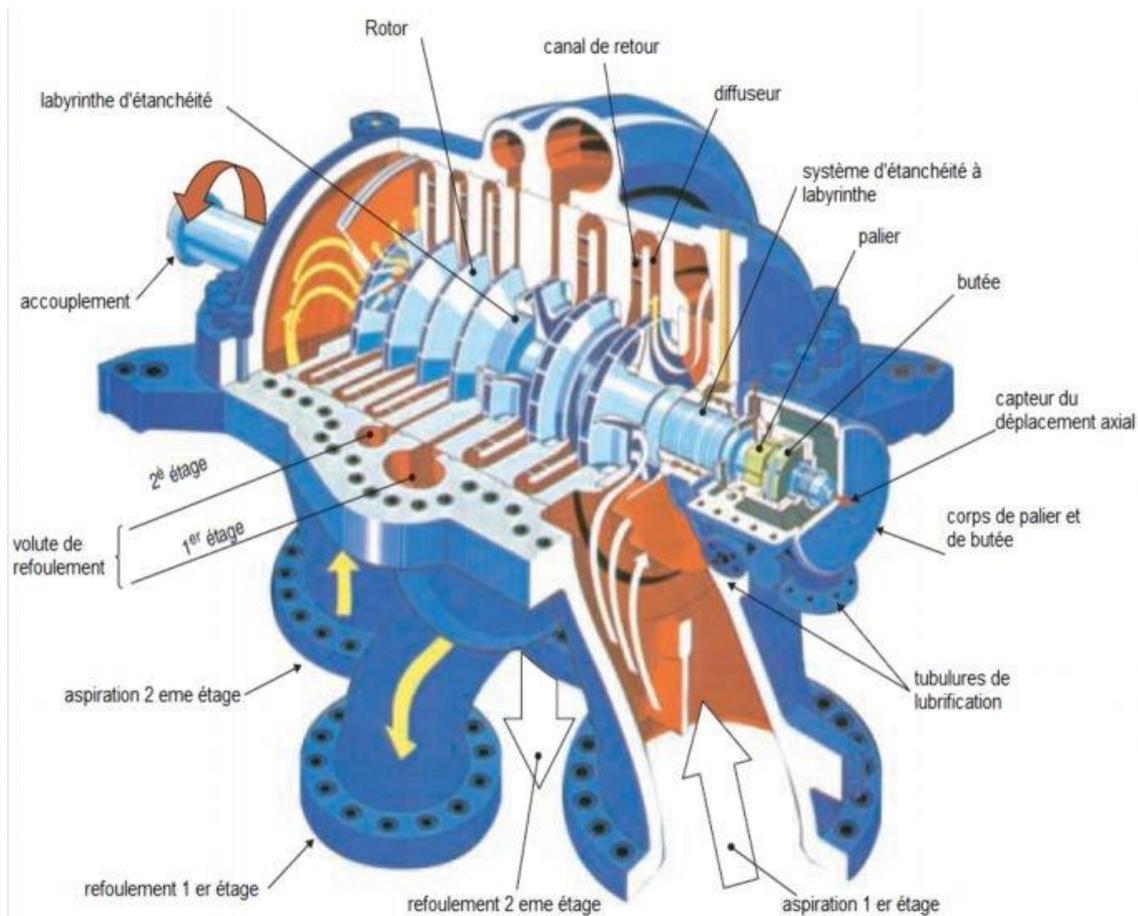
bicouches peut améliorer la résistance à la torsion et la durabilité de ces arbres.



**Figure 11** : arbre de transmission d'un voiture

**-Compresseurs Centrifuges et Axiaux :**

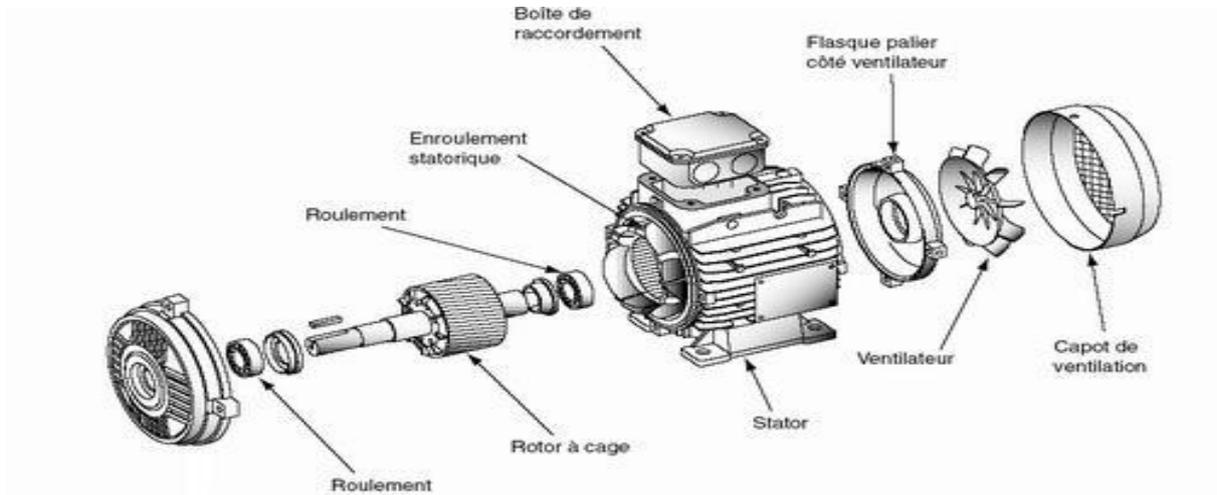
Utilisés dans les industries pétrolières, gazières et chimiques, les arbres de compresseurs sont soumis à des torsions considérables. L'analyse de la torsion dans les bicouches élastiques aide à concevoir des arbres plus résistants et durables.



**Figure 12** : les composantes d'un compresseur centrifuge

**-Moteurs et Générateurs :**

Les rotors des moteurs électriques et des générateurs subissent des forces de torsion en raison de l'interaction électromagnétique. Une analyse détaillée de la torsion axisymétrique dans les rotors bicouches permet d'améliorer l'efficacité et la fiabilité des machines électriques.



**Figure 13 :** les composantes d'un générateur

**I.5.1. Les principales causes de la torsion axisymétrique dans une bicouche élastique :**

**-Charges Externes Asymétriques :**

Description : L'application de forces ou de couples asymétriques peut induire une torsion dans un composant. Ces charges externes peuvent être des forces tangentielles ou des moments appliqués sur des points spécifiques de la structure.

Exemple : Un arbre de transmission soumis à un couple à une extrémité.

**- Incompatibilité des Déformations :**

Description : Les composants constitués de matériaux avec des propriétés élastiques différentes (comme des bicouches) peuvent subir des déformations incompatibles sous charge, entraînant une torsion.

Exemple : Deux couches de matériaux collées ensemble avec des modules d'élasticité différents soumises à un effort de torsion.

**-Contraintes Résiduelles :**

Description : Les contraintes résiduelles résultant de procédés de fabrication comme le soudage, le traitement thermique ou le laminage peuvent induire des torsions lorsque ces contraintes sont relâchées.

## *Chapitre 1 : Analyse d'une Torsion Axisymétrique dans un Bicouche Élastique avec Inclusion circulaire à l'Interface*

Exemple : Un arbre ayant subi un traitement thermique inégal peut présenter des torsions dues aux contraintes résiduelles.

### **-Asymétrie Géométrique :**

Description : Des irrégularités géométriques ou une asymétrie dans la conception d'un composant peuvent entraîner une répartition inégale des contraintes et des déformations, provoquant une torsion.

Exemple : Un arbre de transmission avec une section transversale variable.

### **- Effets Thermiques :**

Description : Les variations de température peuvent provoquer des expansions thermiques différentielles dans les matériaux, entraînant des torsions. Ceci est particulièrement pertinent dans les matériaux composites ou les assemblages de différents matériaux.

Exemple : Un arbre composite soumis à un gradient de température le long de sa longueur.

### **- Charges Dynamiques et Vibrations :**

Description : Les charges dynamiques ou les vibrations peuvent induire des torsions fluctuantes, surtout si les fréquences des charges sont proches des fréquences naturelles de la structure.

Exemple : Un arbre soumis à des vibrations mécaniques provenant d'une machine en fonctionnement.

### **-Propriétés Matérielles Inégales :**

Description : Les variations locales des propriétés matérielles au sein d'un composant peuvent entraîner une distribution inégale des déformations et des contraintes.

Exemple : Un arbre métallique avec des inclusions ou des zones de différentes duretés.

### **- Interaction avec l'Environnement :**

Description : Les interactions avec l'environnement, comme l'humidité, des agents chimiques ou des températures extrêmes, peuvent affecter différemment différentes parties d'un composant, induisant des torsions.

Exemple : Un arbre composite absorbant plus d'humidité dans une partie qu'une autre.

### **- Erreurs de Fabrication ou de Montage :**

Description : Des erreurs lors de la fabrication ou le montage de composants peuvent introduire des défauts ou des asymétries qui induisent des torsions.

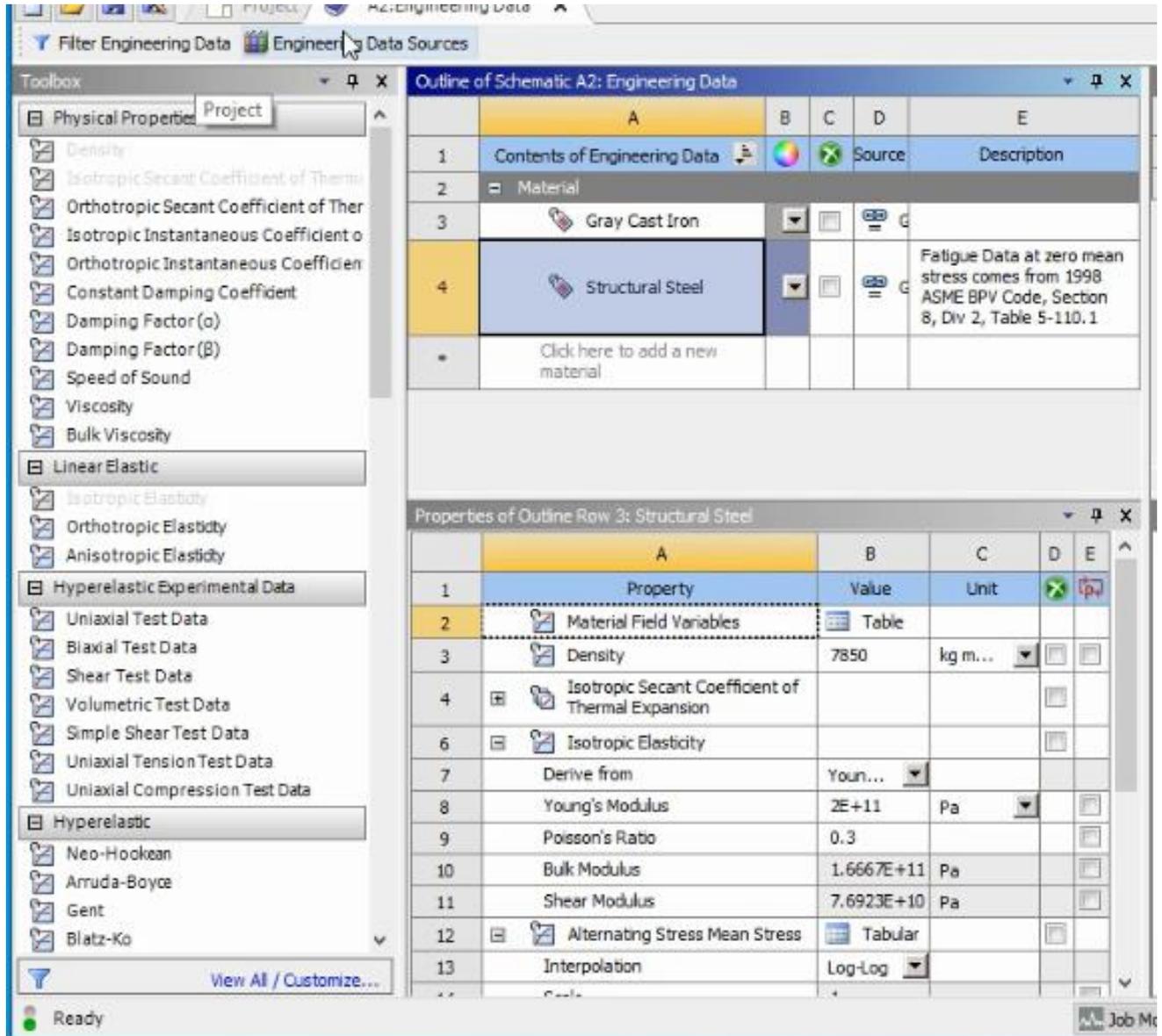
**Exemple :** Un arbre mal aligné lors de l'assemblage d'un système mécanique.

*Chapitre 1 : Analyse d'une Torsion Axisymétrique dans un Bicouche Élastique avec Inclusion circulaire à l'Interface*

Simulation numérique de torsion axisymétrique d'une bicouche élastique avec inclusion circulaire à l'interface par l'utilisation de logicielle ansys (workbench et mechanical apdl) :

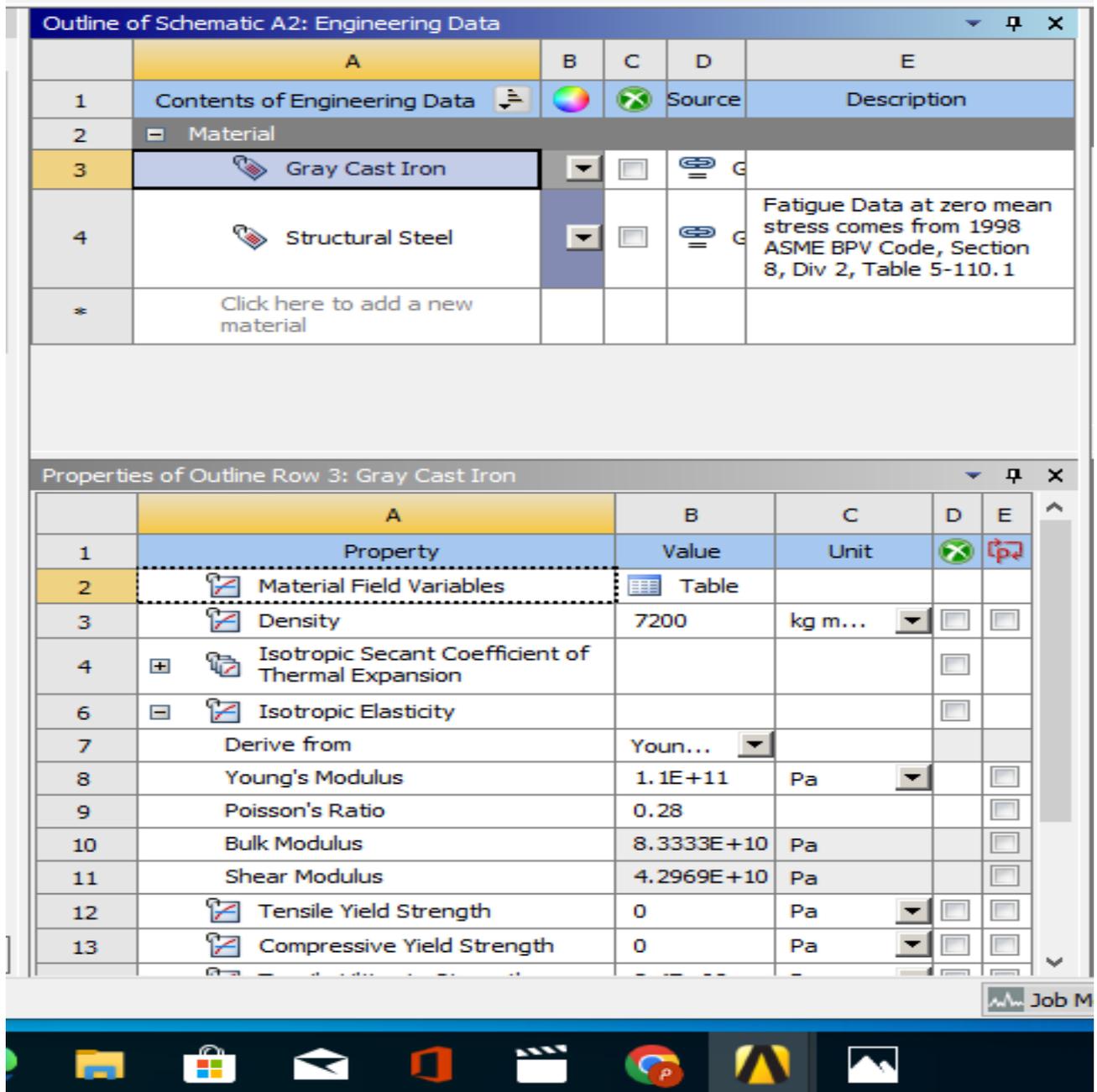
**Les matières qui on choisit dans la simulation sont :**

**-Aciers de constructions :(dans le milieu continu)**



**Figure 14 :** Présenté la déclaration Aciers de constructions en work benche( ansys)

-La fonte grise : (les deux disques symétriques)



**Figure 15:** Présenté la déclaration de La fonte grise en work benche (ansys)

## *Chapitre 1 : Analyse d'une Torsion Axisymétrique dans un Bicouche Élastique avec Inclusion circulaire à l'Interface*

### **I.6. Conclusion :**

En résumé, la torsion axisymétrique d'une bicouche élastique avec inclusion circulaire à l'interface offre des avantages potentiels en termes de répartition des contraintes, de renforcement structurel et de contrôle des déformations. Cependant, cela présente également des défis, notamment une analyse complexe, le choix des matériaux, les contraintes de cisaillement à l'interface et les effets de bord. Une conception et une analyse soigneuses sont nécessaires pour exploiter pleinement les avantages tout en atténuant les risques associés à cette configuration. Les résultats de cette étude peuvent guider le développement de structures plus résistantes et plus performantes dans divers domaines, de l'ingénierie des matériaux à la conception de dispositifs biomédicaux.

# **Chapitre II**

## **Rappels sur l'élasticité**

## II.1. Introduction

L'élasticité est l'étude du comportement de solides déformables, élastiques et isotropes sous de petites déformations et possède des lois de comportement linéaires. Nous ajoutons une hypothèse simplificatrice supplémentaire : les déplacements sont petits. Le couple d'hypothèse « petits déplacements » et petites déformations » est souvent appelé Hypothèse des petites perturbations.

Lorsqu'un corps solide est soumis à des contraintes extérieures, il se déforme. Si la déformation est réversible on dit qu'elle est élastique, sinon elle est plastique. On considère généralement trois types de déformation élastique : la déformation uniaxiale, le cisaillement simple et la compression.

Si la forme du corps élastique est symétrique en rotation autour d'un axe, et que les charges et les conditions aux limites sont également symétriques en rotation autour de cet axe, nous disons que le problème est axisymétrique. Si on utilise un système de coordonnées cylindriques ou sphérique autour de l'axe d'axisymétrie, les dérivées des composantes sur la base naturelle par rapport à sont nulles.

## II.2. Quelques définitions :

### III.2.1 L'élasticité classique

L'élasticité classique dans le domaine de la mécanique des solides déformables se réfère à l'étude du comportement des matériaux élastiques soumis à de petites déformations. Cette approche repose sur plusieurs hypothèses simplificatrices

### II.2.2 Elasticité axisymétrique

L'élasticité axisymétrique est un domaine de la mécanique des matériaux qui étudie le comportement élastique des structures ou des matériaux à symétrie axiale. Cette symétrie signifie que les propriétés mécaniques ou géométriques de la structure restent inchangées lorsqu'elle tourne autour d'un axe central.

- Si la forme du corps élastique est symétrique, on dit que le problème est axisymétrique tourne autour d'un axe, et si les charges et les conditions aux limites sont également Tournez autour de cet axe.

### II.2.3 Les concepts généraux de l'élasticité

L'élasticité étudie **les déplacements, les déformations et les contraintes** dans un milieu soumis à des forces extérieures.

#### 1-Les contraintes

Prenons le cas d'un point M de S. Supposons que dS soit un élément infinitésimal de la surface S qui englobe M et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire, perpendiculaire en M à S et dirigé vers l'extérieur de la partie A. Cet ensemble sera nommé facette.  $\vec{n}$  en M .

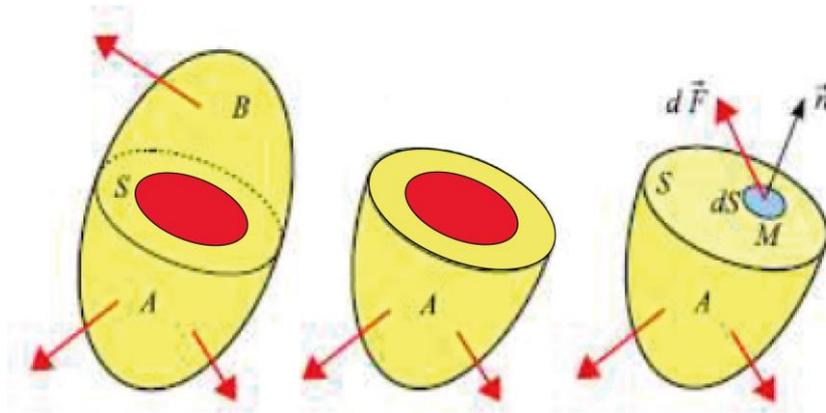


Figure 16 : Géométrie de la variation des contraintes sur la bicouche élastique

**2-Tenseur des contraintes**

Le tenseur des contraintes sert à représenter les efforts intérieurs en un point matériel d'un milieu continu, on peut définir le tenseur des contraintes par la relation suivante :

$$T = \sigma n \tag{II.1}$$

Tel que :

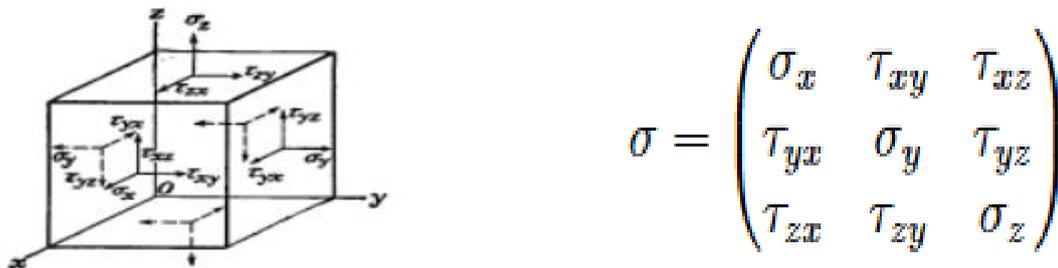


Figure 17: Tenseur des contraintes

**II.3. Les modules élastiques :**

**II.3.1- Module d'Young**

Vers 1800, Young s'intéresse à l'élasticité linéaire. En procédant à des essais de traction Uni-axiale ,il constate que la déformation  $\epsilon$  selon l'axe de traction est proportionnelle à la Contrainte appliquée, Il définit le coefficient de proportionnalité par la relation suivante :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \tag{II.2}$$

### II.3.2- Coefficient de Poisson

Le coefficient de Poisson est une mesure de la déformation subie par un matériau lorsqu'il est soumis à une contrainte. Il est souvent noté par la lettre grecque  $\nu$  (nu). L'analyse est réalisée en notant l'allongement axial  $\epsilon_1$  La force de traction s'accompagne d'un raccourcissement proportionnellement plus faible dans la direction  $\epsilon_2$  verticale. Il a défini le coefficient proportionnel comme

$$\nu = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (\text{II.3})$$

### II.3.3- Module de Coulomb

Coulomb procédé a des essais de torsion (cisaillement pur) et constate que le glissement  $\gamma$  est proportionnel au cisaillement  $\tau$  appliqué. Il définit le coefficient de proportionnalité par la Relation suivante :

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (\text{II.4})$$

Le module de Coulomb  $G$  a la dimension de contrainte et est généralement mesuré en unités de GPa. Il représente la force de cisaillement qui doit être appliquée pour obtenir un arc de glissement.

- Pour un matériau isotrope on peut définir le module de cisaillement  $\mu$  en fonction de  $E$  et  $\nu$  par la relation suivante :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.4})$$

## II.4. Les équations de l'élasticité :

### II.4.1 Loi de comportement - Loi de Hooke

La loi de Hooke est le premier exemple classique d'une explication d'élasticité, qui est la propriété d'un objet ou d'un matériau qui Il lui permet de retrouver sa forme d'origine après la distorsion. Cette capacité de revenir à une forme normale après avoir subi une distorsion peut être appelée une "force de rétablissement".

- En termes de loi de Hooke dans la zone élastique, la relation entre  $\sigma$  et  $\epsilon$  est linéaire.

Avec  $E = \tan \alpha$ , on a :  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}$  (Loi de Hooke) (II.5)

- $E$  : module d'élasticité longitudinal (module de Young) une constante matérielle. La loi de comportement relie le tenseur de déformation au tenseur de contraintes. Chaque la catégorie matérielle correspond à un type de loi. La loi du comportement peut s'écrire :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \lambda \text{Trace}(\bar{\boldsymbol{\epsilon}})I \quad (\text{II.6})$$

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\nu}{E} \text{Trace}(\bar{\boldsymbol{\sigma}})I \quad (\text{II.7})$$

### II.4.2 Équations supplémentaires

Dans le cas général, grâce à la loi de Hooke, nous aurons suffisamment d'équations pour pouvoir traiter un problème d'élasticité. Nous serons alors confrontés à un système d'équations différentielles relativement délicat à résoudre. Les lois de la physique. Parmi ces équations nous trouvons l'équation de Navier et l'équation de Beltrami.

#### -Équations de Navier

Les équations de Navier-Stokes sont un ensemble d'équations aux dérivées partielles qui décrivent le mouvement des fluides. Elles ont été formulées par le physicien et ingénieur français Claude-Louis Navier et le mathématicien et physicien britannique George Gabriel Stokes, d'où leur nom.

L'équation d'équilibre s'écrit en fonction des contraintes sous la forme :

$$\operatorname{div} \sigma + f v = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{II.8})$$

- $v$  est le champ des forces volumiques extérieures
- $\sigma$  est tenseur des contraintes à l'état d'équilibre final
- $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  Variation de la masse volumique

#### -Équations de Beltrami

Les équations de Beltrami sont un ensemble d'équations aux dérivées partielles qui ont des applications dans divers domaines de la physique, Ces équations portent le nom du mathématicien italien Eugenio Beltrami.

On désigne cette équation sous le nom d'équation de Beltrami simplifiée, qui représente les équations de compatibilité pour les contraintes lorsqu'il y a nulle force de volume.

- Quand on souhaite résoudre le problème en utilisant des contraintes, sans préalablement définir les zones de déplacement et de déformation, on emploie une méthode appelée "inverse". En plus de vérifier les équations d'équilibre, il est important de vérifier que l'état de contrainte entraîne, grâce à la loi de comportement, une déformation qui correspond à un champ de déplacement.

$$\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk} = 0 \quad (\text{II.9})$$

### II.4. Phénomène de la rupture

La fatigue est la modification des propriétés des matériaux consécutifs à l'application de sollicitations cycliques. Elle produit en général des défaillances des structures qui conduisent à la fissuration et à la ruine des matériaux.

On distingue essentiellement 3 types de rupture : la rupture fragile , la rupture ductile et la rupture par fatigue..

#### II.4.1 Critères de limite élastique

La limite élastique en traction simple est supposée être égale à la limite élastique en compression simple (pour les matériaux ductiles). Il y a une limite. Le comportement d'un matériau est bien connu lorsqu'il est soumis à une sollicitation de traction simple. Cette compréhension est associée à l'analyse de traction statique simple.

Il s'agit d'un état de contrainte complexe où les trois contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont présentes en un point A.

Le critère de limite élastique n'est pas unique. Plusieurs critères ont été avancés tout au long de l'histoire de la mécanique des milieux continus déformables. Certains sont vérifiés de manière plus ou moins efficace en fonction du matériau utilisé et du type de sollicitation.

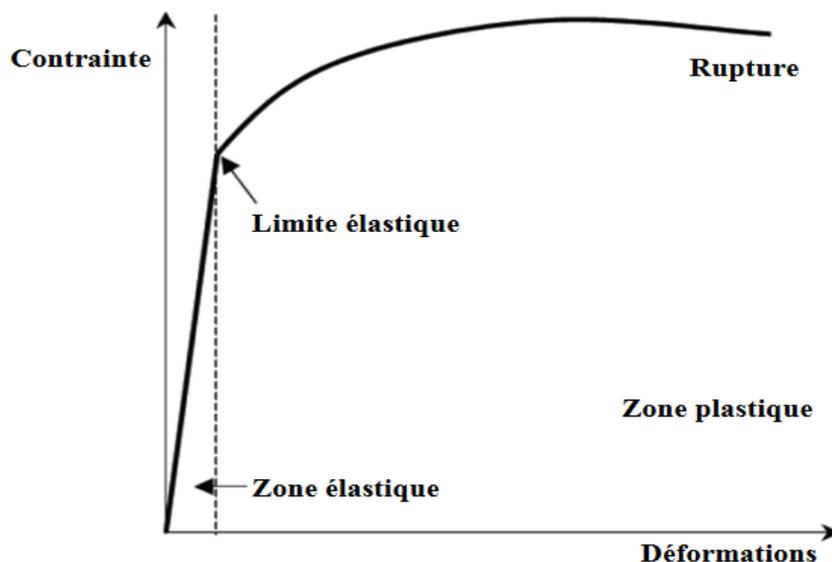


Figure 18: Diagramme déformation contrainte

#### II.4.2 La rupture fragile

La rupture fragile se produit dans les métaux et alliages à haute résistance mécanique ou à faible plasticité et ténacité. De plus, même les métaux normalement ductiles peuvent se fragiliser à basse température car on sait que :

- Mécanisme** : Il se manifeste au niveau des liaisons intraatomiques et ne se déforme pas.
- Conditions** : Intervient lorsque l'énergie de déformation locale due aux sollicitations Extérieures devient égale à l'énergie nécessaire de décohésion atomique.

**-Caractéristiques :**

- Propagation très rapide de fissure
- Consommation d'énergie très faible
- Les défauts et accidents géométriques jouent un rôle essentiel dans l'amorçage de la Rupture.

**II.4.3 La rupture ductile**

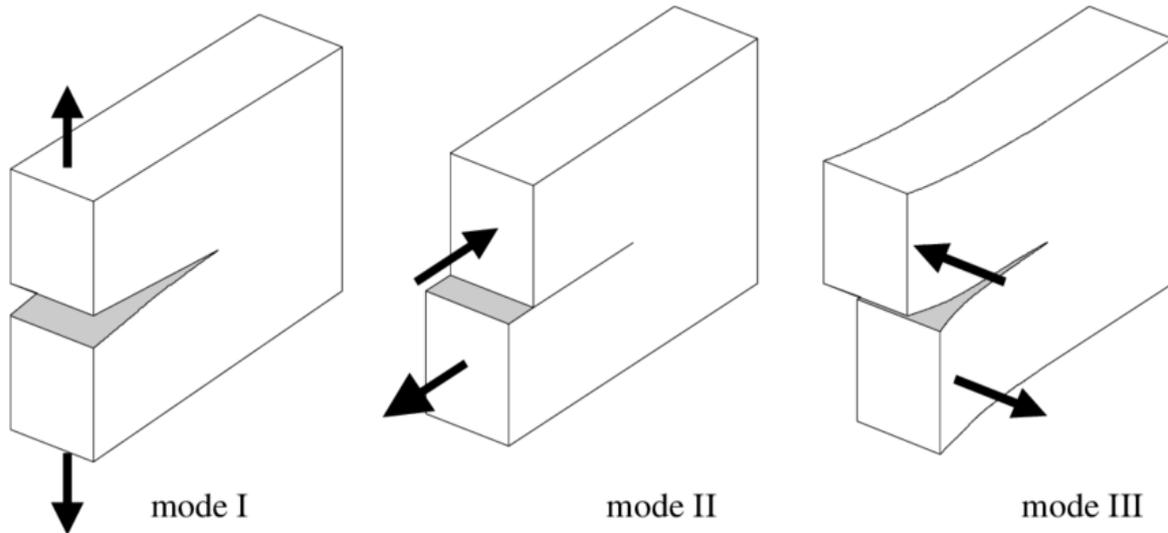
Le matériau se plastifie et se brise progressivement, et des fissures stables commencent à apparaître à l'intérieur du matériau. Les dommages peuvent être diffus et relativement graves. Les métaux cubiques à faces centrées présentent ce comportement, et les métaux cubiques à faces centrées sont ductiles à des températures suffisamment élevées. La fracture ductile se produit en trois étapes. La germination, la croissance et la fusion des cavités autour des inclusions conduisent à l'apparition de fissures macroscopiques. L'énergie de propagation de la fissure correspond approximativement au double de l'énergie de surface.

- La rupture ductile est un type de défaillance des matériaux où la déformation plastique est précédée de la rupture finale, ce qui est souvent privilégié dans de nombreuses applications industrielles en raison de sa capacité à absorber l'énergie et à signaler des signes de défaillance imminente.

**II.4.4 Définition d'une fissure**

Une fissure est une rupture ou une crevasse qui se forme généralement dans une surface solide, En théorie, les fissures sont planes et se propagent dans leur plan, il est ainsi possible de montrer que l'état général de propagation se limite à la superposition de trois modes (figure I.13) :

- **Mode I** : les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement l'une par rapport à l'autre, c'est le mode par ouverture.
- **Mode II** : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan, et dans une Direction perpendiculaire au front de fissure. Il est appelé aussi mode par Glissement de translation.
- **Mode III** : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une Direction parallèle au front de fissure, c'est le mode de glissement de rotation.
- Le mode I est souvent le plus critique et les études théoriques sont donc souvent limitées à ce Mode de propagation.



**Figure 19:** Les différents modes de fissure

#### II.4.5. Facteurs d'intensité de contraintes (KI, KII, ou KIII)

Seul le facteur d'intensité de contrainte  $K$  caractérise le champ de contrainte. Il dépend de la géométrie du problème et du chargement lointain appliqué à la structure fissurée et pour les trois modes nous avons :

##### 1. Mode I

Le mode d'ouverture est caractérisé par l'écartement des lèvres de la fissure en fonction de la direction  $y$ , qui se produit lors d'un chargement en tension  $\sigma_y$ . On définit le facteur d'intensité de contrainte du mode I comme suit :

$$KI = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(r, 0, 0)$$

##### 2. Mode II

Mode de glissement où les lèvres glissent dans la direction parallèle au front de fissure  $z$ , qui se produit lors d'un cisaillement  $\tau_{yz}$ , l'une par rapport à l'autre. Le mode III est défini par le facteur d'intensité de contrainte suivant :

$$KII = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{xy}(r, 0, 0)$$

##### 3. Mode III

Mode de déchirement où les lèvres se déplacent l'une par rapport à l'autre selon la direction parallèle au front de fissure  $z$ , qui apparaît lors d'un cisaillement  $\tau_{yz}$ . Le facteur d'intensité de contrainte du mode III est défini par :

$$KIII = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yz}(r, 0, 0)$$

Dans les problèmes de déformation axisymétrique, on utilise le système de coordonnées cylindriques, Si un disque rigide d'épaisseur faible est inclus dans un demi-espace élastique, l'expression du facteur d'intensité de contrainte est définie par :

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2(1-r)} \sigma_{\theta z}(r, 0)$$

## II.5. Conclusion

On a présenté dans ce chapitre les notions de base et les lois de la mécanique de rupture et d'élasticité, qui vont être utilisés dans la résolution de notre problème. Les relations entre les déplacements et les contraintes peuvent être établies en utilisant les équations de Navier et la loi de comportement, ainsi que le facteur d'intensité de contrainte, qui sera calculé en utilisant les relations de fissuration.

# **Chapitre III**

## **Rappels mathématiques**

### III.1 Introduction :

L'application des méthodes analytiques permet d'obtenir une solution mathématique précise pour les problèmes d'élasticité dont la géométrie est relativement régulière (rectangulaire, cylindrique, sphérique...), en utilisant des méthodes de transformation intégrale, de séparation des variables...

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques rappels mathématiques sur les équations intégrales et les méthodes d'intégrations numériques utilisés pour la résolution de notre problème de torsion axisymétrique.

### III.2 Equations intégrales :

Une équation intégrale est une équation dans laquelle une fonction inconnue apparaît sous forme d'intégrale. Ces équations sont couramment utilisées pour modéliser des phénomènes physiques, biologiques, économiques et d'autres domaines. Elles sont importantes en analyse fonctionnelle, en physique mathématique, en statistiques et dans de nombreux autres domaines des mathématiques et des sciences appliquées.

#### III.2.1 Equation de Fredholm :

Les équations de Fredholm sont souvent classées en deux types principaux en fonction de la position de la fonction inconnue dans l'intégrale. Voici les caractéristiques des équations de Fredholm de première et deuxième espèce :

##### - Équations de Fredholm de Première Espèce

Une équation de Fredholm de première espèce est définie par la relation suivante :

$$g(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)dt \quad (\text{III.1})$$

Avec :  $f(s)$  est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer,  $g(t)$  est le terme de source et  $k(t,s)$  est appelé le noyau.

##### - Équations de Fredholm de Deuxième Espèce :

Une équation de Fredholm de deuxième espèce est définie par la relation suivante :

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)f(s)dt \quad (\text{III.2})$$

Où  $f(t)$  est la fonction inconnue que l'on veut calculer.

En algèbre linéaire, le noyau est  $g(t)$ ,  $K(t,s)$  et  $\lambda$  est un facteur inconnu, qui a le même rôle que la valeur propre.

**-Comparaison**

- Les équations de Fredholm de première espèce ont la fonction inconnue à l'extérieur de l'intégrale, tandis que celles de deuxième espèce l'ont à l'intérieur.
- Les deux types d'équations peuvent avoir des solutions continues ou discontinues en fonction du noyau  $K(x,t)$  et des conditions aux limites.
- Les méthodes de résolution peuvent différer en fonction du type d'équation, bien que des méthodes numériques et analytiques puissent être utilisées pour les deux.

**-Applications :**

Les équations de Fredholm de première espèce se retrouvent souvent dans la modélisation de problèmes de diffusion, de propagation d'ondes, des solutions du différent système de déformations plastiques et élastique.

Les équations de Fredholm de deuxième espèce sont utilisées dans des problèmes où la valeur de la fonction inconnue en  $x$  dépend de son intégrale jusqu'à  $x$ , comme dans certains problèmes de contrôle optimal et d'ingénierie.

**-Relation avec notre problème :**

Les propriétés de la torsion axisymétrique peuvent être représentées par l'équation de Fredholm, notamment pour décrire la relation entre la répartition des contraintes (ou des déformations) à l'intérieur du matériau et les conditions appliquées à sa surface.

À titre d'exemple, on peut utiliser cette équation pour décrire comment la répartition des contraintes torsionnelles varie en fonction de la forme et de la nature de la charge appliquée.

**III.2.2 Equations de Volterra :**

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans lesquelles le noyau  $K$  est tel que :

$$\mathbf{K(t, s) = 0 \quad s > t}$$

Si l'une des limites d'intégration est variable, il s'agit d'une équation intégrale de Volterra. Des équations du premier et du second type de Volterra pourraient être :

$$g(x) = \int_a^t K(t, s)f(s)ds \quad (\text{III.3})$$

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)f(s)ds \quad (\text{III.4})$$

Si la fonction connue  $g$  est identiquement nulle, l'équation intégrale est alors appelée équation intégrale homogène. Si elle est différente de zéro, elle est appelée équation intégrale non-homogène.

**-Relation avec notre problème :**

Il est possible d'établir les équations de Volterra et le problème de torsion axymétrique de manière à Caractériser le comportement non linéaire du matériau lors de la torsion.

Il est possible qu'elles soient similaires à la façon dont le problème de torsion axymétrique traite des matériaux qui présentent une mémoire ou une dépendance temporelle dans leur comportement en situation de contrainte. De cette manière, il est possible d'explorer leur utilisation afin de mieux représenter le comportement complexe des matériaux dans des situations de torsion axymétrique.

**III.2.3 Equation d'intégrale d'Abel :**

L'équation intégrale d'Abel a eu lieu comme l'une des premières équations intégrales de l'histoire des mathématiques, nous pouvons écrire sa forme générale d'après l'équation de Volterra suivante :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{[h(x)-h(t)]^\alpha} dt = g(x), \quad 0 < x < b \quad (\text{III.5})$$

Si nous posons  $h(\tau) = \tau$  dans nous obtenons :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{[x^2-t^2]^\alpha} dt = g(x), \quad 0 < \alpha < 1 ; 0 < x < b \quad (\text{III.6})$$

Que l'on appelle l'équation intégrale d'Abel, dont la solution est de la forme :

$$f(t) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \left[ \int_a^x \frac{\tau g(r)}{[x^2-t^2]^{1-\alpha}} dr \right] ; a < t < b \quad (\text{III.7})$$

Les équations ensemble sont connus par la transformation d'Abel intérieure. Dans un autre cas, l'équation

$$\int_a^b \frac{f(t)}{[t^2-x^2]^\alpha} dt = g(x) \quad 0 < \alpha < 1 ; 0 < x < b \quad (\text{III.8})$$

Et sa solution :

$$f(t) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \left[ \int_a^x \frac{\tau g(t)}{[t^2-x^2]^{1-\alpha}} dr \right] ; a < t < b \quad (\text{III.9})$$

**III.2.4 Équation de Bessel :**

L'équation différentielle de second ordre donnée par :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (\text{III.10})$$

Le domaine de définition est  $x \in R$  et  $n \in Z$  ou  $n \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\right)$

**a-Fonction de Bessel de première espèce :**

La fonction de Bessel de première espèce  $J_n(x)$  est définie comme la solution de l'équation de Bessel de première espèce, qui est une équation différentielle d'ordre 2 :

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (r^2 - n^2)y = 0 \tag{III.11}$$

La fonction de Bessel de première espèce d'ordre (n) peut être déterminée en utilisant un développement en série de puissance de la façon suivante :

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} = \left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)}\right) + \left(-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1! \Gamma(n+2)}\right) + \left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2! \Gamma(n+3)}\right) + \dots \tag{III.12}$$

Notons que  $\Gamma(n + k + 1) = (n + k)!$  Nous pouvons écrire :

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \tag{III.13}$$

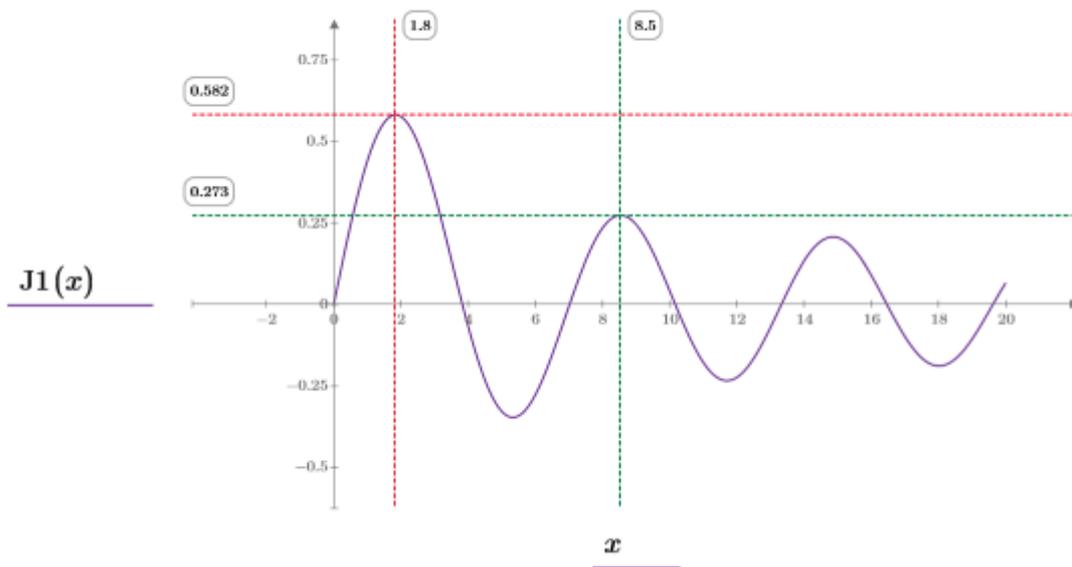


Figure 20: Graphe de la fonction de Bessel de première espèce dans Matlab

**b-Les propriétés de la fonction de Bessel de 1 ère espèce :**

**-Définition :** La fonction de Bessel de première espèce :

La fonction de Bessel de première espèce  $J_n(x)$  est la solution de l'équation de Bessel, souvent rencontrée dans la résolution de problèmes en physique, mathématique.

**-Comportement asymptotique :** Pour  $x$  grand,  $J_n(x)$  oscille comme une onde sinusoïdale amortie.

**-Formule de récurrence :**

$$J_{n-1}(x) - \frac{2n}{x} J_n(x) + J_{n+1}(x) = 0 \tag{III.14}$$

Utile pour calculer les valeurs de  $J_n(x)$ .

**Zéros :** Les zéros de  $J_n(x)$ , notés  $x_{n,k}$ , sont importants pour résoudre certains problèmes de valeurs propres.

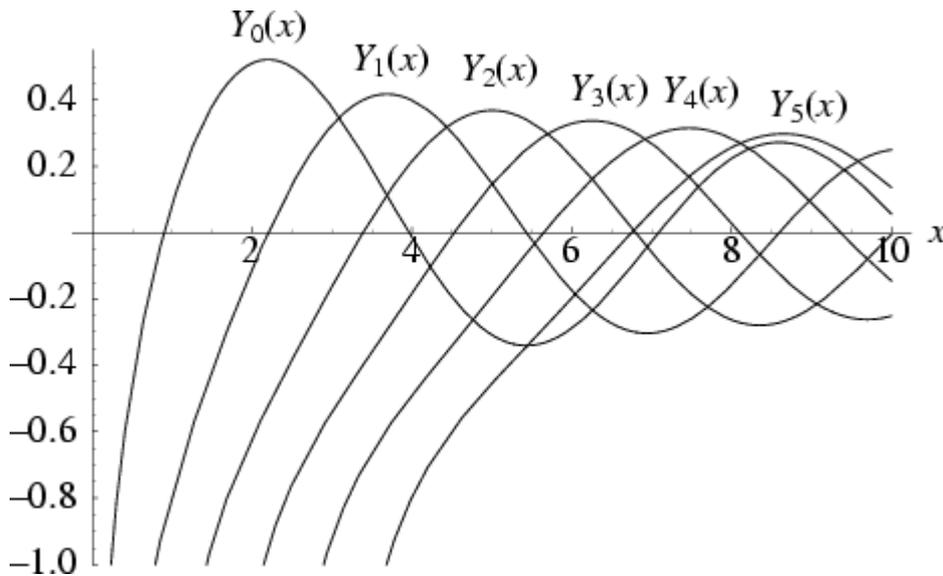
**-Relation de récurrence dérivée :**

$$J'_n(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \tag{III.15}$$

Utile pour les calculs nécessitant la dérivée de  $J_n(x)$ .

**Orthogonalité :** Les fonctions de Bessel forment un ensemble orthogonal sur un intervalle fini, ce qui a des applications dans divers domaines de la physique.

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} \tag{III.16}$$



**Figure 21:** Graphe de la fonction de Bessel de deuxième espèce

Les propriétés de la fonction de Bessel de deuxième espèce :

**-Divergence à l'origine :** Les fonctions de Bessel de deuxième espèce divergent à l'origine pour  $n > 0$ . Cela signifie que  $Y_n(0)$  tend vers l'infini pour  $n > 0$ .

**-Comportement asymptotique :** Pour  $x$  très grand,  $Y_n(x)$  a un comportement asymptotique similaire à celui de  $J_n(x)$ , la fonction de Bessel de première espèce. Cependant, les fonctions de Bessel de deuxième espèce oscillent plus que celles de première espèce.

**-Relation de récurrence :** Les fonctions de Bessel de deuxième espèce obéissent à une relation de récurrence similaire à celle des fonctions de Bessel de première espèce. Pour  $n \geq 1$ , la relation de récurrence est :

$$Y_{n+1}(x) = \frac{n}{x} Y_n(x) - Y_{n-1}(x) \tag{III.17}$$

**-Normalisation :** Comme les fonctions de Bessel de première espèce, les fonctions de Bessel de deuxième espèce ne sont pas normées de manière conventionnelle.

**-Zéros :** Les fonctions de Bessel de deuxième espèce ont également une infinité de zéros réels, mais leur distribution diffère de celle des fonctions de Bessel de première espèce.

**-Relation avec les fonctions de Hankel :** Les fonctions de Bessel de deuxième espèce sont liées aux Fonctions de Hankel de deuxième espèce, qui sont des solutions de l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques.

**-Développements asymptotiques des fonctions de Bessel :**

**-Développement asymptotique de  $J_n(x)$  :**

**-Pour  $x$  petit nous avons :**

$$J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!} \tag{III.18}$$

Ceci montre que  $J_n(x)$  croît polynomialement avec  $x$  lorsque  $x$  est petit.

**-Pour  $x$  grand :**

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{III.19}$$

Ce développement indique que pour de grandes valeurs de  $x$ ,  $J_n(x)$  oscille sinusoidalement autour de zéro avec une amplitude décroissant en  $\frac{1}{\sqrt{x}}$

**-Développement asymptotique de  $Y_n(x)$  :**

**--Pour  $x$  petit :**

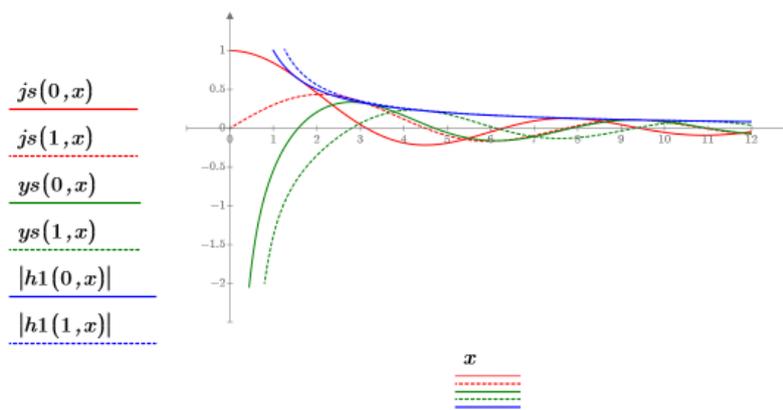
$$Y_n(x) = -\frac{2}{\pi} \ln(x) + \text{constante} \tag{III.20}$$

Ceci montre que  $Y_n(x)$  diverge logarithmiquement vers moins l'infini lorsque  $x$  tend vers zéro.

**-Pour  $x$  grand :**

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{III.21}$$

Ce développement indique que pour de grandes valeurs de  $x$ ,  $Y_n(x)$  oscille sinusoidalement autour de zéro avec une Amplitude décroissant en  $\frac{1}{\sqrt{x}}$



**Figure 22:** Graphe exprimé l'intersection des deux fonctions de Bessel

**-Applications et la relation de l'équation de Bessel avec le problème :**

Utilisée pour modéliser des phénomènes physiques avec une symétrie cylindrique, tels que les vibrations circulaires et la propagation d'ondes autour d'un cercle.

Trouve des applications en acoustique, en optique, en électromagnétisme, et en mécanique quantique.

Utilisé aussi pour décrire mathématiquement la torsion asymétrique dans les structures cylindriques et les tiges minces. Elles permettent de modéliser la distribution du moment de torsion le long de la section transversale, ce qui est crucial pour comprendre le comportement de la torsion dans ces systèmes.

**III.2.5 Transformé de Hankel :**

La transformée de Hankel est une généralisation de la transformée de Fourier dans les coordonnées cylindriques. Elle est utilisée pour analyser des fonctions définies dans des espaces cylindriques ou sphériques. La transformée de Hankel est souvent utilisée pour résoudre des problèmes dans lesquels les conditions sont cylindriquement symétriques, comme dans les domaines de l'optique, de l'acoustique et de la diffusion. Elle permet de transformer les équations différentielles ordinaires en équations différentielles aux dérivées partielles, facilitant ainsi leur résolution.

La transformée de Hankel  $H$  d'une fonction  $(r)$  définie en coordonnées cylindriques est donnée par :

$$F(k) = H[f(r)](k) = \int_0^{\infty} f(r) J_{\nu}(kr) r dr \quad (\text{III.22})$$

Où  $J_{\nu}$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $\nu$  et  $k$  est la variable de transformée.

La transformée inverse de Hankel est donnée par :

$$F(k) = H^{-1}[f(k)](r) = \int_0^{\infty} f(k) J_{\nu}(kr) k dk \quad (\text{III.23})$$

**-Applications et la relation de la Transformation de Hankel avec le problème :**

Le transformé de Hankel, tout comme l'équation de Bessel, joue un rôle important dans la modélisation de la torsion axysymétrique, est aussi crucial pour l'analyse de la torsion axysymétrique car il permet de transformer les équations différentielles radiales en une forme plus maniable et de représenter la solution en termes de fonctions spécifiques adaptées aux propriétés de la structure

**III.3. Méthodes d'intégration numériques :**

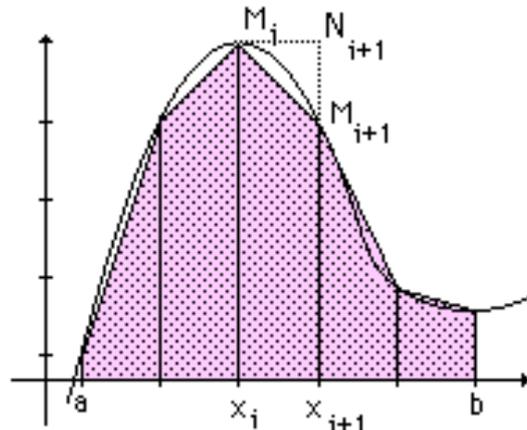
Dans le monde des mathématiques computationnelles, les méthodes d'intégration numérique jouent un rôle crucial en nous permettant de calculer des valeurs intégrales précises de fonctions complexes sans recourir à des solutions analytiques. Imaginez-vous plongé dans le défi stimulant de calculer l'aire sous une courbe complexe ou d'évaluer une intégrale qui défie les méthodes traditionnelles.

C'est là que les méthodes d'intégration numérique entrent en scène, offrant une panoplie de techniques ingénieuses pour relever ces défis. Et les méthodes d'intégrations qui on est besoin dans notre recherche :

**III.3.1. Méthode des trapèzes :**

Approxime l'intégrale en utilisant des trapèzes pour connecter les points de la fonction à chaque extrémité de l'intervalle. Elle est plus précise que les méthodes des rectangles car elle prend en compte la pente de la fonction.

➤ Méthode des trapèzes :  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \cdot [f(a) + f(b)]$  (III.24)



**Figure 23:** Dessin explicatif sur la méthode de trapèze

**-Applications et la relation de la Méthode des trapèzes avec le problème :**

La méthode des trapèzes est une technique numérique d'intégration utilisée pour résoudre des équations différentielles ou des problèmes d'intégration numérique. Dans le contexte de la torsion axysymétrique, la méthode des trapèzes peut être utilisée pour approximer numériquement la solution de l'équation de torsion axysymétrique lorsque des solutions exactes ne sont pas facilement accessibles. Par exemple, pour calculer la distribution du moment de torsion le long du rayon  $r$  d'une tige cylindrique, on peut discrétiser l'intervalle radial en segments et appliquer la méthode des trapèzes pour estimer la variation de la torsion.

**III.3.2. Méthode de Simpson :**

**Simpson 1/3 :** Approxime l'intégrale en utilisant des arcs de parabole pour connecter les points de la fonction à chaque extrémité de l'intervalle, puis calcule l'aire sous chaque parabole. Elle est plus précise que la méthode des trapèzes.

**Simpson 3/8 :** Une extension de la méthode de Simpson 1/3 qui utilise des arcs de parabole pour connecter les points de la fonction à chaque extrémité de l'intervalle, ainsi qu'au tiers et aux deux tiers de l'intervalle. Cela améliore encore la précision.

**Méthode de Simpson 1/3 :**  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)]$  (III.25)

**Méthode de Simpson 3/8:**  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} \cdot [f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)]$  (III.26)

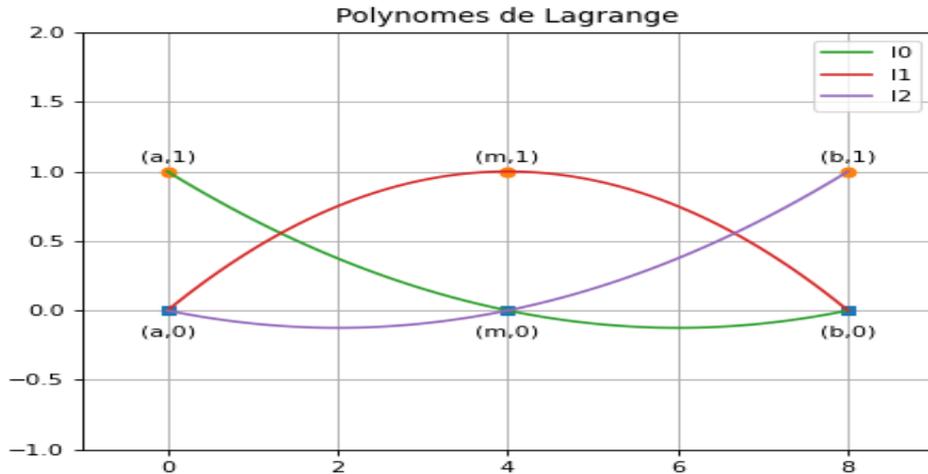


Figure 24: Dessin explicatif sur la méthode de Simpson

**-Applications et la relation de la Méthode de Simpson avec le problème :**

La Méthode de Simpson est un outil numérique précieux pour résoudre des intégrales complexes, La relation entre la Méthode de Simpson et le problème de torsion axisymétrique peut se manifester dans le processus de résolution des équations intégrales associées à ce problème. Lors de l'analyse de la torsion, on peut rencontrer des intégrales complexes qui décrivent la distribution des contraintes ou des déformations dans le matériau.

**III.4. Conclusion :**

En conclusion, les méthodes d'intégration numérique représentent un éventail d'outils essentiels dans la boîte à outils du mathématicien et du scientifique, offrant des solutions élégantes et efficaces pour résoudre une vaste gamme de problèmes mathématiques et scientifiques. Que ce soit pour modéliser des phénomènes physiques, analyser des données expérimentales ou explorer les mystères de l'univers, les méthodes d'intégration numérique nous guident avec grâce dans notre voyage vers la compréhension et la découverte.

# **Chapitre 04**

## **La Partie Analytique**

#### IV.1. Introduction :

Dans cette partie nous traitons analytiquement l'exemple proposé en mécanique des solides de torsion axisymétrique d'une bicouche élastique avec inclusion circulaire à l'interface. Des comparaisons sur le plan quantitatif avec des résultats obtenus par le code de calcul ANSYS Abdel sont présentées.

#### IV.2. Équations de base du problème

Compte tenu de la symétrie axiale du problème, il est naturel de considérer  $(r, \theta, z)$  des coordonnées polaires cylindriques. Nous considérons ici la torsion d'un disque circulaire rigide sur surface libre  $(z = 0)$  de contrainte d'une bicouche élastique avec inclusion intérieurement. La bicouche élastique de rayon  $r$  en forme circulaire située au plan  $(z = h)$  qui sépare la couche supérieure et la moitié inférieure de l'espace. Les faces de la bicouche élastique sont supposées libres de contraintes tandis que le disc tourne avec un angle égal  $\omega$  sur l'axe  $z$  passant par leur centre comme indiqué sur la (figure III.1).

Dans ce cas de problème de torsion axisymétrique, le vecteur de déplacement prend la forme  $(0, u_\theta, 0)$  dans le système de coordonnées polaires cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Il est commode d'identifier une région de couche (exposant (1)) occupant la région  $r \in (0, \infty); z \in (0, h^-)$  et une région de couche (exposant (2)) occupant la région  $r \in (0, \infty); z \in (h^+, \infty)$ . Les signes  $h^+$  et  $h^-$  désignent les variables dans la surface supérieure et la surface inférieure du plan  $(z = h)$ , respectivement. Les seuls composants non nuls de la contrainte sont donnés par :

$$\tau_{oz}^i = G \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} \quad , \quad \tau_{or}^i = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta^i}{r} \right) \quad , \quad i = 1,2 \quad (IV.1)$$

Où  $u_\theta = u_\theta(r, z)$  et  $G_i$  est le module de cisaillement du matériau. Comme la torsion de l'homogène matériau est statique, le déplacement  $u_\theta(r, z)$  doit satisfaire :

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} = 0 \quad (IV.2)$$

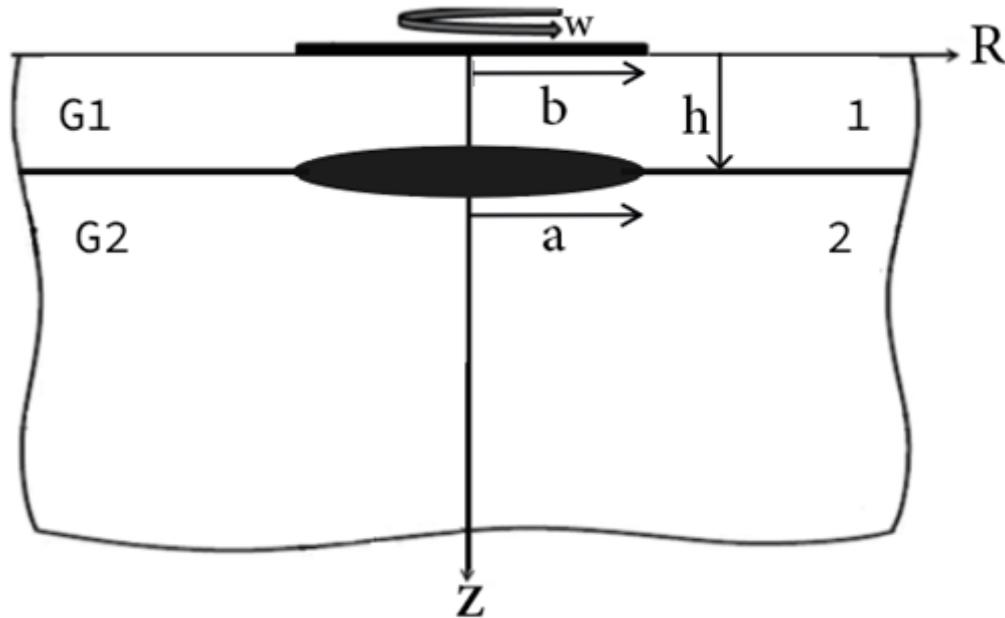


Figure 25 : Géométrie et coordonnées de système

➤ La solution de 2 pour les régions 1 ( $0 \leq z \leq h$ ) et 2 ( $z \geq h$ ) est exprimée en :

$$U_0^i(r, z) = \int_0^\infty [A_i e^{-\lambda z} + B_i e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda \quad i = 1, 2 \quad (IV.3)$$

Où  $\lambda$  est la variable de transformation,  $J_1$  est la fonction de Bessel de la premier type d'ordre un et  $A_i$  et  $B_i$  sont des fonctions inconnues.

#### IV.2.1. Conditions de limites et de continuités

Nous considérons les conditions de régularité à l'infini, la condition de la surface libre à  $Z = 0$ , les conditions de limite et de continuité aux interfaces liées  $Z = h^-$  et  $h^+$ . Par conséquent, nous trouvons les conditions suivantes :

$$U_o(r, z) = wr \quad Z = 0, r < a \quad (IV.4)$$

$$\tau_{oz}^1(r, z) = 0 \quad Z = 0, r > a \quad (IV.5)$$

$$U_\theta(r, z) = \varepsilon r \quad Z = h, r < b \quad (IV.6)$$

$$\tau_{oz}^1 - \tau_{oz}^2 = 0 \quad Z = h, r > b \quad (IV.7)$$

➤ les conditions de régularité  $(r, z) \rightarrow \infty$

$$\bullet \tau_{oz}^2 \text{ et } U_\theta^2 \rightarrow 0 \quad (IV.8)$$

Avec :

$$A_2 e^{-\lambda z} + B_2 e^{\lambda z} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } Z \rightarrow \infty \quad (\text{IV.9})$$

Signifie que  $B_2 = 0$

En appliquant les conditions de régularité à l'infini données dans Eq (III.1), nous obtenons :

$$U_{\theta}^1(r, z) = \int_0^{\infty} (A_1 e^{-\lambda z} + B_1 e^{\lambda z}) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (\text{IV.10})$$

$$\tau_{\theta z}^1(r, z) = G_1 \int_0^{\infty} \lambda (-A_1 e^{-\lambda z} + B_1 e^{\lambda z}) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (\text{IV.11})$$

$$U_{\theta}^2(r, z) = \int_0^{\infty} A_2 e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (\text{IV.12})$$

$$\tau_{\theta z}^2(r, z) = G_2 \int_0^{\infty} -\lambda [A_2 e^{-\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda \quad (\text{IV.13})$$

Où  $A_1, B_1, A_2$  sont des fonctions arbitraires qui doivent être déterminées en satisfaisant aux conditions de limite et de continuité.

À l'interface a  $z = h$

$$\text{On a } U_{\theta}^1(r, h) = U_{\theta}^2(r, h)$$

$$\Rightarrow A_1 e^{-\lambda h} + B_1 e^{\lambda h} = A_2 e^{-\lambda h} \quad (\text{IV.14})$$

$$A_2 = A_1 + B_1 e^{2\lambda h} \quad (\text{IV.15})$$

Les conditions limitent mixtes Eqs de limites et de continuités sont satisfaites si  $A_1$  et  $B_1$  sont des solutions de système d'équations intégrales duales doubles suivantes :

$$\int_0^{\infty} (A_1 + B_1) J_1(\lambda r) d\lambda = wr \quad r < b \quad (\text{IV.16})$$

$$G_1 \int_0^{\infty} \lambda (-A_1 + B_1) J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad r > b \quad (\text{IV.17})$$

$$\int_0^{\infty} (A_1 e^{-\lambda h} + B_1 e^{\lambda h}) J_1(\lambda r) d\lambda = \epsilon r, \quad r < a \quad (\text{IV.18})$$

$$(G_1 \int_0^{\infty} \lambda (-A_1 e^{-\lambda h} + B_1 e^{\lambda h}) J_1(\lambda r) d\lambda = G_2 \int_0^{\infty} (A_1 e^{-\lambda h} + B_1 e^{\lambda h}) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (\text{IV.19})$$

$$\frac{G_1}{G_2} = \gamma \quad \text{pour } r > b \quad \text{Donc}$$

$$G_1 \int_0^{\infty} \lambda (-A_1 e^{-\lambda h} + B_1 e^{\lambda h}) J_1(\lambda r) d\lambda = G_2 \int_0^{\infty} (A_1 e^{-\lambda h} + B_1 e^{\lambda h}) J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$\frac{G_1}{G_2} = \gamma \quad \text{pour } r > b$$

$$\int_0^{\infty} \lambda [(1 - \gamma) A_1 e^{-\lambda h} + (1 + \gamma) B_1 e^{\lambda h}] J_1(\lambda r) d\lambda, \quad r > a \quad (\text{IV.21})$$

### IV.3. Réduction des équations intégrales duales

Les équations (IV. 17) et (IV. 21) sont identiquement satisfaites si l'on introduisit la représentation suivante :

$$[(1 - \gamma) e^{-\lambda h} A_1(\lambda) + (1 + \gamma) e^{\lambda h} B_1(\lambda) = \sqrt{\lambda} \int_0^a \sqrt{t} \phi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt \quad (\text{IV. 22})$$

$$B_1(\lambda) - A_1(\lambda) = \sqrt{\lambda} \int_0^b \sqrt{t} \psi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt \quad (IV. 23)$$

où  $J_{\frac{1}{2}}$  est la fonction de Bessel du premier type d'ordre 1/2 , respectivement. Les fonctions

Inconnues sont données par l'équation suivante :

$$A_1(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h}}{p(\lambda)(1+\gamma)} \sqrt{\lambda} \int_0^a \sqrt{t} \phi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt - \frac{\sqrt{\lambda}}{p(\lambda)} \int_0^b \sqrt{t} \psi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt \quad (IV. 24)$$

$$B_1(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h}}{p(\lambda)(1+\gamma)} \sqrt{\lambda} \int_0^a \sqrt{t} \phi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt + \sqrt{\lambda} \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{p(\lambda)}\right) \int_0^b \sqrt{t} \psi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt \quad (IV. 25)$$

où  $p(\lambda) = \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right) e^{-2\lambda h} + 1$  et  $\phi(t)$  et  $\psi(t)$  sont des fonctions inconnues continues de t définies sur deux intervalles  $0 \leq t < a$  et  $0 \leq t < b$ , respectivement. En remplaçant  $A_1(\lambda)$  et  $B_1(\lambda)$  dans les équations. (16) et (18), on obtient

$$\int_0^a \sqrt{t} \phi(t) dt \int_0^\infty \sqrt{\lambda} f_{11}(\lambda) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda + \int_0^b \sqrt{t} \psi(t) dt \int_0^\infty \sqrt{\lambda} f_{12}(\lambda) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda = \varepsilon r \quad r < a \quad (IV. 26)$$

$$\int_0^a \sqrt{t} \phi(t) dt \int_0^\infty \sqrt{\lambda} f_{21}(\lambda) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda + \int_0^b \sqrt{t} \psi(t) dt \int_0^\infty \sqrt{\lambda} f_{22}(\lambda) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda = \omega r \quad r < b \quad (IV. 27)$$

Où

$$f_{11}(\lambda) = \frac{1}{p(\lambda)} (1 + e^{-2\lambda h})$$

$$f_{12}(\lambda) = (1 + \gamma) \left( \left(1 - \frac{1}{p(\lambda)}\right) e^{\lambda h} - \frac{1}{p(\lambda)} e^{-\lambda h} \right)$$

$$f_{21}(\lambda) = \frac{2e^{-\lambda h}}{p(\lambda)(1 + \gamma)}$$

$$f_{22}(\lambda) = \left(1 - \frac{2}{p(\lambda)}\right)$$

L'expression de  $p(\lambda)$  se rapproche de 1 pour de grandes valeurs de  $\lambda$ .

Pour réduire l'équation 27 par exemple à l'équation intégrale de Fredholm, on suit les étapes suivantes :

- On utilise la relation suivante :

$$\int_0^\infty \sqrt{\lambda} J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \frac{1}{r\sqrt{(r^2 - t^2)}} & t < r \\ 0 & t > r \end{cases}$$

On trouve une équation de type d'Abel :

$$\frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \frac{t\psi(t)}{\sqrt{(r^2-t^2)}} dt + \int_0^a \sqrt{t}\varphi(t) dt \int_0^\infty \sqrt{\lambda} f_{21}(\lambda) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda + \int_0^b \sqrt{t}\psi(t) dt \int_0^\infty \sqrt{\lambda} (f_{22}(\lambda) - 1) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda = \omega r, \quad r < b \quad (\text{IV. 28})$$

Maintenant, nous inversons l'équation ci-dessus en appliquant la formule de transformation d'Abel pour obtenir

$$t\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^2}{\sqrt{(t^2-r^2)}} \left[ \omega r - \int_0^a \sqrt{\delta}\varphi(\delta) d\delta \int_0^\infty \sqrt{\lambda} f_{21}(\lambda) J_{\frac{3}{2}}(\lambda\delta) J_1(\lambda r) d\lambda - \int_0^b \sqrt{\delta}\psi(\delta) d\delta \int_0^\infty \sqrt{\lambda} (f_{22}(\lambda) - 1) J_{\frac{1}{2}}(\lambda\delta) J_1(\lambda r) d\lambda \right] dr, \quad r < b \quad (\text{IV. 29})$$

On utilisant les relations suivantes:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}} dr = 2t^2$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^2 J_1(\lambda r)}{\sqrt{t^2-r^2}} dr = t\sqrt{\lambda} J_{\frac{1}{2}}(\lambda t)$$

on obtient la deuxième équation intégrale de Fredholm du deuxième type

$$\psi(t) + \sqrt{t} \int_0^a \sqrt{\delta}\varphi(\delta) M(t, \delta) d\delta + \sqrt{t} \int_0^b \sqrt{\delta}\psi(\delta) N(t, \delta) d\delta = \frac{4\omega}{\sqrt{2\pi}} t, \quad 0 < t < b \quad (\text{IV. 30})$$

Avec le noyau

$$M(t, \delta) = \int_0^\infty \lambda f_{21}(\lambda) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) J_{\frac{3}{2}}(\lambda\delta) d\lambda$$

$$N(t, \delta) = \int_0^\infty \lambda (f_{22}(\lambda) - 1) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda\delta) d\lambda$$

Avec la même méthode, on trouve la première équation intégrale de Fredholm :

$$\varphi(t) + \sqrt{t} \int_0^a \sqrt{\delta}\varphi(\delta) K(t, \delta) d\delta + \sqrt{t} \int_0^b \sqrt{\delta}\psi(\delta) L(t, \delta) d\delta = 0, \quad 0 < t < a \quad (\text{IV. 31})$$

Ou :

$$K(t, \delta) = \int_0^\infty \lambda (f_{11}(\lambda) - 1) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) J_{\frac{3}{2}}(\lambda\delta) d\lambda$$

$$L(t, \delta) = \int_0^\infty \lambda f_{12}(\lambda) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda\delta) d\lambda$$

Pour obtenir une équation non dimensionnée, à partir des Eqs. (30) à (31), changeons les variables comme suit

$$\delta = \begin{cases} as & 0 < \delta < a \\ bs & 0 < \delta < b \end{cases}, \quad t = \begin{cases} au & 0 < t < a \\ bu & 0 < t < b \end{cases}, \quad (\text{IV.32})$$

Ensuite, nous multiplions les deux équations ci-dessus du système par  $\frac{\sqrt{2\pi}}{4a\omega} \varphi(au)$  et  $\frac{\sqrt{2\pi}}{4b\omega} \psi(bu)$ , respectivement, et en utilisant les substitutions suivantes

$$\begin{cases} \Phi(u) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a\omega} \varphi(au) & \Psi(u) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4b\omega} \psi(bu) \\ c = \frac{a}{b} \quad \lambda = \frac{x}{b} \quad H = \frac{h}{b} \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

on obtient les équations suivantes :

$$\Phi(u) + c^2 \sqrt{u} \int_0^1 \sqrt{s} \Phi(s) K(u, s) ds + \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{u} \int_0^b \sqrt{s} \Psi(s) L(u, s) ds = 0, \quad u < 1 \quad (\text{IV.34a})$$

$$\Psi(u) + c^2 \sqrt{c} \sqrt{u} \int_0^1 \sqrt{s} \Phi(s) M(u, s) ds + \sqrt{u} \int_0^b \sqrt{s} \Psi(s) N(u, s) ds = 0, \quad u < 1 \quad (\text{IV.34b})$$

on obtient le facteur d'intensité de contrainte au bord de l'inclusion et au bord du disque avec :

$$K(u, s) = \int_0^\infty x (f_{11}(x) - 1) J_{\frac{1}{2}}(xcu) J_{\frac{1}{2}}(xcs) dx$$

$$L(t, \delta) = \int_0^\infty x f_{12}(x) J_{\frac{1}{2}}(xcu) J_{\frac{1}{2}}(xs) dx$$

$$M(t, \delta) = \int_0^\infty x f_{21}(x) J_{\frac{1}{2}}(xu) J_{\frac{1}{2}}(xcs) dx$$

$$N(t, \delta) = \int_0^\infty x (f_{22}(x) - 1) J_{\frac{1}{2}}(xu) J_{\frac{1}{2}}(xs) dx$$

#### IV.4. Résultats numériques et discussion

Comme les noyaux K, L, M et N sont continus sur l'intervalle [0, 1], le système d'équations intégrales de Fredholm peut être résolu par des techniques directes ou itératives. La quadrature Simpson est utilisée pour trouver la solution numérique du système donné par les équations (34). En divisant l'intervalle [0, 1] en N sous-intervalles égaux, de sorte que les milieux soient

$$u = u_m = \frac{2m-1}{2} \quad s = u_n = \frac{2n-1}{2} \quad m, n = 1, 2 \dots N, \quad \text{et en introduisant les notations suivantes :}$$

$$\Phi(u_m) = \Phi_m, \quad \Psi(u_m) = \Psi_m, \quad K(u_m, u_n) = K_{mn} \quad \text{et} \quad L(u_m, u_n) = L_{mn}$$

Et d'après les travaux de Low [2] , Dhawan [3] et Madani[5 ,6], le moment nécessaire pour faire tourner un disque :  $\frac{T}{T_0} = 3 \int_0^b u \Psi(u) du$  sur le disque chargé et pour l'inclusion circulaire interfaciale  $\frac{T}{T_0} = 3 \int_0^b u \phi(u) du = 0$  (y'a pas un moment appliqué)

Nous évaluons numériquement l'intégrale infinie K, L, M et N en utilisant la règle de Simpson. Après avoir résolu le système ci-dessus, les coefficients inconnus peuvent être obtenus.

#### IV.4.1. Facteur d'intensité de contrainte

Les facteurs d'intensité de contrainte en bord de deux disques sont définis respectivement par les équations suivantes :

$$K_{III}^a = \lim_{r \rightarrow a^-} \sqrt{2\pi(r-a)} \tau_{z\theta}^1(r, z)|_{z=H} \quad (IV. 35)$$

$$K_{III}^b = \lim_{r \rightarrow b^-} \sqrt{2\pi(r-b)} \tau_{z\theta}^1(r, z)|_{z=0} \quad (IV. 36)$$

Sur les plans  $z = h$  pour  $r \geq a$  et  $z = 0$ , les expressions de contrainte sont données par

$$\begin{aligned} \tau_{z\theta}^1(r, 0) = G_1 \int_0^\infty \lambda^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{1 - e^{-2\lambda h}}{p(\lambda)(1 + \gamma)} \int_0^a \sqrt{t} \phi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt + \right. \\ \left. \left( e^{\lambda h} \left( 1 - \frac{1}{p(\lambda)} \right) - \frac{e^{\lambda h}}{p(\lambda)} \right) \int_0^b \sqrt{t} \psi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt \right] J_1(\lambda r) d\lambda \quad (IV. 37) \end{aligned}$$

$$\tau_{z\theta}^1(r, h) = G_1 \int_0^\infty \lambda^{\frac{3}{2}} \int_0^b [\sqrt{t} \psi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt] J_1(\lambda r) d\lambda \quad (IV. 38)$$

La deuxième partie des intégrales de l'équation. (37) convergent rapidement lorsque leurs limites  $r \rightarrow a$  et  $r \rightarrow b$  disparaissent automatiquement ; cependant, les limites des deux autres intégrales sont analysées asymptotiquement comme suit. En utilisant la relation :  $J_1(\lambda R) = -\frac{1}{R} \frac{d}{dR} J_0(\lambda R)$ ;

Pour de grandes valeurs de  $\lambda$ , nous utilisons le comportement asymptotique suivant de la fonction de Bessel du premier  $J_\nu(\lambda) \cong \sqrt{\frac{2}{\lambda\pi}} \cos\left(\lambda - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$  et en utilisant les formules intégrales suivantes pour la première intégrale infinie dans la partie droite des équations. (36) et (37), respectivement,

$$\int_0^\infty \cos(\lambda t) J_0(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(r^2-t^2)}} & t < r \\ 0 & t > r \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \sin(\lambda t) J_0(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} 0 & t < r \\ \frac{1}{\sqrt{(t^2-r^2)}} & t > r \end{cases}$$

Et comme  $p(\lambda) \rightarrow 1$  as  $\lambda \rightarrow \infty$ , Eqs. (37) et (38) deviennent:

$$\tau_{z\theta}^1(r, 0) = \frac{G_1}{\gamma + 1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{\phi(t)}{\sqrt{(r^2 - t^2)}} dt + R_1(r) \quad (\text{IV. 39})$$

$$\tau_{z\theta}^1(r, h) = -G_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dr} \int_0^b \frac{\psi(t)}{\sqrt{(t^2 - r^2)}} dt \quad (\text{IV. 40})$$

$$R_1(r) = -G_1 \int_0^\infty \lambda^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{e^{-2\lambda h}}{p(\lambda)(1 + \gamma)} \int_0^a \sqrt{t} \phi(t) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) dt + \right. \\ \left. (e^{\lambda h} \left(1 - \frac{1}{p(\lambda)}\right) - \frac{e^{\lambda h}}{p(\lambda)}) \int_0^b \sqrt{t} \psi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt \right] J_1(\lambda r) d\lambda \quad (\text{IV. 41})$$

En intégrant maintenant par parties, on obtient

$$\tau_{z\theta}^1(r, 0) = \frac{G_1}{\gamma + 1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{a\phi(a)}{r\sqrt{(r^2 - a^2)}} \int_0^a \frac{t\phi'(t)}{\sqrt{(r^2 - t^2)}} dt \right] + R_1(r) \quad (\text{IV. 42})$$

On remarque que les intégrales infinies dans les expressions précédentes convergent dans tout le milieu sauf aux points singuliers  $r \rightarrow a^-$ , et  $r \rightarrow b^-$ , qui occupent les bords des disques.

$$\tau_{z\theta}^1(r, h) = G_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{b\psi(b)}{r\sqrt{(b^2 - r^2)}} - \int_r^b \frac{t\psi'(t)}{\sqrt{(r^2 - t^2)}} dt \right] \quad (\text{IV. 43})$$

En conséquence, nous obtenons une singularité racine carrée à  $r=a$  et  $r = b$  et les constante  $\phi(a)$  et  $\psi(b)$  sont la mesure de la force de singularité au voisinage des inclusions rigides.

En utilisant les transformations suivantes :

$$\phi(a) = \frac{4a\omega}{\sqrt{2\pi}} \Phi_N, \quad \psi(b) = \frac{4b\omega}{\sqrt{2\pi}} \Psi_N$$

on obtient le facteur d'intensité de contrainte au bords des disques

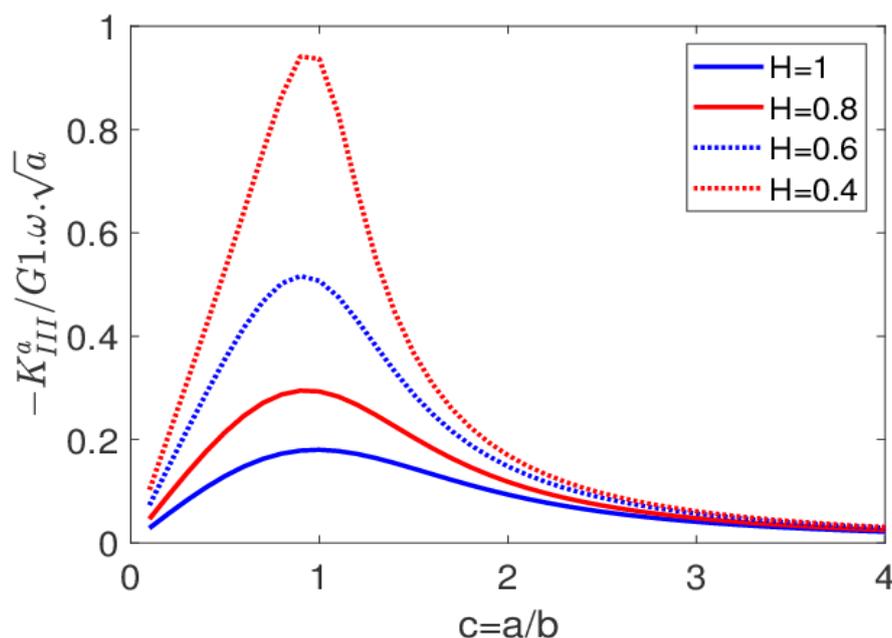
$$K_{III}^a = \frac{-4G_1\omega\sqrt{a}}{(1 + \gamma)\sqrt{\pi}} \Phi_N \quad (\text{IV. 44})$$

$$K_{III}^b = \frac{4G_1\omega\sqrt{b}}{(1 + \gamma)\sqrt{\pi}} \Psi_N \quad (\text{IV. 45})$$

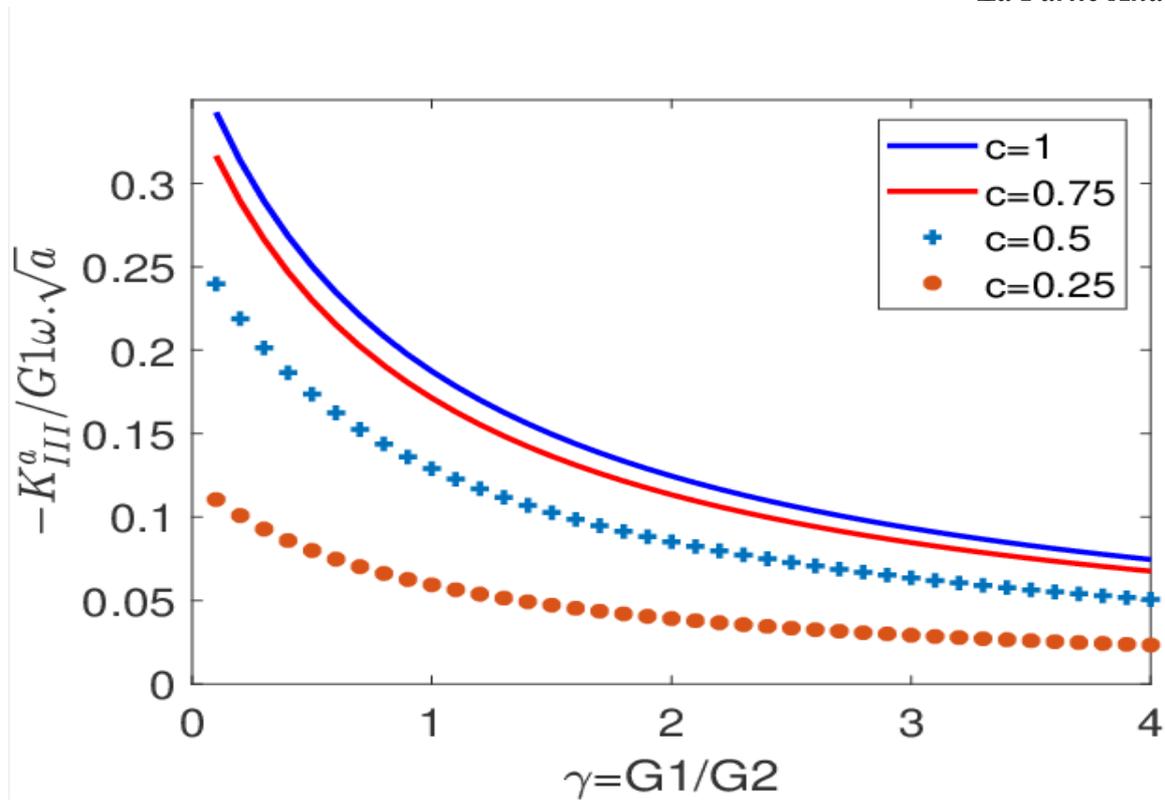
La Figure 18 montre la variation du facteur d'intensité des contraintes normalisé  $K_{III}^a$  au bord de de disque par l'Éq. (44) en fonction de  $c$  pour différentes valeurs de l'épaisseur de la couche  $H$  calculées en utilisant le rapport du module de cisaillement  $\gamma=1$ . Il est observé que les valeurs du facteur

d'intensité des contraintes augmentent et atteignent leurs valeurs maximales à  $c=1$ , puis, avec l'augmentation de la valeur de  $c$ , le facteur d'intensité des contraintes diminue. De plus, l'effet de la distance axiale entre l'inclusion et le disque sur le facteur d'intensité des contraintes est également montré dans cette figure. L'augmentation de la distance  $H$  induit une diminution du facteur d'intensité des contraintes pour toutes les valeurs du paramètre  $c$ .

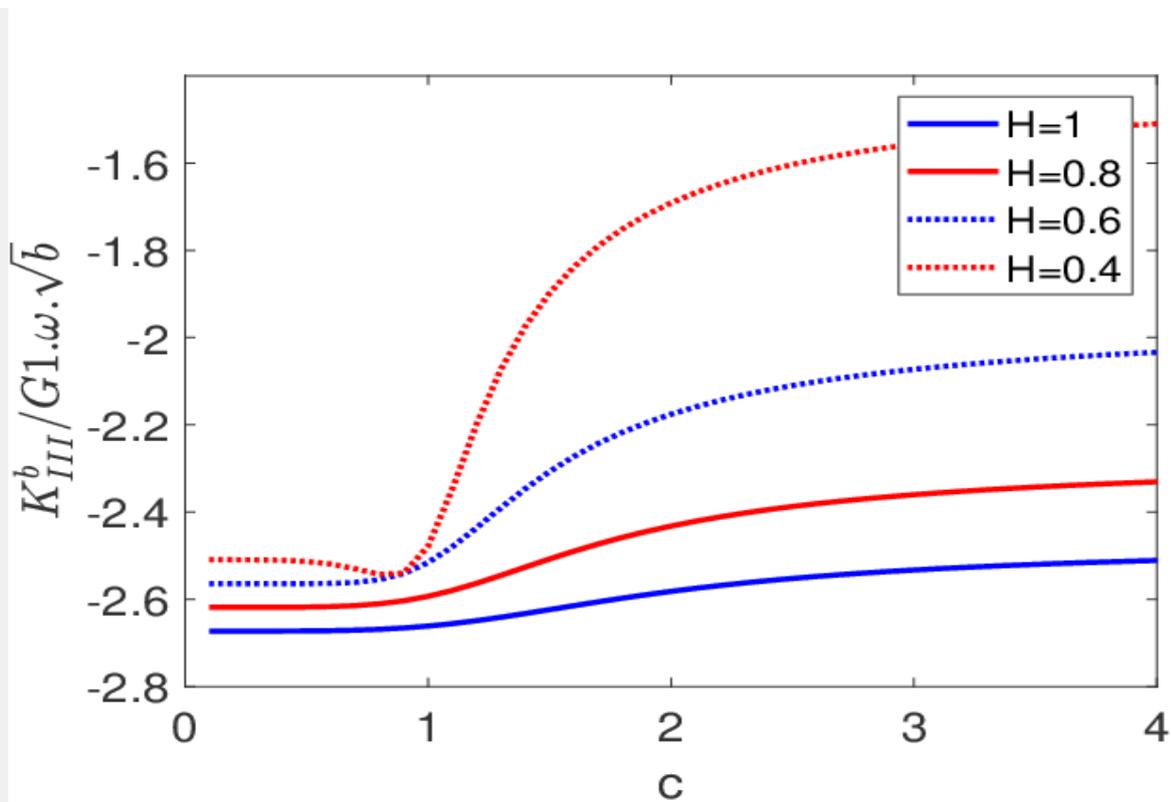
La Figure 18 illustre la variation du facteur d'intensité des contraintes à l'inclusion en fonction des variations du rapport du module de cisaillement  $\gamma$  pour différentes valeurs de la taille normalisée de l'inclusion  $c$  et l'épaisseur de la couche  $H=1$ . Nous observons à partir de la figure que, à mesure que le paramètre de cisaillement  $\gamma$  augmente, le facteur d'intensité des contraintes diminue pour toutes les valeurs de  $c$ .



**Figure 26:** la variation du facteur d'intensité des contraintes normalisé au bord de l'inclusion interfaciale rigide en fonction de  $c$



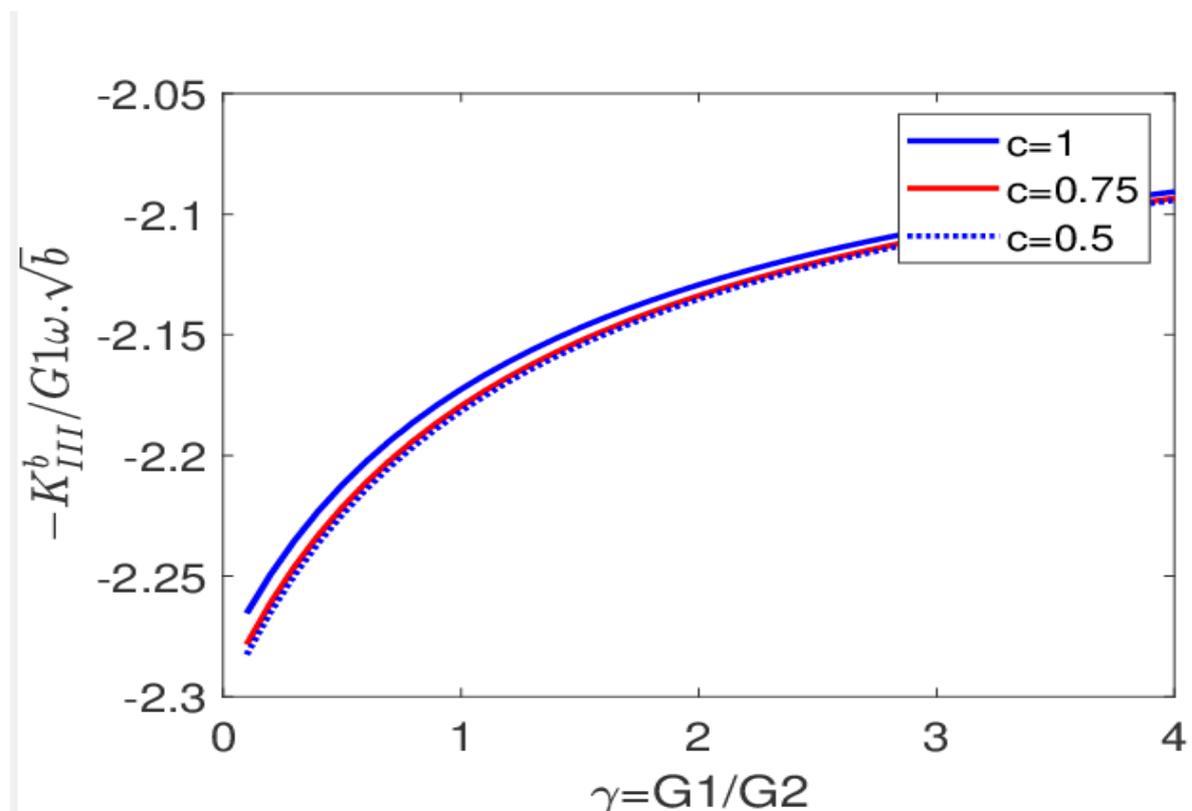
**Figure 27 :** la variation du facteur d'intensité des contraintes normalisé au bord de l'inclusion interfaciale rigide en fonction de  $\gamma$



**Figure 28:** la variation du facteur d'intensité des contraintes normalisé au bord de l'inclusion chargée rigide en fonction de  $c$

La Figure 21 illustre la variation du facteur d'intensité des contraintes normalisé bord de l'inclusion rigide définie par l'Éq. (45) en fonction de  $c$  pour  $H$ . Une variation relativement faible pour des valeurs plus petites de  $c$  et une variation considérable pour des valeurs plus grandes de  $c$  sont observées. De plus, l'interaction entre l'inclusion et le disque rigide est plus importante lorsque les inclusions sont plus proches du disque. En plus de l'interaction, le facteur d'intensité des contraintes augmente avec l'augmentation du rayon de l'inclusion. À partir de la formulation et des figures présentées, des conclusions peuvent être déduites :

1. Une singularité au bord du disque interne et de l'inclusion rigide interne est observée (les résultats semblent être en accord avec les travaux précédents (Low [2], Dhawan [4], et Madani et Kebli [5])).
2. Le facteur d'intensité des contraintes en Mode III au bord de deux disques est négatif et diminue avec l'augmentation de  $\gamma$ .
3. Il existe une interaction considérable entre les deux disques lorsque  $\gamma$  est grand et que les inclusions sont proches de l'inclusion rigide.



**Figure 29:** la variation du facteur d'intensité des contraintes normalisé au bord de l'inclusion chargée rigide en fonction de  $\gamma$

## IV.5. Résultats de Simulation de problème :

### IV.5.1. Simulation sur l'ansys (mechanical apdl) :

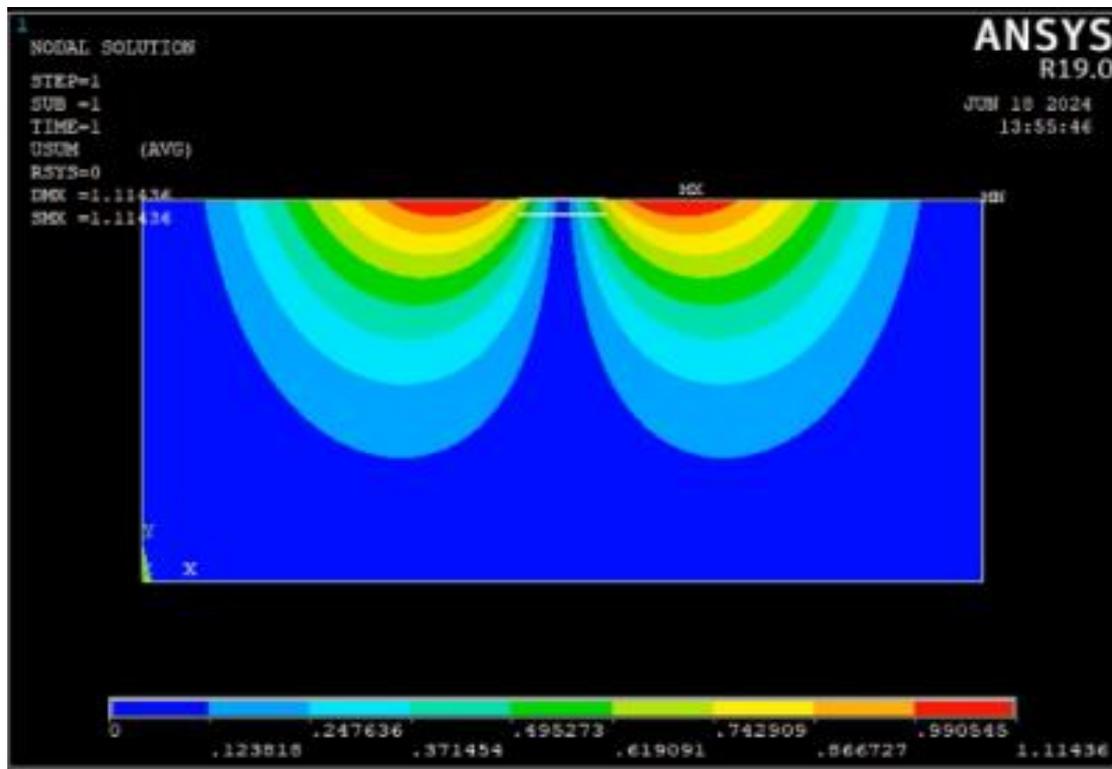


Figure 30: Champ de déplacement

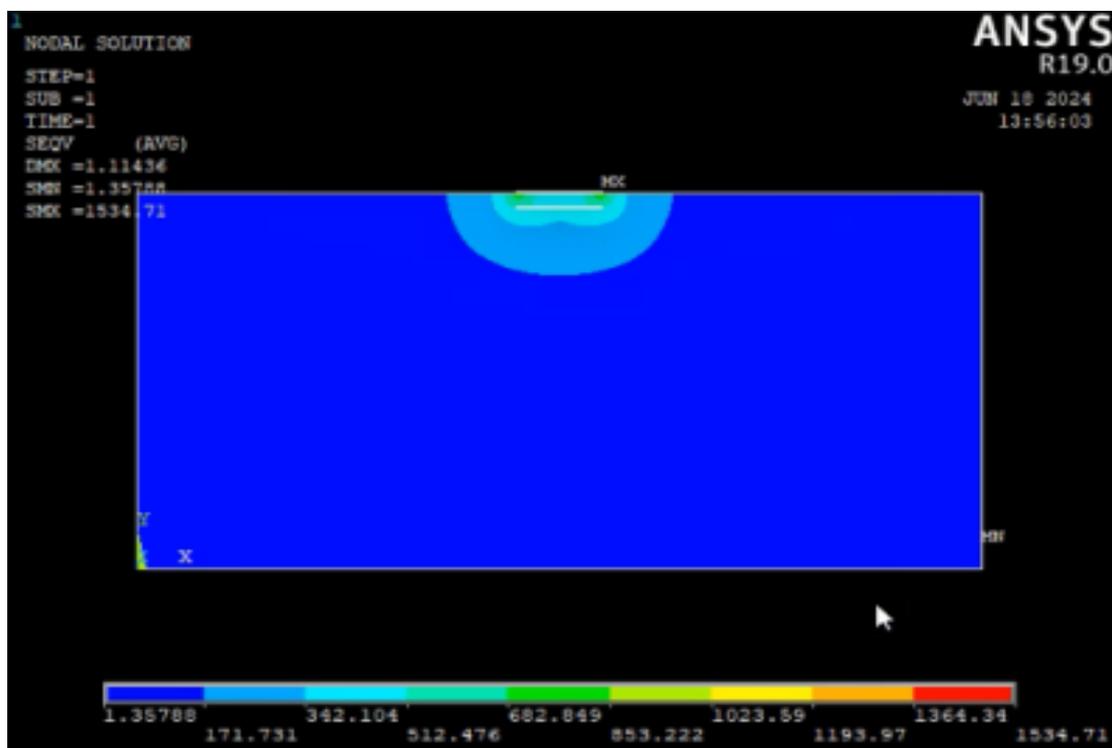


Figure 31: Variation du contrainte (VAN MISES)

```

KCALC Command
File

***** CALCULATE MIXED-MODE STRESS INTENSITY FACTORS *****
ASSUME PLANE STRAIN CONDITIONS
ASSUME A HALF-CRACK MODEL WITH ANTI-SYMMETRY BOUNDARY CONDITIONS (USE 3 NODES)
EXTRAPOLATION PATH IS DEFINED BY NODES:      12      17      13
WITH NODE      12 AS THE CRACK-TIP NODE

USE MATERIAL PROPERTIES FOR MATERIAL NUMBER      1
EX =  0.20000E+06  NUXY =  0.30000  AT TEMP =  0.0000
***** KI =  0.0000  ,  KII =  0.0000  ,  KIII =  10115.  *****
    
```

Figure 32: Facteurs d'intensité du contrainte kIII

IV.5.1. Simulation sur Workbench :

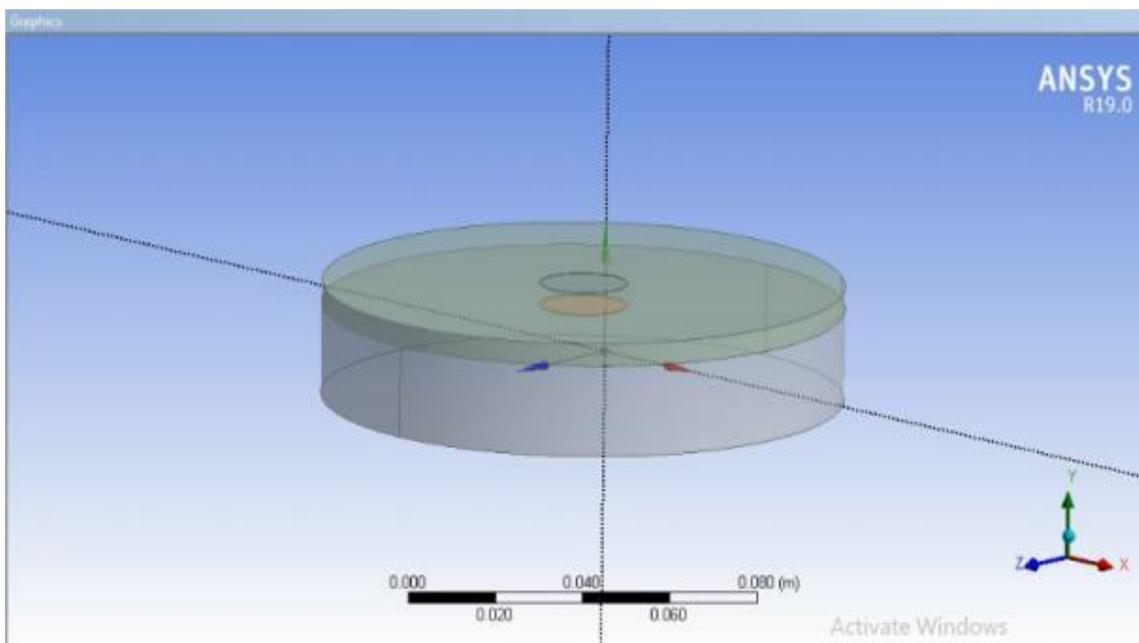


Figure 33: Bicouche élastique

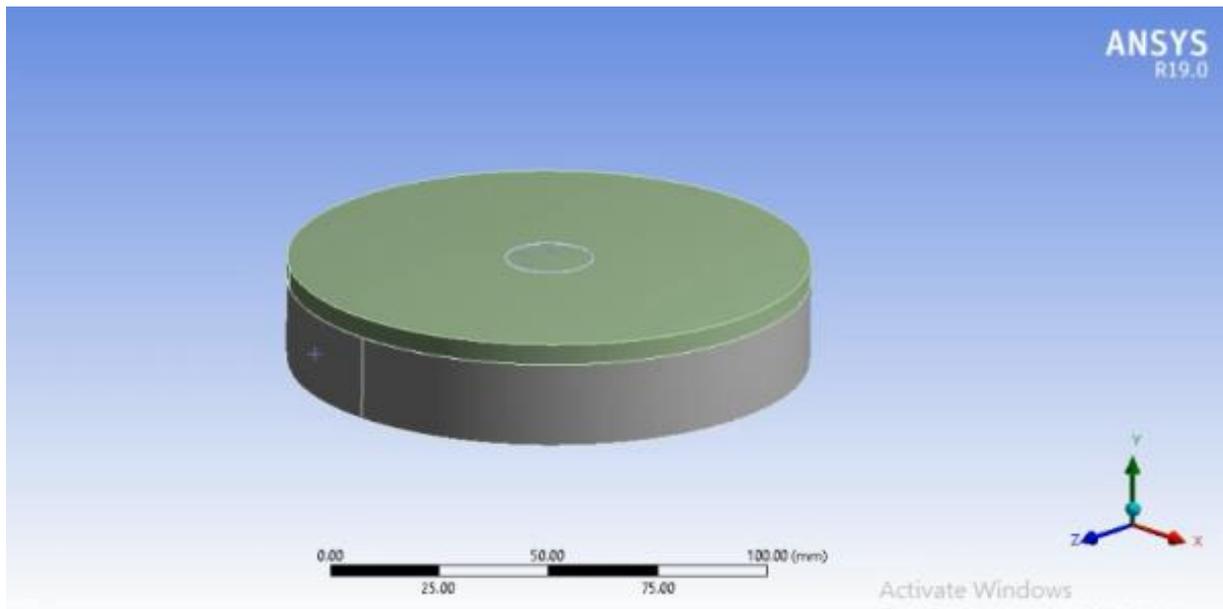


Figure 34: déclaration de maillage de cette bicouche élastique

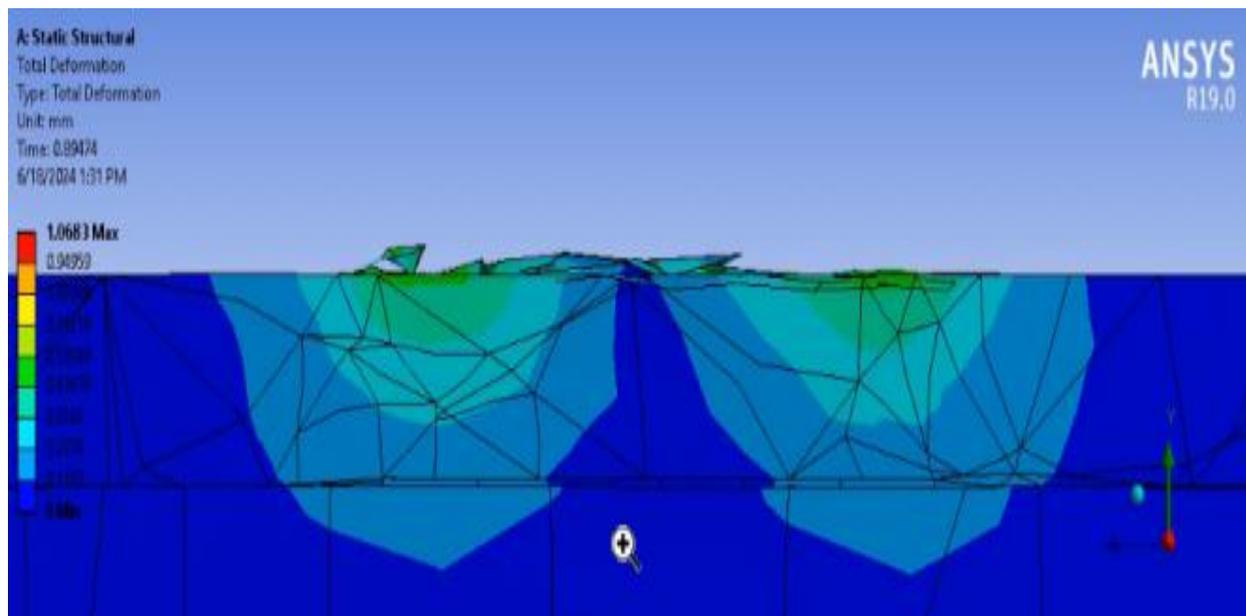
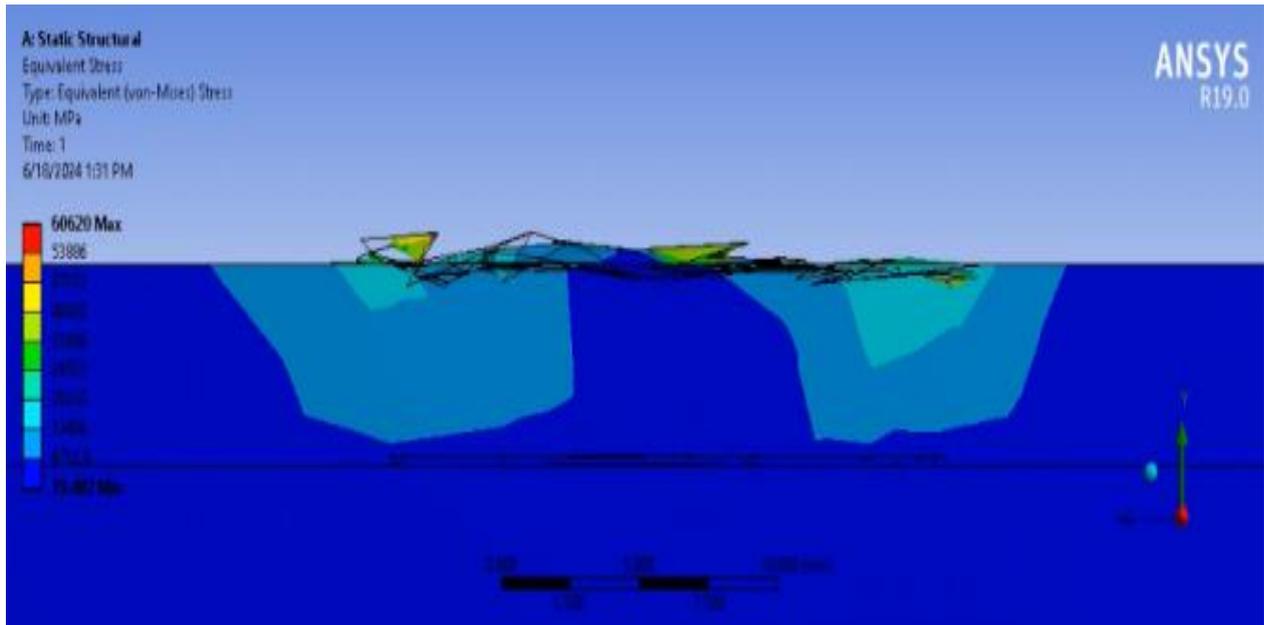


Figure 35: Champ de déplacement



**Figure 36:** Contrainte de cisaillement au niveau de disc

Les résultats analytiques et les résultats numériques obtenus par ANSYS montrent un bon accord. Cette concordance valide la précision des méthodes analytiques utilisées pour évaluer le facteur d'intensité des contraintes. Les simulations numériques réalisées avec ANSYS corroborent les tendances observées dans les analyses théoriques, confirmant ainsi la fiabilité des modèles proposés. Cette cohérence entre les deux approches renforce la confiance dans les conclusions tirées de l'étude, démontrant que les prédictions théoriques sont bien représentatives du comportement réel du système étudié.

# Conclusion générale

Dans cette étude, nous avons examiné le comportement mécanique d'un bicouche élastique soumis à une torsion axisymétrique, en tenant compte de la présence d'une inclusion circulaire à l'interface. Voici les principaux résultats et conclusions :

1. **Répartition des contraintes et déformations** : L'inclusion circulaire modifie significativement la répartition des contraintes et des déformations dans les deux couches. Les contraintes sont concentrées autour de l'inclusion, et des gradients importants se forment à l'interface.
2. **Interactions complexes** : L'interface entre les deux couches devient un lieu d'interactions complexes. Des effets de confinement et de transfert de contraintes se produisent, influençant la réponse mécanique globale.
3. **Applications potentielles** : Comprendre ces phénomènes est essentiel pour la conception de matériaux composites, de revêtements et d'autres structures multicouches. Nos résultats peuvent guider les ingénieurs dans l'optimisation de ces systèmes.

À partir de la formulation et des figures présentées, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

1. Une singularité est observée au bord du disque interne et de l'inclusion rigide interne, en accord avec les travaux antérieurs (Low [2], Dhawan [4], et Madani et Kebli [5]).
2. Le facteur d'intensité des contraintes en Mode III au bord des deux disques est négatif et diminue avec l'augmentation de  $\gamma$ .
3. Une interaction considérable existe entre les deux disques lorsque  $a/b$  ou  $b/a$  est grand et que les inclusions sont proches de l'inclusion rigide.

En somme, cette étude nous a permis d'approfondir notre compréhension des interactions mécaniques dans les bicouches élastiques avec inclusions. Les résultats analytiques et les résultats numériques obtenus par ANSYS montrent un bon accord, validant la précision des méthodes analytiques utilisées. Des perspectives futures pourraient inclure des analyses plus détaillées, l'exploration d'autres géométries d'inclusion et l'application de méthodes numériques avancées.

# **Annexe 1**

Nous choisissons dans la boîte à outils : système d'analyse : préférences et glisser dans l'espace de travail

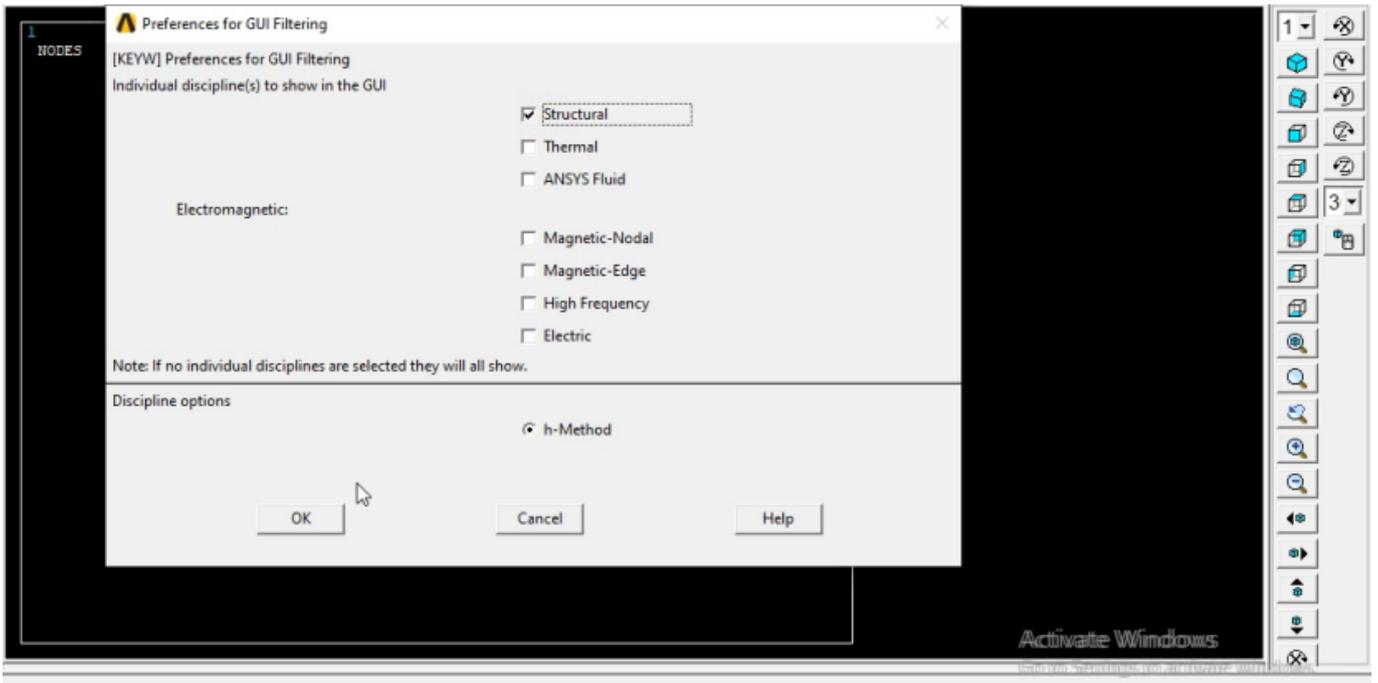


Figure 37: interface de la création d'un projet

En clique sur **preprocessor**⇒**element type** ⇒**add\EDIT .Dlete** , pour choisir l'option qui permet à nous de déclaré deux matériaux différents

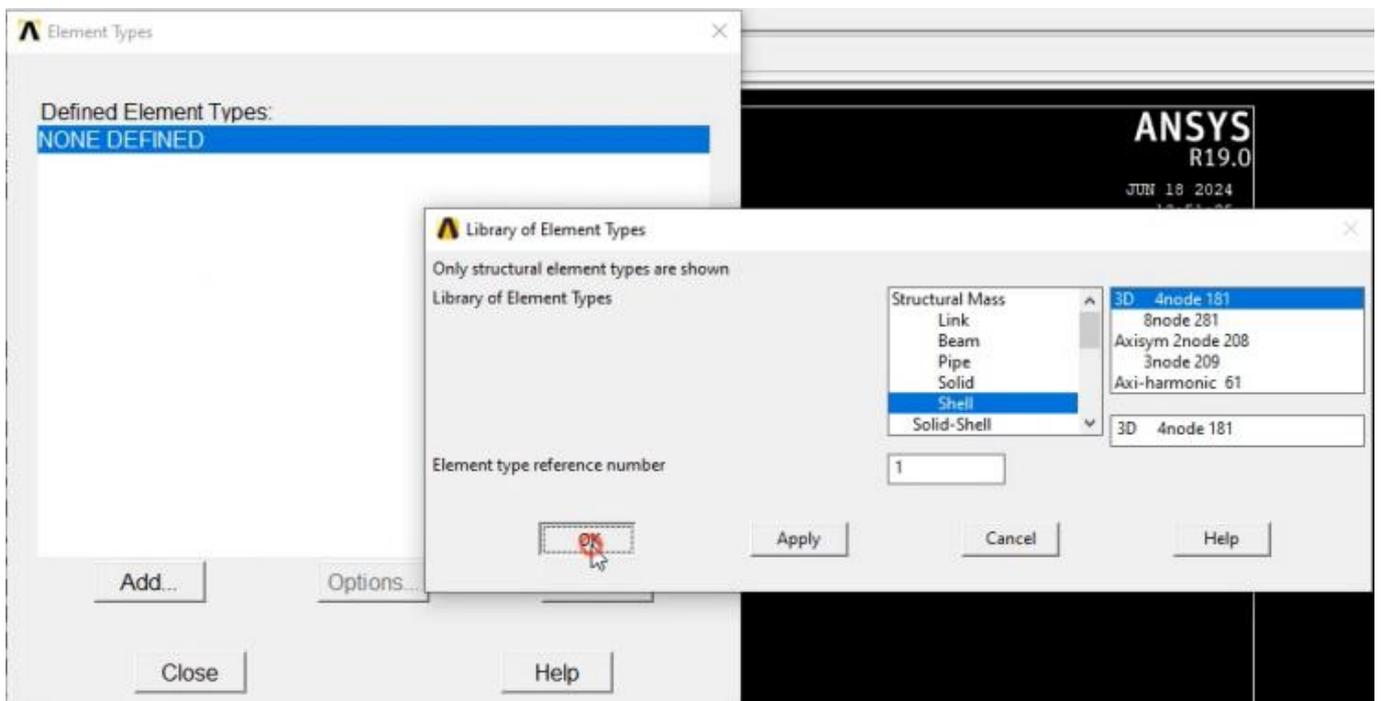
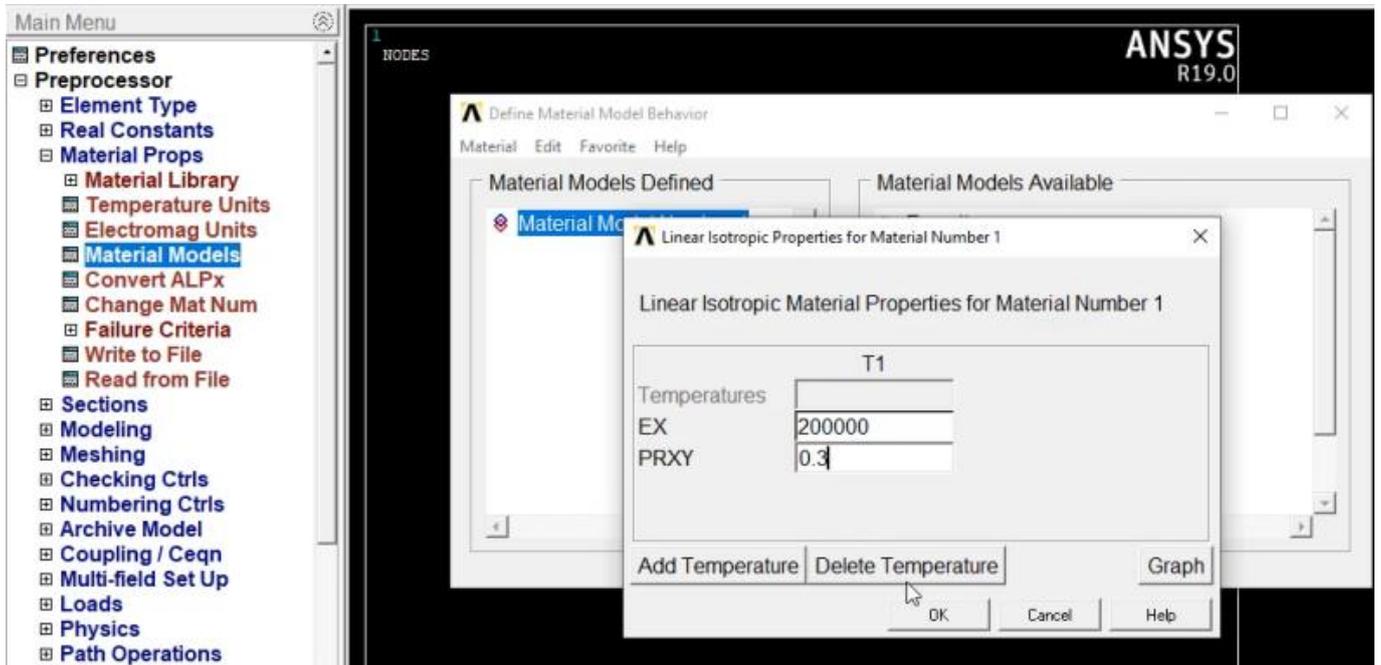


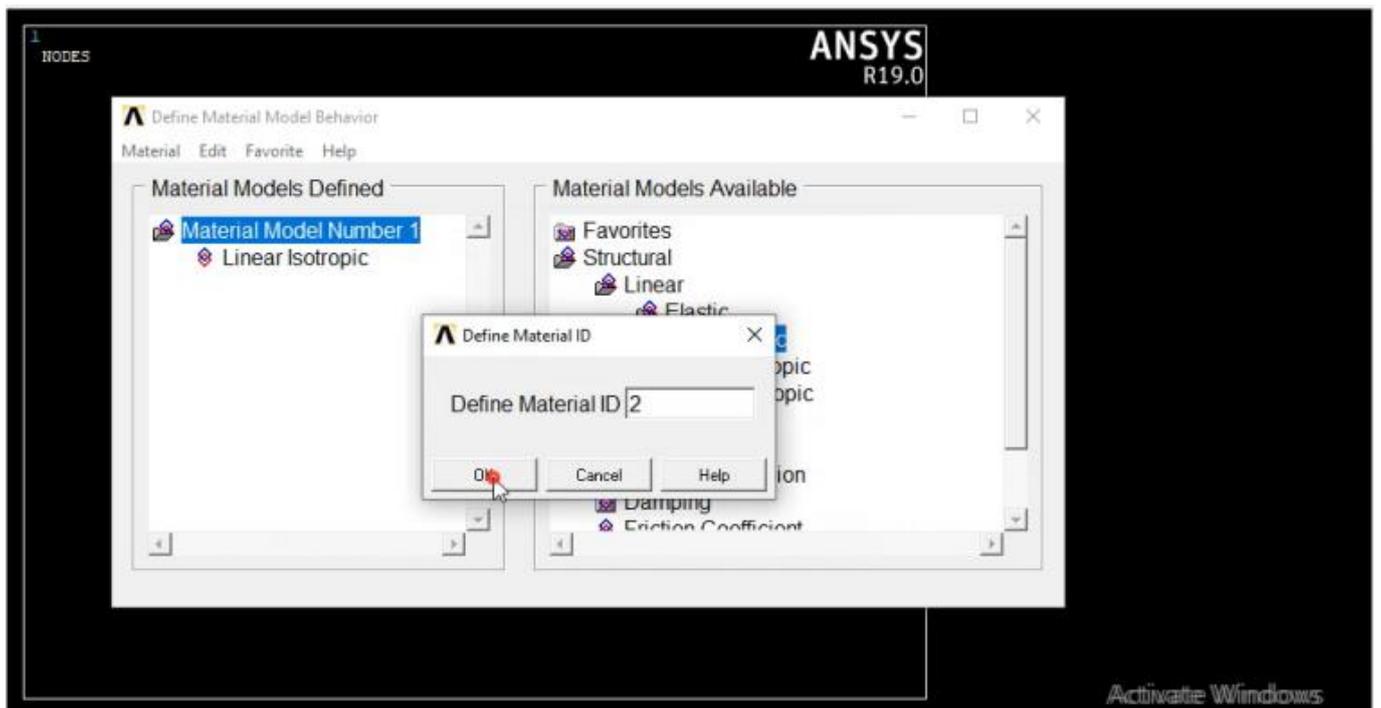
Figure 38: exprimé l'option Shell de deux matériaux différent

Après en clique sur **matériel props** ⇒ **matériel models** pour déclare les modules d'élasticité de nos deux matières différentes après sur structural après linear après isotropic après déclarations de module d'élasticité.

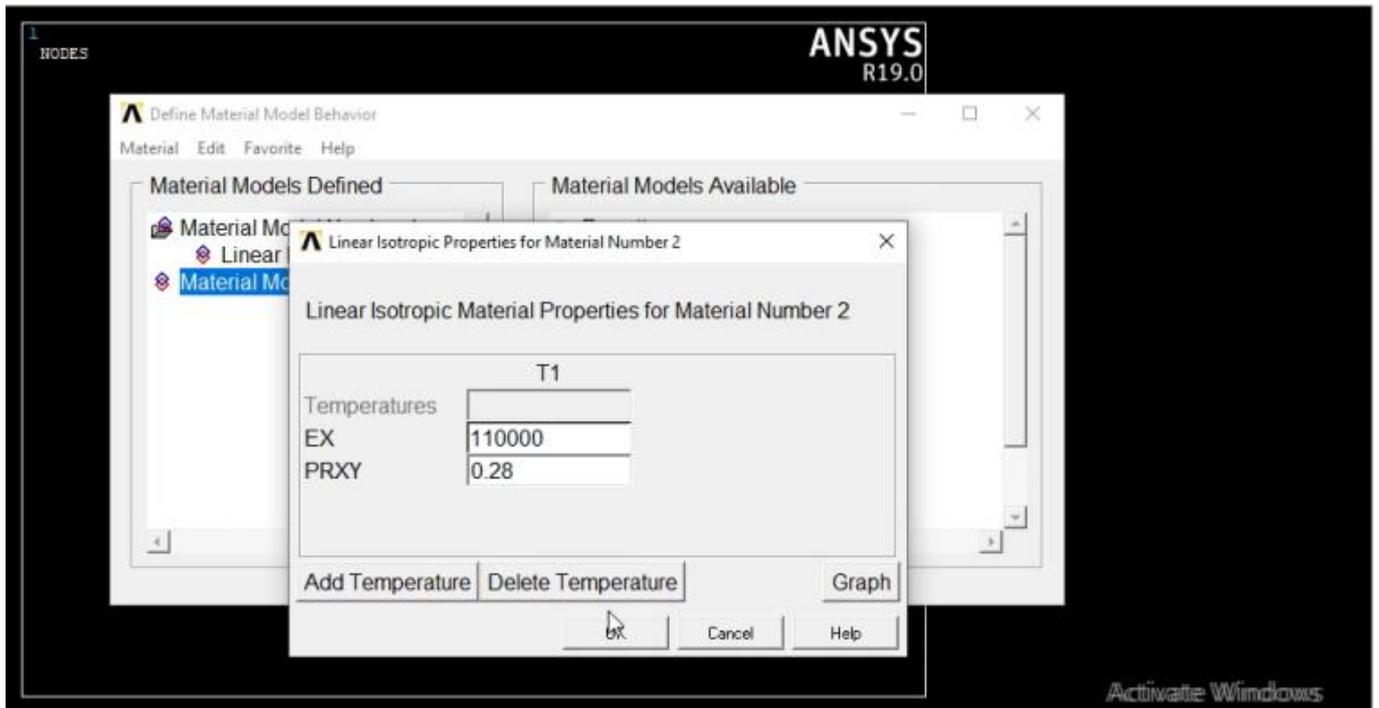


**Figure 39:** exprimé la déclaration de module d'élasticité et coefficient de poisson de première matières (aciers de construction)

Ensuite en clique sue **matériel** ⇒ **new matériel** ⇒ et en fait les mêmes étapes pour déclarer le deuxième matériau

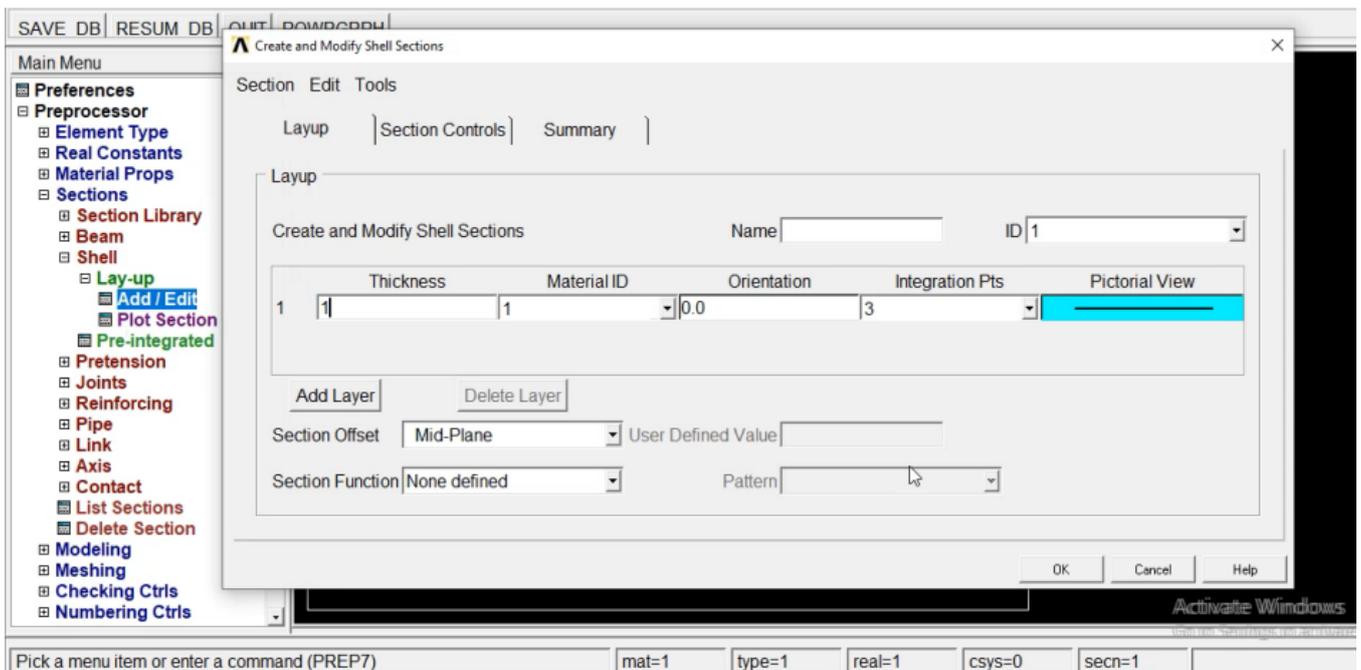


**Figure 40:** Déclaration du deuxième matériau



**Figure 41:** Déclaration de module d'élasticité et coefficient de poisson de deuxième matériau (fonte grise)

Après en clique sur section et choisir l'option **Shell et lay-up** ⇒ **add \EDIT** pour déclarer ID de chaque matériau



**Figure 42:** déclarations d'ID de matière de l'acier de constructions

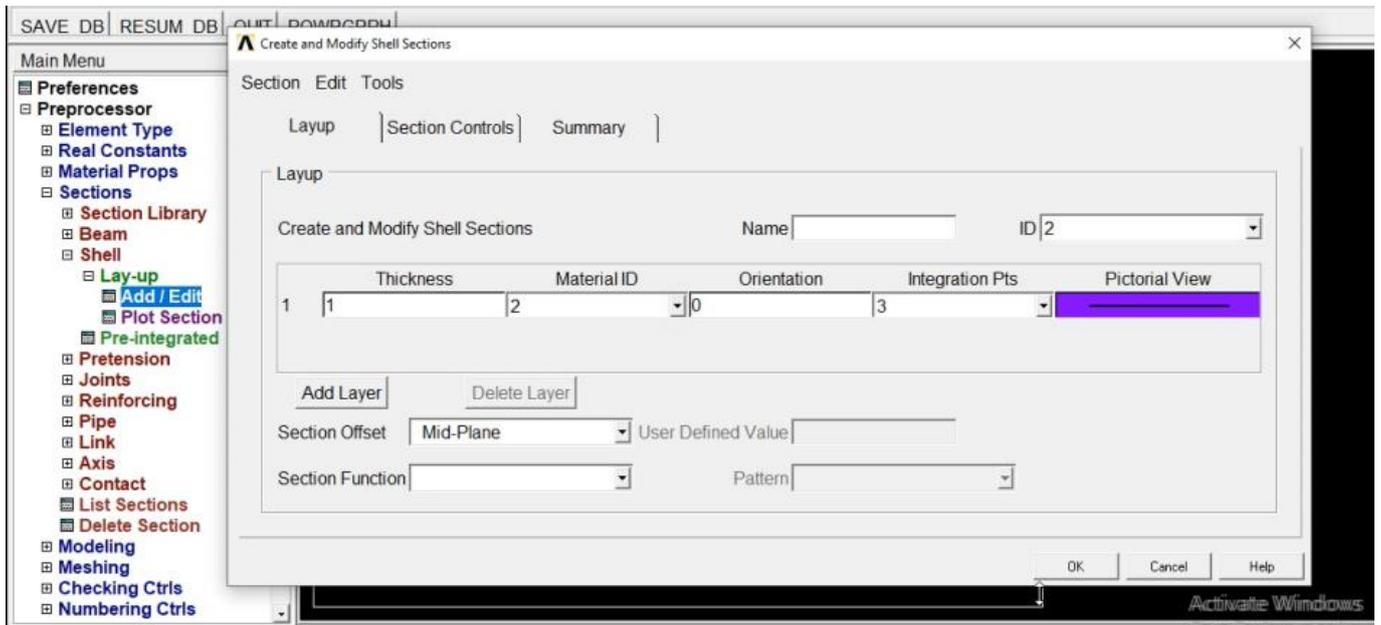


Figure 43: déclaration d'ID de la matière de la fonte grise

Après en clique sur **modeling** ⇒ **create** ⇒ **area** ⇒ **rectangle** ⇒ **by 2 corners** ⇒ en déclare les coordonnées de notre corps

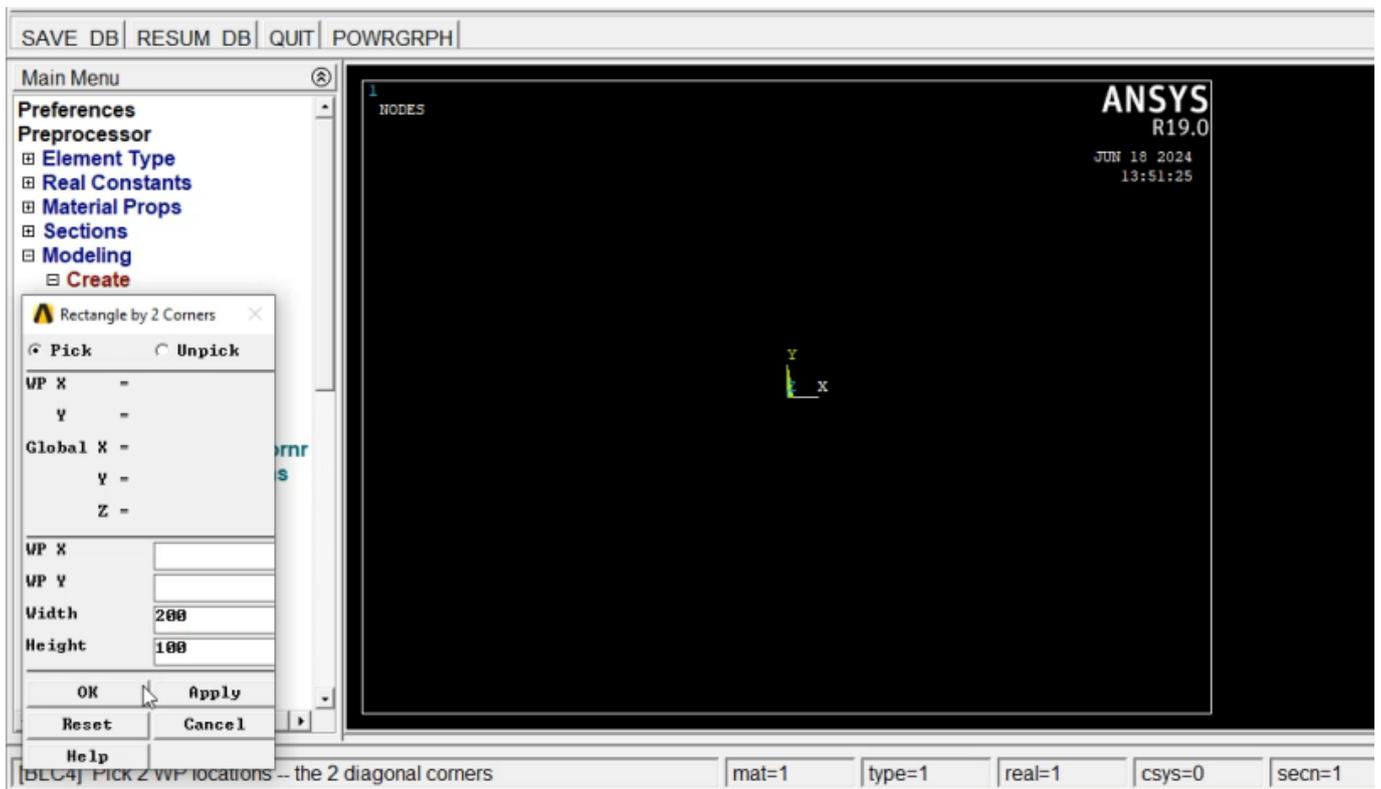


Figure 44: exprimé les coordonnées de notre rectangle

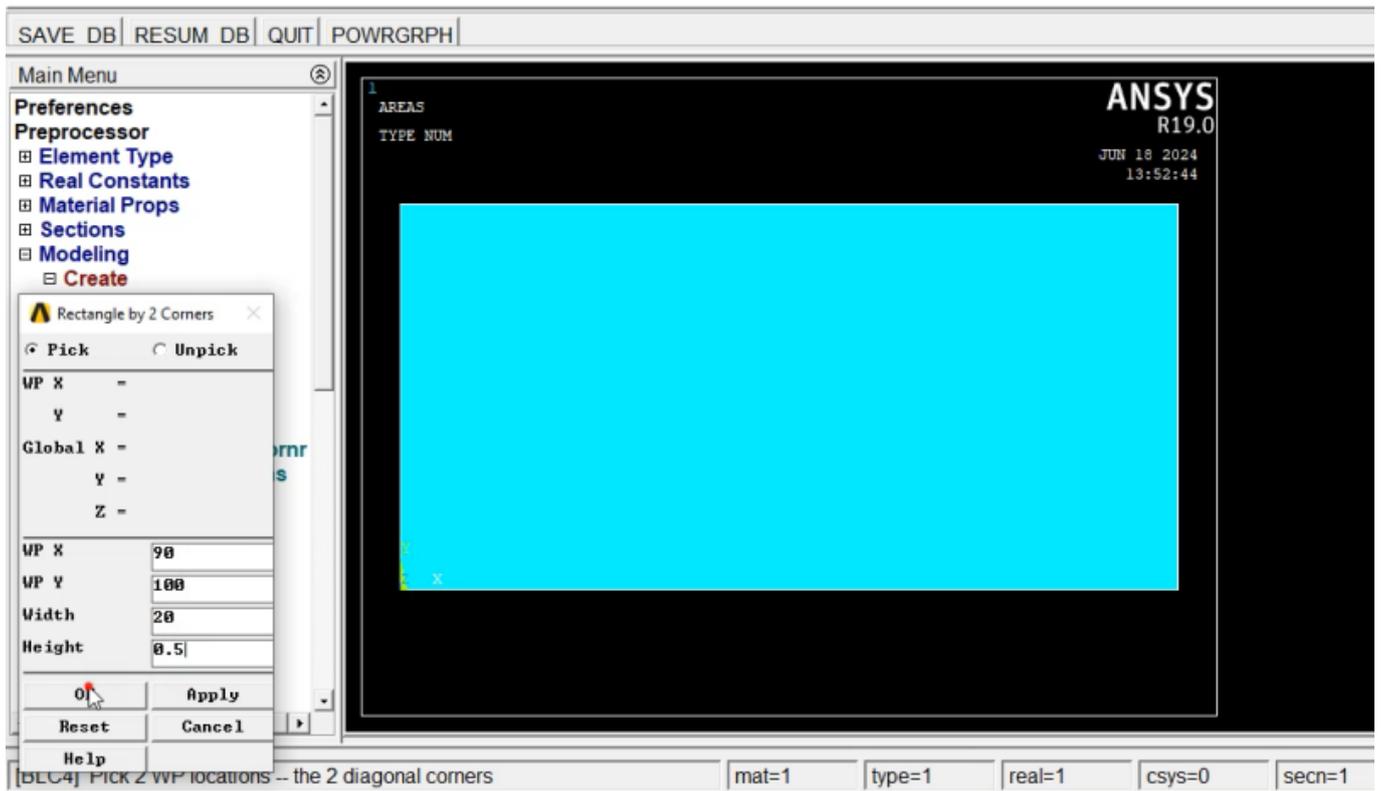


Figure 45: exprimé le rectangle et les coordonné de 1 ère disc

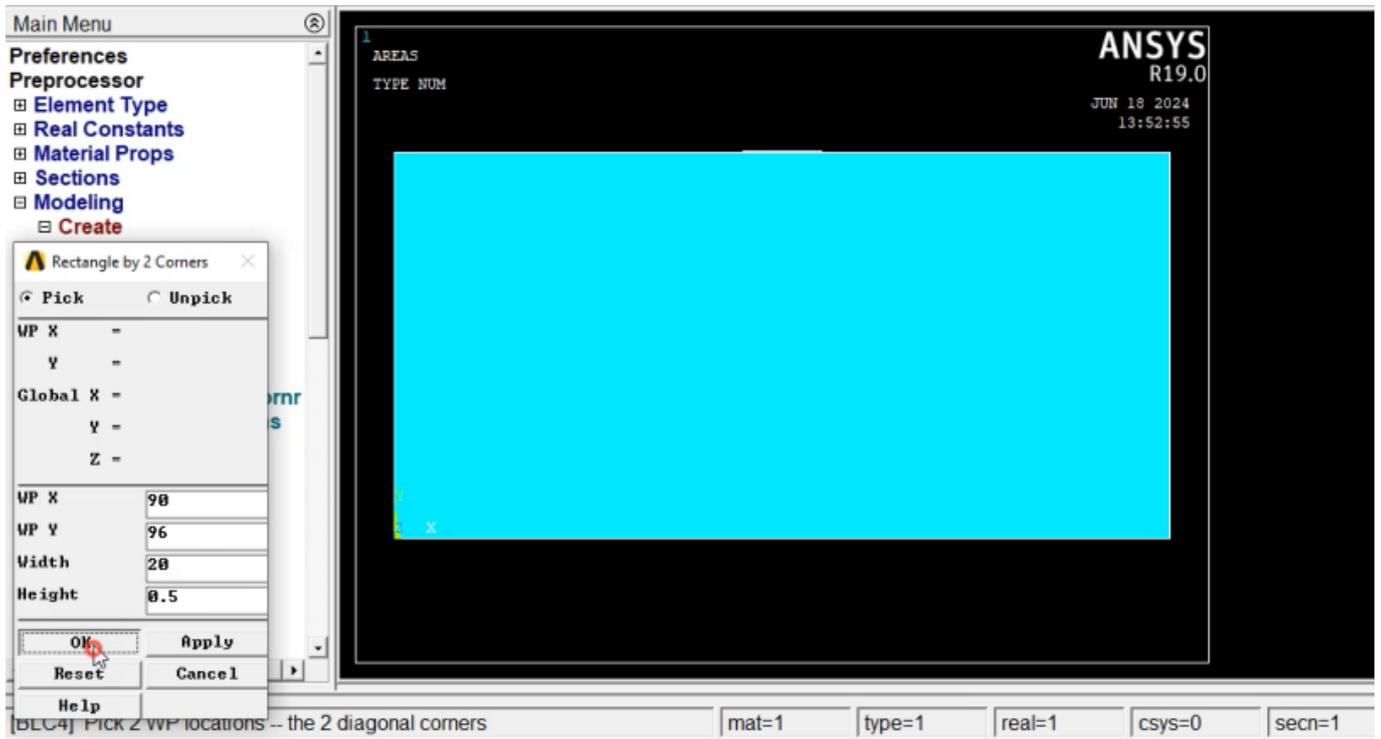
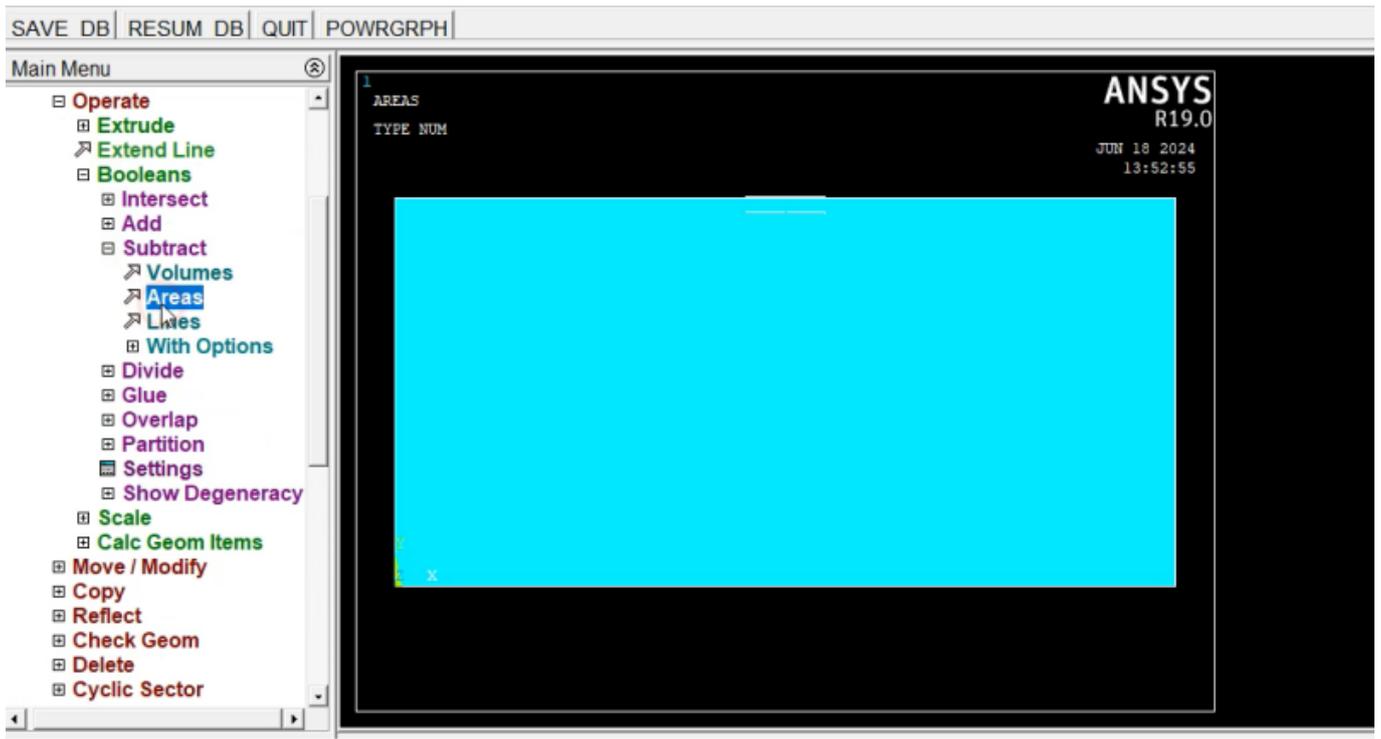
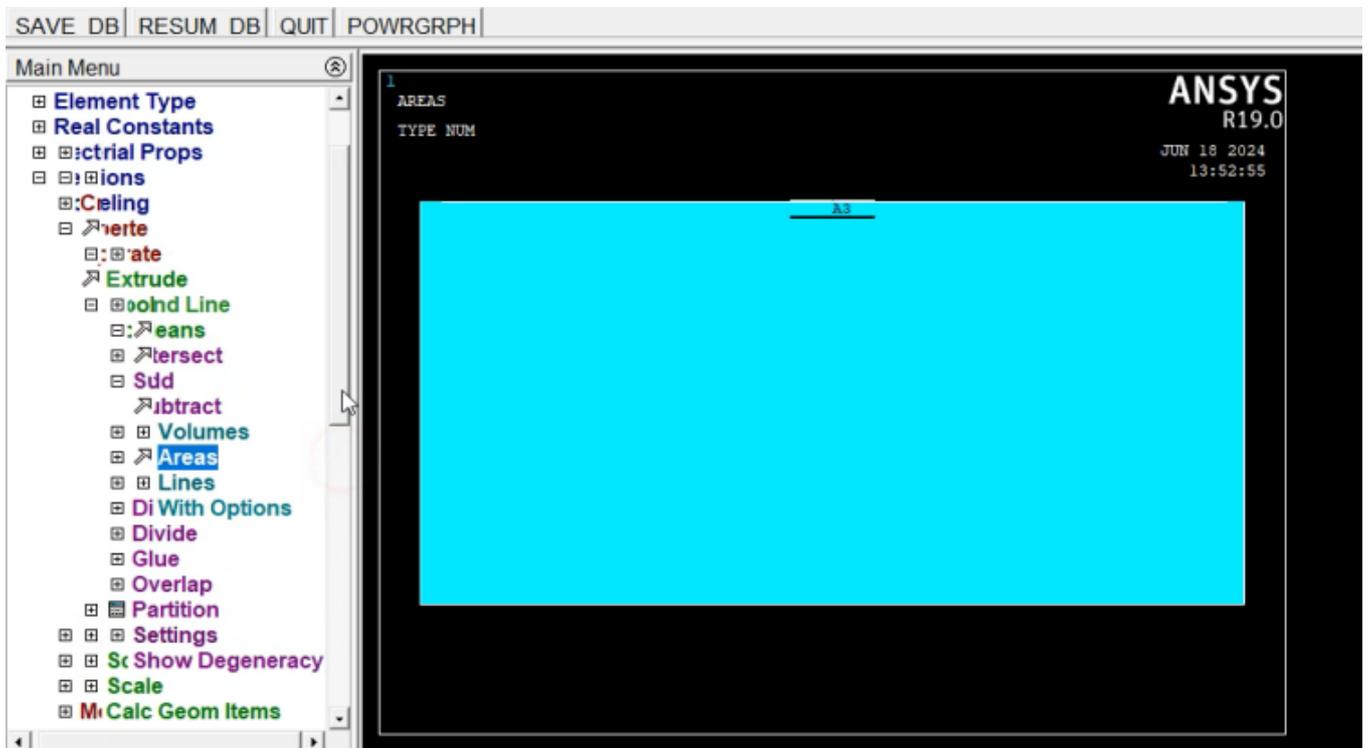


Figure 46: expiré notre Corp. et les coordonné du deuxième disc

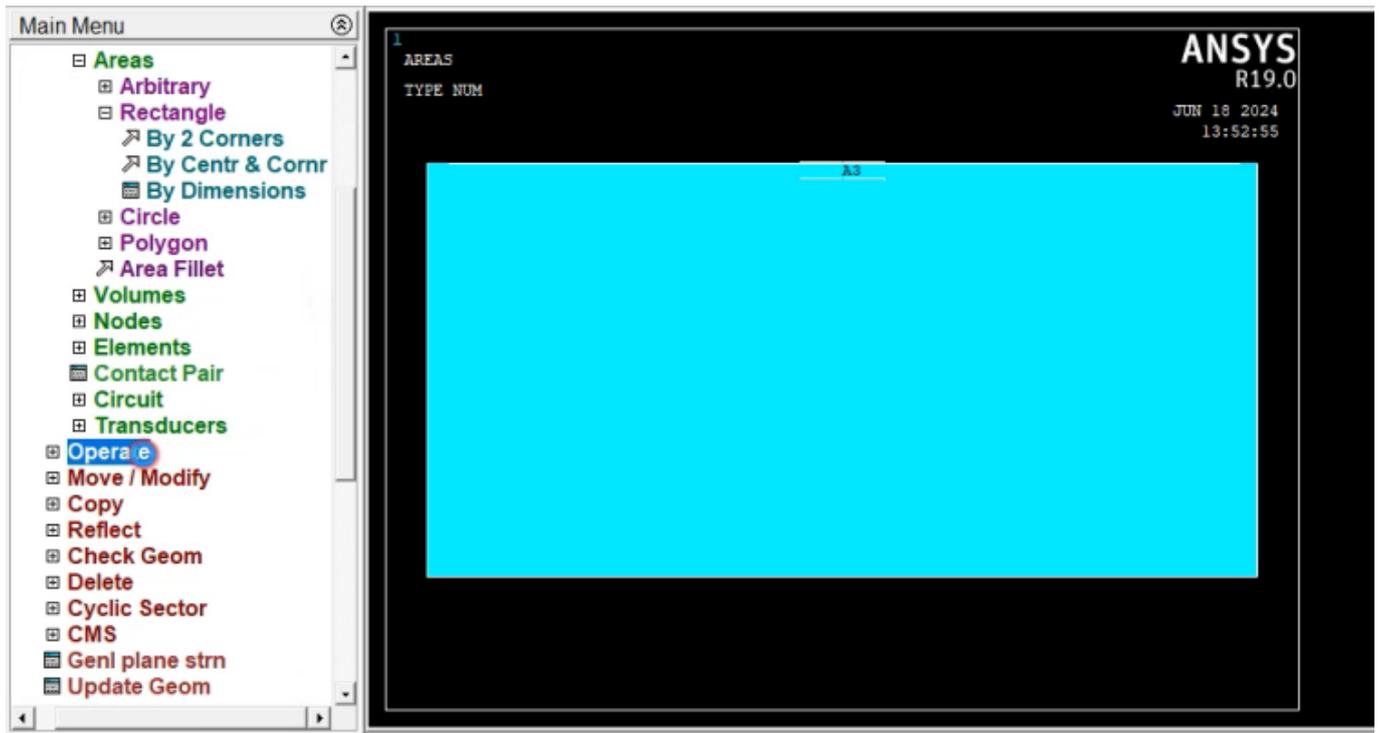


**Figure 47:** exprimé deux disc symétrique dans un rectangle. Un disc à l'intérieur et un disc à l'extérieur de ce rectangle

Ensuite en clique sur la fonction **operate** ⇒ **booleans** ⇒ **substrat** ⇒ **area** ⇒ pour faire l'enlèvement de matière de deuxième disc et remplace par un autre disc de même matière avec le premier disc à l'extérieur

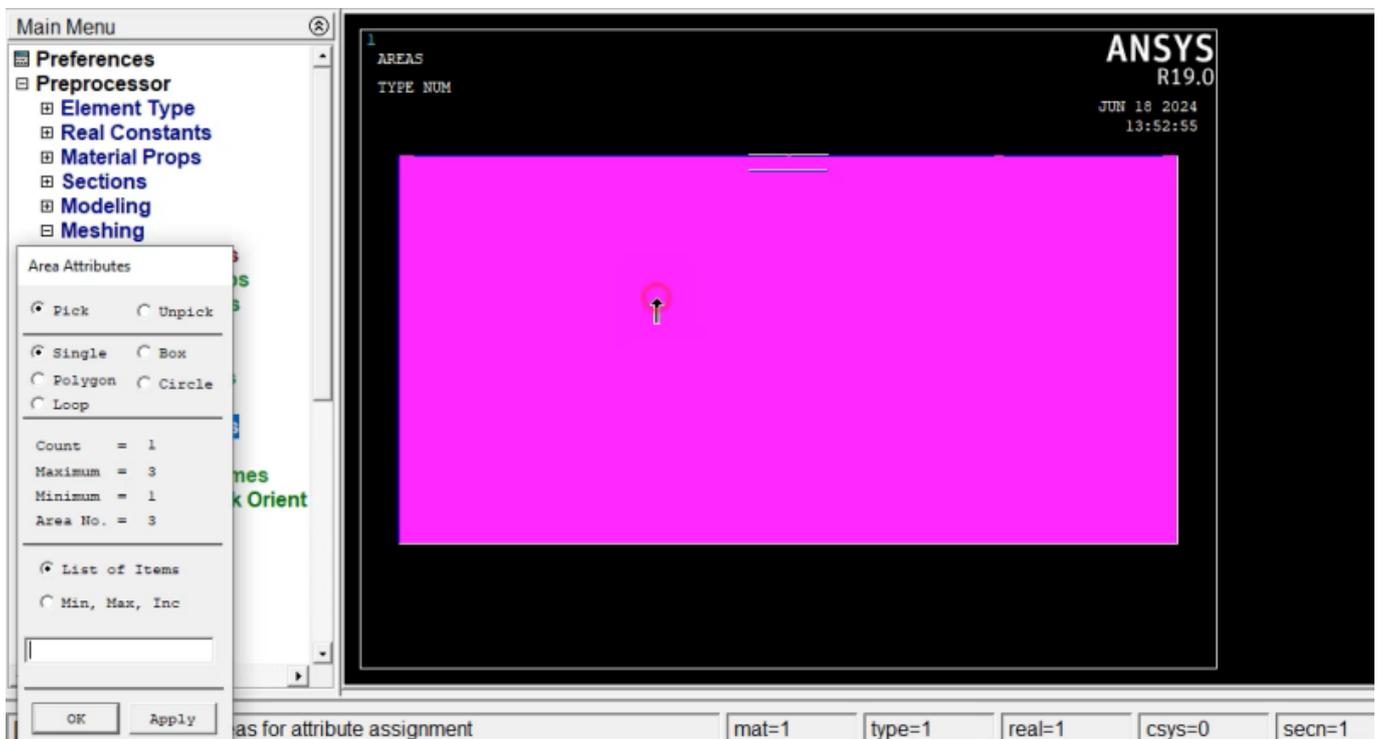


**Figure 48:** enlèvement de deuxième disc de l'intérieur de ce rectangle



**Figure 49:** Module de ajouter le disc à l'intérieur de ce rectangle de même matière à l'extérieur

Après en clique aussi sur notre **fonction** présidente **booleans** ⇒ **glue** ⇒ **area** pour fixer bien le deuxième disc à l'intérieur de rectangle



**Figure 50:** exprimé la fixation de deuxième disc à l'intérieur de rectangle

Ensuite en clique sur **Meshing** ⇒ **meshattributes** ⇒ **picked area** pour déclarer la matière des les deux discs et le rectangle.

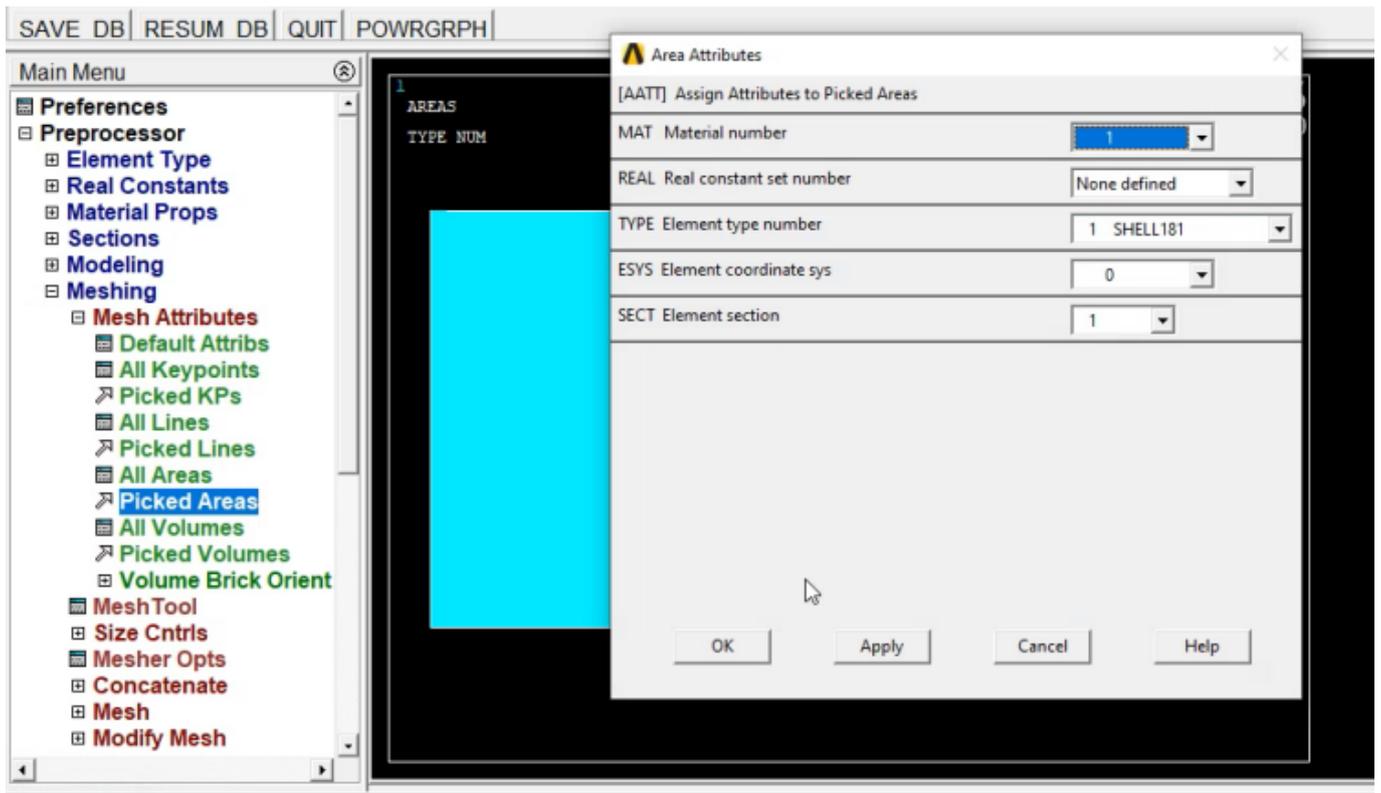


Figure 51 : Déclaration de la matière de rectangle (acier de construction)

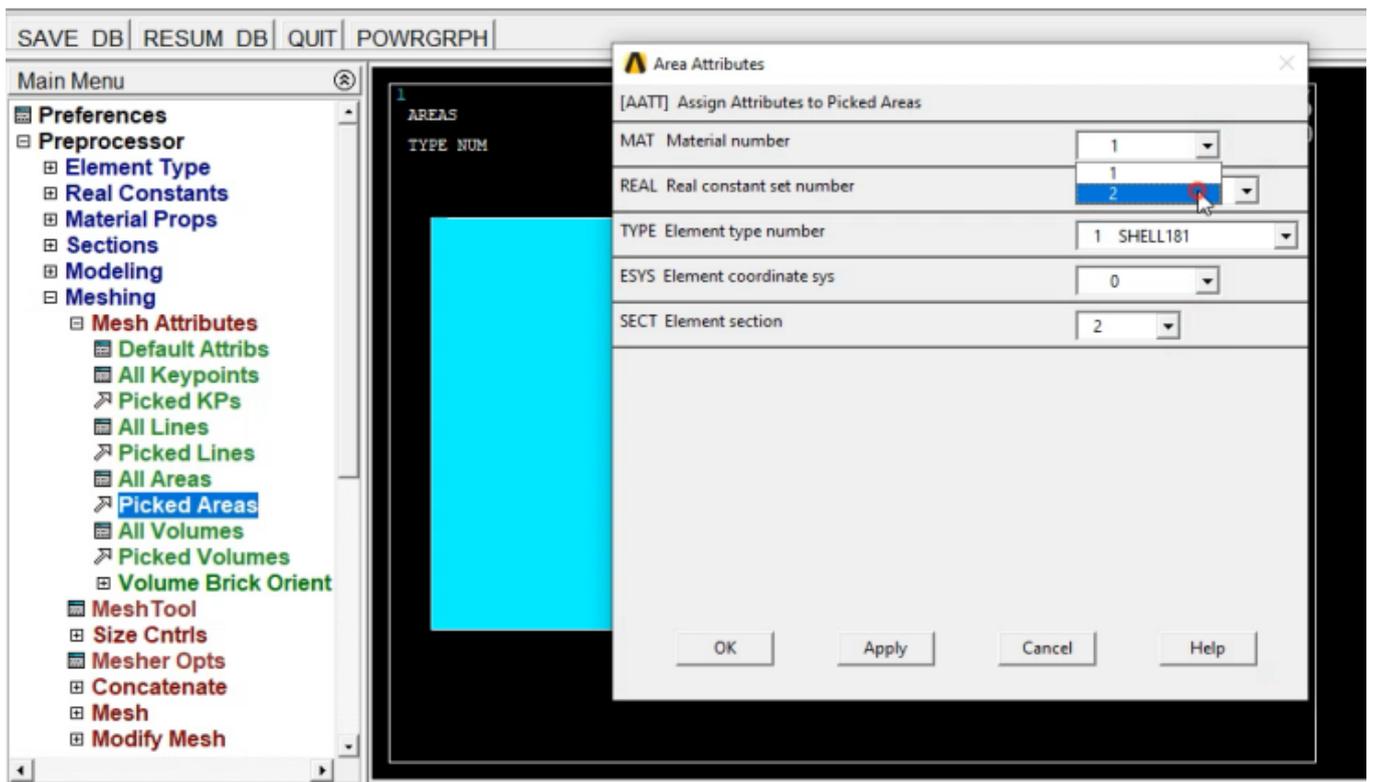
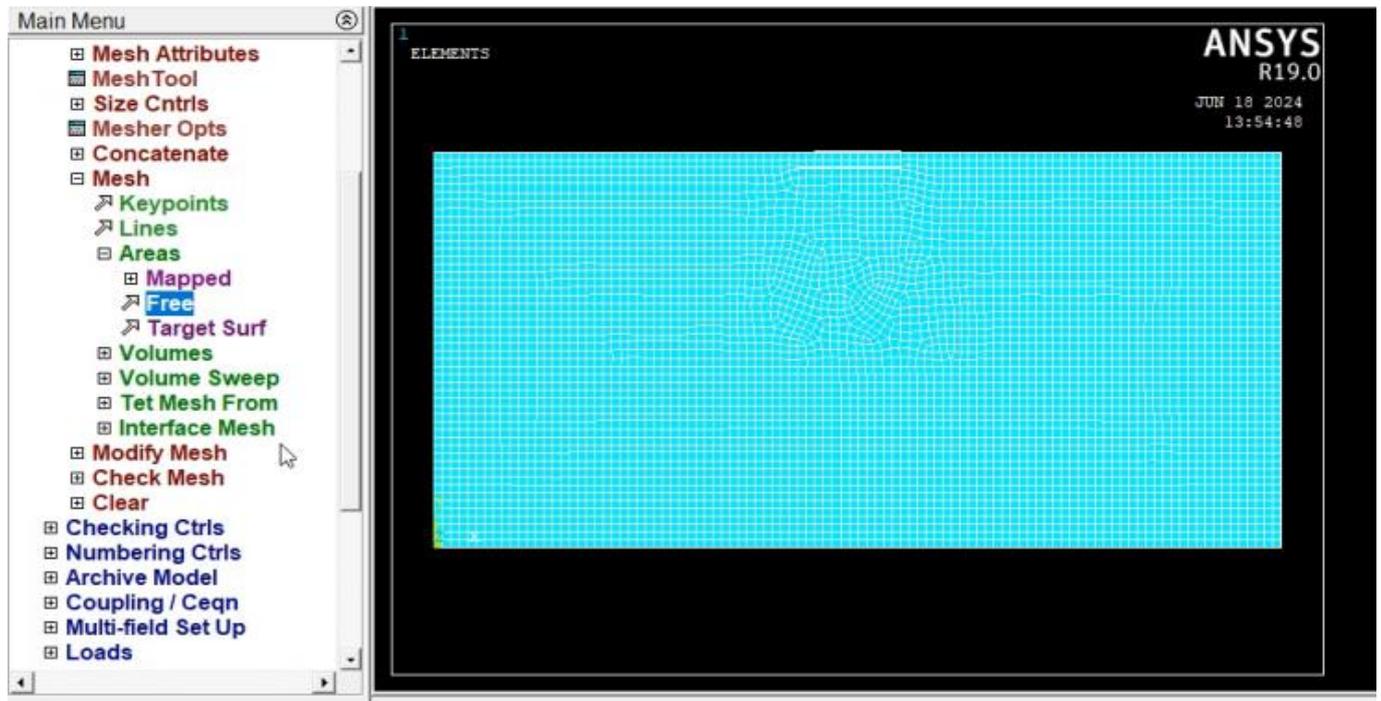


Figure 52: Déclaration de la matière de les deux disc (fonte grise)

Ensuite en clique sur **la fonction manuel size  $\Rightarrow$  area  $\Rightarrow$  picked all area** et en sélectionne le rectangle et les deux discs pour faire le mesh de rectangle et de les deux disc ensemble. Sachant que la précision de mesh c'est 2 mm.



**Figure 53:** exprimé le mesh de rectangle et de les deux disc ensemble

Après en choisissons **la fonction LOADS  $\Rightarrow$  DEFINE**

**LOADS  $\Rightarrow$  APPLY  $\Rightarrow$  structural  $\Rightarrow$  displacement  $\Rightarrow$  on line  $\Rightarrow$  s** en applique des contraintes dans les coté pour la fixation de rectangle. et en fait les meme étapes pour faire une rotation sur l'axe Y de 5 degré et 0.0872 rad.

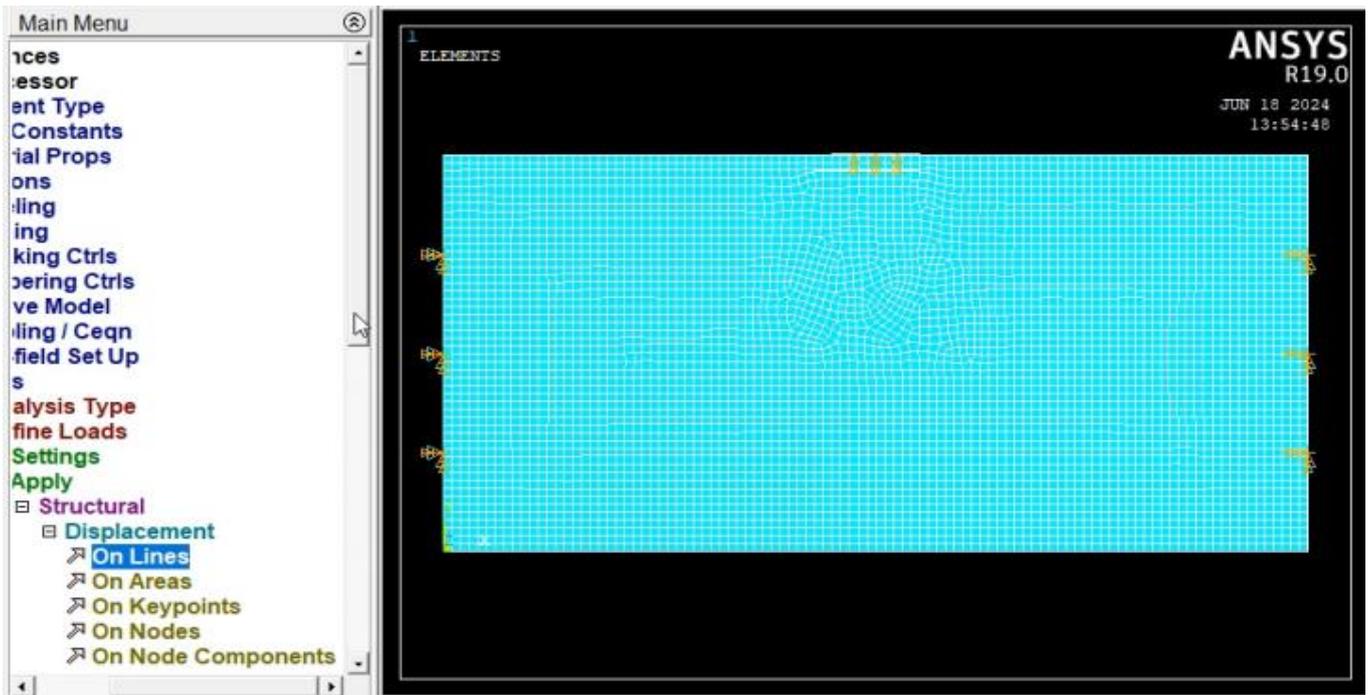


Figure 54: fixation de rectangle et rotation de première disc sur l'axe Y

Ensuite en clique sur l'option de SOLUTION ⇒ la fonction CURRENT LS pour prendre notre solution ⇒ plot results ⇒ contour plot ⇒ nodal solution :

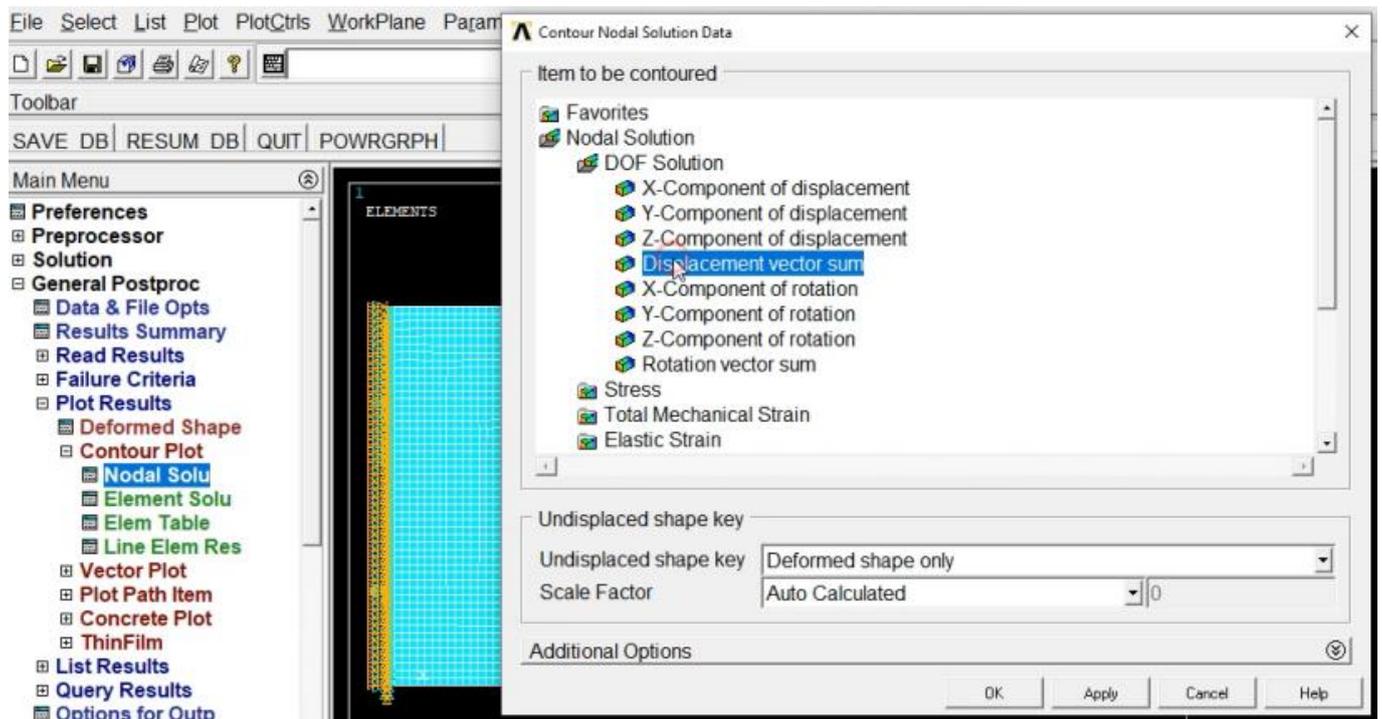


Figure 55: exprimé la partie de solution de déplacement

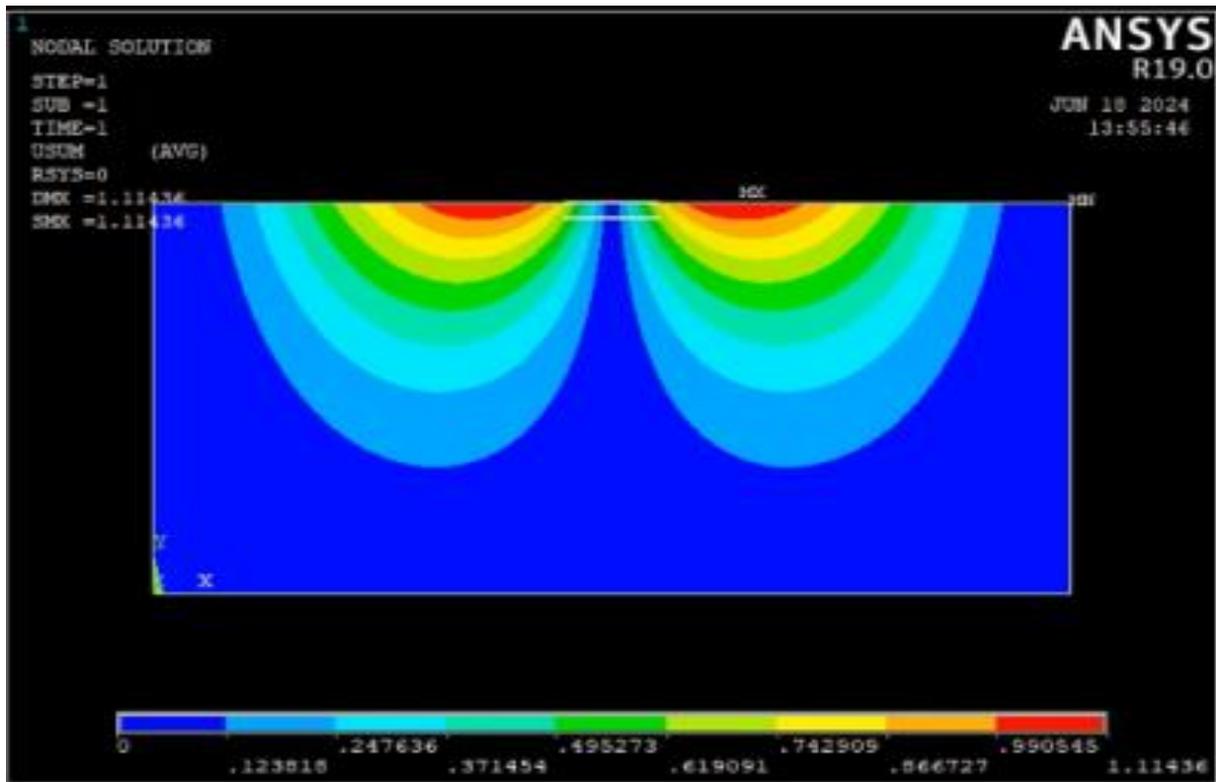


Figure 56: le champ de déplacement du premier disc sur le rectangle et sur le deuxième disc

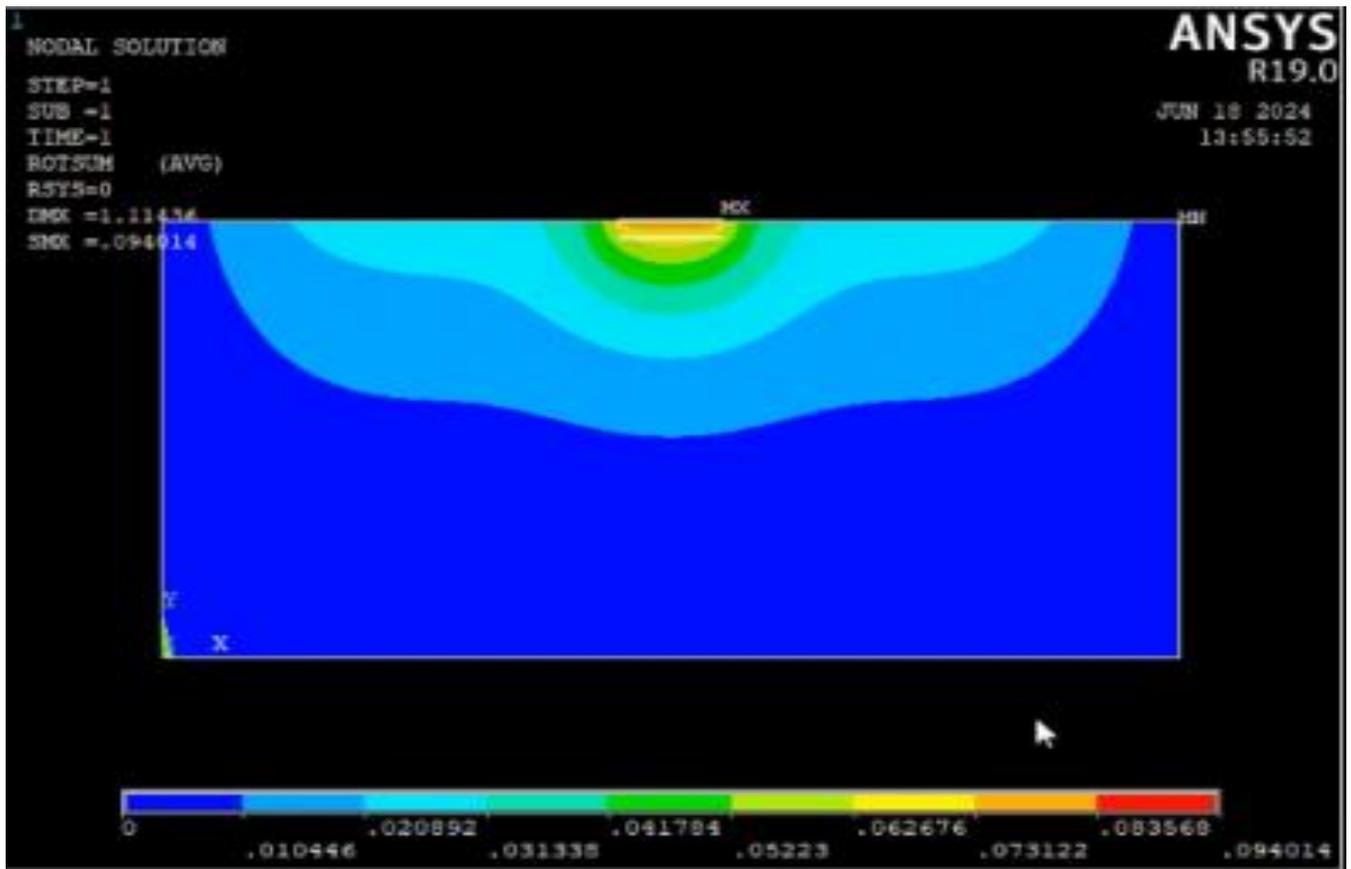
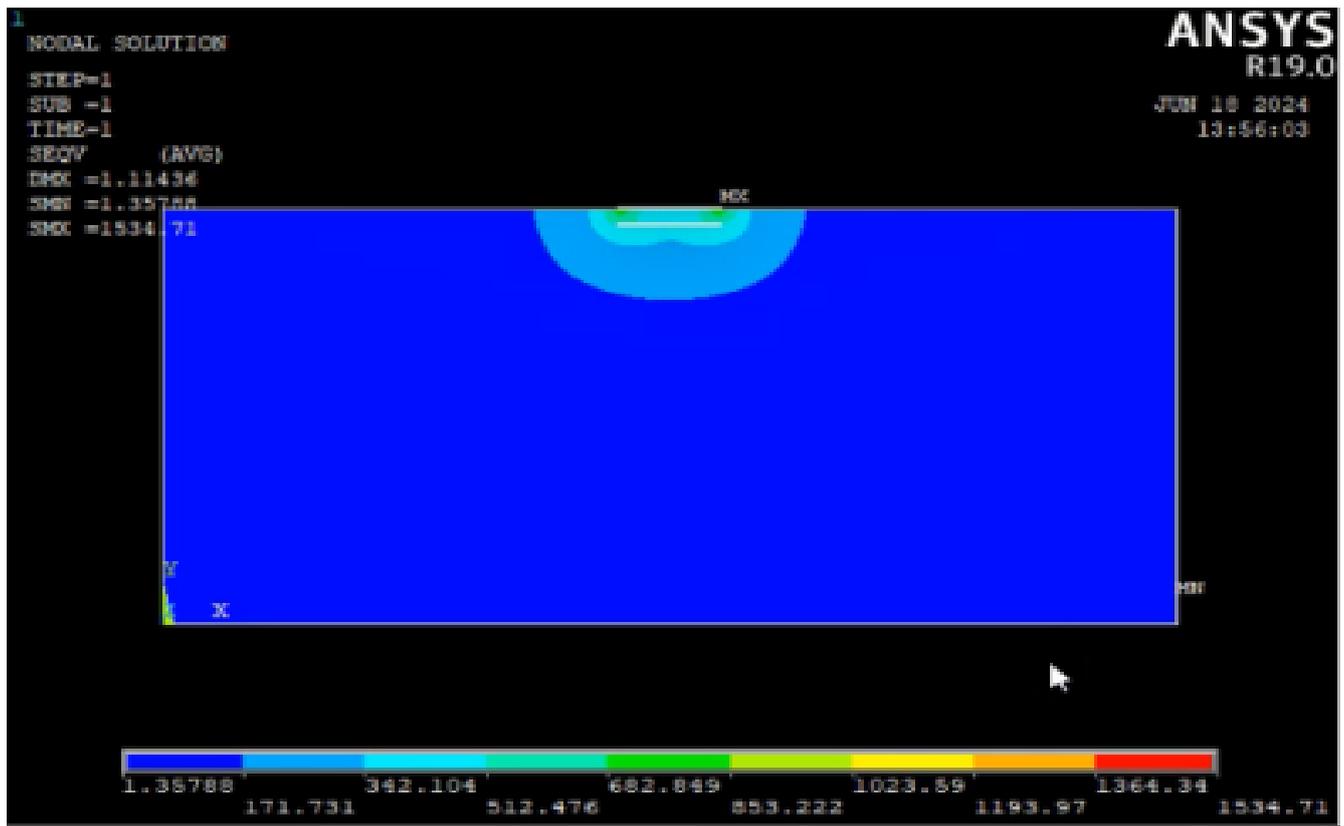
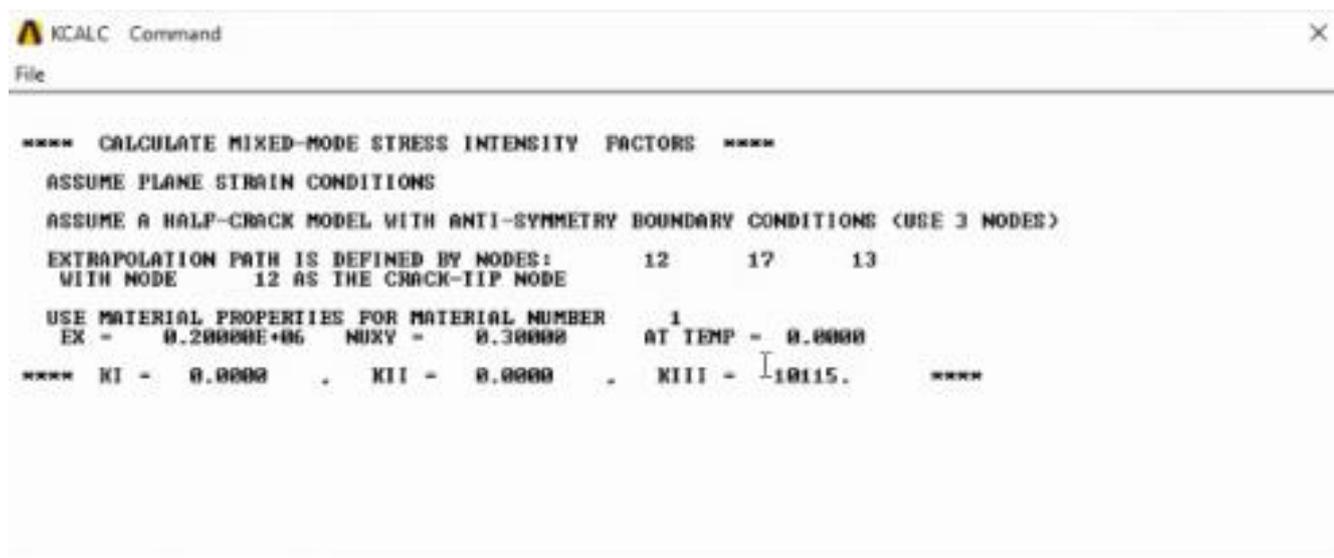


Figure 57: exprimé la somme des vecteurs des déplacements



**Figure 58:** exprimé la variation des contraintes (Von mises stress)

Après en clique sur **PATH OPERATIONS** ⇒ **DEFINE PATH** ⇒ **BY NODES** et en choisissons 3 zones dans le deuxième disc. Ensuite en clique sur l'option **NODAL CALCS** et en choisissons **STRESS IN FACTR**.



**Figure 59:** exprimé le facteur d'intensité au niveau de deuxième disc.

Ensuite en clique sur **MAP ONTO PATH** ⇒ en choisissons **DOF SOLUTION** ⇒ **translation Uz** pour découvrir notre graphe de déplacement.

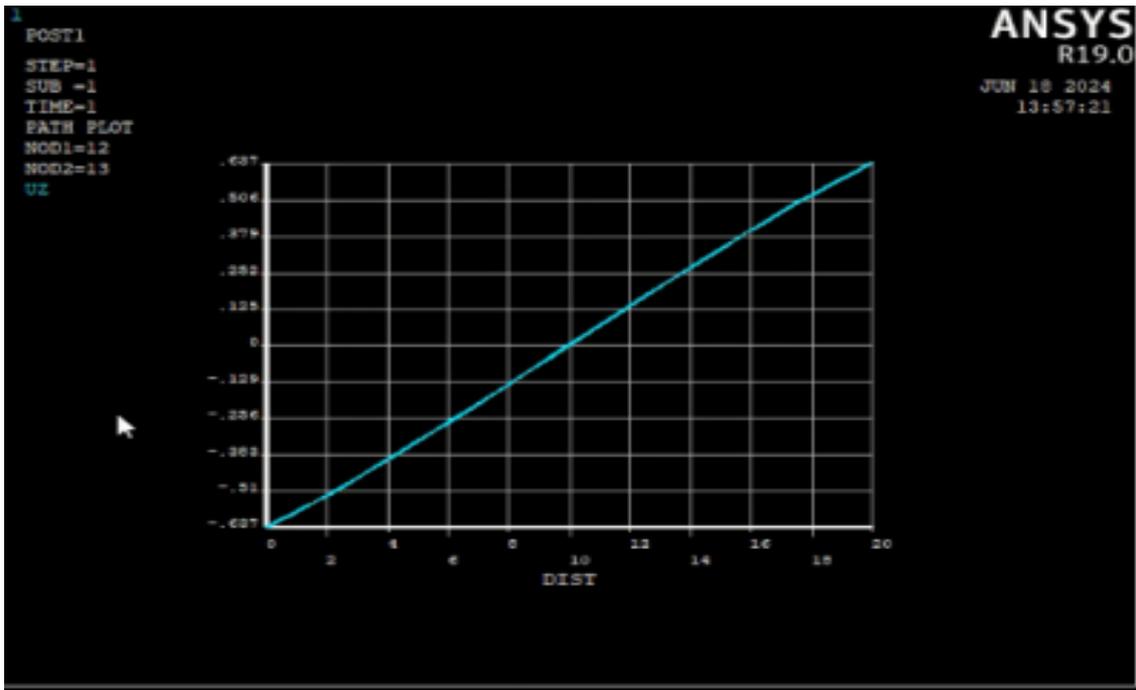


Figure 60: exprimé le graphe de déplacement du premier disc sur le rectangle et le deuxième disc.

Et pour une autre fois en repait l'étape passé pour en peut arriver à le graphe de contraintes.

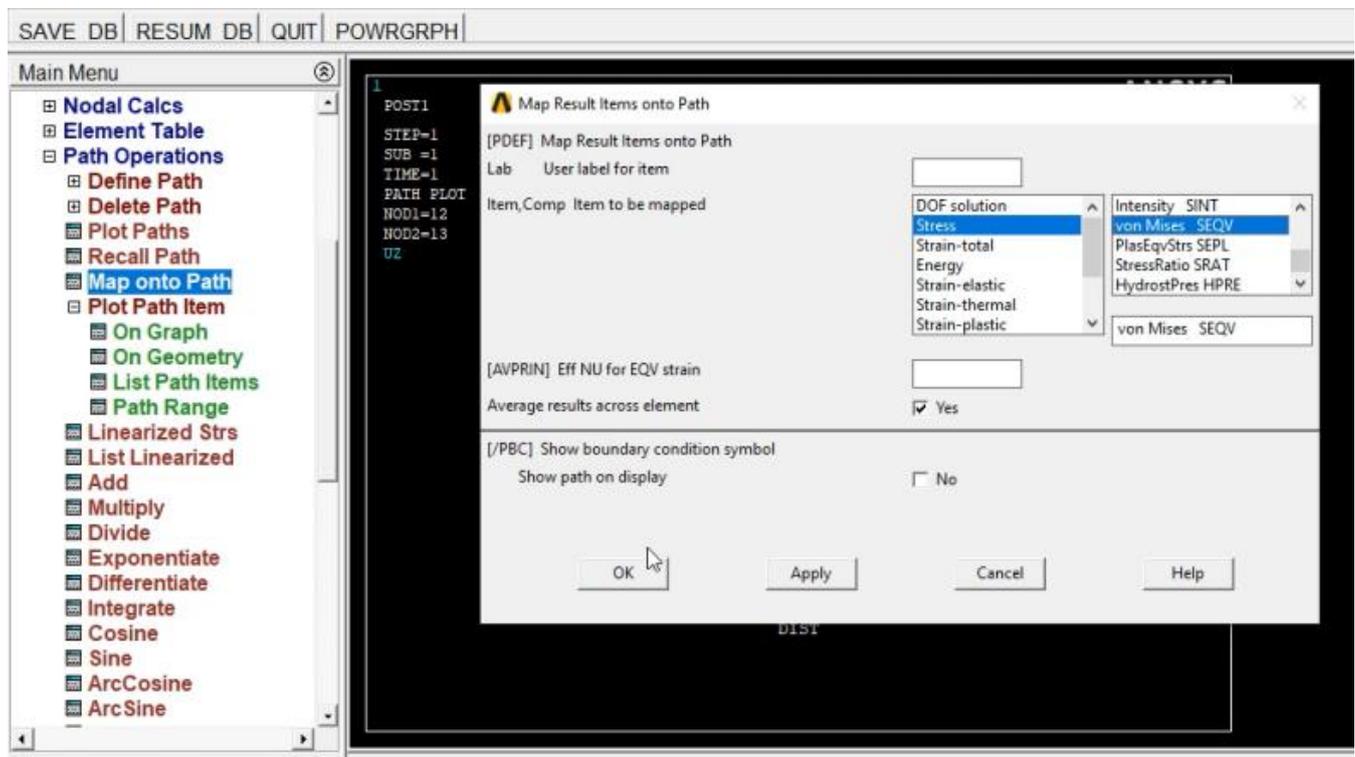
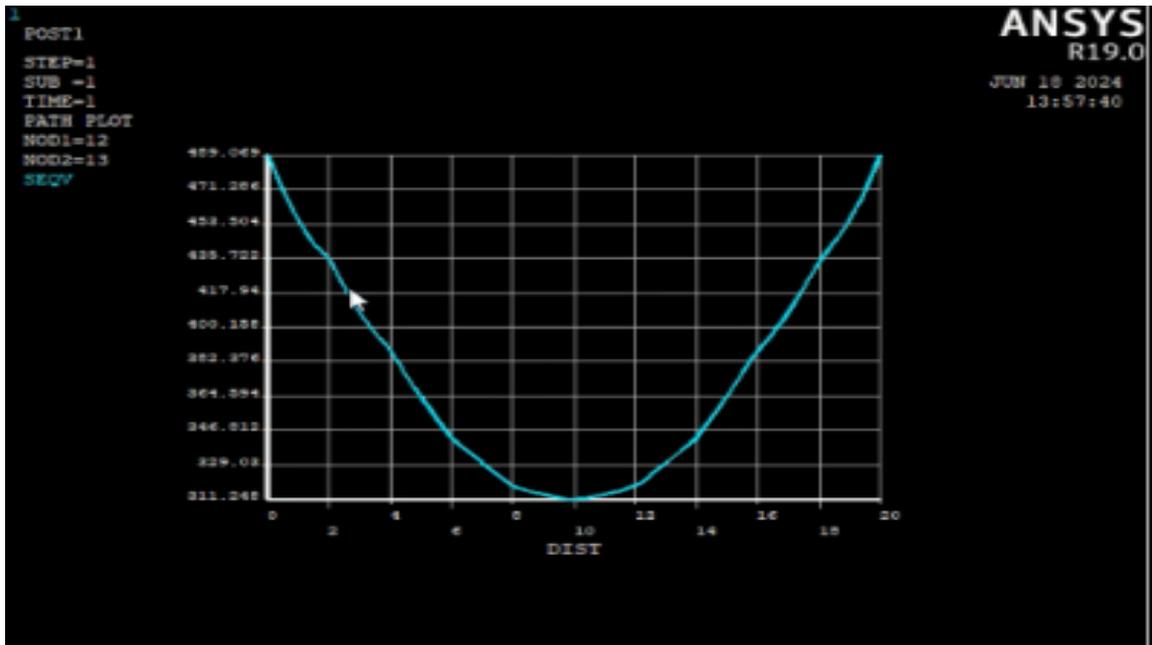


Figure 61 : les étapes qui permet à nous de dessiné le graphe de contrainte.



**Figure 62:** exprimé le graphe qui exprimes la variation des contraintes .

## References bibliographies

- [1] Florence A.L., 1961, Two contact problems for an elastic layer, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics
- [2] Low R.D., 1972, On the torsion of elastic half-space with embedded penny-shaped flaws, Journal of Applied Mechanics
- [3] Dhawan G.K., 1974, On the torsion of elastic half-space with penny shaped-crack, Defence Science Journal
- [4] Bacci A., Bennati S., 1996, An approximate explicit solution for the local torsion of an elastic layer, Mechanics of Structures and Machines
- [5] Madani F., Kebli B., 2017, Axisymmetric torsion of an internally cracked elastic medium by two embedded rigid discs, Mechanics and Mechanical Engineering,
- [6] Madani F., Kebli B., 2019, Axisymmetric torsion of an elastic layer sandwiched between two elastic half-spaces with two interfaced cracks, Studia Geotechnica et Mechanical
- [7] Kebli B., Baka Z., 2019, Annular crack in an elastic half-space. International Journal of Engineering Science,
- [8] Dean G. Duffy. Mixed boundary value problems. Chapman Hall/CRC, 2008.
- [9] B.Kebli et M.Merchiche. Axisymmetric Torsion of an Elastic Layer by an Adhered Rigid Disc. Canadian Journal on Mechanical Sciences and Engineering 2011
- [10] BRAKE DISC ANALYSIS WITH THE HELP OF ANSYS SOFTWARE Janvijay Pateriya, Raj Kumar Yadav, Vikas Mukhraiya and Pankaj Singh Asst. Prof. Department of Mechanical Engineering AIST Sagar M.P