



UNIVERSITÉS  
MÉCANIQUE

U  
N  
I  
V  
E  
R  
S  
I  
T  
É  
S

*Cours et exercices de*  
***Résistance***  
***des matériaux***

*Élasticité, plasticité,  
éléments finis*

Christian WIELGOSZ



## Sommaire

### Chapitre 1 Eléments d'analyse tensorielle

Définition d'un tenseur. Opérations sur les tenseurs	1
Produit tensoriel	1
Contraction tensorielle	2
Tenseurs d'ordre deux	2
Opérateurs différentiels	4
Relations entre champs scalaires et champs vectoriels	4
Relations entre champs vectoriels et champs tensoriels	5
Relations particulières entre vecteurs	6
Transformations d'intégrales, dérivées particulières	7

### Chapitre 2 Déformations

Tenseurs des dilatations et des déformations	9
Transformation linéaire tangente	9
Tenseur des dilatations	10
Tenseur des déformations	11
Décomposition polaire de la transformation F	11
Expression des tenseurs des déformations	11
Tenseur des déformations en variables lagrangiennes	12
Tenseur des déformations en variables eulériennes	12
Etude du cas des petites perturbations	13
Interprétation mécanique du tenseur des déformations	14
Allongement unitaire dans une direction	14
Glissement de deux directions orthogonales	15
Transformation des volumes	15
Tenseurs des taux de déformations	19
Propriétés et interprétation des déformations en H.P.P.	20
Etat de déformations principale	20
Exemples remarquables	20
Compatibilité des déformations en H.P.P.	21

### Chapitre 3 Contraintes. Principes de la mécanique

Conservation de la masse, équation de continuité	24
Notion de contraintes	25
Forces extérieures	25
Forces intérieures, contraintes	26
Les différents tenseurs des contraintes	27
Propriétés du tenseur des contraintes	28
Equations du mouvement	30
Théorèmes généraux	30
Principe des travaux virtuels	34
Principe de l'énergie mécanique	40
Dualité en statique des milieux continus	41
Structure algébrique des problèmes de statique	41
Sous-espaces vectoriels remarquables de E et de $\Sigma$	42
Un exemple simple	43

## Chapitre 4 Lois de comportement

Milieux fluides	45
Fluides parfaits incompressibles	45
Fluides visqueux incompressibles	46
Milieux solides	47
Solides élastiques linéaires	47
Solides thermoélastiques	55
Solides viscoélastiques	55
Solides plastiques	58
Solides viscoplastiques	63
Formulation du problème de mécanique des milieux continus	64

## Chapitre 5 Elastostatique

Résolution du problème en déformations et en contraintes	66
Equations aux déplacements	69
Equations aux contraintes	76
Théorèmes de l'énergie	76
Théorème du minimum de l'énergie potentielle totale	76
Théorème du minimum de l'énergie complémentaire	78

## Chapitre 6 Etude des treillis et de la torsion

Etude des treillis	80
Traction simple d'une barre	80
Calcul des treillis	84
Etude de la torsion	92
Torsion d'une barre cylindrique	92
Parallèle entre traction et torsion	95

## Chapitre 7 Etude des poutres et des portiques

Schématisation d'une poutre	97
Etude des déformations	97
Equations d'équilibre	99
Loi de comportement	101
Equation locale des poutres. Conditions aux limites	102
Etude d'un cas particulier : la flexion pure	104
Expression des énergies	104
Calcul des poutres	105
Poutres hypostatiques, isostatiques et hyperstatiques	105
Calcul des poutres isostatiques	105
Calcul des poutres hyperstatiques	114
Calcul des portiques	120
Poutre plane	120
Portiques hypostatiques, isostatiques et hyperstatiques	120
Calcul des portiques isostatiques	121
Calcul des portiques hyperstatiques	123

## Chapitre 8 Etude des plaques

Schématisation d'une plaque	126
Etude des déformations	126

Etude de l'équilibre	128
Loi de comportement	129
Equation locale des plaques	130
Calcul des plaques	131

### Chapitre 9 Notions d'élastodynamique et de flambement

Vibrations des barres	133
Vibrations des poutres	134
Poutre sur deux appuis simples	134
Poutre encastree et sur appui simple	135
Vibrations des systèmes continus en trois dimensions	136
Equations aux déplacements	136
Exemple	136
Flambement des poutres	138
Equations des poutres comprimées	138
Poutre sur deux appuis simples	139
Poutre encastree et sur appui simple	139

### Chapitre 10 Eléments finis en une dimension

L'élément fini barre en une dimension	140
Construction de l'élément	140
Assemblage de barres continues	145
Etude de la torsion	147
Construction de l'élément fini torsion	147
Assemblage de barres de torsion continues	148
Etude des treillis plans	149
Construction de l'élément treillis plan	149
Assemblage des treillis plans	150
Etude des treillis dans l'espace	154
Etude des poutres	156
L'élément poutre en une dimension	156
Assemblage de poutres continues	161
L'élément poutre plane	167
Construction de l'élément	167
Assemblage de poutres dans le plan	169
L'élément poutre en trois dimensions	174

### Chapitre 11 Eléments finis en deux et trois dimensions

L'élément triangulaire pour les problèmes d'élasticité plane	177
L'élément triangulaire pour les problèmes de contraintes planes	177
L'élément triangulaire pour les problèmes de déformations planes	180
L'élément triangulaire pour les problèmes axisymétriques	181
Méthode des éléments finis pour les problèmes d'élastostatique tridimensionnelle	184
Calcul numérique des matrices élémentaires	186
Propriétés et calcul de l'interpolation	186
Calcul des matrices élémentaires, vecteurs forces généralisées	192
Organisation du calcul des matrices élémentaires	194
Eléments finis de flexion des plaques	194
Rappels sur la schématisation d'une plaque	194
Construction de l'élément triangulaire	195
Construction de l'élément quadrangulaire	197
Compléments sur la dualité en statique des milieux continus	198

## Chapitre 12 Eléments finis en dynamique

L'élément barre	201
Construction de l'élément	201
Assemblage des éléments	203
Etude de la torsion	205
L'élément poutre en une dimension	206
Construction de l'élément	206
Assemblage de poutres continues	209
L'élément poutre plane	213
Problèmes d'élastodynamique tridimensionnelle	214

## Chapitre 13 Plasticité des barres et des poutres

Evolution élastoplastique de structures treillis	215
Modèles avec écrouissage	215
Un exemple d'évolution élastoplastique en charge et décharge	216
Autocontraintes, autodéformations	218
Evolution élastoplastique de structures composées de poutres	223
Schématisation d'une poutre	223
Poutre sur appuis soumise à des couples concentrés à ses extrémités	223
Poutre sur appuis soumise à une charge concentrée en son milieu.	
Notion de rotule plastique	225
Un exemple de flexion simple de poutre hyperstatique	228
Résolution numérique des problèmes d'élastoplasticité en une dimension	233
Un exemple numérique en élastoplasticité parfaite	233
Un exemple numérique en élastoplasticité avec écrouissage	237

## Chapitre 14 Plasticité en deux ou trois dimensions

Elastoplasticité tridimensionnelle ; critères de plasticité	242
Hypothèses, principe de Hill	242
Loi de normalité	242
Critères de plasticité	245
Lois d'écoulement plastique	248
Elastoplasticité bidimensionnelle	249
Contraintes planes	250
Déformations planes	250
Formulation globale d'un problème d'élastoplasticité parfaite ; exemples	252
Formulation du problème	252
Exemple 1	253
Exemple 2	258
Résolution numérique des problèmes d'élastoplasticité tridimensionnelle	261
Formulation du problème	261
Principe théorique d'intégration de la loi de comportement	262
Ecriture matricielle de la raideur élastoplastique	263
Méthode des éléments finis en plasticité	264
Approximation par éléments finis	264
Principe de résolution de l'équation non - linéaire	264
Algorithme des calculs	266

## Chapitre 15 Théorie des charges limites

Notion de charge limite	269
Exemple du barreau en traction	269
Définition, conséquences	269
Coefficients de sécurité	270
Définition	270
Calcul des coefficients de sécurité ; méthode statique	271
Calcul des coefficients de sécurité ; méthode cinématique	272
Égalité des coefficients statique et cinématique	274
Exemples	274
Formulation numérique du problème de charges limites	285

## Chapitre 16 Notions de thermoélastoplasticité, de plasticité cyclique, de viscoplasticité et de plasticité dynamique

Notions de thermoélastoplasticité statique	287
Problèmes à champ de température imposée	287
Problèmes thermoélastoplastiques	290
Résolution numérique des problèmes de thermoélastoplasticité	291
Notions d'élastoplasticité cyclique	293
Définition	293
Comportements asymptotiques	294
Méthodes de calcul	295
Notions de viscoplasticité	300
Loi de comportement viscoplastique unidimensionnelle	300
Viscoplasticité tridimensionnelle	302
Notions de plasticité dynamique	302
Plasticité dynamique des barres et des poutres	302
Plasticité dynamique tridimensionnelle	307

Bibliographie	312
---------------	-----