



# Dimensionnement des structures

*une introduction*

Daniel Gay

Jacques Gambelin

*hermes*

---

## Table des matières



Avant-propos.....	17
<b>PREMIÈRE PARTIE. NIVEAU 1</b> .....	<b>21</b>
<b>Chapitre 1. Les bases du comportement élastique</b> .....	<b>23</b>
1.1. Forces de cohésion .....	24
1.2. Notion de contrainte .....	25
1.2.1. Définition .....	25
1.2.2. Représentation graphique.....	26
1.2.3. Contraintes normale et tangentielle.....	27
1.3. Loi de Hooke obtenue à partir d'une sollicitation uniaxiale.....	28
1.3.1. Description de l'essai de traction.....	28
1.3.2. Comportement mécanique linéaire .....	30
1.3.3. Comportement mécanique élastique .....	31
1.3.4. Interprétation de l'essai à l'échelle macroscopique.....	31
1.3.5. Interprétation de l'essai à l'échelle mésoscopique .....	32
1.3.6. Interprétation de l'essai à l'échelle microscopique .....	34
1.3.7. Résumé.....	35
1.4. Etat plan de contraintes.....	37
1.4.1. Définition .....	37
1.4.2. Relations de comportement en contraintes planes .....	38
1.4.2.1. Cas n° 1 : traction simple suivant $\vec{x}$ .....	39
1.4.2.2. Cas n° 2 : traction simple suivant $\vec{y}$ .....	40
1.4.2.3. Cas n° 3 : cisaillement pur.....	41
1.4.2.4. Etat de contrainte complet (superposition).....	43
1.4.3. Résumé.....	49
1.5. Cas particulier des poutres droites.....	50
1.5.1. Remarques préalables .....	50

1.5.1.1. Caractéristiques géométriques.....	50
1.5.1.2. Eléments de réduction du torseur de cohésion .....	50
1.5.2. Effets liés à la présence des éléments de réduction.....	52
1.5.2.1. Effort normal $\mathcal{N}$ .....	54
1.5.2.2. Effort tranchant $\mathcal{T}_y$ .....	56
1.5.2.3. Effort tranchant $\mathcal{T}_z$ .....	58
1.5.2.4. Moment de torsion $\mathcal{M}_t$ .....	60
1.5.2.5. Moment de flexion $\mathcal{M}_y$ .....	62
1.5.2.6. Moment de flexion $\mathcal{M}_z$ .....	64
<b>Chapitre 2. Approche énergétique du comportement des structures .....</b>	<b>67</b>
2.1. Travail et énergie.....	67
2.1.1. Travail élémentaire d'une force.....	67
2.1.2. Travail élémentaire d'un moment.....	68
2.2. Conversion du travail en énergie.....	68
2.2.1. Mise en évidence de l'énergie potentielle de déformation .....	68
2.2.2. Travail développé par un ressort.....	70
2.3. Quelques expressions classiques de l'énergie potentielle de déformation	73
2.3.1. Energies de déformation dans une poutre droite.....	73
2.3.1.1. Traction (ou compression).....	73
2.3.1.2. Torsion .....	76
2.3.1.3. Flexion pure .....	79
2.3.1.4. Flexion plane.....	82
2.3.2. Energie de déformation en état plan de contraintes .....	87
2.3.2.1. Cas n° 1 : $dF_x$ .....	87
2.3.2.2. Cas n°2 : $dF_x$ puis $dF_y$ .....	88
2.3.2.3. Cas n° 3 : $dF_x$ puis $dF_y$ puis $dF_{xy}$ .....	89
2.3.2.4. Différentes écritures de l'énergie potentielle; formes quadratiques .....	90
2.4. Travail développé par des sollicitations extérieures sur une structure.....	93
2.4.1. Poutre en flexion plane soumise à deux sollicitations.....	94
2.4.1.1. Exemple n°1 .....	94
2.4.1.2. Exemple n°2 .....	103
2.4.2. Poutre en flexion plane soumise à « n » sollicitations .....	109
2.4.3. Généralisation à une structure quelconque.....	112
2.4.3.1. Structure quelconque sollicitée par deux efforts $F_1$ et $F_2$ ....	112
2.4.3.2. Structure quelconque sollicitée par « n » efforts $F_1, \dots, F_n$ .....	113
2.4.3.3. Structure quelconque avec recherche des déplacements réels .....	115
2.4.4. Résumé.....	120
2.5. Liaison d'une structure avec son environnement .....	121

2.5.1. Exemple .....	121
2.5.2. Généralisation .....	126
2.5.2.1. Structures avec mouvements d'ensemble .....	126
2.5.2.2. Structure convenablement « appuyée » .....	127
2.6. Raideur d'une structure .....	127
2.6.1. Remarque préliminaire.....	127
2.6.2. Matrice de raideur .....	128
2.6.3. Exemples.....	129
2.6.3.1. Exemple : poutre en flexion plane soumise à deux forces.....	129
2.6.3.2. Exemple : poutre en flexion plane soumise à une force et un moment.....	130
2.6.3.3. Généralisation.....	132
2.6.4. Influence des conditions d'appui .....	132
2.6.4.1. Exemple : barre travaillant en traction-compression.....	133
2.6.4.2. Exemple : matrice de raideur d'une structure poutre en flexion plane .....	136
2.6.4.3. Isostatisme et hyperstatisme.....	141
2.6.5. Energie de déformation et matrice de raideur .....	144
2.6.5.1. Exemple : poutre du paragraphe 2.6.3.1 .....	144
2.6.5.2. Généralisation.....	145
<b>Chapitre 3. Discrétisation d'une structure en éléments finis.....</b>	<b>149</b>
3.1. Remarques préliminaires .....	149
3.1.1. Problème posé.....	149
3.1.2. Ecriture pratique de l'énergie de déformation d'une structure complexe.....	150
3.1.3. Repère local et repère global.....	153
3.1.3.1. Définition .....	153
3.1.3.2. Application aux éléments de la structure.....	154
3.1.3.3. Résumé.....	158
3.2. Matrices de raideur de quelques éléments finis simples.....	159
3.2.1. Élément barre sollicité en traction (ou compression).....	159
3.2.1.1. Rappels : sollicitation de traction (ou de compression) pure sur une poutre.....	159
3.2.1.2. Matrice de raideur .....	159
3.2.2. Élément poutre sollicité en torsion.....	167
3.2.2.1. Rappels : sollicitation de torsion sur une poutre.....	167
3.2.2.2. Matrice de raideur .....	167
3.2.3. Élément poutre sollicité en flexion plane.....	174
3.2.3.1. Rappel : sollicitation de flexion plane sur une poutre .....	174
3.2.3.2. Matrice de raideur .....	174
3.2.4. Élément triangulaire pour l'état plan de contraintes.....	183

3.2.4.1. Remarque préliminaire .....	183
3.2.4.2. Définition de l'élément .....	183
3.2.4.3. Expression de la fonction déplacement .....	184
3.2.4.4. Détermination de la matrice de raideur .....	185
3.2.4.5. Exemple.....	189
3.2.4.6. Amélioration des performances de l'élément.....	191
3.2.4.7. Résumé.....	193
3.3. Obtention de la matrice de raideur globale d'une structure.....	195
3.3.1. Objectif .....	195
3.3.2. Mécanisme de l'assemblage des matrices élémentaires .....	195
3.3.2.1. Exemple n° 1 .....	195
3.3.2.2. Exemple n° 2.....	201
3.3.3. Généralisation .....	204
3.4. Résolution du système $\{F\} = [K] \bullet \{d\}$ .....	206
3.4.1. Conditions d'appui .....	206
3.4.2. Généralisation de la méthode.....	208
3.5. Les différents types d'éléments finis disponibles dans un logiciel.....	210
<b>Chapitre 4. Applications: structures simples discrétisées.....</b>	<b>213</b>
4.1. Matrice de raideur d'un ressort .....	213
4.1.1. Ressort hélicoïdal.....	213
4.1.2. Ressort spirale.....	214
4.2. Assemblages d'éléments .....	216
4.2.1. Exemple n°1.....	216
4.2.2. Exemple n°2.....	219
4.2.3. Exemple n°3.....	223
4.2.4. Assemblage d'un élément barre et d'un élément poutre en flexion plane simple .....	230
4.3. Comportement dans le repère global .....	232
4.3.1. Assemblage plan de deux éléments barres.....	232
4.4. Potence .....	244
4.4.1. Objectifs.....	244
4.4.2. Modélisation .....	245
4.4.2.1. Définition de l'élément de poutre .....	245
4.4.2.2. Modèle filaire .....	247
4.4.2.3. Propriétés géométriques des poutres .....	247
4.4.2.4. Conditions d'appui.....	248
4.4.2.5. Chargement .....	249
4.4.3. Calcul des matrices de raideur élémentaires dans le repère global ..	249
4.4.4. Assemblage de la matrice de raideur globale $[K]_{str}$ .....	253
4.4.5. Mise en place des conditions d'appui et de chargement.....	256
4.4.6. Résolution du système linéaire $\{F\}_{str} = [K]_{str} \bullet \{d\}_{str}$ .....	257

4.4.7. Etude complémentaire du comportement de la potence.....	259
4.4.7.1. Efforts de liaison internes sur chacun des éléments isolés .....	259
4.4.7.2. Contraintes normales.....	261
4.4.8. Utilisation d'un code de calcul .....	263
<b>DEUXIÈME PARTIE. NIVEAU 2.....</b>	<b>265</b>
<b>Chapitre 5. Autres types d'éléments finis.....</b>	<b>267</b>
5.1. Retour sur les repères local et global.....	267
5.1.1. Matrice de passage.....	267
5.1.2. Résumé.....	269
5.2. Élément de poutre complet (sollicitation quelconque) .....	270
5.2.1. Remarque préliminaire.....	270
5.2.2. Constitution de la matrice de rigidité dans le repère local .....	271
5.2.3. Amélioration des performances de cet élément poutre .....	279
5.2.3.1. Déformation supplémentaire due au cisaillement.....	279
5.2.3.2. Couplage entre flexion et torsion .....	281
5.2.4. Résumé.....	283
5.3. Éléments pour l'état plan de contraintes .....	286
5.3.1. Élément triangulaire.....	286
5.3.1.1. Remarque préliminaire.....	286
5.3.1.2. Résumé.....	288
5.3.2. Élément quadrangulaire en contraintes planes .....	290
5.3.2.1. Élément rectangulaire.....	290
5.3.2.2. Élément quadrangle.....	293
5.3.2.3. Résumé.....	294
5.4. Élément plaque .....	296
5.4.1. Remarques préalables .....	296
5.4.2. Torseurs de cohésion.....	299
5.4.3. Élément de plaque en flexion.....	301
5.4.3.1. Élément rectangulaire.....	301
5.4.3.2. Élément triangulaire .....	304
5.4.4. Élément plaque complet.....	306
5.5. Éléments pour un état quelconque de contraintes.....	311
5.5.1. Remarques préliminaires.....	311
5.5.2. Élément solide tétraédrique.....	313
5.5.3. Élément solide parallélépipédique .....	316
5.6. Éléments coques .....	323
5.6.1. Généralités .....	323
5.6.2. Cas particulier des coques axisymétriques.....	323
5.6.3. Élément coque axisymétrique à conditions aux limites axisymétriques.....	324

<b>Chapitre 6. Introduction aux éléments finis pour la dynamique des structures.....</b>	<b>327</b>
6.1. Principes et caractéristiques des études dynamiques .....	328
6.1.1. Exemple n°1.....	328
6.1.1.1. Description du mouvement .....	328
6.1.1.2. Relation de comportement dynamique .....	329
6.1.1.3. Relation de comportement élastique .....	329
6.1.1.4. Equation du mouvement.....	330
6.1.2. Exemple n°2.....	333
6.1.2.1. Relation de comportement dynamique .....	333
6.1.2.2. Relation de comportement élastique .....	335
6.1.2.3. Equations du mouvement .....	336
6.1.2.4. Modes propres .....	336
6.2. Propriétés massiques des poutres.....	341
6.2.1. Élément fini de poutre en flexion dynamique plane.....	341
6.2.2. Discrétisation d'une poutre en flexion dynamique .....	345
6.2.3. Autres types de comportements dynamiques d'une poutre défini ....	351
6.2.3.1. Élément barre en traction-compression dynamique .....	351
6.2.3.2. Élément poutre de section circulaire en torsion dynamique ....	351
6.3. Généralisation.....	356
6.4. Résumé .....	358
<b>Chapitre 7. Critères de dimensionnement .....</b>	<b>359</b>
7.1. Conception et dimensionnement.....	359
7.2. Dimensionnement en statique.....	363
7.2.1. Les deux types de critères .....	363
7.2.2. Critère de limite élastique .....	365
7.2.2.1. Surface intrinsèque .....	365
7.2.2.2. Etat quelconque de contraintes.....	367
7.2.2.3. Critère de Von Mises.....	368
7.2.3. Critère de non rupture .....	368
7.2.3.1. Matériaux fragiles .....	373
7.2.3.2. Matériaux élasto-plastiques.....	374
7.3. Dimensionnement en fatigue .....	383
7.3.1. Phénomène de fatigue .....	383
7.3.2. Essai de fatigue .....	384
7.3.3. Modélisation de la fatigue.....	387
7.3.4. Estimation de la résistance à la fatigue .....	389
7.3.4.1. Cas d'une sollicitation ondulée simple .....	389
7.3.4.2. Cas de sollicitations ondulées multiples.....	391

<b>Chapitre 8. Aspects pratiques de la modélisation</b> .....	395
8.1. Utilisation des éléments finis dans un code de calcul de structures.....	395
8.1.1. Remarques préalables .....	395
8.1.2. Tableaux récapitulatifs des propriétés des éléments .....	396
8.1.3. Connexion entre éléments de différentes natures.....	403
8.1.3.1. Remarque préalable.....	403
8.1.3.2. Exemple 1.....	404
8.1.3.3. Exemple 2.....	405
8.1.3.4. Exemple 3.....	406
8.1.3.5. Conclusion.....	407
8.1.4. Autres aspects pratiques.....	408
8.1.4.1. Structures symétriques .....	408
8.1.4.2. Structures flottantes.....	409
8.1.4.3. Modélisation des structures mécano-soudées.....	413
8.1.4.4. Comportements « non linéaires géométriques ».....	415
8.2. Exemple 1 : arbre de machine-outil.....	417
8.2.1. Mise en situation .....	417
8.2.2. Données .....	419
8.2.3. Les différentes étapes de la modélisation.....	419
8.2.3.1. Définition du chargement.....	419
8.2.3.2. Définition des liaisons de la structure avec son environnement.....	420
8.2.3.3. Discrétisation de l'arbre (2) en éléments finis .....	422
8.3. Exemple 2 : structures à parois minces.....	425
8.3.1. Modèle en éléments poutres.....	426
8.3.1.1. Méthodologie .....	426
8.3.1.2. Jonctions des lignes moyennes.....	427
8.3.1.3. Relâchement (ou relaxation) .....	429
8.3.2. Modèle en éléments plaques .....	433
8.3.3. Modèle en éléments poutres et plaques.....	433
8.4. Exemple 3 : modélisation d'une structure massive .....	434
8.4.1. Mise en situation .....	434
8.4.2. Préparation de la modélisation .....	435
8.4.2.1. Parties structurales.....	435
8.4.2.2. Choix du type d'éléments finis .....	436
8.4.2.3. Sollicitations appliquées sur le corps .....	436
8.4.2.4. Conditions aux limites.....	437
8.4.2.5. Prise en compte des symétries.....	438
8.4.2.6. Autres aspects de la modélisation.....	440
8.4.3. Remarques sur la validité du modèle .....	440
8.5. Résumé des étapes de la modélisation.....	441
8.5.1. Analyse préliminaire.....	441

8.5.2. Vérification du modèle.....	442
8.5.2.1. Avant le calcul.....	442
8.5.2.2. Après le calcul.....	443
8.5.3. Utilisation correspondante du code de calcul.....	444
<b>TROISIÈME PARTIE. COMPLÉMENTS.....</b>	<b>445</b>
<b>Chapitre 9. Comportement des poutres droites.....</b>	<b>447</b>
9.1. Le modèle "poutre droite".....	447
9.1.1. Définition.....	447
9.1.2. Axes principaux d'une section droite.....	448
9.1.3. Chargements appliqués.....	450
9.1.4. Torseur de cohésion sur une section courante.....	450
9.1.4.1. Equilibre de la poutre.....	451
9.1.4.2. Mise en évidence du torseur de cohésion.....	452
9.1.4.3. Eléments de réduction du torseur de cohésion.....	453
9.1.5. Hypothèses de la théorie des poutres.....	454
9.1.5.1. Hypothèses sur les contraintes.....	454
9.1.5.2. Hypothèses sur les déformations.....	458
9.1.6. Relation d'équilibre local microscopique.....	459
9.2. Relations d'équilibre mésoscopiques, ou étendues à une section droite ...	461
9.3. Relations de comportement et contraintes.....	465
9.3.1. Sollicitation de traction-compression.....	465
9.3.1.1. Définition.....	465
9.3.1.2. Déformation d'une tranche élémentaire de poutre.....	466
9.3.1.3. Contraintes sur une section droite.....	467
9.3.2. Sollicitation de torsion.....	469
9.3.2.1. Définition.....	469
9.3.2.2. Déformation d'un élément de poutre.....	459
9.3.2.3. Cas simple d'une section circulaire.....	471
9.3.2.4. Cas d'une section non circulaire.....	474
9.3.2.5. Torsion de quelques sections particulières.....	487
9.3.2.6. Torsion à gauchissement gêné.....	489
9.3.3. Sollicitation de flexion pure.....	490
9.3.3.1. Flexion pure dans le cas particulier d'une poutre possédant un plan de symétrie.....	490
9.3.3.2. Sollicitation de flexion pure dans le cas général.....	499
9.3.4. Sollicitation de flexion plane avec effort tranchant.....	503
9.3.4.1. Définition.....	503
9.3.4.2. Champ de déplacements.....	504
9.3.4.3. Déplacement $\eta(x, y, z)$ .....	507
9.3.4.4. Relation de comportement à l'effort tranchant.....	510

9.3.4.5. Application : cas d'une section rectangulaire .....	513
9.3.4.6. Valeurs du coefficient $k_y$ et de la section réduite $S_{ry}$ pour quelques formes de sections.....	515
9.3.4.7. Résumé.....	517
9.3.5. Sollicitation quelconque.....	521
9.4. Calcul détaillé des éléments de réduction du torseur de cohésion sur un exemple.....	524
9.4.1. Etude statique préliminaire .....	524
9.4.2. Torseur de cohésion en toute section droite .....	526
<b>Chapitre 10. Eléments complémentaires d'élasticité.....</b>	<b>535</b>
10.1. Retour sur l'état plan de contraintes.....	535
10.1.1. Influence du repère .....	535
10.1.2. Directions et contraintes principales .....	537
10.1.3. Construction graphique de Mohr .....	539
10.1.4. Résumé.....	545
10.1.5. Quelques états plans de contraintes remarquables et leur représentation graphique.....	546
10.1.5.1. Cas n°1 .....	546
10.1.5.2. Cas n°2 .....	547
10.1.5.3. Cas n°3 .....	550
10.1.5.4. Cas n°4 : tube fermé sous pression.....	551
10.1.5.5. Exemple numérique.....	554
10.1.6. Evaluation expérimentale des déformations pour en déduire les contraintes.....	556
10.1.7. Energie de déformation dans les axes principaux .....	560
10.2. Etat de contraintes le plus général .....	560
10.2.1. Directions et contraintes principales .....	560
10.2.2. Contraintes dans des axes $\vec{x}$ , $\vec{y}$ , $\vec{z}$ quelconques.....	561
10.2.3. Déformations.....	564
10.2.4. Relation de comportement .....	566
10.2.5. Energie potentielle de déformation .....	571
10.2.6. Résumé.....	575
10.2.7. Composantes de l'énergie potentielle de déformation.....	578
10.2.7.1. Energie de déformation sans distorsion.....	578
10.2.7.2. Energie potentielle de distorsion .....	581
10.2.7.3. Résumé.....	582
<b>Chapitre 11. Liaisons structurales.....</b>	<b>538</b>
11.1. Généralités sur la liaison par éléments cylindriques de révolution.....	584
11.1.1. Pression de contact.....	584

11.1.2. Généralités sur le rivetage .....	586
11.1.2.1. Transmission des actions mécaniques dans une liaison rivetée .....	586
11.1.2.2. Mode de travail d'un rivet.....	586
11.1.3. Généralités sur la liaison boulonnée.....	587
11.1.3.1. Transmission des actions mécaniques dans une liaison boulonnée.....	587
11.1.3.2. Mode de travail des éléments filetés.....	588
11.1.4. Modes de détérioration des liaisons rivetées et boulonnées .....	588
11.1.4.1. Rupture des éléments de liaisons.....	590
11.1.4.2. Matage.....	590
11.1.4.3. Espacement des éléments de liaison .....	590
11.2. Liaison boulonnée.....	592
11.2.1. Cas simplifié où le serrage est négligé .....	594
11.2.1.1. Hypothèses .....	594
11.2.1.2. Caractéristiques de l'interface modélisée.....	596
11.2.1.3. Efforts sur chaque fixation .....	598
11.2.1.4. Critère de résistance .....	598
11.2.1.5. Résumé .....	606
11.2.1.6. Exemple.....	610
11.2.2. Cas d'un serrage préalable.....	612
11.2.2.1. Couple de serrage .....	612
11.2.2.2. Comportement d'une liaison avec serrage préalable contrôlé .....	613
11.2.2.3. Résumé .....	620
11.2.2.4. Exemple.....	622
11.3. Liaison rivetée .....	623
11.3.1. Hypothèses.....	623
11.3.2. Caractéristiques de l'interface modélisée .....	623
11.3.3. Efforts sur chaque fixation .....	623
11.3.4. Interprétation graphique .....	624
11.3.5. Résumé.....	626
11.4. Liaison soudée .....	627
11.4.1. Remarques préalables et hypothèses .....	627
11.4.1.1. Etat de contraintes dans un cordon de soudure.....	627
11.4.1.2. Critère de dimensionnement.....	628
11.4.2. Détermination des contraintes dans la section de gorge.....	629
11.4.2.1. Aspect réglementaire .....	629
11.4.2.2. Modélisation de l'interface soudée .....	634
11.4.2.3. Contraintes sur chaque cordon équivalent.....	635
11.4.2.4. Contraintes $\sigma$ , $\tau_\ell$ , $\tau_t$ dans les sections de gorge.....	637
11.4.3. Résumé.....	640
11.4.4. Exemple .....	642

<b>Chapitre 12. Prérequis mathématiques</b> .....	645
12.1. Calcul matriciel .....	645
12.1.1. Généralités .....	645
12.1.1.1. Définition d'une matrice .....	645
12.1.1.2. Matrice symétrique.....	646
12.1.1.3. Transposée d'une matrice [a].....	646
12.1.2. Opérations matricielles .....	646
12.1.2.1. Addition de deux matrices.....	646
12.1.2.2. Produit d'une matrice par un scalaire.....	647
12.1.2.3. Produit de deux matrices .....	647
12.1.2.4. Inverse d'une matrice.....	649
12.1.3. Forme quadratique .....	650
12.1.4. Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice.....	650
12.1.4.1. Valeurs propres .....	650
12.1.4.2. Vecteurs propres.....	650
12.2. Changement de repère orthonormé.....	651
12.2.1. Cas de repères coplanaires .....	651
12.2.2. Cas de repères quelconques .....	653
<b>Annexes</b> .....	655
<b>Annexe A. Modélisation des liaisons mécaniques usuelles</b> .....	657
A.1. Définition.....	657
A.1.1. Ensemble isocinématique.....	657
A.1.2. Liaisons .....	657
A.1.3. Liaisons parfaites .....	658
A.2. Liaisons usuelles normalisées (NF EN 23952, ISO 3952).....	658
<b>Annexe B. Caractéristiques mécaniques des matériaux</b> .....	665
B.1. Propriétés mécaniques de quelques matériaux utilisés pour les structures.....	665
B.1.1. Aciers et fontes.....	665
B.1.2. Métaux non ferreux .....	666
<b>Annexe C. Glossaire du dimensionnement des structures</b> .....	667
C.1. Français – anglais.....	667
C.2. Anglais – français .....	672
<b>Bibliographie</b> .....	677