

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DE BLIDA 1



**Faculté des Sciences
Département de Mathématiques**



Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme de

MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA VE-DOMINATION DANS LES GRAPHE MODIFIÉS

Par

M^{lle} GACEM Nesrine

M^{lle} LARACHI Rayane

Devant le jury composé de :

M^r CHELLALI Mustapha

Professeur, U.S.D. Blida 1

Président

M^{elle} KERDJOUDJ Samia

M.C.A, U.S.D. Blida 1

Examinatrice

M^{me} MEDDAH Nacéra

M.C.A, U.S.D. Blida 1

Encadreur

Année universitaire 2023/2024

ملخص

يتعلق عملنا في هذه الأطروحة بدراسة هيمنة الرؤوس على الحواف، والمختصرة ب ve -هيمنة في الرسوم البيانية. لنفترض أن $G = (V, E)$ ، هو رسم بياني بسيط، حيث V هي مجموعة الرؤوس و E هي مجموعة الحواف. تكون المجموعة الفرعية $S \subseteq V$ -هيمنة على G ، إذا كانت كل حافة من E إما واقعة على رأس من S أو مجاورة لحافة واقعة على رأس من S . يُطلق على الحد الأدنى للرقم الأصلي لمجموعة ve -هيمنة للبيان G بعدد ve -هيمنة للبيان G ، ويُشار إليه بالرمز $\gamma_{ve}(G)$.

انكماش الحافة uv في التمثيل البياني G يتعلق بإزالة الرأسين u و v من G عن طريق استبدالهما برأس جديد يُشار إليه ب \overline{uv} ، وإلحاق \overline{uv} بجميع الرؤوس المجاورة لـ u أو v في G . يُرمز إلى التمثيل البياني الذي نحصل عليه من G عن طريق تقليص الحافة uv بالرمز G_{uv} . أظهرنا في هذه الأطروحة أن تقلص أي حافة لـ G يقلل من عدد ve -هيمنة بمقدار وحدة واحدة على الأكثر، لكن لا يمكنه زيادتها. الرسم البياني G يسمى ve -نقطة حرجة إذا كان من أجل كل حافة uv في E ، لدينا $\gamma_{ve}(G_{uv}) < \gamma_{ve}(G)$. في هذه الأطروحة، كنا مهتمين بدراسة تأثير انكماش حافة في E ، على المعامل $\gamma_{ve}(G)$ ، حيث وضعنا بعض الشروط الضرورية للرسوم البيانية ve -نقطة حرجة. كذلك، قدّمنا توصيفًا بناءً للأشجار ve -نقطة حرجة.

RÉSUMÉ

Notre travail dans ce mémoire porte sur l'étude de la domination sommet-arête, notée *ve*-domination, dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, où V est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble des arêtes. Un sous ensemble $S \subseteq V$ est un *ve*-dominant de G , si chaque arête e de E est, ou bien incidente à un sommet de S ou adjacente à une arête incidente à un sommet de S . Le cardinal minimum d'un ensemble *ve*-dominant de G est appelé le nombre de *ve*-domination de G , noté $\gamma_{ve}(G)$.

La contraction d'une arête uv dans un graphe G consiste à supprimer les sommets u et v de G en les remplaçant par un nouveau sommet noté par \overline{uv} , et en attachant \overline{uv} à tous les sommets qui sont adjacents à u ou v dans G . Le graphe obtenu à partir de G en contractant l'arête uv est noté par G_{uv} . Dans ce mémoire nous avons montré que la contraction d'une arête quelconque de G fait diminuer par au plus une unité le nombre de *ve*-domination, mais ne peut pas l'augmenter. Un graphe G est dit γ_{ve} -point-critique si $\gamma_{ve}(G_{uv}) < \gamma_{ve}(G)$ pour toute arête uv dans E . Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'effet de la contraction d'une arête de E , sur le paramètre $\gamma_{ve}(G)$, où nous avons établi quelques conditions nécessaires pour les graphes γ_{ve} -point-critiques. Ainsi, nous avons fourni une caractérisation constructive des arbres γ_{ve} -point-critiques.

ABSTRACT

Our work in this thesis focuses on the study of vertex-edge domination, denoted ve -domination, in graphs. Let $G = (V, E)$ be a simple graph, where V is the set of vertices and E is the set of edges. A subset $S \subseteq V$ is a ve -dominating set of G , if every edge e of E is either incident to a vertex of S or adjacent to an edge incident to a vertex of S . The minimum cardinality of a ve -dominating set of G is called the ve -domination number of G , denoted by $\gamma_{ve}(G)$.

The contraction of an edge uv in a graph G consists of removing the vertices u and v from G by replacing them with a new vertex denoted by \overline{uv} , and attaching \overline{uv} to all vertices adjacent to u or v in G . The graph obtained from G by contracting the edge uv is denoted by G_{uv} . In this thesis we have shown that the contraction of any edge of G reduces the number of ve -dominations by at most one, but cannot increase it. A graph G is said to be γ_{ve} -dot-critical if $\gamma_{ve}(G_{uv}) < \gamma_{ve}(G)$ for any edge uv in E . In this thesis, we are interested in studying the effect of the contraction of an edge in E , on the parameter $\gamma_{ve}(G)$, where we established some necessary conditions for γ_{ve} -dot-critical graphs. Thus, we have provided a constructive characterization of γ_{ve} -dot-critical trees.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, nous remercions le **DIEU** tout puissant de nous avoir donné la force et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Notre profonde reconnaissance va en premier lieu à **M^{me} MEDDAH** Nacéra, Maître de conférences classe A, à l'université de Saad Dahlab Blida 1. Nous sommes honorées de travailler sous la direction d'une promotrice dont les compétences et talents sont exceptionnels, et nous sommes reconnaissantes pour la confiance qu'elle nous accorde ainsi que pour ses précieux conseils, son soutien et sa patience qui nous permettent de nous épanouir pleinement dans notre travail.

Nos remerciements s'adressent également au Professeur **CHELLALI** Mustapha pour avoir manifesté un grand intérêt pour le sujet en acceptant d'être Président de jury.

Nous voudrions également exprimer toute notre reconnaissance à **M^{me} KERDJOUDJ** Samia d'avoir accepté de nous faire l'honneur de juger ce travail et de participer à notre jury de mémoire.

À nos enseignants, qui nous ont accompagnés tout au long de notre périple à la recherche de connaissances, nous adressons nos sincères remerciements.

Nous saisissons également l'occasion pour exprimer notre gratitude sincère envers tous les membres de nos familles.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1. CONCEPTS FONDAMENTAUX	4
1.1. Notions générales et terminologies	4
1.1.1. Définitions et notations	4
1.1.2. Graphes particuliers	7
1.1.3. Propriété des ensembles	10
1.1.4. Invariants de graphes	10
1.2. La domination dans les graphes	11
1.2.1. Vue historique	11
1.2.2. Définitions et propriétés préliminaires	13
1.2.3. Quelques types de domination avec applications	14
CHAPITRE 2. ETAT DE L'ART SUR LA CRITICITÉ DANS LES GRAPHES	20
2.1. Les graphes modifiés	20
2.1.1. Quelques opérations sur les graphes	20
2.1.2. Quelques applications pratiques	22
2.2. Les graphes critiques	22
2.3. Les graphes γ -point-critiques	24
2.4. Les graphes γ_t -point-critiques	26
2.5. Les graphes γ_L -point-critiques	27
CHAPITRE 3. EFFET DE LA CONTRACTION D'UNE ARÊTE SUR LE NOMBRE DE DOMINATION SOMMET-ARÊTE	30
3.1. Définitions et résultats préliminaires	30
3.2. Propriétés des graphes γ_{ve} -point-critiques	31

3.3. Arbres γ_{ve} -point-critiques	34
3.3.1. Caractérisation	39
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	45
RÉFÉRENCES	46

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

FIGURE 1.1.	Un graphe G d'ordre 8 et de taille 10.	5
FIGURE 1.2.	Une chaîne P_4 et un cycle C_3	6
FIGURE 1.3.	Un graphe G , 3-régulier	7
FIGURE 1.4.	Graphes complets K_3 et K_4	7
FIGURE 1.5.	Un graphe G et son complémentaire \overline{G}	8
FIGURE 1.6.	Un graphe biparti G et un graphe biparti complet $K_{2,3}$	8
FIGURE 1.7.	Arbres particuliers	9
FIGURE 1.8.	La couronne $K_3 \circ K_2$	9
FIGURE 1.9.	Un graphe H et sa couronne H^*	10
FIGURE 1.10.	Un échiquier 5×5 et un échiquier 8×8	12
FIGURE 1.11.	Un graphe G	13
FIGURE 1.12.	Un graphe G avec $\alpha(G) = 3$ et $i(G) = 2$	14
FIGURE 1.13.	Un graphe G avec $\gamma_t(G) = 2$	15
FIGURE 1.14.	La chaîne P_6 avec $\gamma_l(G) = 3$	15
FIGURE 1.15.	Un graphe G avec $\gamma_{ve}(G) = 1$ et $\Gamma_{ve}(G) = 2$	18
FIGURE 2.1.	Quelques opérations sur un graphe G	21
FIGURE 2.2.	Un graphe G avec $\gamma_L(G) = 3$ et $\gamma_L(G_e) = 6 = 2^{\gamma_L(G)-1} + \gamma_L(G) - 1$	28
FIGURE 2.3.	Famille \mathcal{G} des graphes connexes 3 - γ_L -point-critiques, où l'ensemble dominant localisateur est représenté par des sommets en gras.	29

INTRODUCTION

Sans que l'on en soit toujours conscient, la Théorie des Graphes est aujourd'hui très présente dans notre société moderne. Cette branche des mathématiques trouve ses origines dans des applications très pratiques. Au 18^{ème} siècle, le mathématicien suisse Leonhard Euler s'intéressait à un problème célèbre appelé "Le Problème des Ponts de Königsberg". Ce problème consistait à déterminer s'il était possible de traverser chaque pont de la ville de Königsberg une seule fois et de revenir au point de départ. Euler a abordé ce problème en représentant les terres et les ponts sous forme de points (ou "sommets") et de lignes (ou "arêtes") dans ce qui est maintenant connu sous le nom de "graphe". En résolvant ce problème, Euler a posé les bases de la théorie des graphes.

Cependant, ce n'est qu'au 20^{ème} siècle que la théorie des graphes a émergé en tant que domaine mathématique à part entière. Le mathématicien hongrois Dénes Kőnig a joué un rôle crucial dans le développement initial de cette théorie, notamment en étudiant les graphes bipartis et en introduisant le concept de couplage dans les graphes. Par la suite, d'autres mathématiciens tels que Václav Chvátal, Paul Erdős et Claude Berge ont contribué à son expansion en développant de nouveaux concepts et en explorant leurs applications dans divers domaines.

Aujourd'hui, la théorie des graphes est devenue un domaine essentiel de la recherche en mathématiques appliquées et en informatique. Ses applications sont vastes, touchant aux réseaux de transport, aux réseaux sociaux, à la logistique, et bien d'autres domaines encore. L'un des concepts fondamentaux de cette théorie est la domination dans les graphes, qui revêt une importance particulière. Elle consiste à trouver un sous-ensemble de sommets dans un graphe de manière à ce que chaque sommet n'appartenant pas à ce sous-ensemble soit adjacent à au moins un sommet de ce sous-ensemble. Cette notion de domination est cruciale pour la modélisation et la résolution de nombreux problèmes pratiques, tels que la conception de réseaux de communication efficaces, la planification d'itinéraires, ou encore la gestion de ressources dans des réseaux distribués.

Un sous-ensemble D de sommets dans un graphe $G = (V, E)$, est dit dominant de G si tout sommet de G est ou bien dans D ou bien adjacent à un sommet de D . Le nombre de domination de G , noté $\gamma(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G . Parmi les variantes de la domination, nous citons par exemple, la domination sommet-arêtes, notée ve -domination. Un sous ensemble de sommets D est un ve -dominant, si chaque arête e de E est ou bien incidente à un sommet de D ou adjacente à une arête incidente à un sommet de D . Le cardinal minimum d'un ensemble ve -dominant d'un graphe G est appelé nombre de ve -domination, et est noté par $\gamma_{ve}(G)$.

Effectivement, l'étude du comportement des paramètres des graphes sous différentes opérations élémentaires, telles que la suppression de sommets ou d'arêtes, l'ajout de sommets ou d'arêtes, l'identification de sommets, la contraction d'arêtes, entre autres, sont cruciales pour comprendre la dynamique et les propriétés des graphes.

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de l'effet de la contraction d'une arête d'un graphe sur le nombre de ve -domination.

Chapitre 1 : Concepts fondamentaux

Dans le premier chapitre, nous rappelons en premier les définitions de base de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Ainsi, nous évoquons la notion de la domination dans les graphes, en donnant en premier une vue historique sur la domination. Nous présentons par la suite quelques paramètres de domination, chacun avec une application, et à la fin nous présentons la définition du nouveau concept " ve -domination".

Chapitre 2 : Etat de l'art sur la criticité dans les graphes

Le deuxième chapitre présente les définitions et les terminologies de la théorie de criticité dans les graphes, utilisées dans ce mémoire. Ainsi, nous évoquons les graphes modifiés avec leur application. Ensuite, nous présentons quelques types des graphes critiques et quelques résultats antérieurs dans ce contexte.

Chapitre 3 : Effet de la contraction d'une arête sur le nombre de domination sommet-arête

Dans ce chapitre, notre attention s'est portée sur l'étude de la ve -domination dans les graphes. Nous avons examiné l'effet de la contraction d'une arête sur le nombre de ve -domination, noté γ_{ve} . De plus, nous avons donné une caractérisation constructive des arbres pour lesquels la contraction de toute arête entraîne une diminution de γ_{ve} . Ces arbres sont désignés par " γ_{ve} -point-critiques". Aussi nous avons établi quelques conditions nécessaires pour les graphes γ_{ve} -point-critiques.

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés le long de ce manuscrit et quelques perspectives dans ce contexte.

CHAPITRE 1

CONCEPTS FONDAMENTAUX

1.1 Notions générales et terminologies

Ce chapitre est consacré aux concepts de base et terminologies de la théorie des graphes utilisés le long de ce mémoire. Nous donnons par la suite une vue historique sur la domination dans les graphes, où on présente quelques paramètres et quelques types, de domination avec leur application. Pour plus de détails sur la théorie des graphes, le lecteur peut se référer aux livres de Claude Berge [2] et Chartrand et Lesniak [8], et pour la domination ceux de Haynes et al. [22] et [23]. Nous rappelons que tous les graphes considérés dans ce mémoire sont finis, simples et non orientés.

1.1.1 Définitions et notations

Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est défini par deux ensembles $V(G)$ et $E(G)$, où $V(G)$ est un ensemble de sommets fini et non vide, et $E(G)$ est un ensemble fini d'une famille de paires de sommets appelées arêtes. L'*ordre* de G est le nombre de ses sommets, noté par $n = |V(G)|$, et la *taille* de G est le nombre de ses arêtes, notée par $m = |E(G)|$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous notons simplement $G = (V, E)$. Une arête e joignant deux sommets u et v est notée par $e = uv$. Les sommets u et v sont appelés les extrémités de e . On dit que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et à v . Un graphe d'ordre 1 est dit trivial, sinon il est dit non-trivial. Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues, notée $e = uu \in E$. Un graphe G est dit *simple* s'il est sans boucles, et sans arêtes multiples (arêtes qui possèdent les mêmes extrémités). Dans la suite, nous considérons uniquement les graphes simples et non-triviaux. A titre d'exemple, on considère le graphe G de la Figure 1.1, dont l'ensemble des sommets est $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ et l'ensemble des arêtes est $\{v_1v_2, v_1v_6, v_2v_3, v_2v_6, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_4v_6, v_6v_7, v_6v_8\}$. Les sommets v_1 et v_2 sont adjacents dans G , alors que v_1 et v_3 ne

le sont pas.

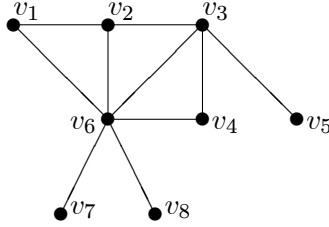


FIGURE 1.1. Un graphe G d'ordre 8 et de taille 10.

Voisinage et degré

Pour un sommet v d'un graphe G , le voisinage ouvert de v , noté par $N_G(v)$, est défini par $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$, et le voisinage fermé de v , noté par $N_G[v]$, est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert de S est défini par $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$, et le voisinage fermé de S est $N[S] = \cup_{v \in S} N[v]$. Le voisinage privé d'un sommet $v \in S$ par rapport à S , noté $pn[v, S]$, est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas de voisins dans S autre que v , i.e, $pn[v, S] = \{u \in V(G) \text{ où } N_G[u] \cap S = \{v\}\}$.

Le degré d'un sommet u dans un graphe G , noté par $d_G(u)$, est le nombre de sommets adjacents à u . On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le degré maximum et le degré minimum dans un graphe G , respectivement. Un sommet de degré nul est dit sommet *isolé*. Un sommet de degré un est dit *feuille* ou *pendant*, et son voisin est dit *support*. Un sommet support est dit *fort* s'il est adjacent à au moins deux sommets pendants, sinon, il est dit *faible*. L'ensemble de sommets supports de G est noté par $S(G)$, et l'ensemble de sommets pendants de G est noté par $L(G)$. Aussi on note par $\ell(G) = |L(G)|$ et $s(G) = |S(G)|$. Dans la Figure 1.1, on a: $\Delta(G) = d_G(v_6) = 6$, $\delta(G) = d_G(v_7) = 1$, $d_G(v_1) = d_G(v_4) = 2$ et $d_G(v_3) = 4$. Aussi v_3 est un support faible, v_6 est un support fort, et v_7 et v_8 sont des sommets pendants, et $\ell(G) = 3$, $s(G) = 2$.

Chaînes, cycles

Une chaîne de longueur $k - 1$ dans un graphe G est une séquence alternée de sommets et d'arêtes $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{i-1}, e_{i-1}, v_i, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$ tel que $e_{i-1} = v_{i-1}v_i$ pour $i = 2, 3, \dots, k$. L'entier $k \geq 1$ représente le nombre de sommets de la chaîne. Une chaîne

dans laquelle aucune arête ne se répète est dite simple, et une chaîne dans laquelle aucun sommet ne se répète est dite élémentaire. Le nombre d'arêtes dans une chaîne élémentaire définit sa longueur et le nombre de sommets définit son ordre. Une corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par k sommets, notée P_k , est une chaîne élémentaire sans cordes.

Un cycle, noté C_k est une chaîne simple de longueur $k \geq 3$ dont lequel les deux extrémités initiale et terminale sont confondues. Dans ce cas le nombre de sommets de C_k est égal à sa longueur.

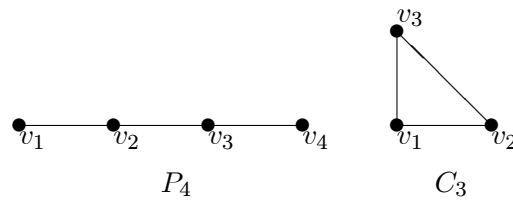


FIGURE 1.2. Une chaîne P_4 et un cycle C_3

Distance et diamètre

Soit $G = (V, E)$ un graphe. La *distance* entre deux sommets u et v , notée $d(u, v)$, est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v . Le *diamètre* d'un graphe $G = (V, E)$, noté $\text{diam}(G)$, est la distance maximum entre deux sommets de G , c-à-d $\text{diam}(G) = \max_{u, v \in V} \{d(u, v)\}$.

Connexité et k -connexité

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *connexe* si pour toute paire de sommets $u, v \in V$, il existe une chaîne qui les relie. Un graphe qui n'est pas connexe est dit *non connexe* ou *disconnexe*. Un sommet x d'un graphe G est un *sommet d'articulation* si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes, i.e, si G est connexe alors $G - x$ n'est pas connexe. Un *ensemble d'articulation* de G est un ensemble de sommets $S \subset V$ tel que $G - S$ ne soit pas connexe. Un graphe $G = (V, E)$ est dit k -connexe si le cardinal minimum d'un ensemble d'articulation est égal à k . A titre d'exemple de ce concept le cycle C_n pour $n \geq 4$ est un 2-connexe.

1.1.2 Graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Graphe partiel et sous-graphe

Le graphe H est appelé un *sous-graphe partiel* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$, et il est appelé un *graphe partiel* du graphe G si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Pour un sous ensemble de sommets non vide $S \subseteq V(G)$ du graphe G , le *sous-graphe* $H = (S, E)$ induit par S dans G ; noté par $G[S]$, est le sous graphe du graphe G avec l'ensemble de sommets $V(G[S]) = S$ et l'ensemble d'arêtes $E(G[S]) = \{uv \in E(G) : u, v \in S\}$.

Graphe k -régulier

Un graphe k -régulier est un graphe dont tous les sommets ont le même degré k . Ainsi les cycles élémentaires C_n sont des graphes 2-réguliers. Comme illustration du concept, un graphe 3-régulier G est représenté dans la Figure 1.3 ci-dessous:

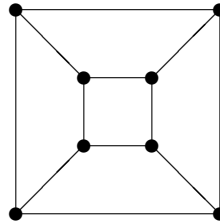


FIGURE 1.3. Un graphe G , 3-régulier

Graphe complet

Un graphe *complet* d'ordre n , noté par K_n , est un graphe dont tous les sommets distincts sont adjacents, c'est à dire, G est $(n-1)$ -régulier. Comme illustration du concept, les graphes complets K_3, K_4 sont représentés dans la Figure 1.4.

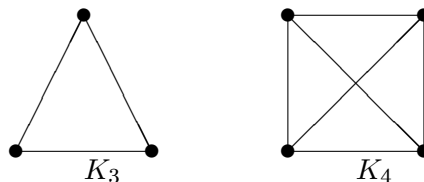


FIGURE 1.4. Graphes complets K_3 et K_4

Graphe complémentaire

Le graphe *complémentaire* de $G = (V, E)$, noté par $\bar{G} = (V, \bar{E})$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G , et une arête existe dans \bar{G} si elle n'existe pas dans G . A titre d'exemple, le graphe G et son graphe complémentaire \bar{G} de la Figure 1.5 suivante.

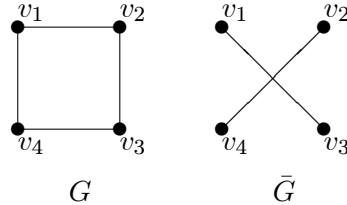


FIGURE 1.5. Un graphe G et son complémentaire \bar{G}

Graphe multiparti

Un graphe est dit *multiparti*, si l'ensemble des sommets peut être partitionné en $p \geq 2$ sous-ensembles, sachant qu'aucune arête du graphe G ne joint deux sommets appartenant au même sous ensemble. Pour $p = 2$, le graphe G est appelé *biparti*. Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles impaires. Si tout sommet appartenant à un sous ensemble V_i de la partition d'un graphe multiparti est adjacent à tout sommet des autres sous ensemble $V_j; j \neq i$ pour tout $i = \overline{1, p}$, alors le graphe G est appelé *multiparti complet*, et est noté par K_{k_1, k_2, \dots, k_p} avec $K_i = |V_i|$. Des exemples, du graphe biparti G et du graphe *biparti complet* $K_{2,3}$, sont représentés dans la Figure 1.6.



FIGURE 1.6. Un graphe biparti G et un graphe biparti complet $K_{2,3}$

Arbre

L'une des structures les plus simples d'un graphe connexe est connue sous le nom d'arbre. Un arbre est un graphe connexe sans cycle, et est noté par T . Comme cas

particuliers des arbres on a : L'étoile, est un graphe biparti complet, tel que $|V_1| = 1$ et $|V_2| = p$, et est notée par $K_{1,p}$. Le sommet de V_1 est appelé centre de l'étoile.

Une *étoile double*, notée par $S_{p,q}$, est l'arbre obtenu à partir de deux étoile $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres. Une étoile subdivisée, notée par SS_p , est un arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,p}$: $p \geq 1$, en subdivisant chacune de ses arêtes.

Une *chenille* $C(t_1, t_2, \dots, t_s)$ est un arbre dont la suppression de ses feuilles donne une chaîne u_1, u_2, \dots, u_s où t_i est le nombre des feuilles adjacentes à u_i .

Une *forêt* est un graphe dont toutes ses composantes connexes sont des arbres. A titre d'exemples, les arbres particuliers de la Figure 1.7 suivante. Notons que l'ensemble des arbres particuliers forme une *forêt*.

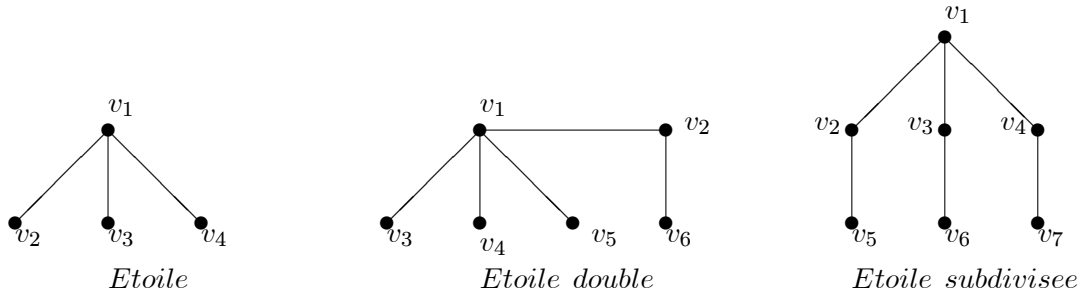


FIGURE 1.7. Arbres particuliers

Couronne de deux graphes

La *couronne* G de deux graphes G_1 et G_2 , comme c'est défini dans [21], est le graphe $G_1 \circ G_2$ obtenu à partir d'une copie de G_1 et $|V(G_1)|$ copies de G_2 où le i^{me} sommet de G_1 est adjacent à tous les sommets de la i^{me} copie de G_2 . A titre d'exemple la couronne $K_3 \circ K_2$ représentée dans la Figure 1.8.

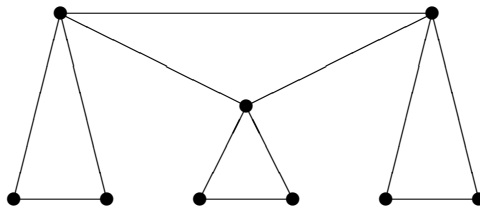


FIGURE 1.8. La couronne $K_3 \circ K_2$

En particulier la *couronne* $G^* = G \circ K_1$ des deux graphes G et la clique K_1 , est appelée

couronne de G , (voir la Figure 1.9).

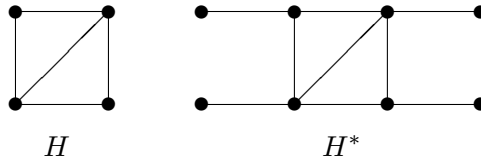


FIGURE 1.9. Un graphe H et sa couronne H^*

1.1.3 Propriétés des ensembles

Minimalité et maximalité d'un ensemble

Soient $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{P} une propriété. Un sous ensemble S de V est dit minimal par rapport à la propriété \mathcal{P} si aucun sous ensemble strict de S ne vérifie cette propriété. Le sous ensemble S est dit maximal par rapport à la propriété \mathcal{P} , si aucun sous ensemble de V contenant S et différent de S ne vérifie la propriété \mathcal{P} .

Ensemble minimum et ensemble maximum

Un sous ensemble B de V est dit minimum ou de taille minimale par rapport à la propriété \mathcal{P} si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous ensemble de B) ne vérifie cette propriété. De même, l'ensemble B est dit maximum ou de taille maximale par rapport à \mathcal{P} , si aucun ensemble plus grand que B (sans nécessairement le contenir) ne vérifie \mathcal{P} .

1.1.4 Invariants de graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n .

Isomorphisme

Soient $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ deux graphes. On dit que G et G' sont isomorphes s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes telle

que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs images par la fonction bijective sont adjacentes dans l'autre graphe. *i.e* (il existe $\varphi : V \rightarrow V'$ telle que

$$vw \in E \iff \varphi(v)\varphi(w) \in E, \forall v, w \in V).$$

Si deux graphes sont isomorphes alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées *invariants de graphes*, en d'autres termes un *invariant* est une propriété stable par isomorphisme. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe.

Stable, clique

On appelle *stable* (*indépendant*) d'un graphe $G = (V, E)$ un sous-ensemble S de sommets de V deux à deux non adjacents. Le cardinal maximum (resp. minimum) d'un ensemble indépendant maximal est appelée *nombre de stabilité* ou *nombre d'indépendance* (resp. *nombre d'indépendance inférieur*) de G , noté par $\alpha(G)$ (resp. $i(G)$).

Une clique K de G est un sous ensemble de sommet de V deux à deux adjacents.

Couplage

Un *couplage* dans un graphe G est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes, chaque sommet est donc incident à au plus une arête du couplage. La taille maximale d'un couplage dans G est noté par $\beta_1(G)$. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. Un couplage de G est dit parfait si tout sommet de G est incident à une arête du couplage, autrement dit si $\beta_1(G) = n/2$.

Transversal

Un sous-ensemble de sommets T d'un graphe G est un *transversal* si toute arête de G est incidente à au moins un sommet de T . On notera par $\beta(G)$ le cardinal minimum d'un transversal de G .

1.2 La domination dans les graphes

1.2.1 Vue historique

Le concept de domination dans les graphes trouve son origine dans le jeu d'échec, introduit par D. Jaenisch [14], utilisant la reine comme pièce de jeu. Le principe est de couvrir

(dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces de jeu. En 1862, D. Jaenisch posa le problème de la détermination du nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum pour un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [20].

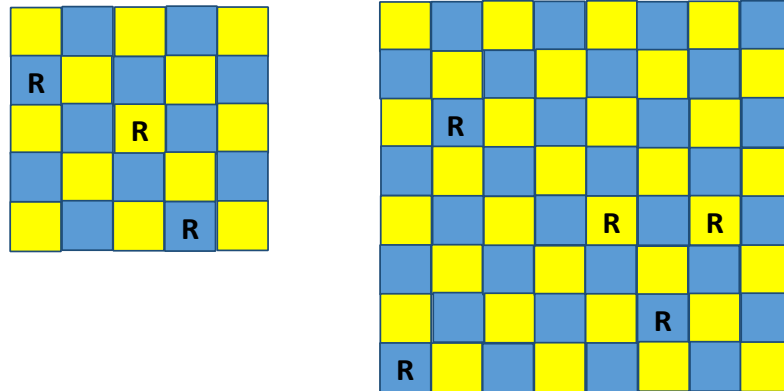


FIGURE 1.10. Un échiquier 5×5 et un échiquier 8×8

En 1958, Claude Berge [3] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors le coefficient de stabilité externe. L'appellation actuelle du nombre de domination est due à Ore [34] en 1962. La domination n'a connu sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [12] en 1977. L'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est difficile au sens de la complexité algorithmique (Voir [6, 29, 30]). Ainsi beaucoup d'axes de recherches ont vu le jour, par exemple : la détermination des bornes supérieures et des bornes inférieures, la recherche d'algorithmes polynomiaux, ..etc. Pour son application, considérons un réseau de communication constitué de stations fixes, et entre deux stations quelconques il peut y exister une communication directe. Le problème posé est de sélectionner un ensemble minimum de stations pour installer des transmetteurs, tout en assurant pour les stations qui ne possèdent pas de transmetteurs d'avoir une liaison directe avec celles qui en possèdent.

1.2.2 Définitions et propriétés préliminaires

Définition 1.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un ensemble dominant est un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ tel que tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D .

Définition 1.2. Un ensemble dominant D est dit minimal si aucun sous ensemble propre de D n'est un ensemble dominant. Un dominant de cardinalité minimum est un dominant minimal, mais l'inverse est faux.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici quelques unes.

- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$.
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V$, $N[v] \cap D \neq \emptyset$.
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si $N[D] = V$.

Le *nombre de domination inférieur* (ou *nombre de domination*) d'un graphe G , noté par $\gamma(G)$, représente la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G . Un ensemble dominant minimum avec une telle cardinalité est appelé $\gamma(G)$ -ensemble. La cardinalité maximum d'un ensemble dominant minimal est appelé *nombre de domination supérieur*, et est noté par $\Gamma(G)$.

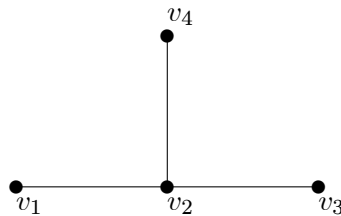


FIGURE 1.11. Un graphe G .

Pour le graphe G de la Figure 1.11, les ensembles de sommets $\{v_2\}$ et $\{v_1, v_3, v_4\}$ sont des ensembles dominants minimaux. Puisqu'on a l'ensemble dominant $\{v_1, v_3, v_4\}$ est l'ensemble dominant minimal de plus grande cardinalité, il s'ensuit que $\Gamma(G) = 3$, et $\{v_2\}$ est l'ensemble dominant minimal de plus petite cardinalité, donc $\gamma(G) = 1$.

La notion d'*indépendance* (*stabilité*) dans les graphes a été liée en premier aux ensembles dominants. Cette notion est reliée à celle de domination par le fait qu'un ensemble indépendant maximal (au sens de l'inclusion des ensembles) est un dominant minimal. Dans un graphe G , un sous ensemble S de V est un indépendant si $\Delta(G[S]) = 0$, .i.e il n'existe pas deux sommets dans S adjacents. Un ensemble indépendant S de G est *maximal* si pour tout sommet x dans $V - S$, $S \cup \{x\}$ n'est pas un indépendant.

Le cardinal maximum (resp. minimum) d'un ensemble indépendant maximal est appelée *nombre d'indépendance* (resp. *nombre d'indépendance inférieur*) de G , noté par $\alpha(G)$ (resp. $i(G)$). Un ensemble indépendant maximal avec une telle cardinalité est appelé $\alpha(G)$ -ensemble, on note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\alpha(G)$ -ensembles. Pour le graphe de la Figure 1.12, on a l'ensemble des sommets $\{v_2, v_5\}$ est un indépendant maximal de plus petite cardinalité, donc $i(G) = 2$ et l'ensemble des sommets $\{v_1, v_3, v_6\}$ est un indépendant maximal de plus grande cardinalité, donc $\alpha(G) = 3$.

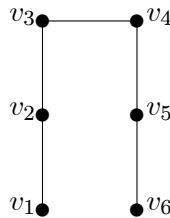


FIGURE 1.12. Un graphe G avec $\alpha(G) = 3$ et $i(G) = 2$.

1.2.3 Quelques types de domination avec applications

En raison de la large variété des problèmes liés à la domination, nous allons nous restreindre dans cette partie uniquement à quelques types de domination.

1. k-dominaton

En 1985, Fink et Jacobson [18, 19] introduisent le concept de *k-dominaton*. Un sous ensemble S de V est dit *k-dominant* de G si tout sommet de $V - S$ possède au moins k voisins dans S . Le nombre de *k-dominaton* noté par $\gamma_k(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble *k-dominant* de G . A titre d'exemple, l'ensemble $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ de graphe G de la Figure 1.12, est un 2-dominant minimum de G , et donc $\gamma_2(G) = 4$.

2. Domination totale

En 1980, Cockayne, Dawes et Hedetniemi [13] introduisent le concept de *domination totale*. Un ensemble dominant D est dit total si tout sommet de D possède un voisin dans D . Le cardinal minimum d'un ensemble dominant total noté par $\gamma_t(G)$, est appelé le nombre de *domination totale*. Comme exemple illustratif le graphe G de la Figure 1.13, dont l'ensemble des sommets encerclés représente un dominant total minimum, et donc $\gamma_t(G) = 2$.

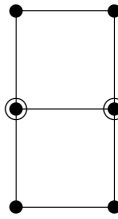


FIGURE 1.13. Un graphe G avec $\gamma_t(G) = 2$.

3. Domination localisatrice et le code identifiant

En 1987, Slater [38], introduit le concept de la *domination localisatrice*. Un sous ensemble de sommets D d'un graphe $G = (V, E)$ est dit *dominant localisateur* (resp. *code identifiant*) de G , si pour tout sommet $v \in V$, $N[v] \cap D \neq \emptyset$, et pour toute paire de sommets u, v de $V \setminus D$, $N(v) \cap D \neq N(u) \cap D$ (resp. si pour tout sommet $v \in V$, $N[v] \cap D \neq \emptyset$, et pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets de V , $N[v] \cap D \neq N[u] \cap D$). Les nombres $\gamma_L(G)$ et $M(G)$ désignent respectivement la cardinalité minimale d'un ensemble dominant localisateur de G et la cardinalité minimale d'un code identifiant de G . La Figure 1.14 illustre un exemple d'une chaîne P_6 dont le nombre de domination localisatrice inférieur est égal à 3 (les sommets encerclés).



FIGURE 1.14. La chaîne P_6 avec $\gamma_L(G) = 3$.

Applications

Exemple 1 (*Réseau informatique*)

Prenons par exemple un réseau de micro-ordinateurs dans lequel un groupe de serveurs a l'habitude de communiquer directement avec n'importe quel micro-ordinateur en dehors du groupe pour lui assurer un service. Le plus petit groupe possible de serveurs avec cette propriété est un ensemble **dominant minimum** du graphe représentant le réseau. Si on impose à ce que tout serveur doit être relié à au moins un autre serveur. Dans ce cas, le plus petit groupe possible de serveurs avec cette propriété est un ensemble **dominant total minimum** du graphe représentant le réseau. Si maintenant on impose à ce que chaque serveur assure k services et que tout micro-ordinateur en dehors du groupe peut bénéficier d'un seul service exactement d'un serveur qu'il lui est voisin. Dans ce cas, pour assurer les k services pour tous les micro-ordinateurs, le plus petit groupe possible de serveurs avec cette propriété est un k -**dominant minimum** du graphe représentant le réseau. Au fait cette propriété de la k -domination permet par mesure de sécurité d'assurer la continuité du service au cas où des serveurs tombent en panne. Et vu le coût important, il est évident de chercher à minimiser le nombre de serveurs du groupe dans le réseau informatique.

Exemple 2

Dans le but de la prévention contre les incendies, nous équipons la construction d'un système de détection d'incendie. Les appareils utilisés sont conçus de la manière suivante.

- L'appareil détecte l'incendie qui se déclenche dans la pièce où il est installé.
- L'appareil détecte (sans distinguer) tous les incendies qui se déclenchent dans toutes les pièces adjacentes à celle où il est installé, c-à-d. dans les pièces qui ont un mur en commun avec celle-ci.

- L'appareil distingue entre un incendie qui se déclenche dans la pièce où il est installé de celui qui se déclenche dans une pièce adjacente à celle-ci.

Pour des raisons de coût on veut minimiser le nombre d'appareils à installer.

On peut modéliser cette construction par un graphe $G = (V, E)$, où les sommets $v \in V$ représentent les pièces de la construction, et deux sommets u et v sont voisins dans G si les deux pièces représentées par ces deux sommets sont adjacentes dans la construction.

Le problème de trouver les meilleurs emplacements pour installer ces appareils dans la construction revient à déterminer un ensemble dominant localisateur minimum dans le graphe G . La notion de la domination nous permet de savoir s'il y a un incendie dans la construction, quand à la notion de la localisation nous permet de savoir le lieu exact de l'incendie.

4. Domination sommet-arête

Un autre type de domination est celui de la *domination des arêtes par les sommets*, appelée "*domination sommet-arête*". Le concept de la *domination sommet-arête*, notée *ve*-domination, a été introduit par Kenneth Peters en 1986 [35] dans sa thèse de PhD, dirigée par Renu Laskar à l'université de Clemson, intitulée "*Theoretical and Algorithmic Results on Domination and Connectivity*". Ce concept a été étudié dans une autre thèse de PhD "*Vertex-edge and Edge-vertex parameters in Graphs*" par Jason Lewis [31] et dirigée par Stephen T. Hedetniemi à la même université de Clemson, aussi par Jason Lewis et al. dans [28]. Le concept de *domination sommet-arête* dans les graphes est une extension de la notion classique de domination dans la théorie des graphes. La domination classique, définie précédemment, se concentre sur les sommets d'un graphe, tandis que la *domination sommet-arête* introduit une variation où la domination implique à la fois des sommets et des arêtes.

Définition 1.3 (Lewis. [31]). *On dit qu'un sommet u d'un graphe $G = (V, E)$ *ve*-domine l'arête $e \in E$ si :*

1. *e est incidente à u , ou*
2. *e est adjacente à une arête incidente à u .*

En d'autres termes, un sommet u *ve*-domine toutes les arêtes incidentes à tout sommet dans $N_G[u]$.

Définition 1.4 (Lewis. [31], 2007). *Un sous ensemble $S \subseteq V$ est un *ve*-dominant de G , si pour toute arête $e \in E$, il existe un sommet $v \in S$ tel que v *ve*-domine e . Le cardinal*

minimum d'un ensemble ve -dominant de G est appelé le nombre de ve -domination de G , noté $\gamma_{ve}(G)$, et le cardinal maximum d'un ensemble ve -dominant minimal de G , appelé le nombre de ve -domination supérieur de G , et est noté par $\Gamma_{ve}(G)$.

La Figure 1.15 illustre un exemple d'un graphe G dont l'ensemble $\{y\}$ est un ve -dominant minimum, donc $\gamma_{ve}(G) = 1$, et l'ensemble $\{x, z\}$ est un ve -dominant maximum, donc $\Gamma_{ve}(G) = 2$.

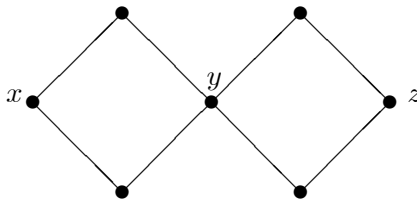


FIGURE 1.15. Un graphe G avec $\gamma_{ve}(G) = 1$ et $\Gamma_{ve}(G) = 2$.

Définition 1.5 (Lewis. [31], 2007). Soit S un sous-ensemble de sommets de V . Un sommet $v \in S$ a une arête privée $e = uw \in E$ relativement à l'ensemble S si :

1. v est incidente à e , ou
2. v est adjacent à u ou w , et
3. pour tout sommet $x \in S - \{v\}$, e n'est pas incidente à x et x n'est pas adjacent ni à u ou w .

En d'autres termes, v ve -domine l'arête e et aucun autre sommet de S ne ve -domine e .

Application: La ve -domination peut être utile dans des applications où, la sécurité ou la surveillance d'un réseau (où les arêtes représentent des connexions entre les points ou sommets) est importante. Chaque point ou connexion doit être sous la surveillance ou l'influence d'un point de contrôle ou de surveillance, représenté par l'ensemble dominant sommet-arête. Par exemple considérons une entreprise agroalimentaire qui produit des

aliments à base de viande. Au fil du temps, elle remarque une baisse de la demande pour ses produits traditionnels, car de plus en plus de consommateurs se tournent vers des alternatives végétales pour des raisons éthiques, environnementales ou de santé. Pour rester compétitive, l'entreprise décide de diversifier son offre et d'investir dans le développement de produits végétariens et végétaliens.

Cette décision est motivée par la *ve*-domination, car les entreprises sont contraintes de s'adapter aux préférences changeantes des consommateurs, dominées de plus en plus par ceux qui privilégient un mode de vie sans viande. En conséquence, la *ve*-domination influence non seulement les choix individuels, mais aussi les stratégies commerciales des entreprises et, éventuellement, les politiques gouvernementales concernant l'agriculture, la santé publique et l'environnement.

CHAPITRE 2

ÉTAT DE L'ART SUR LA CRITICITÉ DANS LES GRAPHEs

De nombreuses études ont été réalisées sur les paramètres du graphe lorsque la structure du graphe est légèrement modifiée en ajoutant une arête ou un sommet, en supprimant une arête ou un sommet, en contractant une arête ou même en identifiant deux sommets adjacents. Ainsi les notions de criticité et de stabilité ont été introduites selon si le paramètre diminue, augmente ou reste inchangé. Dans ce chapitre, nous allons d'abord exposer quelques définitions et notations concernant le concept de la criticité. La documentation sur la criticité pour les paramètres de *ve*-domination est inexistante, pour cela nous allons nous concentrer sur d'autres paramètres de domination. Plus précisément sur le concept des graphes μ -point-critiques où $\mu \in \{\gamma, \gamma_t, \gamma_L\}$, qui sont des graphes pour lesquels la contraction d'une arête quelconque entraîne un changement du paramètre μ .

2.1 Les graphes modifiés

Lorsqu'un paramètre de graphe est d'intérêt pour une application pratique, il est important d'examiner le comportement de ce paramètre lorsque le graphe est modifié.

2.1.1 Quelques opérations sur les graphes

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe. G peut être modifié en un graphe G' , en effectuant des opérations sur l'ensemble des sommets $V(G)$ ou l'ensemble des arêtes $E(G)$.

- **La suppression d'un sommet (vertex deletion)**

Pour un sommet $v \in V(G)$, le graphe $G' = G - v$ est obtenu à partir de G en supprimant le sommet v . Ainsi $G - v = (V(G) \setminus \{v\}, E(G) \setminus E_v)$, où E_v est l'ensemble des arêtes incidentes à v .

- **La suppression d'une arête (edge deletion)**

Pour une arête $e \in E(G)$, le graphe $G' = G - e$ est obtenu à partir de G en supprimant l'arête e . Ainsi $G' = (V(G), E(G) \setminus \{e\})$.

- **L'ajout d'une arête (edge addition)**

Pour une arête $e \in E(\overline{G})$, le graphe $G' = G + e$ est obtenu à partir de G en ajoutant l'arête e . Ainsi $G' = (V(G), E \cup \{e\})$.

- **La contraction d'une arête (edge contraction)**

Pour une arête $uv \in E(G)$, le graphe $G' = G_{uv}$ est obtenu à partir de G en contractant l'arête uv , c.à.d., on supprime l'arête uv et on fusionne les deux sommets u et v en un seul sommet \overline{uv} . Ainsi $G_{uv} = ((V \setminus \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}\}, E \setminus \{uv\})$.

- **La subdivision d'une arête (edge subdivision)**

Pour une arête $uv \in E(G)$, le graphe $G' = G_{subuv}$ est obtenu à partir de G en subdivisant l'arête uv , c-à-d, on supprime l'arête uv , on ajoute un nouveau sommet w et on relie w aux sommets u et v . Ainsi $G_{subuv} = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{uv\}) \cup \{uw, vw\})$.

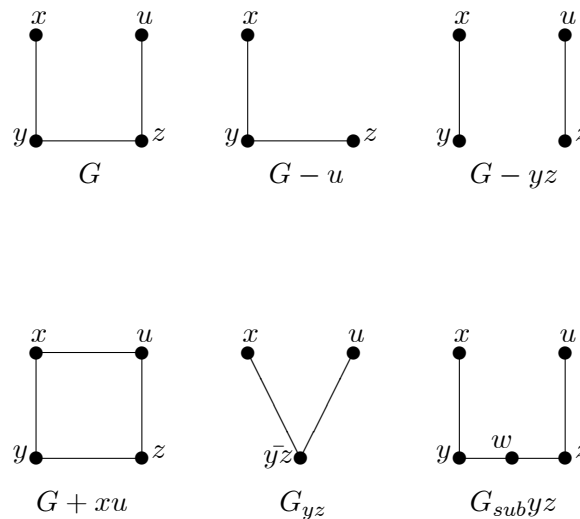


FIGURE 2.1. Quelques opérations sur un graphe G .

2.1.2 Quelques applications pratiques

Cas de l'ajout d'une arête

Le problème de localisation des installations consiste à choisir l'emplacement optimal de certains types d'installations pour satisfaire la demande des clients ou des utilisateurs. Pour des raisons de coût, il est souhaitable de minimiser le nombre de ces installations. Par exemple on cherche à minimiser le nombre d'espaces de stockages à installer dans un réseau de télécommunication. Alors, on propose d'ajouter quelques liaisons entre les noeuds qui ne sont pas trop éloignés dans le réseau. Le problème théorique qui se pose est l'étude de l'effet de l'ajout d'une arête (ajout de liaison) sur le nombre de domination (le nombre minimum d'espaces de stockage à installer).

Cas de la contraction d'une arête

Parfois l'ajout de liaison implique encore des coûts supplémentaires. Par conséquent le problème théorique qui se pose est l'étude de l'effet de la contraction d'une arête (contraction de liaison) sur le nombre de domination (le nombre minimum d'espaces de stockage à installer).

Les graphes critiques ont une application directe dans les problèmes de la conception des réseaux et la localisation des installations. Dans la section suivante nous présentons les graphes critiques pour un paramètre de domination μ .

2.2 Les graphes critiques

La définition d'un graphe critique dépend d'une propriété \mathcal{P} d'un graphe et d'une opération Φ sur un graphe. Un graphe G est dit critique par rapport à \mathcal{P} sous l'effet de Φ , lorsque G vérifie \mathcal{P} mais pour toute opération possible Φ sur G , G est modifié en un graphe G' qui ne vérifie pas \mathcal{P} . Dans le cas où le graphe G' conserve la propriété \mathcal{P} , G est dit stable.

Pour une propriété \mathcal{P} et une opération Φ , il est possible de définir plus qu'un graphe critique selon l'effet de l'opération Φ sur le paramètre de graphe μ associé à \mathcal{P} . Par exemple, on peut définir les graphes les graphes μ^- -critiques, si pour toute opération

possible Φ sur G , $\mu(G') < \mu(G)$. Ou encore, les graphes μ^+ -critiques, si pour toute opération possible Φ sur G , $\mu(G') > \mu(G)$.

On distingue en général six classes de graphes critiques par rapport à un paramètre de domination μ sous l'effet des opérations simples sur les graphes.

- Les graphes μ^- -sommet critiques, si pour tout sommet $v \in V(G)$, $\mu(G - v) < \mu(G)$.
- Les graphes μ^+ -sommet critiques, si pour tout sommet $v \in V(G)$, $\mu(G - v) > \mu(G)$.
- Les graphes μ^- -arête supprimée-critiques, si pour toute arête $e \in E(G)$, $\mu(G - e) < \mu(G)$.
- Les graphes μ^+ -arête supprimée-critiques, si pour toute arête $e \in E(G)$, $\mu(G - e) > \mu(G)$.
- Les graphes μ^- -arête ajoutée-critiques, si pour toute arête $e \in E(G)$, $\mu(G + e) < \mu(G)$.
- Les graphes μ^+ -arête ajoutée-critiques, si pour toute arête $e \in E(G)$, $\mu(G + e) > \mu(G)$.

Le concept des graphes critiques a été introduit dans un premier temps en 1951 par Dirac [17], qui a traité à cette époque le nombre chromatique $\chi(G)$, sous l'effet de la suppression de sommets. Ce n'est qu'en 1979, Walikar et Acharya l'ont introduite pour la domination, en donnant la caractérisation des graphes γ^+ -arête supprimée-critiques. Suivi en 1983 par Sumner et Blich [39], qui eux ont étudié les graphes γ^- -arête ajoutée-critiques.

La recherche sur les graphes critiques s'est étendue à d'autres variantes de la domination, dont on peut citer comme exemples: la domination totale [33, 16, 15, 25], la 2-domination [1], la domination paire [26, 27], et la domination localisatrice [37, 9, 4, 32].

Nous nous sommes intéressés particulièrement par l'étude des graphes critiques sous l'effet de la contraction d'une arête.

2.3 Les graphes γ -point-critiques

Un graphe G est dit γ -point-critique si $\gamma(G_{uv}) < \gamma(G)$, pour toute arête uv dans G . En 2006, Burton et Sumner [7] ont initié l'étude des graphes γ -point-critique. Dans cette section, nous allons exposer leurs premiers résultats sur ce sujet. En commençant d'abord par donner les deux définitions suivantes.

Définition 2.1. *G est un graphe k - γ -point-critique si $\gamma(G) = k$ et $\gamma(G_{uv}) = k - 1$, pour toute arête $e = uv$ dans G , avec u et v deux sommets adjacents dans G .*

Les auteurs de [7] ont défini le concept des graphes totalement k - γ -point-critiques comme étant ceux dont le nombre de domination diminue sous l'effet de l'identification des sommets u et v quelconques de ces graphes, comme suit.

Définition 2.2. *Un graphe G est totalement k - γ -point-critique si $\gamma(G) = k$ et $\gamma(G_{uv}) = k - 1$, pour tous sommets u et v dans G .*

Burton et Sumner [7] ont noté que si un graphe G est totalement γ -point-critique, alors il est γ -point-critique. Rappelons qu'un sommet v est dit *critique* si $\gamma(G - v) < \gamma(G)$.

Proposition 2.3 (Burton et Sumner [7], 2006). *Si G est un graphe ayant $\gamma(G) = k \geq 2$, alors G est γ -point-critique (respectivement, totalement γ -point-critique) si et seulement si tout couple de sommets adjacents non critiques appartient au même $\gamma(G)$ -ensemble.*

Les caractérisations des graphes 2- γ -point-critiques, totalement 2- γ -point-critiques et 3- γ -point-critiques, respectivement ont été données par ces mêmes auteurs.

Théorème 2.4 (Burton et Sumner [7], 2006). *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 4$. Alors G est un graphe 2- γ -point-critique si et seulement si \overline{G} n'est pas un graphe complet et toute composante connexe de \overline{G} est soit un graphe complet K_m ($m \geq 2$) ou bien une couronne d'un graphe connexe.*

Théorème 2.5 (Burton et Sumner [7], 2006). *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$. Alors G est totalement 2- γ -point-critique si et seulement si toute composante de \overline{G} est une couronne d'un graphe connexe.*

Théorème 2.6 (Burton et Sumner [7], 2006). *Un graphe connexe 3- γ -point-critique sans sommets critiques possède un diamètre au plus égal à deux.*

Chengye et al. [10], ont donné une réponse positive au problème ouvert posé par Burton et Sumner dans [7] sur l'existence d'un graphe totalement k - γ -point-critique sans sommets critiques, pour tout entier $k \geq 4$.

Théorème 2.7 (Chengye et al [10], 2008). *Il existe un graphe totalement k - γ -point critique, sans sommets critiques, pour tout entier $k \geq 4$.*

Ils ont aussi prouvé qu'un graphe 4- γ -point-critique connexe sans sommets critiques possède un diamètre au plus égal à cinq.

Dans [36], Rad a donné une réponse sur une question ouverte dans [7], concernant le diamètre d'un graphe γ -point-critique G . Pour un graphe G , on note par G' , l'ensemble des *sommets critiques* par rapport à la domination.

Théorème 2.8 (Rad [36], 2009).

1. *Un graphe G connexe, 5- γ -point-critique, avec $G' = \emptyset$ a un diamètre au plus 7.*
2. *Un graphe connexe G , k - γ -point-critique, avec $G' = \emptyset$ a un diamètre au plus $3k - 9$ pour $k \geq 6$.*
3. *Un graphe 2-connexe, k - γ -point-critique avec $G' = \emptyset$ a un diamètre au plus $2k - 3$ pour $k \geq 7$.*

De plus, il a posé la question ouverte suivante :

Question (Rad [36], 2009). Est-il vrai qu'un graphe connexe k -point-critique avec $G' = \emptyset$ est 2-connexe?

Dans [11], X. Chen et W.C. Shiu ont donné une réponse négative sur cette question ouverte.

Théorème 2.9 (Chen et Shiu [11], 2009). *G est un graphe 1-connexe, $2k$ -point-critique avec $G' = \emptyset$.*

2.4 Les graphes γ_t -point-critiques

Cette section débute par les définitions des graphes γ_t -point-critiques et des graphes k_t -point-critiques.

Définition 2.10. *Un graphe G est dit γ_t -point-critique si $\gamma_t(G_{uv}) < \gamma_t(G)$, pour toute arête uv dans G . De plus, si $\gamma_t(G) = k$, alors G est appelé graphe k_t -point-critique.*

Dans [33], Stephanie A.M. McMahon a montré que la contraction de n'importe quelle arête d'un graphe G peut diminuer le nombre de domination totale de G d'au plus un, mais ne peut pas l'augmenter.

Proposition 2.11 (McMahon [33], 2010). *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Pour toute arête uv de G , on a $\gamma_t(G) - 1 \leq \gamma_t(G_{uv}) \leq \gamma_t(G)$.*

Dans [33], Stephanie Anne Marie McMahon a montré que pour tout entier $k \geq 3$, Il existe un graphe G qui est k_t -point-critique.

Proposition 2.12 (McMahon [33], 2010). *Soit G un graphe connexe d'ordre n et $k \geq 3$ un nombre entier. Il existe un graphe G , k_t -point-critique pour toutes valeurs de k .*

Proposition 2.13 (McMahon [33], 2010). *Si G est un graphe γ_t -point-critique et u est un sommet support, alors u est adjacent à exactement une feuille.*

Proposition 2.14 (McMahon [33], 2010). *Un arbre T est 3_t -point-critique si et seulement si $T \equiv P_5$.*

Dans la proposition suivante, Henning [24] a donné la valeur exacte du nombre de domination totale pour les chaînes et les cycles.

Proposition 2.15 (Henning [24], 2000). *Pour $n \geq 3$, $\gamma_t(P_n) = \gamma_t(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/4 \rceil - \lfloor n/4 \rfloor$.*

Étant donné que le graphe résultant par la contraction d'une arête, dans une chaîne ou dans un cycle d'ordre n , reste une chaîne ou un cycle, respectivement, mais avec un

sommet en moins dans l'ordre. Dans [25], Henning et Rad ont donné la caractérisation suivante.

Observation 2.16 (Henning et Rad [25], 2011). *Une chaîne P_n et un cycle C_n sont γ_t -point-critiques si seulement si $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$.*

Proposition 2.17 (Henning et Rad [25], 2011). *Si G est un graphe γ_t -point-critique d'ordre n , alors $n \leq \Delta(G)\gamma_t(G) - 1$, et cette borne est atteinte.*

Rappelons qu'un sommet est dit $\gamma_t(G)$ -critique si sa suppression diminue le nombre de domination totale. La *frontière* d'un ensemble S , notée par $B(S)$, est définie par $N(S) \setminus S$. Les auteurs de [25] ont fourni ensuite une caractérisation des graphes γ_t -point-critiques en fonction de la *frontière* de deux sommets adjacents.

Théorème 2.18 (Henning et Rad [25], 2011). *Un graphe G est γ_t -point-critique si et seulement si pour toute paire de sommets adjacents u et v , ou bien u ou v est un sommet γ_t -critique ou il existe un $\gamma_t(G)$ -ensemble S contenant u et v tel que $B(\{u, v\}) \cap S \neq \emptyset$.*

2.5 Les graphes γ_L -point-critiques

Notre section débute par les définitions des graphes γ_L -point-critiques et des graphes k - γ_L -point-critiques.

Définition 2.19. *Un graphe G est dit γ_L -point-critique si $\gamma_L(G_{uv}) < \gamma_L(G)$, pour toute arête uv dans G . De plus, si $\gamma_L(G) = k$, alors G est appelé graphe k - γ_L -point-critique.*

Dans [4], Blidia et Chellali ont montré que la contraction d'une arête quelconque de tout graphe peut réduire le nombre de la domination localisatrice par au plus deux, alors qu'elle peut l'augmenter de manière significative.

Proposition 2.20 (Blidia et Chellali [4], 2018). *Pour tout graphe non-trivial G et toute arête $e \in E(G)$, on a $\gamma_L(G) - 2 \leq \gamma_L(G_e) \leq 2^{\gamma_L(G)-1} + \gamma_L(G) - 1$.*

On peut donc formuler la définition précédente de la manière suivante.

Définition 2.21. Soit $k \geq 3$ un entier. Un graphe G est dit k - γ_L -point-critique si $\gamma_L(G) = k$ et pour toute arête uv , $k - 2 \leq \gamma_L(G_{uv}) \leq k - 1$.

Notons que chacune des bornes de cette dernière proposition est atteinte. Pour la borne inférieure, on peut considérer le graphe $K_{3,3}$ où $\gamma_L(G) = 4$ et $\gamma_L(G_e) = 2$, pour toute arête $e \in E(K_{3,3})$. Quant à la borne supérieure, prenons le graphe G de la Figure suivante, où $\gamma_L(G) = 3$ et $\gamma_L(G_e) = 6 = 2^{\gamma_L(G)-1} + \gamma_L(G) - 1$.

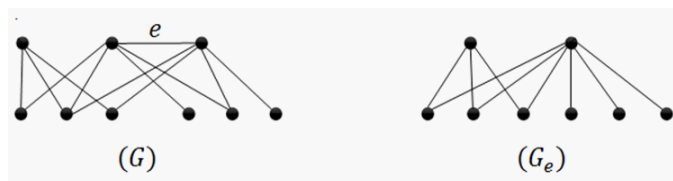


FIGURE 2.2. Un graphe G avec $\gamma_L(G) = 3$ et $\gamma_L(G_e) = 6 = 2^{\gamma_L(G)-1} + \gamma_L(G) - 1$

Définition 2.22 (Blidia et Chellali [4], 2018). Un graphe G est dit γ_L^- -point-critique (respectivement, γ_L^+ -point-critique) si $\gamma_L(G_{uv}) < \gamma_L(G)$ (respectivement, $\gamma_L(G_{uv}) > \gamma_L(G)$) pour toute arête uv dans G .

Définition 2.23. Si G est un graphe γ_L^- -point-critique (respectivement, γ_L^+ -point-critique) avec $\gamma_L(G) = k$, alors G est appelé graphe k - γ_L^- -point-critique (respectivement, k - γ_L^+ -point-critique).

Les mêmes auteurs ont aussi prouvé dans [4], qu'aucun graphe n'est γ_L^+ -point-critique.

Théorème 2.24 (Blidia et Chellali [4], 2018). Aucun graphe n'est γ_L^+ -point-critique.

Dans ce qui suit, puisqu'aucun graphe n'est γ_L^+ -point-critique, nous utiliserons la notation γ_L -point-critique (respectivement, k - γ_L -point-critique) au lieu de γ_L^- -point-critique (respectivement, k - γ_L^- -point-critique).

Ils ont de même étudié l'effet de la contraction d'arête sur les chaînes et les cycles.

Proposition 2.25 (Blidia et Chellali [4], 2018). Si G est une chaîne non-triviale P_n ou un cycle C_n d'ordre n , alors G est γ_L -point-critique si et seulement si $n \equiv 1$ ou $3 \pmod{5}$.

Dans [4], Blidia et Chellali ont aussi établi quelques propriétés des graphes γ_L -point-critiques. Rappelons ici qu'une maille d'un graphe G correspond à la longueur du plus court de ses cycles.

Proposition 2.26 (Blidia et Chellali [4], 2018). *Si G est un graphe γ_L -point-critique, alors G ne contient pas deux sommets supports adjacents.*

Proposition 2.27 (Blidia et Chellali [4], 2018). *Si G est un graphe γ_L -point-critique avec une maille $g(G) \geq 5$, alors tout sommet de G appartient à un $\gamma_L(G)$ -ensemble. De plus, $\gamma_L(G) = \gamma_L(G_e) + 1$, pour toute arête $e \in E(G)$.*

Blidia et Chellali ont donné dans [4] une caractérisation constructive de la famille \mathcal{F} des arbres qui sont γ_L -point-critiques (pour plus de détail sur la famille \mathcal{F} , voir [4]).

Théorème 2.28 (Blidia et Chellali [4], 2018). *T est un arbre γ_L -point-critique si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

Dans [32], Mimouni et al., ont caractérisé les graphes connexes $3\text{-}\gamma_L$ -point-critiques.

Théorème 2.29 (Mimouni et al.[32], 2022). *Un graphe connexe G est $3\text{-}\gamma_L$ -point-critique si et seulement si $G \in \mathcal{G}$, où \mathcal{G} est la famille des graphes illustrée dans la Figure 2.3.*

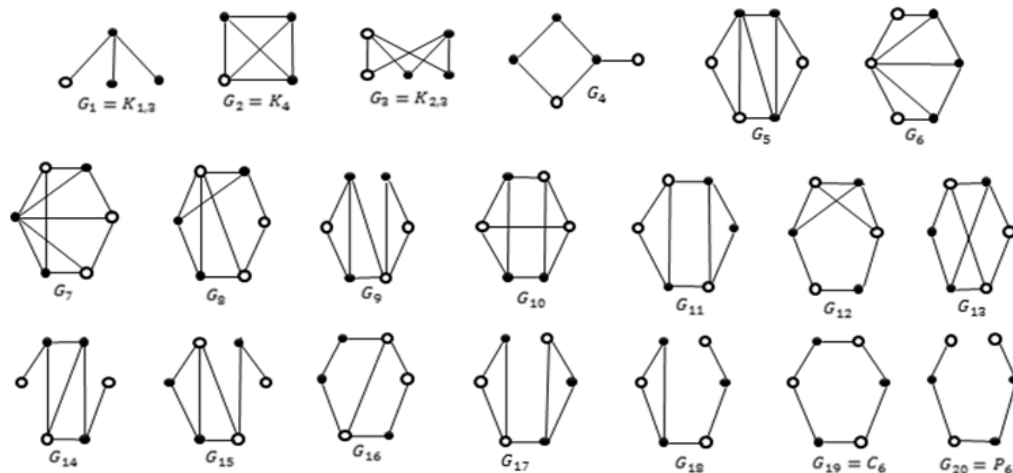


FIGURE 2.3. Famille \mathcal{G} des graphes connexes $3\text{-}\gamma_L$ -point-critiques, où l'ensemble dominant localisateur est représenté par des sommets en gras.

CHAPITRE 3

EFFET DE LA CONTRACTION D'UNE ARÊTE SUR LE NOMBRE DE DOMINATION SOMMET-ARÊTE

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude de la domination sommet-arête dans les graphes, à savoir l'effet de la contraction d'une arête sur le nombre de domination sommet-arête γ_{ve} . Ainsi de caractériser les arbres dont la contraction d'une arête quelconque fait diminuer le nombre de domination sommet-arête γ_{ve} . On note de tels arbres par " γ_{ve} -point-critiques".

3.1 Définitions et résultats préliminaires

Afin de faciliter la représentation, nous donnons quelques définitions préliminaires propres à notre travail.

Définition 3.1. Soit $R_{t,j}(u)$ un arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,t}$ ($t \geq 2$) centrée en u , en subdivisant j arêtes de l'étoile exactement une fois. Lorsqu'un sous-arbre H d'un arbre T est isomorphe à un $R_{t,j}(u)$, avec $d_T(u) \geq 2$ et que chaque feuille de H est également une feuille de T , alors H est noté $R_{t,j}^*(u)$.

Il est clair que, $R_{t,j}(u)$ est une étoile si $j = 0$ et c'est une étoile subdivisée, SS_t si $j = t$. Notons que l'arbre $R_{t,j}(u)$ n'est pas γ_{ve} -point-critique.

Notre premier résultat montre que la contraction de n'importe quelle arête d'un graphe G peut diminuer le nombre de domination sommet-arête de G d'au plus un, mais ne peut pas l'augmenter.

Proposition 3.2. Pour tout graphe G connexe non trivial et toute arête $e \in E(G)$, on a $\gamma_{ve}(G) - 1 \leq \gamma_{ve}(G_e) \leq \gamma_{ve}(G)$.

Preuve. La borne supérieure découle du fait que tout ensemble ve -dominant de G reste un ensemble ve -dominant de G_e pour toute arête $e \in E(G)$.

Pour prouver la borne inférieure, supposons que D est un $\gamma_{ve}(G_e)$ -ensemble pour une arête $e = uv \in E(G)$. Si $\overline{uv} \in D$, alors il est clair que $(D - \overline{uv}) \cup \{u, v\}$ est un ensemble ve -dominant de G ce qui permet d'obtenir la borne désirée. Donc on peut supposer que $\overline{uv} \notin D$. Alors les deux ensembles $D \cup \{v\}$ et $D \cup \{u\}$ sont des ve -dominants de G , et donc $\gamma_{ve}(G) \leq \gamma_{ve}(G_e) + 1$. \square

Chaque borne de cette proposition est atteinte. Pour la borne supérieure, on peut simplement considérer une chaîne P_5 tandis que pour la borne inférieure, on considère une chaîne P_6 .

Par la Proposition 3.2, un graphe G est appelé γ_{ve} -point-critique si $\gamma_{ve}(G_e) = \gamma_{ve}(G) - 1$ pour toute arête $e \in E(G)$. Le but de la section suivante est de donner une caractérisation constructive des arbres γ_{ve} -point-critiques.

3.2 Propriétés des graphes γ_{ve} -point-critiques

Dans cette section, nous présentons quelques caractéristiques des graphes G , où la contraction de toute arête réduit le nombre de ve -domination $\gamma_{ve}(G)$.

Proposition 3.3. *Si G est un graphe γ_{ve} -point-critique, alors tout sommet de G appartient à un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble. De plus, on a $\gamma_{ve}(G) = \gamma_{ve}(G_e) + 1$ pour toute arête $e \in E(G)$.*

Preuve. Soient x un sommet de G et $e = xy$ une arête incidente à x . Soit D_e un $\gamma_{ve}(G_e)$ -ensemble. Si $\overline{xy} \in D_e$, alors $D = (D_e - \{\overline{xy}\}) \cup \{x, y\}$ est un ensemble ve -dominant de G , tandis que si $\overline{xy} \notin D_e$, alors $D = D_e \cup \{x\}$ (le cas $D = D_e \cup \{y\}$ est similaire) est un ensemble ve -dominant de G . Donc $\gamma_{ve}(G) \leq |D_e| + 1 = \gamma_{ve}(G_e) + 1$ dans les deux situations. Puisque G est γ_{ve} -point-critique, on en déduit que $\gamma_{ve}(G) = \gamma_{ve}(G_e) + 1$, et que D est un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble qui contient x . \square

Le corollaire suivant est une conséquence directe de Proposition 3.3.

Corollaire 3.4. *Si G est un graphe γ_{ve} -point-critique, alors G possède au moins deux $\gamma_{ve}(G)$ -ensembles.*

Proposition 3.5. *Pour tout graphe non trivial G et pour tout sommet x de G , $\gamma_{ve}(G) - 1 \leq \gamma_{ve}(G - x)$. De plus, si G est un graphe γ_{ve} -point-critique, alors pour chaque feuille x de G , $\gamma_{ve}(G - x) = \gamma_{ve}(G) - 1$.*

Preuve. L'inégalité $\gamma_{ve}(G) - 1 \leq \gamma_{ve}(G - x)$ découle du fait que tout ensemble ve -dominant de $G - x$ peut être étendu à un ensemble ve -dominant de G en lui ajoutant le sommet x . Supposons maintenant que G est γ_{ve} -point-critique, et que x est une feuille de G . Soit $e = xy$ l'unique arête incidente à x dans G . Il est clair que $\gamma_{ve}(G_e) = \gamma_{ve}(G - x)$.

Puisque G est γ_{ve} -point-critique, il s'ensuit par la première partie de la proposition et la Proposition 3.3, que $\gamma_{ve}(G - x) = \gamma_{ve}(G) - 1$. \square

Proposition 3.6. *Si G est un graphe γ_{ve} -point-critique, alors G ne contient pas de sommets support fort ni de sous-arbre isomorphe à $R_{t,j}^*(u) : t \geq 2$, centré en u , d'ordre au moins quatre.*

Preuve. Soit G un graphe γ_{ve} -point-critique, et soit u un sommet support adjacent à au moins deux feuilles. Puisque tout $\gamma_{ve}(G_e)$ -ensemble reste un ve -dominant de G pour chaque arête pendante e incidente à u , nous obtenons $\gamma_{ve}(G) \leq \gamma_{ve}(G_e)$, ce qui est impossible.

Supposons maintenant que G contient un sous-arbre H d'ordre au moins 4, isomorphe à $R_{t,j}^*(u) : t \geq 2$, centré en u . Puisque G ne contient pas de support fort, alors $j \geq 1$. Comme précédemment et par le même argument, pour toute arête e dans H , tout $\gamma_{ve}(G_e)$ -ensemble reste un ve -dominant de G , et donc $\gamma_{ve}(G) \leq \gamma_{ve}(G_e)$, ce qui est impossible. \square

Dans la proposition suivante, Peters [35] a donné la valeur exacte du nombre de ve -domination pour les chaînes et les cycles.

Proposition 3.7 (Peters [35]). *Soit G une chaîne ou un cycle d'ordre n . Alors*

i) $\gamma_{ve}(P_n) = \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor$ pour $n \geq 2$.

ii) $\gamma_{ve}(C_n) = \lfloor \frac{n+3}{4} \rfloor$ pour $n \geq 3$.

Étant donné que le graphe obtenu par la contraction d'une arête, dans une chaîne ou dans un cycle d'ordre n , reste une chaîne ou un cycle, respectivement, mais avec un

sommet en moins dans l'ordre. Deux caractérisations des chaînes γ_{ve} -point-critiques et des cycles γ_{ve} -point-critiques sont données par les Propositions 3.8 et 3.9, suivantes.

Proposition 3.8. *Une chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$ est γ_{ve} -point-critique si et seulement si $n \equiv 2 \pmod{4}$.*

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$. D'après la Proposition 3.7-i), il est clair que si $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$, alors

$$\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor = \gamma_{ve}(P_n) = \gamma_{ve}(P_{n-1}) = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor.$$

De même si $n \equiv 3 \pmod{4}$, alors

$$\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor = \gamma_{ve}(P_n) = \gamma_{ve}(P_{n-1}) = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1.$$

Tandis que si $n \equiv 2 \pmod{4}$, alors

$$\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1 = \gamma_{ve}(P_n) > \gamma_{ve}(P_{n-1}) = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor.$$

Ce qui implique le résultat désiré. □

Proposition 3.9. *Un cycle C_n d'ordre $n \geq 4$ est γ_{ve} -point-critique si et seulement si $n \equiv 1 \pmod{4}$.*

Preuve. Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 4$. D'après la Proposition 3.7-ii), il est clair que si $n \equiv 0 \pmod{4}$, alors

$$\left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor = \gamma_{ve}(C_n) = \gamma_{ve}(C_{n-1}) = \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor.$$

De même si $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$, alors

$$\left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor = \gamma_{ve}(C_n) = \gamma_{ve}(C_{n-1}) = \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1.$$

Tandis que si $n \equiv 1 \pmod{4}$, alors

$$\left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1 = \gamma_{ve}(C_n) > \gamma_{ve}(C_{n-1}) = \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor.$$

Ce qui implique le résultat désiré. □

3.3 Arbres γ_{ve} -point-critiques

Notre objectif dans cette section est de caractériser les arbres γ_{ve} -point-critiques. Pour cela nous définissons la famille \mathcal{T} de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence T_1, T_2, \dots, T_p ($p \geq 1$) d'arbres, où $T_1 = P_2$, $T = T_p$, et, si $p \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des opérations suivantes.

- **Opération \mathcal{T}_1 .** Attacher une chaîne P_3 en joignant l'une de ses feuilles à un sommet y de T_i qui appartient à une chaîne pendante de longueur 3.
- **Opération \mathcal{T}_2 .** Attacher une chaîne P_3 en joignant l'une de ses feuilles à un sommet y de T_i qui appartient à une chaîne pendante de longueur 2.
- **Opération \mathcal{T}_3 .** Attacher une chaîne P_4 en joignant l'une de ses feuilles à une feuille y de T_i .
- **Opération \mathcal{T}_4 .** Attacher une chaîne P_4 en joignant l'une de ses feuilles à un sommet y de T_i qui appartient à une chaîne pendante de longueur 4.
- **Opération \mathcal{T}_5 .** Attacher une chaîne P_4 en joignant l'une de ses feuilles à un sommet support y de T_i .

Les observations et les lemmes suivants seront utilisés par la suite.

Observation 3.10. *Soit T un arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial T' en ajoutant une chaîne $P_3 = xx'x''$, attachée par une arête xz , à un sommet z appartenant à une chaîne de longueur 2 de T' . Alors $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$.*

Preuve. Il est clair que tout $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ve -dominant de T en ajoutant le sommet x , ce qui implique que $\gamma_{ve}(T) \leq \gamma_{ve}(T') + 1$. D'autre part, soit D un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble contenant z et x . Il s'ensuit que $D \cap V(T')$ est un ensemble ve -dominant de T' , et alors $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T) - 1$. Par conséquent $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$. \square

Observation 3.11. *Soit T un arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial T' en ajoutant une chaîne $P_3 = xx'x''$, attachée par une arête xz à un sommet z appartenant à une chaîne de longueur 3, $zww'w''$ de T' . Alors $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$.*

Preuve. Il est clair que tout $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ve -dominant de T en ajoutant le sommet x , et ainsi $\gamma_{ve}(T) \leq \gamma_{ve}(T') + 1$. Maintenant, soit D un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble contenant x et z . Il s'ensuit que $D \cap V(T')$ est un ensemble ve -dominant de T' , et ceci implique que $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T) - 1$. Par conséquent $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$. \square

Observation 3.12. *Soit T un arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial T' en ajoutant une chaîne $P_4 = xyzw$ attachée par une arête xs à un sommet s de T' . Alors $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$.*

Preuve. Il est clair que tout $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ve -dominant de T en ajoutant le sommet y , ce qui implique que $\gamma_{ve}(T) \leq \gamma_{ve}(T') + 1$. Soient maintenant D un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble contenant y et $D' = D \cap V(T')$. Si $x \in D$, alors il est clair qu'on peut le remplacer dans D , par son voisin s ou un voisin de s dans T' . Par conséquent D' est un ensemble ve -dominant de T' . Donc $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T) - 1$, et l'égalité souhaitée en découle. \square

Lemme 3.13. *Si T_i est un arbre γ_{ve} -point-critique et T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en appliquant l'opération \mathcal{T}_1 , alors T_{i+1} est γ_{ve} -point-critique.*

Preuve. L'opération \mathcal{T}_1 ajoute une copie de la chaîne $P_3 = xx'x''$ en joignant x à un sommet y de T_i qui appartient à une chaîne pendante $yww'w''$. Par l'Observation 3.11, on obtient $\gamma_{ve}(T_{i+1}) = \gamma_{ve}(T_i) + 1$. Pour montrer que T_{i+1} est γ_{ve} -point-critique, considérons e une arête de T_{i+1} . Supposons d'abord que $e \in E(T_i)$. Puisque $(T_i)_e$ est un arbre et T_i est γ_{ve} -point-critique, alors par les deux Observations 3.11 et 3.10, on obtient

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}((T_{i+1})_e) &= \gamma_{ve}((T_i)_e) + 1 \\ &< \gamma_{ve}(T_i) + 1 = \gamma_{ve}(T_{i+1}). \end{aligned}$$

Donc $\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) < \gamma_{ve}(T_{i+1})$.

En second lieu, supposons que $e = xy$ {le cas $e \in \{xx', x'x''\}$ est similaire}. Puisque T_i est γ_{ve} -point-critique et par la Proposition 3.3, soit D' un $\gamma_{ve}(T_i)$ -ensemble contenant

y . Par conséquent, $D'_1 = \{\overline{xy}\} \cup D' - \{y\}$ est un ensemble ve -dominant de $(T_{i+1})_e$. Ainsi

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}((T_{i+1})_e) &\leq |D'_1| = \gamma_{ve}(T_i) \\ &= \gamma_{ve}(T_{i+1}) - 1 \\ &< \gamma_{ve}(T_{i+1}). \end{aligned}$$

Donc, dans tous les cas, on obtient $\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) < \gamma_{ve}(T_{i+1})$. Par conséquent T_{i+1} est un arbre γ_{ve} -point-critique. \square

Lemme 3.14. *Si T_i est un arbre γ_{ve} -point-critique et T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en appliquant l'opération \mathcal{T}_2 , alors T_{i+1} est γ_{ve} -point-critique.*

Preuve. L'opération \mathcal{T}_2 ajoute une copie d'une chaîne $P_3 = xx'x''$, en joignant x à un sommet y de T_i qui appartient à une chaîne pendante yww' . Par l'Observation 3.10, on obtient $\gamma_{ve}(T_{i+1}) = \gamma_{ve}(T_i) + 1$. Pour montrer que T_{i+1} est γ_{ve} -point-critique, soit e une arête de T_{i+1} . Supposons en premier lieu que $e \in E(T_i)$. Puisque $(T_i)_e$ est un arbre qui est γ_{ve} -point-critique, et par l'Observation 3.10, on obtient

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}((T_{i+1})_e) &\leq \gamma_{ve}((T_i)_e) + 1 \\ &< \gamma_{ve}(T_i) + 1 = \gamma_{ve}(T_{i+1}). \end{aligned}$$

D'où $\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) < \gamma_{ve}(T_{i+1})$.

Supposons maintenant que $e = xy$ {le cas $e \in \{xx', x'x''\}$ est similaire}. Puisque T_i est γ_{ve} -point-critique et par la Proposition 3.3, soit D' un $\gamma_{ve}(T_i)$ -ensemble contenant y . Par conséquent, $D'_1 = \{\overline{xy}\} \cup D' - \{y\}$ est un ensemble ve -dominant de $(T_{i+1})_e$. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}((T_{i+1})_e) &\leq |D'_1| = \gamma_{ve}(T_i) \\ &= \gamma_{ve}(T_{i+1}) - 1 \\ &< \gamma_{ve}(T_{i+1}). \end{aligned}$$

Donc, dans tous les cas, on obtient $\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) < \gamma_{ve}(T_{i+1})$. Par conséquent T_{i+1} est un arbre γ_{ve} -point-critique. \square

Lemme 3.15. *Si T_i est un arbre γ_{ve} -point-critique et T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en appliquant l'opération \mathcal{T}_3 , alors T_{i+1} est γ_{ve} -point-critique.*

Preuve. L'opération \mathcal{T}_3 ajoute une copie de la chaîne $P_4 = xx'x''x'''$, en joignant x à une feuille y de T_i . Par l'Observation 3.12, on obtient $\gamma_{ve}(T_{i+1}) = \gamma_{ve}(T_i) + 1$. Pour montrer que T_{i+1} est γ_{ve} -point-critique, soit e une arête de T_{i+1} . Supposons en premier que $e \in E(T_i)$. Puisque T_i est un arbre γ_{ve} -point-critique, et par l'Observation 3.12, nous obtenons

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}((T_{i+1})_e) &= \gamma_{ve}((T_i)_e) + 1 \\ &< \gamma_{ve}(T_i) + 1 = \gamma_{ve}(T_{i+1}). \end{aligned}$$

D'où $\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) < \gamma_{ve}(T_{i+1})$.

Supposons ensuite que $e = xy$ {le cas $e \in \{xx', x'x'', x''x'''\}$ est similaire}. Soit y' le sommet support adjacent à y dans T_i . Puisque T_i est γ_{ve} -point-critique et par la Proposition 3.3, soit D' un $\gamma_{ve}(T_i)$ -ensemble contenant y et soit $e' = yy'$.

Il est à remarquer que $(T_{i+1})_e$ est isomorphe à l'arbre obtenu en ajoutant la chaîne $P_4 = xx'x''x'''$ en joignant x au sommet $\overline{yy'}$ de $(T_i)_{e'}$. Par conséquent, tout $\gamma_{ve}((T_i)_{e'})$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ve -dominant de $(T_{i+1})_e$ en lui ajoutant le sommet x' . En utilisant le fait que T_i est γ_{ve} -point-critique, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}((T_{i+1})_e) &\leq \gamma_{ve}((T_i)_{e'}) + 1 \\ &= (\gamma_{ve}(T_i) - 1) + 1 \\ &= \gamma_{ve}(T_i) \\ &= \gamma_{ve}(T_{i+1}) - 1. \end{aligned}$$

Donc, dans tous les cas, on obtient $\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) < \gamma_{ve}(T_{i+1})$. Par conséquent T_{i+1} est un arbre γ_{ve} -point-critique. \square

Lemme 3.16. *Si T_i est un arbre γ_{ve} -point-critique et T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en appliquant l'opération \mathcal{T}_4 , alors T_{i+1} est γ_{ve} -point-critique.*

Preuve. L'opération \mathcal{T}_4 ajoute une copie de la chaîne $P_4 = xx'x''x'''$, en joignant x à un sommet y de T_i qui appartient à une chaîne pendante $yww'w''w'''$. Par l'Observation

3.12, on obtient $\gamma_{ve}(T_{i+1}) = \gamma_{ve}(T_i) + 1$. Pour montrer que T_{i+1} est γ_{ve} -point-critique, soit e une arête de T_{i+1} . Supposons en premier que $e \in E(T_i)$. Puisque T_i est un arbre γ_{ve} -point-critique, et par l'Observation 3.12, nous obtenons

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}((T_{i+1})_e) &= \gamma_{ve}((T_i)_e) + 1 \\ &< \gamma_{ve}(T_i) + 1 = \gamma_{ve}(T_{i+1}). \end{aligned}$$

D'où $\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) < \gamma_{ve}(T_{i+1})$.

En second, supposons que $e = xy$ {le cas $e \in \{xx', x'x'', x''x'''\}$ est similaire}. Par l'Observation 3.3, soit D' un $\gamma_{ve}(T_i)$ -ensemble contenant y .

Il est à remarquer que $(T_{i+1})_e$ is isomorphe à l'arbre $(T_{i+1})_{yw}$, et ainsi le résultat $\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) = \gamma_{ve}((T_{i+1})_{yw})$. Et d'après la situation précédente, nous avons vu que pour toute arête $e' \in E(T_i)$, $\gamma_{ve}((T_{i+1})_{e'}) < \gamma_{ve}(T_{i+1})$, on en déduit que $\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) < \gamma_{ve}(T_{i+1})$.

Donc, dans tous les cas, on obtient $\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) < \gamma_{ve}(T_{i+1})$. Par conséquent T_{i+1} est un arbre γ_{ve} -point-critique. \square

Lemme 3.17. *Si T_i est un arbre γ_{ve} -point-critique et T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en appliquant l'opération \mathcal{T}_5 , alors T_{i+1} est γ_{ve} -point-critique.*

Preuve. L'opération \mathcal{T}_5 ajoute une copie de la chaîne $P_4 = xx'x''x'''$, en joignant x à un sommet support y de T_i . Soit y' l'unique sommet pendant relié à y . Par l'Observation 3.12, on obtient $\gamma_{ve}(T_{i+1}) = \gamma_{ve}(T_i) + 1$. Pour montrer que T_{i+1} est γ_{ve} -point-critique, soit e une arête de T_{i+1} . Supposons en premier que $e \in E(T_i)$. Puisque T_i est un arbre γ_{ve} -point-critique, et par l'Observation 3.12, nous obtenons

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}((T_{i+1})_e) &= \gamma_{ve}((T_i)_e) + 1 \\ &< \gamma_{ve}(T_i) + 1 = \gamma_{ve}(T_{i+1}). \end{aligned}$$

D'où $\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) < \gamma_{ve}(T_{i+1})$.

En second, supposons que $e = xy$ {le cas $e \in \{xx', x'x'', x''x'''\}$ est similaire}. Puisque T_i est un arbre γ_{ve} -point-critique, et par l'Observation 3.3, y' appartient à un $\gamma_{ve}(T_i)$ -ensemble D' . La minimalité de D' implique que $y \notin D'$. Dans ce cas, l'ensemble $\{x'\} \cup$

$D' - \{y'\}$ est un ve -dominant de $(T_{i+1})_e$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) &= |D'| \\ &= \gamma_{ve}(T_i) \\ &= \gamma_{ve}(T_{i+1}) - 1\end{aligned}$$

D'où $\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) < \gamma_{ve}(T_{i+1})$.

Donc, dans tous les cas, on obtient $\gamma_{ve}((T_{i+1})_e) < \gamma_{ve}(T_{i+1})$. Par conséquent T_{i+1} est un arbre γ_{ve} -point-critique. \square

3.3.1 Caractérisation

Dans cette partie, nous donnons une caractérisation constructive de la famille \mathcal{T} de tous les arbres T qui sont γ_{ve} -point-critiques. Pour cela, nous allons prouver :

Théorème 3.18. *Un arbre T est γ_{ve} -point-critique si et seulement si $T \in \mathcal{T}$.*

Proposition 3.19. *Si $T \in \mathcal{T}$, alors T est un arbre γ_{ve} -point-critique.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{T}$, alors il existe une séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_p ($p \geq 1$) tels que $T_1 = P_2$, et si $p \geq 2$, alors T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des opérations suivantes $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4, \mathcal{T}_5$ pour $i = 1, 2, \dots, k - 1$. Nous utilisons une induction sur le nombre d'opérations effectuées pour construire T . Il est clair que cette propriété est vraie si $p = 1$, c'est-à-dire T_1 est γ_{ve} -point-critique. Supposons maintenant que $p \geq 2$, et que le résultat est valable pour tous les arbres $T \in \mathcal{T}$ qui peuvent être construits à partir d'une séquence de longueur au plus égale à $p - 1$, et soit $T_i = T_{p-1}$. Par l'hypothèse d'induction, T_i est un arbre γ_{ve} -point-critique. Puisque $T = T_p$ est obtenu à partir de T_i par l'une des opérations $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4, \mathcal{T}_5$ nous concluons à partir des Lemmes 3.13-3.17 que T est un arbre γ_{ve} -point-critique. \square

Proposition 3.20. *Si T est un arbre γ_{ve} -point-critique, alors $T \in \mathcal{T}$.*

Preuve. Nous utilisons une induction sur l'ordre n de T . Si $n = 2$, alors $T = P_2$, qui est un arbre γ_{ve} -point-critique et qui établit le cas de base. Supposons maintenant que

$n \geq 3$ et que tout arbre γ_{ve} -point-critique T' d'ordre n' : où $2 \leq n' < n$, est dans \mathcal{T} . Soit T un arbre γ_{ve} -point-critique d'ordre n . Puisqu'aucun arbre γ_{ve} -point-critique n'a de sommets support forts ni de sous-arbre isomorphe à $R_{t,j}^* : t \geq 2$ (par la Proposition 3.6), on peut supposer que $\text{diam}(T) \geq 5$. Il s'ensuit donc que $n \geq 6$. Si $n = 6$, alors $T = P_6$ qui appartient à \mathcal{T} , puisque il est obtenu à partir de T_1 en utilisant l'Opération \mathcal{T}_3 . Dans ce qui suit, nous supposons que $n \geq 7$.

Supposons $\text{diam}(T) = d$. Soit $P = x_d x_{d-1} \dots x_0$ est la chaîne diamétrale dans T choisie de telle sorte que les sommets x_1 et x_2 soient de degré deux. On enracine T à x_d , et on note par T_x le sous-arbre induit par un sommet x et ses descendants dans l'arbre enraciné T . Il est clair que x_0 et x_d sont des feuilles. Etant donné que $\text{diam}(T) \geq 5$, supposons que x_3 soit le parent de x_2 , avec un degré maximum, et que x_4 soit le parent de x_3 , dans l'arbre enraciné. Parmi tous les $\gamma_{ve}(T)$ -ensembles, soit D un contenant x_2 . Nous distinguons les deux cas suivants:

Cas 1. $d_T(x_3) \geq 3$.

Nous montrons tout d'abord que x_3 n'est pas un sommet support. Supposons que x_3 est un sommet support et soit e l'unique arête pendante incidente à x_3 . Considérons l'arbre T_e , et soit D_e un $\gamma_{ve}(T_e)$ -ensemble tel que $x_2 \in D_e$. Par conséquent D_e reste un ensemble ve -dominant de T . D'où

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}(T) &\leq \gamma_{ve}(T_e) \\ &= \gamma_{ve}(T) - 1 \end{aligned}$$

Ce qui conduit à une contradiction avec le fait que T est γ_{ve} -point-critique. Ainsi x_3 ne peut être un sommet support. En tenant compte que $d_T(x_1) = d_T(x_2) = 2$ et que T n'a pas de sommet support fort, nous déduisons que tout sous-arbre enraciné à un voisin descendant de x_3 est une chaîne P_2 ou P_3 attaché à x_3 par sa feuille.

Supposons en premier lieu que x_3 appartient à une chaîne pendante $x_3 w w' w''$ différente de $x_3 x_2 x_1 x_0$, de longueur 3. Soit $T' = T - T_{x_2}$. Il est clair que nous pouvons supposer que $w \in D$. Par la Proposition 3.3, supposons que $x_3 \in D$. Par l'Observation 3.11, $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$. Montrons que T' est γ_{ve} -point-critique. Soit $e \in E(T')$. Si e est dans la chaîne

pendante $x_3ww'w''$, ou ne l'est pas, alors par l'Observation 3.10, ou par l'Observation 3.11, on obtient $\gamma_{ve}(T_e) = \gamma_{ve}(T'_e) + 1$. En utilisant le fait que T est γ_{ve} -point-critique, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma_{ve}(T'_e) &= \gamma_{ve}(T_e) - 1 \\ &= \gamma_{ve}(T) - 2 \\ &= \gamma_{ve}(T') - 1.\end{aligned}$$

Ainsi, pour toute arête $e \in E(T')$, $\gamma_{ve}(T'_e) < \gamma_{ve}(T')$, et donc T' est γ_{ve} -point-critique. Par induction sur T' , nous avons $T' \in \mathcal{T}$. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{T}$ car il est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération \mathcal{T}_1 .

Dans la suite, nous supposons que toutes les chaînes pendantes contenant x_3 autres que $x_3x_2x_1x_0$ ont une longueur de 2. Soit x_3xx' l'une de ces chaînes pendantes. Il découle de la Proposition 3.6, que $d_T(x_3) = 3$, sinon T contient un sous-arbre isomorphe à $R_{j,j}^*$ de centre x_3 , où $j = d_T(x_3) - 2$.

Sans perte de généralité, nous supposons que $x_3 \in D$. Supposons tout d'abord que x_4 est un sommet support incident à l'arête pendante e . Par conséquent, x_4 n'appartient pas à une chaîne pendante de longueur deux, selon la Proposition 3.6. Maintenant supposons que x_4 appartient à une chaîne pendante de longueur 3, désignée par $x_4zz'z''$. Considérons un $\gamma_{ve}(T_e)$ -ensemble D_e . Sans perte de généralité, nous supposons que $z \in D_e$. Il est clair que D_e reste un ensemble ve -dominant de T . Par le fait que T est γ_{ve} -point-critique, ceci conduit à une contradiction. En conséquence, x_4 n'est pas un support. L'étape suivante consiste à montrer que x_4 appartient à un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble.

Nous supposons maintenant que x_4 n'appartient à aucun $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble. Soient $e = x_3x_4$ et D_e un $\gamma_{ve}(T_e)$ -ensemble contenant $\overline{x_3x_4}$. Puisque $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T_e) + 1$, alors $\{x_3, x_4\} \cup D_e - \{\overline{x_3x_4}\}$ est un ensemble ve -dominant de T de taille $\gamma_{ve}(T)$ qui contient x_4 , ce qui contredit notre hypothèse. Par conséquent, au moins un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble contient x_4 . On peut donc supposer que $x_4 \in D$. Soient $T' = T - T_{x_2}$ et $D' = D \cap V(T')$. Par l'Observation 3.10, $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$. Montrons que T' est γ_{ve} -point-critique. Soit $e \in E(T')$. Si $e \notin \{xx', xx_3\}$, alors par l'Observation 3.10, $\gamma_{ve}(T_e) = \gamma_{ve}(T'_e) + 1$. En

utilisant le fait que T est γ_{ve} -point-critique, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma_{ve}(T'_e) &= \gamma_{ve}(T_e) - 1 \\ &= \gamma_{ve}(T) - 2 \\ &= \gamma_{ve}(T') - 1.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $e \in \{xx', x_3x\}$. Par la Proposition 3.2, $\gamma_{ve}(T') - 1 \leq \gamma_{ve}(T'_e) \leq \gamma_{ve}(T')$. Soit D'_e un $\gamma_{ve}(T'_e)$ -ensemble, et sans perte de généralité, supposons que $x_4 \in D'_e$. Il est clair que, D'_e peut être étendu pour former un ensemble ve -dominant de T' , en ajoutant le sommet x_3 . Nous supposons que $\gamma_{ve}(T'_e) = \gamma_{ve}(T')$. Ainsi $\{x_3\} \cup D'_e - \{x_4\}$ est un $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble qui n'inclut pas x_4 . Puisque $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$, il s'ensuit que $\{x_3, x_2\} \cup D'_e - \{x_4\}$ est un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble ne contenant pas x_4 , une contradiction avec ce qui précède. Par conséquent $\gamma_{ve}(T'_e) = \gamma_{ve}(T') - 1$.

Donc, pour toute arête $e \in E(T')$, $\gamma_{ve}(T'_e) < \gamma_{ve}(T')$, et ainsi T' est γ_{ve} -point-critique. Par induction sur T' , on obtient $T' \in \mathcal{T}$. Il en résulte que $T \in \mathcal{T}$ car il est obtenu à partir de T' en appliquant l'Opération \mathcal{T}_2 .

Cas 2. $d_T(x_3) = 2$.

Puisque $\text{diam}(T) \geq 5$, alors $d_T(x_4) \geq 2$. Considérons les deux sous-cas suivants:

Sous-cas 2.1. $d_T(x_4) = 2$.

Soient $T' = T - T_{x_3}$ et $D' = D \cap V(T')$. Par l'Observation 3.12, on obtient $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$. Montrons que T' est γ_{ve} -point-critique. Soit $e \in E(T')$. L'Observation 3.12, indique en outre que $\gamma_{ve}(T_e) = \gamma_{ve}(T'_e) + 1$. En utilisant le fait que T est γ_{ve} -point-critique, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma_{ve}(T'_e) &= \gamma_{ve}(T_e) - 1 \\ &= \gamma_{ve}(T) - 2 \\ &= \gamma_{ve}(T') - 1.\end{aligned}$$

Donc T' est γ_{ve} -point-critique, et par d'induction sur T' , nous avons $T' \in \mathcal{T}$. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{T}$ car il est obtenu à partir de T' en appliquant l'Opération \mathcal{T}_3 .

Sous-cas 2.2. $d_T(x_4) \geq 3$.

Nous montrons d'abord que le sommet x_4 n'est ni un support ni adjacent à un support. Supposons d'abord que x_4 appartient à une chaîne pendante de longueur 2. Dans ce cas, considérons l'arbre $T_{x_0x_1}$ et observons que cet arbre possède un γ_{ve} -ensemble D_1 contenant x_3 et x_4 . Ce qui implique que $\{x_2\} \cup D_1 - \{x_3\}$ est un γ_{ve} -ensemble de T . En utilisant le fait que T est γ_{ve} -point-critique, cela conduit à une contradiction. Supposons ainsi que x_4 appartient à une chaîne pendante de longueur 3, disons $x_4zz'z''$. De même que précédemment, considérons l'arbre $T_{x_0x_1}$ et observons que cet arbre possède un γ_{ve} -ensemble D_2 contenant x_3 et z . Ce qui implique que $\{x_2\} \cup D_2 - \{x_3\}$ est un γ_{ve} -ensemble de T . Ceci implique une contradiction avec le fait que T est γ_{ve} -point-critique. On en conclut que x_4 est un sommet support ou x_4 appartient à des chaînes pendantes de longueur quatre.

Maintenant, nous supposons que x_4 appartient à une chaîne pendante de longueur 4, désignée par $x_4zz'z''z'''$. Soit $T' = T - T_{x_3}$. Par l'Observation 3.12, on a $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$. Pour montrer que T' est γ_{ve} -point-critique, soit $e \in E(T')$. L'Observation 3.12, indique en outre que $\gamma_{ve}(T_e) = \gamma_{ve}(T'_e) + 1$. Etant donné que T est γ_{ve} -point-critique, on obtient le même résultat ainsi que précédemment

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}(T'_e) &= \gamma_{ve}(T_e) - 1 \\ &= (\gamma_{ve}(T) - 1) - 1 \\ &= \gamma_{ve}(T') - 1. \end{aligned}$$

Par induction sur T' , nous avons $T' \in \mathcal{T}$. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{T}$ car il est obtenu à partir de T' en appliquant l'Opération \mathcal{T}_4 .

A présent, nous pouvons supposer que x_4 n'est contenu dans aucune chaîne pendante de longueur 4 autre que $x_4x_3x_2x_1x_0$. Puisque $d_T(x_4) \geq 3$, on conclut que $d_T(x_4) = 3$ et que x_4 est un sommet support. Soit $T' = T - T_{x_3}$. L'Observation 3.12, indique en outre que $\gamma_{ve}(T_e) = \gamma_{ve}(T'_e) + 1$. Pour montrer que T' est γ_{ve} -point-critique, soit $e \in E(T')$. De même que précédemment l'Observation 3.12, indique que $\gamma_{ve}(T_e) = \gamma_{ve}(T'_e) + 1$. Puisque T

est γ_{ve} -point-critique, on obtient le même résultat que précédemment

$$\begin{aligned}\gamma_{ve}(T'_e) &= \gamma_{ve}(T_e) - 1 \\ &= (\gamma_{ve}(T) - 1) - 1 \\ &= \gamma_{ve}(T') - 1.\end{aligned}$$

Par induction sur T' , nous avons $T' \in \mathcal{T}$. Il s'ensuit que $T \in \mathcal{T}$ car il est obtenu à partir de T' en appliquant l'Opération \mathcal{T}_5 . \square

D'après les Propositions 3.19 et 3.20, nous avons prouvé le Théorème 3.18.

Ayant caractérisé les arbres T , γ_{ve} -point-critiques, nous en déduisons le corollaire suivant:

Corollaire 3.21. *Une chaîne P_n est γ_{ve} -point-critique si et seulement si $n = 2$ ou P_n est obtenu à partir de P_2 en appliquant l'Opération \mathcal{T}_3 .*

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de la ve -domination dans les graphes modifiés (en particulier les graphes modifiés par la contraction d'une arête).

En premier lieu, nous avons tenté de faire le point sur ce qui a été fait dans ce domaine pour la domination classique et même d'autres type de domination tels que la domination totale, la domination localisatrice et la 2-domination. De plus, nous avons donné des conditions nécessaires pour les graphes γ_{ve} -point-critiques. Ensuite, nous avons fourni une caractérisation constructive de arbres γ_{ve} -point-critiques.

La contribution réalisée durant ce mémoire ouvre plus de perspectives de recherche, dont on peut citer:

- L'étude des graphes γ_{ve} -point-stables.
- L'étude de l'effet de l'identification de deux sommet queconques sur γ_{ve} .
- L'étude des graphes μ -point-stables et μ -point-critiques pour les différents paramètres de ve -domination.
- L'étude de l'effet de la subdivison d'une arête sur γ_{ve} et même sur d'autres paramètres de ve -domination.

RÉFÉRENCES

- [1] K. Attalah and M. Chellali, *2-domination dot-stable and dot-critical graphs*, Asian European Journal of Mathematics vol.21, N° 5 (2021) – 2150010 (14 page).
- [2] C. Berge, *Graphe et Hypergraphes*. Dunod, deuxième édition, 1970.
- [3] C. Berge, *Théorie de graphes et ses applications*. Dunod, Paris, (1958).
- [4] M. Blidia, M. Chellali, *Locating-domination dot-critical graphs*. J. Comb. Math and Comb. Computing 104 (2018) 121 – 141.
- [5] M. Blidia, M. Chellali, *Locating-domination dot-critical graphs*. J. Comb. Math and Comb. Computing 104 (2018) 121 – 141.
- [6] K.S. Booth et J.H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs*. SIAM J. Comput. 11 (1982) 191 – 199.
- [7] T. Burton, D. P. Sumner, *Domination dot-critical graphs*. Discrete Mathematics 306 (2006) 11 – 18.
- [8] G. Chartrand, et L. Lesniak, *Graphes and Diagraphs*. Third Edition, Chapman and Hall, London, 1996.
- [9] M. Chellali, N.J. Rad, *Locating-total domination critical graphs*. Australasian Journal of Combinatorics 45 (2009) 227 – 234.
- [10] Z. Chengye, Y. Yuansheng, S. Linlin, *Domination dot-critical graphs with no critical vertices*. Discrete Mathematics 308, 3241 – 3248 (2008).
- [11] X. Chen, W.C. Shiu, *A note on the domination dot-critical graphs*. Discrete Applied Mathematics 157 (2009) 3743 – 3745.
- [12] E.J. Cockayne et S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*. Networks, 7 (1977) 247 – 261.

- [13] E.J. Cockayne, R.M. Dawes, S.T. Hedetniemi. *Total domination in graphs*. Networks 10 (1980) 211 – 219.
- [14] C.F. De Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs*. Petrograde (1862).
- [15] W.J. Desormeaux, T.W. Haynes and M.A. Henning, *Total domination critical and stable graphs upon edge removal*. Discrete Applied Mathematics 158 (15) (2010) 1587–1592.
- [16] W.J. Desormeaux, T. W. Haynes and M. A. Henning, *Total domination stable graphs upon edge addition*. Discrete Mathematics 310 (2010) 3446 – 3454.
- [17] G.A. Dirac, *Note on the colouring of graphs*. Mathematische Zeitschrift 54 (4) (1951) 347 – 353.
- [18] J.F. Fink et M.S. Jacobson, *n-dominaton in graphs*. In: Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, Wiley, New York, (1985) 283 – 300.
- [19] J.F. Fink et M.S. Jacobson, *On n-dominaton, n-dependence and forbidden subgraphs*. In: Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, Wiley, New York, (1985) 301 – 311.
- [20] S. M. Hedetniemi et R. Reynolds, *Combinatorial problems on chessboards : II, Domination in graphs*, eBook ISBN9781315141428, (2017) .
- [21] R. Frucht et F. Harary, *On the corona of two graphs*. Aequationes Mathematicae. 4, (1970) 322 – 325.
- [22] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et M. A. Henning, *Topics in Domination in Graphs*. Developments in Mathematics, Vol. 64. Cham: Springer, 2020.
- [23] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et M. A. Henning, *Domination in Graphs: Core Concepts (Springer Monographs in Mathematics)*. 2023rd Edition.
- [24] M.A. Henning, *Graphs with large total domination number*. J. Graph Theory 35 (1) (2000) 21 – 45.

- [25] M.A. Henning and N.J. Rad, *Total domination dot-critical graphs*. Discrete Applied Mathematics 159 (2011) 104 – 111.
- [26] M.A. Henning, C.M. Mynhardt, *The diameter of paired-domination vertex critical graphs*. Czechoslovak Mathematical Journal 58 (2008) 887 – 897.
- [27] X. Hou, M. Edwards, *Paired domination vertex critical graphs*. Graphs and Combinatorics 24 (2008) 453 – 459.
- [28] J. Lewis, S.T. Hedetniemi, T.W. Haynes and G.H. Fricke, *Vertex-Edge Domination*. Util. Math. 81 (2010) 193 – 213.
- [29] R. Laskar et K. Peters, *Domination and irredundance in graphs*. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).
- [30] R. Laskar, J. Pfaff, S.M. Hedetniemi et S.T. Hedetniemi, *On the algorithmic complexity of total domination*. SIAM J. Alg. Meth. Vol. 5, N°3, september 1984.
- [31] J.R. Lewis, *Vertex-edge and Edge-vertex Domination in Graphs*. Ph.D. Thesis, Clemson University, (2007).
- [32] M. Mimouni, N. Ikhlef-Eschouf, M. Zamime, *On connected $3-\gamma_L$ -dot-critical graphs*. Bulletin of the Iranian Mathematical Society 48 (3) (2022) 979 – 991.
- [33] S.A. Marie McMahon, *Total Domination Dot Critical and Dot Stable Graphs*. Graduate school, East Tennessee State University (Part of the Discrete Mathematics and Combinatorics Commons) 5 – 2010.
- [34] O. Ore, *Theory of graphs*. Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I. (1962).
- [35] J.W. Peters. *Theoretical and Algorithmic Results on Domination and Connectivity*, Ph.D. Thesis, Clemson University, Clemson, SC, (1986).
- [36] N. J. Rad, *On the diameter of a domination dot-critical graph*, Discrete Applied Mathematics 157 (2009) 1647 – 1649.

- [37] N.J. Rad, *A note on $\gamma_L^t(G)$ -vertex critical graphs*. Journal of Discrete Mathematical sciences and cryptography 12 (2009) 319 – 322.
- [38] P.J. Slater, *Domination and location in acyclic graphs*. Networks 17, 55 – 64 (1987).
- [39] D. P. Sumner, P. Blich, *Domination critical graphs*. J. Combin. Theory Ser. B 34 (1983) 65 – 76.