

**CALCUL
DES
STRUCTURES**

JEAN COURBON

DUNOD

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1. Méthode des matrices-transfert

A. Poutres droites	1
1. Définition des matrices-transfert.....	1
a) Vecteur d'état	1
b) Matrice-transfert d'un tronçon de poutre.....	2
c) Matrice-transfert relative à deux sections infiniment voisines.....	3
2. Propriétés fondamentales des matrices-transfert.....	4
a) Composition des matrices-transfert.....	4
b) Matrice inverse d'une matrice-transfert.....	5
3. Matrices-transfert des poutres d'inertie constante.....	5
a) Tronçon de poutre uniformément chargé.....	5
b) Tronçon de poutre supportant une charge concentrée.....	6
c) Tronçon de poutre supportant une densité de charge.....	8
4. Matrices-transfert des poutres d'inertie variable.....	9
a) Tronçon de poutre supportant une densité de charge.....	9
b) Tronçon de poutre supportant une charge concentrée.....	11
5. Travée soumise à des liaisons quelconques à ses extrémités.....	13
6. Poutres continues sur appuis simples.....	14
7. Poutres continues sur appuis élastiques.....	17
a) Matrices-transfert relatives aux appuis.....	17
b) Calcul des poutres continues sur appuis élastiques.....	18
8. Poutres continues encastrees élastiquement sur appuis.....	19
a) Matrice-transfert réduite relative à un appui.....	19
b) Calcul des poutres continues encastrees élastiquement sur appuis.....	20
9. Poutres continues sur appuis élastiques infiniment rapprochés.....	21
a) Calcul de la déformée.....	21
b) Détermination des matrices-transfert.....	22
c) Calcul d'une poutre continue sur appuis élastiques infiniment rapprochés.....	26
B. Poutres à plan moyen.....	27
10. Définition des matrices-transfert. Propriétés fondamentales.....	27
a) Vecteur d'état	27
b) Matrice-transfert d'un tronçon de poutre.....	28
c) Matrice-transfert relative à deux sections infiniment voisines.....	29
d) Propriétés fondamentales des matrices-transfert.....	30
11. Détermination des matrices-transfert.....	30
12. Changement des axes de référence.....	33
a) Transformée d'une matrice-transfert.....	33
b) Application au calcul des matrices-transfert.....	34

13. Applications des matrices-transfert.....	36
a) Calcul d'une poutre courbe à plan moyen.....	36
b) Calcul d'arcs continus.....	37
14. Structures des matrices-transfert.....	38
C. <i>Poutres planes chargées normalement à leur plan</i>	40
15. Définition des matrices-transfert. Propriétés fondamentales.....	40
a) Vecteur d'état.....	40
b) Matrice-transfert d'un tronçon de poutre.....	42
c) Matrice-transfert relative à deux sections infiniment voisines.....	43
d) Propriétés fondamentales des matrices-transfert.....	43
e) Structure des matrices-transfert.....	43
16. Détermination des matrices-transfert.....	44
17. Changement des axes de référence.....	46
a) Transformée d'une matrice-transfert.....	46
b) Matrice-transfert d'un tronçon de poutre droite de section constante.....	47
c) Matrices-transfert dans le repère mobile.....	48
18. Applications des matrices-transfert.....	48
a) Calcul d'une travée courbe.....	49
b) Calcul d'un pont continu courbe.....	49
D. <i>Répartition des efforts dus au freinage</i>	51
19. Vecteur d'état et matrice-transfert.....	51
20. Application au calcul d'un ouvrage.....	55

Chapitre 2. Structures constituées par une suite de structures élémentaires

A. <i>Théorie générale</i>	56
1. Définitions. Structures élémentaires.....	56
a) Définition des structures étudiées.....	56
b) Matrices de souplesse des structures élémentaires.....	57
c) Potentiel interne d'une structure élémentaire isolée.....	58
2. Relation des trois réactions.....	58
a) Première démonstration.....	58
b) Deuxième démonstration.....	59
3. Calcul des réactions.....	60
a) Première méthode.....	60
b) Deuxième méthode. Matrices de transmission.....	61
B. <i>Exemples</i>	66
4. Poutres continues sur appuis simples.....	66
5. Ponts à poutres consoles réunies par des articulations sans poussée.....	68
6. Arcs continus sur articulations fixes.....	70
7. Ponts à poutres consoles réunies par des articulations avec poussées.....	71
8. Poutres continues sur appuis élastiques doubles.....	74
a) Première méthode. Travées quelconques.....	75
b) Deuxième méthode. Travées symétriques.....	76

C. Calcul des déplacements.....	77
9. Relation des trois déplacements.....	77

Chapitre 3. Structures composées de poutres droites

A. Structures à plan moyen.....	80
1. Définitions.....	80
a) Structures étudiées.....	80
b) Etat de déplacement de la structure.....	80
c) Etat de sollicitation de la structure.....	82
2. Méthode de calcul.....	83
a) Principe de la méthode.....	83
b) Formules fondamentales.....	84
c) Equations d'équilibre. Matrice de raideur de la structure.....	86
d) Déplacements imposés à la structure.....	87
3. Matrices de rigidité des poutres de la structure.....	87
a) Changement de repère.....	87
b) Application au calcul des matrices de rigidité des poutres.....	89
c) Détermination des matrices \bar{R}_{ii} et \bar{R}_{ij}	89
4. Cas où les poutres de la structure sont directement sollicitées.....	93
a) Application du principe de superposition. Efforts locaux et efforts généraux.....	93
b) Calcul de $\bar{\Phi}_{ij}$ lorsque la poutre $A_i A_j$ est soumise à des forces données.....	94
c) Calcul de $\bar{\Phi}_{ij}$ lorsque la poutre $A_i A_j$ est soumise à une déformation imposée.....	97
5. Etude de la stabilité élastique.....	97
a) Matrices de rigidité des poutres compte tenu des efforts normaux.....	98
b) Calcul par approximations successives.....	100
B. Structures planes chargées normalement à leur plan.....	100
6. Définitions.....	100
a) Structures étudiées.....	100
b) Etat de déplacement de la structure.....	101
c) Etat de sollicitation de la structure.....	102
7. Méthode de calcul.....	103
a) Principe de la méthode.....	103
b) Formules fondamentales.....	103
c) Equations d'équilibre. Matrice de raideur de la structure.....	105
d) Déplacements imposés à la structure.....	106
8. Matrices de rigidité des poutres de la structure.....	106
a) Changement de repère.....	106
b) Application au calcul des matrices de rigidité des poutres.....	106
c) Détermination des matrices \bar{R}_{ii} et \bar{R}_{ij}	107
9. Cas où les poutres de la structure sont directement sollicitées.....	110
a) Application du principe de superposition. Efforts locaux et efforts généraux.....	110
b) Calcul de $\bar{\Phi}_{ij}$ lorsque la poutre $A_i A_j$ est soumise à des forces données.....	111
10. Réseaux de poutres droites sur appuis élastiques.....	114

C. Structures spatiales.....	116
11. Définitions	116
12. Méthode de calcul.....	117
a) Principe de la méthode.....	117
b) Formules fondamentales	118
c) Equations d'équilibre. Matrice de raideur de la structure.....	119
d) Cas où les poutres de la structure sont directement sollicitées.....	120
e) Déplacements imposés à la structure.....	120
13. Matrices de rigidité des poutres de la structure.....	120
a) Changement de repère.....	120
b) Application au calcul des matrices de rigidité des poutres.....	121

Chapitre 4. Méthode des éléments élastiques

A. Théorie générale.....	125
1. Définitions et formules préliminaires.....	125
a) Représentation matricielle d'un système de forces.....	125
b) Représentation matricielle du déplacement infiniment petit d'un solide.....	128
c) Invariance du travail.....	129
2. Éléments élastiques	129
a) Définition. Matrice d'élasticité et matrice de rigidité.....	129
b) Changement de repère.....	131
c) Déformation propre d'un élément élastique.....	132
3. Composition des éléments élastiques.....	133
a) Composition en série. Chaîne d'éléments élastiques.....	133
b) Composition en parallèle. Faisceau d'éléments élastiques.....	135
4. Structures élastiques. Méthode des déplacements nodaux.....	136
5. Théorie des réseaux élastiques.....	138
a) Méthode des mailles.....	140
b) Méthode des faisceaux.....	142
B. Structures à plan moyen.....	145
6. Éléments élastiques plans.....	145
a) Définitions.....	145
b) Changement de repère.....	146
c) Axes centraux et coefficients élastiques principaux.....	147
7. Exemples d'éléments élastiques.....	149
a) Élément élastique constitué par un tronçon de poutre.....	149
b) Élément élastique infinitésimal.....	151
c) Éléments élastiques singuliers.....	152
8. Éléments élastiques composés.....	153
a) Composition en série.....	153
b) Composition en parallèle.....	155
9. Structures hyperstatiques ouvertes. Méthode des appuis élastiques.....	157
a) Principe de la méthode. Appuis élastiques.....	158
b) Etude d'une poutre sur appuis élastiques.....	159
c) Efforts dans les autres poutres de la structure.....	161

10. Poutres droites chargées transversalement.....	162
a) Élément élastique constitué par un tronçon de poutre droite.....	162
b) Changement de repère.....	164
c) Composition des éléments élastiques.....	164
11. Poutres continues sur appuis élastiques.....	166
a) Définition et caractéristiques des structures étudiées.....	166
b) Méthode des appuis élastiques.....	167
c) Méthode des déplacements nodaux ou méthode des faisceaux.....	170
d) Méthode des mailles.....	172
C. Structures planes chargées normalement à leur plan.....	173
12. Eléments élastiques.....	173
a) Définitions.....	173
b) Changement de repère.....	174
c) Axes centraux et coefficients élastiques principaux.....	175
13. Exemples d'éléments élastiques.....	177
a) Élément élastique constitué par un tronçon de poutre.....	177
b) Élément élastique infinitésimal.....	179
c) Eléments élastiques singuliers.....	180
14. Eléments élastiques composés.....	180
a) Composition en série.....	181
b) Composition en parallèle.....	182
15. Méthodes de calcul pour les structures planes chargées normalement à leur plan.....	183

Chapitre 5. Théorie générale des structures composées de poutres

A. Définitions et propriétés générales.....	185
1. Structures étudiées.....	185
a) Définitions et hypothèses.....	185
b) Formule fondamentale.....	186
c) Expression matricielle du produit vectoriel.....	187
2. Etat de sollicitation et état de déplacement de la structure.....	188
3. Etat de contrainte et état de déformation de la structure.....	189
4. Correspondance entre l'état de sollicitation et l'état de contrainte.....	190
5. Correspondance entre l'état de déplacement et l'état de déformation.....	192
6. Théorème des travaux virtuels. Application au calcul des déplacements.....	194
a) Théorème des travaux virtuels.....	194
b) Expression des déplacements (Théorème des forces virtuelles).....	196
7. Structures statiquement indéterminées ou hyperstatiques.....	196
B. Structures élastiques.....	198
8. Définition des structures élastiques.....	198
9. Théorèmes généraux relatifs aux structures élastiques.....	199
a) Potentiel interne ou énergie de déformation.....	199
b) Expression du potentiel en fonction des forces extérieures.....	199
c) Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti.....	200
d) Théorèmes de Castigliano.....	200

10. Calcul des déplacements. Matrices de souplesse	201
a) Calcul des déplacements	201
b) Matrices de souplesse	202
11. Premier problème. Déterminer l'état de contrainte connaissant les forces extérieures	203
12. Deuxième problème. Déterminer l'état de déplacement connaissant les forces extérieures	206
13. Troisième problème. Forces nécessaires pour maintenir des déplacements imposés	209
14. Quatrième problème. Structure soumise à une déformation imposée	209
15. Equilibre d'une structure dans le domaine élastoplastique	211
a) Méthode générale	211
b) Etude d'un cas particulier. Equilibre limite	213

Chapitre 6. Théorie générale des structures composées d'un nombre fini d'éléments

A. <i>Définitions et propriétés générales</i>	215
1. Structures étudiées	215
2. Etat de sollicitation et état de déplacement de la structure	215
3. Etat de contrainte et état de déformation de la structure	217
a) Etat de contrainte et état de déformation d'un élément	217
b) Etat de contrainte et état de déformation de la structure	219
4. Correspondance entre l'état de sollicitation et l'état de contrainte	220
5. Correspondance entre l'état de déplacement et l'état de déformation	221
6. Théorème des travaux virtuels. Applications	223
a) Théorème des travaux virtuels	223
b) Expression des déplacements (Théorème des forces virtuelles)	223
c) Expression des forces extérieures (Théorème des déplacements virtuels)	224
d) Conséquence de la définition des matrices C'_k et D'_j	225
7. Méthode des forces et méthode des déplacements	226
a) Structures statiquement indéterminées	226
b) Structures cinématiquement indéterminées	227
B. <i>Structures élastiques</i>	229
8. Définition des structures élastiques	229
9. Théorèmes généraux relatifs aux structures élastiques	230
a) Potentiel interne ou énergie de déformation	230
b) Expression du potentiel en fonction des forces extérieures	230
c) Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti	231
d) Théorèmes de Castigliano	231
10. Calcul des déplacements. Matrices de souplesse	232
a) Calcul des déplacements	232
b) Matrices de souplesse	233

11. Calcul des forces. Matrices de raideur.....	234
a) Calcul des forces extérieures.....	234
b) Matrices de raideur.....	235
C. Exemples de structures (S).....	236
12. Formule préliminaire.....	236
13. Structures réticulées.....	237
14. Structures à plan moyen composées de poutres droites.....	238
15. Structures planes, composées de poutres droites, se déformant normalement à leur plan.....	243
16. Structures spatiales composées de poutres droites.....	247
17. Structures composées de raidisseurs et de panneaux cisailés.....	253
D. Méthode des forces.....	257
18. Premier problème. Déterminer l'état de contrainte connaissant les forces extérieures.....	257
19. Deuxième problème. Déterminer l'état de déplacement connaissant les forces extérieures.....	259
20. Troisième problème. Forces nécessaires pour maintenir des déplacements imposés.....	261
21. Quatrième problème. Structure soumise à une déformation imposée.....	262
22. Procédés de calcul.....	264
a) Structures de degré d'hyperstaticité élevé.....	264
b) Utilisation d'états d'autocontrainte particuliers.....	266
c) Décomposition d'une structure en plusieurs structures indépendantes.....	268
d) Structures sollicitées en dehors des nœuds.....	269
E. Méthode des déplacements.....	270
23. Premier problème. Déterminer l'état de déformation d'une structure à laquelle on impose des déplacements.....	270
24. Deuxième problème. Forces nécessaires pour maintenir des déplacements imposés.....	272
25. Troisième problème. Déterminer l'état de contrainte connaissant les forces extérieures.....	274
26. Quatrième problème. Structure soumise à une contrainte initiale.....	275
27. Méthode des déplacements déduite des matrices de rigidité généralisées.....	277
a) Matrice de rigidité généralisée d'un élément élastique.....	277
b) Structures soumises à des forces appliquées aux nœuds.....	280
c) Structures soumises à des déformations imposées.....	282
d) Structures soumises à des déplacements imposés.....	284
28. Vibrations des structures.....	285
a) Equation différentielle des vibrations.....	285
b) Vibrations naturelles et vibrations propres.....	287
c) Vibrations forcées.....	289

Chapitre 7. Méthode des éléments finis

A. <i>Formules générales</i>	292
1. Hypothèses de la méthode des éléments finis	292
2. Etude d'un élément. Formules fondamentales	294
3. Calcul des déplacements des nœuds	297
4. Vibrations naturelles des milieux continus	300
5. Comparaison de la méthode de Ritz et de la méthode des éléments finis	302
B. <i>Elasticité plane</i>	305
6. Éléments triangulaires simples	305
7. Éléments triangulaires comportant six nœuds	311
8. Éléments rectangulaires	315
9. Éléments ayant la forme d'un quadrilatère quelconque	318
a) Quadrilatère considéré comme réunion de triangles	318
b) Généralisation des résultats obtenus pour le rectangle	320
C. <i>Solides élastiques</i>	321
10. Éléments tétraédriques simples	321
11. Éléments tétraédriques à dix nœuds	327
12. Éléments à huit nœuds	329
13. Solides de révolution sollicités symétriquement	331
D. <i>Plaques minces</i>	336
14. Généralités	336
15. Éléments rectangulaires	339
a) Première méthode	340
b) Deuxième méthode	342
16. Éléments triangulaires	344
E. <i>Voiles minces</i>	349
17. Voiles minces fléchis ou coques	349
18. Voiles minces sans flexion ou membranes	354
F. <i>Champs scalaires</i>	355
19. Champs à deux dimensions	355
a) Deux problèmes préliminaires de calcul des variations	355
b) Résolution numérique d'un problème de Dirichlet	357
c) Résolution numérique d'un problème de Neumann	361
20. Champs à trois dimensions	362
a) Deux problèmes préliminaires de calcul des variations	362
b) Résolution numérique d'un problème de Dirichlet	364
c) Résolution numérique d'un problème de Neumann	366
<i>Bibliographie sommaire</i>	369