

collection génie civil dirigée par Jacky Mazars

# Dynamique des structures

*application aux ouvrages de génie civil*

Patrick Paultre

hermes

Lavoisier

# Table des matières

Avant-propos . . . . .	15
<b>Chapitre 1. Introduction . . . . .</b>	<b>19</b>
1.1. Réponse dynamique . . . . .	20
1.2. Charges dynamiques . . . . .	21
1.2.1. Charges périodiques . . . . .	21
1.2.1.1. Charges harmoniques simples . . . . .	21
1.2.1.2. Charges périodiques quelconques . . . . .	22
1.2.2. Charges apériodiques . . . . .	22
1.2.2.1. Charges impulsionnelles . . . . .	22
1.2.2.2. Charges arbitraires de longue durée . . . . .	23
1.3. Considérations additionnelles . . . . .	23
1.4. Degré de liberté dynamique . . . . .	24
1.5. Modélisation d'un problème dynamique . . . . .	25
1.5.1. Concentration de la masse . . . . .	26
1.5.2. Méthode de Rayleigh-Ritz . . . . .	27
1.5.3. Méthode des éléments finis . . . . .	28
1.6. Analyse dynamique des structures . . . . .	30
1.7. Essais dynamiques . . . . .	33
1.8. Lectures suggérées . . . . .	34
<b>PREMIÈRE PARTIE. SYSTÈMES À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>Chapitre 2. Équation du mouvement . . . . .</b>	<b>37</b>
2.1. Paramètres de réponse . . . . .	37
2.2. Charge statique . . . . .	38
2.3. Charge dynamique . . . . .	39
2.4. Effets des forces de gravité . . . . .	41

2.5.	Mouvement de la base . . . . .	42
<b>Chapitre 3. Régime libre de l'oscillateur élémentaire . . . . .</b>		47
3.1.	Équation caractéristique . . . . .	47
3.2.	Régime libre conservatif - oscillateur harmonique . . . . .	48
3.3.	Énergie de l'oscillateur élémentaire conservatif . . . . .	54
3.4.	Régime libre dissipatif . . . . .	56
3.4.1.	Amortissement sous-critique . . . . .	56
3.4.2.	Amortissement critique . . . . .	59
3.4.3.	Amortissement surcritique . . . . .	60
3.5.	Décrément logarithmique . . . . .	62
3.6.	Essai de vibration libre . . . . .	64
<b>Chapitre 4. Régime forcé harmonique . . . . .</b>		69
4.1.	Régime forcé conservatif . . . . .	70
4.2.	Régime forcé dissipatif . . . . .	75
4.3.	Résonance . . . . .	81
4.4.	Régime permanent dû à une force en cosinus . . . . .	83
4.5.	Facteurs d'amplification dynamique . . . . .	84
4.6.	Pulsations de résonance . . . . .	86
4.7.	Réponse complexe en fréquence . . . . .	87
4.8.	Appareils de mesure des vibrations . . . . .	90
4.8.1.	Capteur de déplacement ou sismographe . . . . .	91
4.8.2.	Capteur d'accélération ou accéléromètre . . . . .	93
4.9.	Isolation des vibrations . . . . .	93
4.9.1.	Force verticale oscillatoire . . . . .	94
4.9.2.	Mouvement harmonique de la base . . . . .	96
4.10.	Excentricité de la masse . . . . .	100
<b>Chapitre 5. Mesure de l'amortissement . . . . .</b>		107
5.1.	Méthode d'affaiblissement . . . . .	107
5.2.	Méthode d'amplification . . . . .	108
5.3.	Méthode de l'acuité de résonance . . . . .	109
5.4.	Énergie dissipée par amortissement . . . . .	112
5.4.1.	Énergie dissipée par amortissement visqueux . . . . .	113
5.4.2.	Amortissement interne dans les matériaux . . . . .	117
<b>Chapitre 6. Régime permanent périodique . . . . .</b>		123
6.1.	Représentation d'une fonction périodique en série de Fourier . . . . .	124
6.1.1.	Série de Fourier sous forme trigonométrique . . . . .	124
6.1.2.	Série de Fourier sous forme complexe ou exponentielle . . . . .	130
6.2.	Spectre de Fourier . . . . .	131

6.3.	Réponse à un chargement périodique . . . . .	133
6.3.1.	Chargement décomposé en série de Fourier trigonométrique . . .	133
6.3.2.	Chargement décomposé en série de Fourier exponentielle . . .	136

## **Chapitre 7. Réponse à une charge arbitraire . . . . . 141**

7.1.	Réponse à une impulsion . . . . .	141
7.2.	Impulsion de Dirac ou fonction delta . . . . .	143
7.3.	Réponse à une impulsion de Dirac . . . . .	144
7.4.	Intégrale de Duhamel . . . . .	145
7.5.	Intégrale de convolution . . . . .	147
7.6.	Évaluation numérique de l'intégrale de Duhamel . . . . .	150
7.6.1.	Système conservatif . . . . .	150
7.6.2.	Système dissipatif . . . . .	151
7.7.	Réponse à une charge échelon . . . . .	156
7.8.	Réponse à une force augmentant linéairement . . . . .	158
7.9.	Réponse à une force constante appliquée lentement . . . . .	159
7.10.	Réponse à un choc . . . . .	161
7.10.1.	Impulsion sinusoïdale . . . . .	162
7.10.2.	Impulsion rectangulaire . . . . .	164
7.10.3.	Impulsion triangulaire . . . . .	167
7.10.4.	Impulsion triangulaire symétrique . . . . .	169
7.10.5.	Spectre de réponse aux chocs . . . . .	170

## **Chapitre 8. Réponse en fréquence à une charge arbitraire . . . . . 175**

8.1.	Transformation de Fourier . . . . .	175
8.2.	Relation entre la fonction de réponse en fréquence et la fonction de réponse impulsionnelle . . . . .	179
8.3.	Transformée de Fourier discrète . . . . .	181
8.4.	Transformée de Fourier rapide : algorithme de Cooley-Tukey . . . . .	184
8.5.	Graphe de fluence du signal . . . . .	191
8.6.	Calcul des nœuds doubles . . . . .	193
8.7.	Calcul de la transformée de Fourier rapide inverse . . . . .	194

## **Chapitre 9. Intégration temporelle des systèmes linéaires . . . . . 201**

9.1.	Généralités . . . . .	202
9.2.	Intégration exacte de fonctions de chargement linéaires par morceau . . . . .	204
9.3.	Méthode des différences centrées . . . . .	207
9.4.	Schémas d'intégration de Newmark . . . . .	214
9.4.1.	Méthode de l'accélération moyenne . . . . .	216
9.4.2.	Méthode de l'accélération linéaire . . . . .	219
9.4.3.	Généralisation de la formulation des méthodes de Newmark . . . . .	221

<b>Chapitre 10. Intégration temporelle des systèmes non linéaires</b> . . . . .	227
10.1. Équation d'équilibre dynamique incrémentale . . . . .	227
10.2. Méthode de Newmark . . . . .	229
10.3. Réduction de l'erreur par la méthode de Newton . . . . .	234
<b>Chapitre 11. Systèmes élémentaires généralisés</b> . . . . .	245
11.1. Assemblage de corps rigides . . . . .	246
11.2. Système flexible . . . . .	250
11.3. Système élémentaire généralisé . . . . .	255
11.4. Méthode de Rayleigh . . . . .	256
11.4.1. Système élémentaire . . . . .	257
11.4.2. Système continu . . . . .	257
11.4.3. Choix d'une fonction de déplacement . . . . .	260
11.4.4. Méthode de Rayleigh améliorée . . . . .	267
11.4.5. Système discret . . . . .	269
<b>Chapitre 12. Réponse à un tremblement de terre</b> . . . . .	279
12.1. Réponse dans le temps . . . . .	280
12.2. Spectre de réponse . . . . .	284
12.3. Spectre de dimensionnement . . . . .	289
12.4. Utilisation des spectres de design . . . . .	292
12.5. Mesure de l'intensité d'un tremblement de terre . . . . .	295
12.6. Spectre de Fourier, spectre de vitesse relative et énergie . . . . .	296
12.7. Réponse d'un système élémentaire généralisé . . . . .	300
12.8. Réponse non linéaire . . . . .	305
12.9. Spectre de réponse inélastique . . . . .	310
<b>DEUXIÈME PARTIE. SYSTÈMES À PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTÉ</b> . . . . .	317
<b>Chapitre 13. Équation du mouvement</b> . . . . .	319
13.1. Modèle simplifié d'un bâtiment . . . . .	320
13.2. Équation d'équilibre dynamique . . . . .	322
13.3. Coefficients d'influence de rigidité . . . . .	324
13.4. Condensation statique . . . . .	336
13.5. Mouvement d'ensemble de la base d'un système plan . . . . .	338
13.6. Structure avec mouvement différentiel des supports . . . . .	344
<b>Chapitre 14. Méthode des éléments finis</b> . . . . .	351
14.1. Aperçu de la méthode . . . . .	351
14.2. Formulation globale par le principe des travaux virtuels . . . . .	354
14.3. Formulation locale par le principe des travaux virtuels . . . . .	366
14.4. Transformation de coordonnées . . . . .	369

14.5.	Déplacements, déformations et contraintes généralisés . . . . .	372
14.6.	Élément fini barre à deux nœuds . . . . .	377
14.7.	Élément fini poutre . . . . .	380
14.8.	Élément poutre-colonne plan . . . . .	383
14.9.	Effet d'une force axiale : matrice de rigidité géométrique . . . . .	385
14.9.1.	Élément fini barre à deux nœuds . . . . .	385
14.9.2.	Élément fini poutre-colonne à deux nœuds . . . . .	388
14.10.	Règles d'assemblage des matrices élémentaires . . . . .	394
14.11.	Propriétés de la matrice de rigidité . . . . .	398
14.12.	Résolution . . . . .	399
14.13.	Post-traitement . . . . .	403
14.14.	Convergence et compatibilité . . . . .	404
14.15.	Éléments isoparamétriques . . . . .	405
<b>Chapitre 15.</b>	<b>Régime libre du système discret conservatif . . . . .</b>	<b>409</b>
15.1.	Signification physique des fréquences et modes propres . . . . .	410
15.2.	Détermination des fréquences propres de vibration . . . . .	412
15.3.	Détermination des modes propres de vibration . . . . .	414
15.4.	Formulation en fonction de la matrice de flexibilité . . . . .	418
15.5.	Influence de la force axiale . . . . .	420
15.5.1.	Charge de flambage . . . . .	420
15.6.	Orthogonalité des modes propres de vibration . . . . .	421
15.6.1.	Normalisation des vecteurs propres . . . . .	424
15.7.	Comparaison entre les prédictions et les valeurs mesurées . . . . .	425
15.8.	Influence de la matrice de masse . . . . .	428
<b>Chapitre 16.</b>	<b>Régime libre du système discret dissipatif . . . . .</b>	<b>435</b>
16.1.	Matrice d'amortissement proportionnelle . . . . .	435
16.2.	Superposition des matrices d'amortissement modal . . . . .	440
16.3.	Mesure de l'amortissement par excitation harmonique . . . . .	442
16.4.	Matrice d'amortissement non proportionnelle . . . . .	445
16.5.	Construction des matrices d'amortissement non proportionnelles . . . . .	447
<b>Chapitre 17.</b>	<b>Réponse à une charge arbitraire par superposition modale . . . . .</b>	<b>453</b>
17.1.	Coordonnées normales . . . . .	454
17.1.1.	Équations découplées du mouvement non amorti . . . . .	455
17.1.2.	Équations découplées du mouvement amorti . . . . .	456
17.2.	Méthode de superposition modale . . . . .	457
17.2.1.	Calcul de la réponse . . . . .	458
17.2.1.1.	Intégration numérique directe . . . . .	458
17.2.1.2.	Calcul de l'intégrale de Duhamel . . . . .	458
17.2.1.3.	Transformation de Fourier . . . . .	459

17.2.2.	Conditions initiales . . . . .	459
17.2.3.	Réponse totale . . . . .	466
17.2.4.	Calcul des forces élastiques . . . . .	466
17.3.	Erreur due à l'utilisation d'une base vectorielle propre tronquée . . . . .	466
17.4.	Amplification harmonique . . . . .	466
17.5.	Méthode de correction statique . . . . .	466
17.6.	Méthode des accélérations modales . . . . .	471
17.7.	Résumé de la méthode de superposition modale . . . . .	472
<b>Chapitre 18. Réponse à un tremblement de terre par superposition modale</b> . . . . .		473
18.1.	Superposition modale . . . . .	473
18.2.	Masses modales effectives . . . . .	480
18.3.	Erreur due à l'utilisation d'une base vectorielle tronquée . . . . .	481
18.4.	Superposition des réponses spectrales . . . . .	484
18.5.	Réponse des systèmes avec supports multiples . . . . .	492
<b>Chapitre 19. Propriétés des valeurs et des vecteurs propres</b> . . . . .		497
19.1.	Propriétés fondamentales . . . . .	498
19.2.	Expansion d'une matrice . . . . .	501
19.3.	Décalage spectral . . . . .	503
19.4.	Masses nulles . . . . .	503
19.5.	Transformation du problème aux valeurs propres généralisé en un problème aux valeurs propres standard . . . . .	506
19.6.	Quotient de Rayleigh . . . . .	509
19.6.1.	Propriété d'homogénéité . . . . .	509
19.6.2.	Propriété de stationnarité . . . . .	509
19.6.3.	Propriété d'encadrement . . . . .	511
19.7.	Caractérisation maxmin et minmax des valeurs propres . . . . .	512
19.8.	Théorème d'entrelacement de Cauchy . . . . .	515
19.9.	Propriétés des polynômes caractéristiques . . . . .	516
19.10.	Théorème d'inertie de Sylvester . . . . .	520
<b>Chapitre 20. Réduction de coordonnées</b> . . . . .		523
20.1.	Contraintes cinématiques . . . . .	524
20.2.	Condensation statique . . . . .	527
20.3.	Analyse de Rayleigh . . . . .	533
20.4.	Analyse de Rayleigh-Ritz . . . . .	535
20.5.	Vecteurs de Ritz dépendants du chargement . . . . .	541
20.6.	Méthode de réduction de Guyan-Irons . . . . .	553
<b>Chapitre 21. Méthodes numériques d'extraction modale</b> . . . . .		557
21.1.	Méthodes de transformation . . . . .	557

21.1.1.	Méthode de Jacobi . . . . .	558
21.1.2.	Méthode de Jacobi généralisée . . . . .	560
21.2.	Méthodes itératives . . . . .	568
21.2.1.	Itération inverse . . . . .	569
21.2.2.	Itération directe . . . . .	575
21.2.3.	Itération inverse avec décalage spectral . . . . .	579
21.2.4.	Itération inverse avec déflation orthogonale . . . . .	582
21.3.	Itération de sous-espaces . . . . .	582
21.3.1.	Algorithme . . . . .	583
21.3.2.	Choix des vecteurs d'itération de départ . . . . .	585

## Chapitre 22. Intégration temporelle des systèmes linéaires . . . . . 595

22.1.	Méthodes à pas multiples . . . . .	596
22.1.1.	Méthode à pas multiples pour les équations du premier ordre . . . . .	596
22.1.2.	Méthode à pas multiples pour les équations du deuxième ordre . . . . .	597
22.2.	Méthode des différences centrées . . . . .	598
22.3.	Méthode de Houbolt . . . . .	603
22.4.	Méthodes de Newmark . . . . .	604
22.5.	Méthode Wilson- $\theta$ . . . . .	609
22.6.	Méthodes de collocation . . . . .	611
22.7.	Méthode HHT- $\alpha$ . . . . .	615
22.8.	Estimation de la plus grande valeur propre . . . . .	620
22.9.	Analyse de la stabilité . . . . .	625
22.9.1.	Solutions exactes . . . . .	626
22.9.2.	Approximation discrète . . . . .	627
22.9.3.	Méthode des différences centrées . . . . .	627
22.9.4.	Méthode de Houbolt . . . . .	628
22.9.5.	Méthode de Newmark . . . . .	629
22.9.6.	Méthode Wilson- $\theta$ . . . . .	630
22.9.7.	Méthode HHT- $\alpha$ . . . . .	631
22.10.	Conditions de stabilité . . . . .	633
22.10.1.	Différences centrées . . . . .	639
22.10.2.	Méthodes de Newmark . . . . .	640
22.10.3.	Méthode Wilson- $\theta$ . . . . .	645
22.10.4.	Méthode HHT- $\alpha$ . . . . .	646
22.10.5.	Comparaison des différentes méthodes . . . . .	646
22.11.	Analyse de la consistance d'un schéma aux différences finies . . . . .	647
22.12.	Analyse de la précision . . . . .	650
22.12.1.	Précision de la méthode de Newmark . . . . .	651
22.12.2.	Mesure de la précision des schémas d'intégration . . . . .	652
22.13.	Filtrage des modes parasites et surestimation de la réponse . . . . .	653
22.14.	Choix d'une méthode d'intégration numérique directe . . . . .	658

<b>Chapitre 23. Intégration temporelle des systèmes non linéaires</b> . . . . .	663
23.1. Équation du mouvement incrémentale . . . . .	663
23.2. Méthode explicite des différences centrées . . . . .	664
23.3. Méthodes implicites de Newmark . . . . .	667
23.4. Réduction de l'erreur par la méthode de Newton . . . . .	668
23.5. Analyse non linéaire d'un bâtiment sous charges sismiques . . . . .	671
<b>Annexes</b> . . . . .	679
A. Nombres complexes . . . . .	679
A.1. Définition . . . . .	679
A.2. Représentation géométrique . . . . .	680
A.3. Forme trigonométrique . . . . .	680
A.4. Opérations . . . . .	682
A.5. Racine $n$ -ièmes . . . . .	683
<b>Bibliographie</b> . . . . .	685
<b>Index</b> . . . . .	693