

République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Saad Dahleb Blida 1



Faculté des sciences
Département de physique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Physique

Option : Physique théorique

Thème :

La Solution d'Onsager pour le modèle d'Ising à deux dimensions

Présenté par :

Belloundja Issam
Boushaba Ali

Soutenu le 18 /07 / 2019 devant le jury composé de :

Dr Nouredine Bouayed	MCA	Université de Blida1	Président
Dr. Bahia Si Lakhal	MCA	ENP, El Harrach	Encadreur
Prof. Salah Boukraa	Professeur	Université de Blida1	Examineur
Dr. Abdelkader Yanallah	MCB	Université de Blida1	Examineur

Blida 1-2018/2019-

DÉDICACES

Je dédie ce travail qui n'aura jamais pu voir le jour sans le soutien indéfectible et sans limite de mes chers parents qui ne cessent de me donner le courage et les moyens nécessaires pour que je puisse arriver à ce que je suis aujourd'hui.

Que Dieu vous protège et que la réussite soit à ma portée pour que je puisse vous combler de bonheur.

Belloundja Issam

DÉDICACES

Je dédie ce travail à ma mère, à mon père, à mes frères et sœurs, à ma fiancée, à toute ma famille et mes amis et tous mes enseignants.

Boushaba Ali

REMERCIEMENTS

Nous remercions Dieu le tout puissant pour nous avoir donné la force pour faire aboutir ce travail.

Nous tenons à remercier notre promotrice Dr. B. SI LAKHAL pour nous avoir guidé dans ce travail de mémoire de master. Ce mémoire n'aurait pas vu le jour sans sa détermination à mener à bien ce projet.

Nous avons le plaisir de remercier aussi Dr. M. OULD MOHAMED de nous avoir aidé dans nos calculs avec Mathematica.

Nous remercions Dr. N. BOUAYED d'avoir accepté de présider le jury de notre soutenance de mémoire.

Nous remercions également Prof. S. BOUKRAA ainsi que Dr. A. YANALLAH d'avoir lu le manuscrit et d'avoir accepté de faire partie du jury d'examen de ce mémoire.

Belloundja Issam

Boushaba Ali

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Découverte du magnétisme	2
1.2	Le magnétisme, un phénomène quantique	2
1.3	Les différentes formes de magnétisme	2
1.3.1	Le paramagnétisme	2
1.3.2	Les matériaux paramagnétiques	3
1.4	Existence d'une aimantation spontanée en champ nul	3
1.4.1	Les matériaux ferromagnétiques	4
1.5	La transition ferromagnétique-paramagnétique	8
1.5.1	Observation expérimentale	8
2	Solution du modèle d'Ising à une dimension	12
2.1	Absence de transition de phase à une dimension	14
3	LE MODÈLE D'ISING À DEUX DIMENSIONS (La solution d'Onsager-Kaufman)	16
3.1	La formulation matricielle	16
3.1.1	La matrice \mathbf{P}	19
3.1.2	Rappel sur le produit tensoriel des matrices	20
3.1.3	Les matrices de spin	21
3.1.4	Les matrices V_1' , V_2 et V	21
3.2	La solution d'Onsager-Kaufman	23
3.2.1	L'expression de V en termes des représentations spinorielles	24
3.2.2	La représentation dans laquelle U est diagonale	26
3.2.3	Les valeurs propres de V^+ et V^-	27
3.2.4	Les valeurs propres de V	32
3.2.5	La valeur propre la plus grande de V	34
3.3	Les fonctions thermodynamiques	37
4	Conclusion	42
	APPENDICE A Théorèmes et lemmes mathématiques utilisés	43

APPENDICE B Démonstration des formules (3.140) et (3.141)	48
APPENDICE C Démonstration de la formule (4.141) et celle de la capacité calorifique	50
APPENDICE D Calcul de la formule (3.96) par Mathématique	52

Chapitre 1

Introduction

Le ferromagnétisme est l'un des phénomènes les plus intéressants de la physique de l'état solide. Dans certains métaux comme le fer, le cobalt et le nickel, une fraction finie des spins des atomes est polarisée spontanément dans la même direction donnant lieu à un champ magnétique macroscopique c'est-à-dire un moment magnétique même en l'absence de champ magnétique appliqué [1].

Un moment magnétique spontané suggère que les moments magnétiques sont arrangés de façon régulière et l'ordre n'est pas forcément simple. Cela ne se produit toutefois que lorsque la température est inférieure à une température caractéristique appelée température de Curie. Au-dessus de la température de Curie les spins sont orientés de manière aléatoire, ne produisant aucun champ magnétique net [1].

Le terme "magnétisme" désigne l'ensemble des phénomènes qui ont lieu au cœur et autour de matériaux aimantés, que cette aimantation soit naturelle ou qu'elle soit le résultat d'un champ d'induction (électrique ou magnétique). Les applications du magnétisme sont nombreuses, de l'informatique à la médecine en passant par la physique statistique et la physique des particules (figure 1.1).



FIGURE 1.1 – La boussole représente probablement la première application pratique des propriétés magnétiques de la matière. Image tirée de [2].

1.1 Découverte du magnétisme

Les premières observations remontent à l'antiquité mais le phénomène n'a été étudié avec attention qu'à partir du *XVIII* siècle. Charles Augustin de Coulomb établit alors que les forces qui s'exercent entre moments magnétiques sont inversement proportionnelles au carré de la distance qui les séparent [2].

1.2 Le magnétisme, un phénomène quantique

Aujourd'hui, il est admis que le magnétisme est un phénomène quantique dont les effets s'observent à l'échelle macroscopique. Au niveau de l'atome, chaque électron possède un petit moment magnétique. Naturellement, les électrons de moments magnétiques opposés ont tendance à se regrouper par paires. A l'échelle macroscopique, l'aimantation est alors nulle. Mais, si des électrons se retrouvent sans partenaires, leurs moments magnétiques s'additionnent. Ils produisent alors une aimantation globale du matériau. Les métaux de transition (comme le fer et le nickel) et les terres rares, sont les seuls éléments chimiques à porter un tel moment magnétique [2].

1.3 Les différentes formes de magnétisme

Il existe plusieurs formes de magnétisme qui rendent notamment des conséquences statistiques des comportements individuels des systèmes atomiques (contribution des moments magnétiques et du remplissage des sous-couches atomiques) [2] :

- * le diamagnétisme ;
- * le paramagnétisme ;
- * le ferromagnétisme ;
- * le ferrimagnétisme ;
- * l'antiferromagnétisme.

Les prochains chapitres sont basés uniquement sur les deux phénomènes ferromagnétisme et paramagnétisme car ces derniers montrent la transition de phase d'une manière facile à comprendre.

1.3.1 Le paramagnétisme

Le paramagnétisme désigne en magnétisme le comportement d'un milieu matériel qui ne possède pas d'aimantation spontanée mais qui, sous l'effet d'un magnétisme extérieur, acquiert une aimantation spontanée dans le même sens que le champ magnétique appliqué. Quand on retire le champ extérieur, les électrons reprennent une orientation aléatoire et l'aimantation disparaît. Le paramagnétisme résulte donc de l'alignement naturel des dipôles magnétiques dans le sens du champ magnétique extérieur (figure 1.2). Il est très dépendant de la température car l'agitation thermique des électrons perturbent l'alignement des dipôles magnétiques. La loi de Curie formalise la dépendance de l'aimantation acquise en fonction de la température [3].

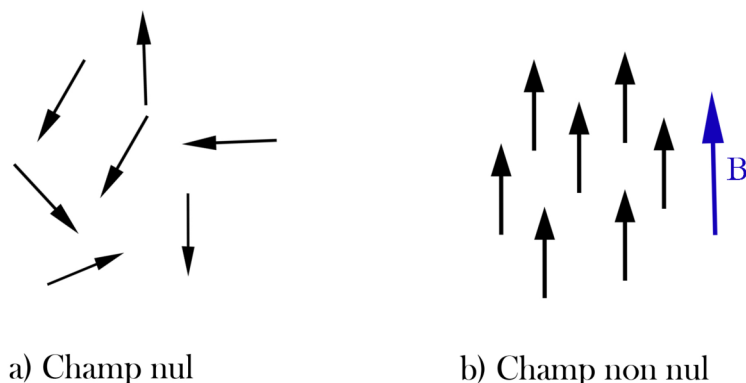


FIGURE 1.2 – Moment magnétique d'un matériau paramagnétique.

1.3.2 Les matériaux paramagnétiques

Les atomes portent un moment magnétique permanent dont l'orientation est aléatoire. Les distances inter-atomiques ou inter-moléculaires sont suffisamment importantes pour que les moments n'exercent aucune interaction mutuelle. En l'absence de champ extérieur, ils ne sont soumis qu'à l'agitation thermique et l'aimantation globale est nulle.

Sous l'effet d'un champ magnétique, l'orientation moyenne des moments change sous l'effet du couple qui les ramènent suivant la direction et le sens du champ. Le champ et l'aimantation de même sens ($\chi > 0$ et faible mais ~ 10 à 100 fois plus grande que pour les matériaux diamagnétiques). χ décroît avec la température car l'agitation thermique qui gêne l'orientation des dipôles suivant le champ croît (voir figure 1.3).

Exemple de matériaux paramagnétiques : l'aluminium, le manganèse, le sodium.

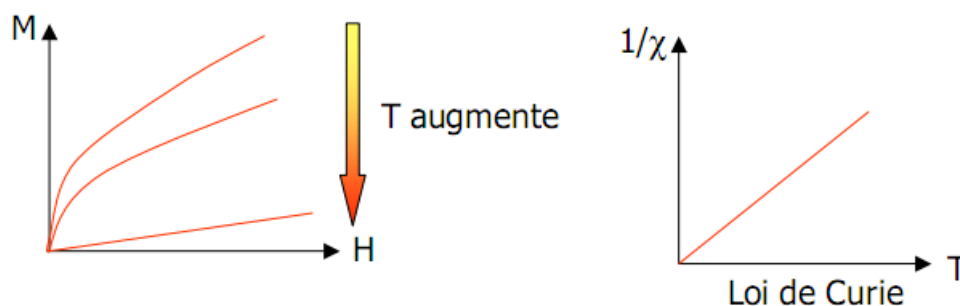


FIGURE 1.3 – L'influence de la température sur la variation de la susceptibilité magnétique et la magnétisation pour un matériau paramagnétique. Figure tirée de [3]

1.4 Existence d'une aimantation spontanée en champ nul

Pour la plupart des métaux à température ambiante (par exemple, le cuivre), on a effectivement $M_0 = 0$. Toutefois, certains métaux comme le fer, le cobalt ou le nickel présentent

une aimantation spontanée $M_0 \neq 0$ en champ nul. Ces métaux sont dits ferromagnétiques. Cette aimantation spontanée traduit un comportement collectif des spins (observable à l'échelle macroscopique) : c'est la signature d'un couplage entre spins qui conduit à l'existence d'une direction d'orientation privilégiée des moments magnétiques [3].

1.4.1 Les matériaux ferromagnétiques

Un matériau est ferromagnétique lorsqu'il porte une aimantation permanente ou de longue durée. Sa susceptibilité magnétique, notée χ_m , est strictement positive. Un corps ferromagnétique acquiert une aimantation forte lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique et cette aimantation perdure après disparition du champ extérieur : c'est ce que l'on appelle le phénomène d'hystérésis. On produit donc les aimants permanents en immergeant un matériau ferromagnétique comme du fer, du cobalt ou un alliage de ces métaux dans un champ magnétique.

Le matériau ferromagnétique se décompose en une multitude de petits domaines, appelés les domaines de Weiss, dont la taille varie entre 10 et 100 microns (voir figure 1.4). Ces domaines sont séparés par des parois très fines, de l'ordre de 0.1 micron. Dans chaque domaine, les moments dipolaires magnétiques, que l'on assimile aux spins, sont tous orientés dans la même direction. Mais l'orientation de chaque domaine est différente. Sur le plan macroscopique, l'aimantation est nulle, les différentes orientations s'annulant en moyenne. A proximité des parois, les spins des domaines adjacents s'influencent mutuellement en fonction de leur distance [3].

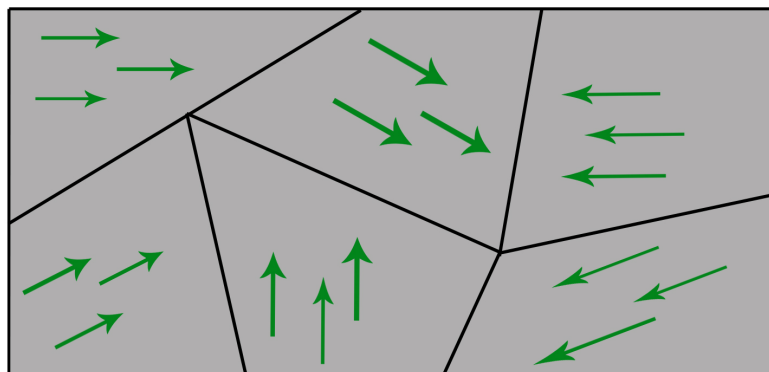


FIGURE 1.4 – Domaines de Weiss d'un matériau ferromagnétique. Figure tirée de [3]

Lorsqu'un matériau ferromagnétique est immergé dans un champ magnétique extérieur, les spins de tous les domaines tendent à s'orienter dans la même direction que celle du champ extérieur. Les domaines dont l'orientation est proche de celle du champ extérieur grossissent au détriment des autres et les parois se modifient alors. Si le champ extérieur n'est pas trop fort et si le matériau ne présente pas trop de défauts, cette transformation est réversible. Les domaines retrouvent leur place et leur dimension lorsque le champ disparaît (voir figure 1.5). Si ce n'est pas le cas, si le champ est trop fort par exemple, alors la transformation devient irréversible et l'aimantation du matériau perdure ; elle ne revient pas à une valeur nulle. On dit qu'elle est rémanente : c'est la création d'un aimant permanent [3].

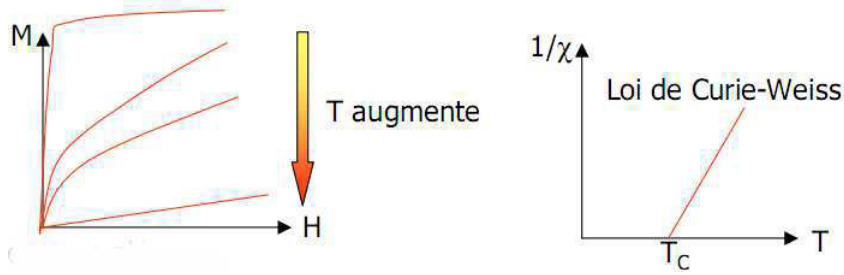


FIGURE 1.5 – L'influence de la température sur la variation de la susceptibilité magnétique et la magnétisation pour un matériau ferromagnétique. Figure tirée de [3]

Le modèle d'Ising s'intéresse à la physique des transitions de phase. Ce qui se produit lorsqu'un petit changement dans un paramètre tel que la température ou la pression provoque un changement qualitatif à grande échelle de l'état du système [4].

Notre point de départ pour ce modèle est un réseau qui sera pour nous un ensemble fini de points placés dans un espace de dimension $d = 1, 2$ ou 3 . A une dimension, nous avons une chaîne de points sur une ligne que nous pouvons numéroté de 1 à " N " (où " N " désignera toujours le nombre de sites du réseau, quelque soit la dimension) (voir figure 1.6) [4] :

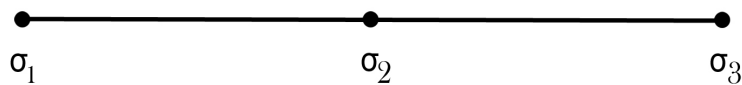


FIGURE 1.6 – Réseau à une dimension [4].

A deux dimensions nous considérons que le réseau est un carré comme indiqué ci-dessous à la figure 1.7.

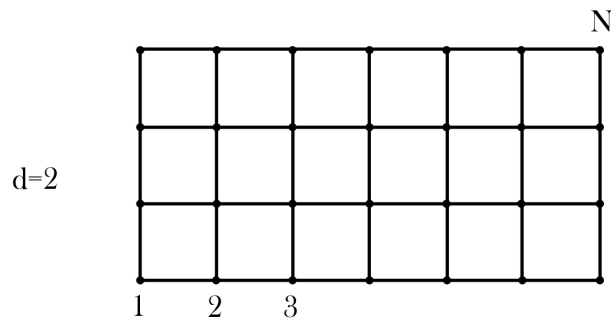


FIGURE 1.7 – Réseau à deux dimensions [4]

A trois dimensions, on considère que le réseau est un cube (voir figure 1.8) : Sur cette figure, chaque segment de ligne sépare les sites du réseau appelé liaison et les sites du réseau sont appelés les plus proches voisins s'il existe une liaison qui les relie. A la limite (c.a.d. sur les

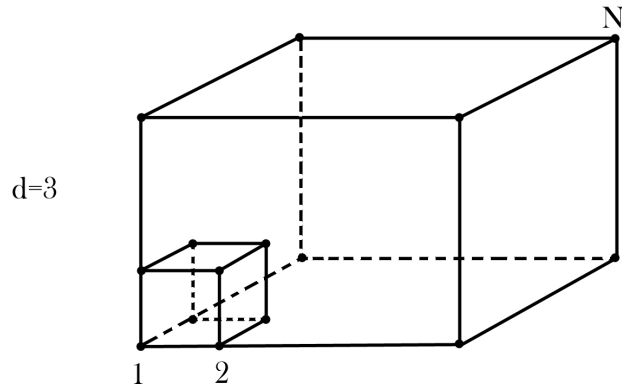


FIGURE 1.8 – Réseau à trois dimensions [4]

bords), le réseau contient $2d$ plus proches voisins. Pour une dimension on a $2 \times 1 = 2$ et pour deux dimensions on a alors $2 \times 2 = 4$ plus proches voisins comme illustré dans la figure 1.9.

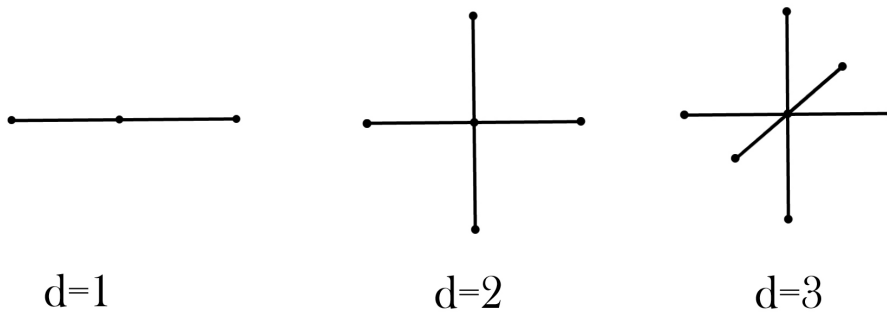


FIGURE 1.9 – Le nombre des plus proches voisins pour chaque réseau d'Ising [4]

La différence entre les sites extérieurs et ceux de l'intérieur est gênante. Pour parer à ce problème, il faut se débarrasser des frontières. Pour cela on introduit simplement des liaisons supplémentaires qui relient les sites du réseau sur les cotés opposés des frontières.

Ceci revient à enrouler l'unidimensionnel en une chaîne, le bidimensionnel en un tore et le tridimensionnel en une forme géométrique on ne sait pas comment la nommer. Cela introduit donc des interactions à longue portée non réalistes physiquement, car suggérant de courber un cristal à trois dimensions en une forme impossible [4].

Les physiciens seront les premiers à accepter l'idée intuitivement, car l'argument est qu'une condition supplémentaire imposée à un pourcentage négligeable de sites du réseau ne devrait pas affecter le comportement général du système [4]. Il y a une autre alternative importante ; c'est d'imposer des conditions aux limites qui influenceront le comportement du système en établissant une direction privilégiée pour la magnétisation spontanée.

L'élimination de la frontière introduit également une symétrie attrayante dans le problème. Dans l'enroulement (wrap-around) du modèle d'Ising, il existe dN liaisons reliant les N sites du réseau et chaque site du réseau ressemble à tous les autres sites. Par conséquent on peut dire que le

réseau à été enroulé (ou enveloppé) [4].

La première étape est d'assigner une variable S_i à chaque site du réseau $i = 1, 2, \dots, N$. Les variables S_i prenant seulement les valeurs ± 1 que nous appellerons les deux états possibles du réseau. Cela reflète l'hypothèse physique selon laquelle il n'existe que deux possibilités sur chaque site du réseau haut/bas, occupé/vacant.

L'affectation des valeurs $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_N)$ pour chaque site du réseau est appelée la configuration du système.

Comme Ising s'intéressait, dans sa thèse de doctorat au phénomène ferromagnétisme, nous allons l'imiter en supposant que les sites sont occupés par des atomes d'un matériau ferromagnétique. Chaque atome a un moment magnétique qui ne peut pointer que vers le haut "spin up" ou vers le bas "spin down". La température a une grande influence sur le comportement général du système et surtout sur la direction du moment magnétique car les mouvements thermiques vont orienter les moments magnétiques de manière aléatoire. Par contre à des températures basses les moments magnétiques vont suivre la direction du champ externe [4].

La dynamique du système est connue en formant l'hamiltonien du système et par suite l'énergie totale dans laquelle le système se trouve s'écrit sous la forme suivante :

$$E_l = -\epsilon \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - B \sum_{i=1}^N s_i \quad (1.1)$$

La première somme correspond à tous les plus proches voisins du réseau et la seconde somme est faite sur tous les sites du réseau. Les paramètres ϵ et B correspondent respectivement aux "énergies" associées aux interactions des plus proches voisins et aux interactions avec le champ magnétique externe [4].

Ising, dans sa thèse, dit que la transition de phase se produit avec l'apparition de l'aimantation spontanée. Supposons qu'un réseau de matériau soit placé dans un champ magnétique et maintenu à une température constante. Le champ va induire une certaine quantité de magnétisation dans le réseau et il va tendre à aligner les moments magnétiques dans la direction haut. La quantité de magnétisation dépend de la force du champ externe et de la température (constante). Supposons maintenant que le champ externe soit désactivé lentement. Que va t' il se passer au réseau ?

Sans surprise, pour des températures élevées, le réseau revient à un état non magnétisé. Par contre à des températures basses, le réseau conserve un degré de magnétisation. Il existe une tendance résiduelle non négligeable pour que les moments restent dans la position " haut ". Ceci s'appelle l'aimantation spontanée (A remarquer qu'il semblerait que "magnétisation résiduelle" aurait été un meilleur terme pour décrire l'aimantation spontanée). Il existe aussi une température critique à laquelle l'aimantation spontanée commence à apparaître et c'est ici que se produit la transition de phase. La figure 1.10 ci dessous donne la relation entre la magnétisation

et l'intensité du champ externe (nommé J dans la figure) :

1.5 La transition ferromagnétique-paramagnétique

1.5.1 Observation expérimentale

Expérimentalement, on constate que le comportement ferromagnétique disparaît au profit d'un comportement paramagnétique pour $T > T_C$ où T_C est la température critique ou température de Curie (pour le fer, $T_C = 1043$ K). On parle donc de transition de phase ferromagnétique-paramagnétique (voir figure 1.10).

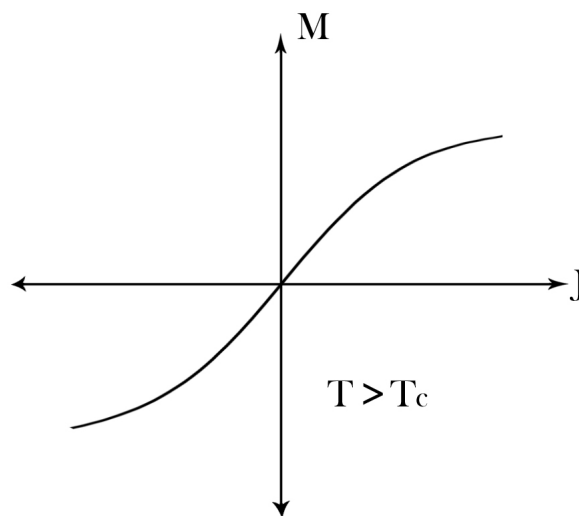


FIGURE 1.10 – Le comportement ferromagnétique disparaît au profit d'un comportement paramagnétique pour $T > T_C$ [4].

En dessous de T_C la valeur de $M(T)$ augmente quand T baisse. Une courbe type est la suivante (voir figure 1.11) : On dit qu'à $T = T_C$, le système magnétique subit une transition de phase. Un système subissant une telle transition de phase est appelé ferromagnétique.

pour $T > T_C$: phase paramagnétique ;

pour $T < T_C$: phase ferromagnétique.

On conclut que le ferromagnétisme dépend de la température. Il existe en effet une température de Curie dépendante du matériau en dessous de laquelle il est ferromagnétique et au dessus de laquelle il devient paramagnétique. On appelle ce phénomène une transition de phase (voir figure 1.11). Si l'on considère un matériau ferromagnétique doté d'une certaine aimantation et qu'il est chauffé au dessus de sa température de Curie, l'agitation thermique désorganise complètement l'agencement des domaines de Weiss et l'aimantation disparaît. La transition de phase est, sous certaines conditions, réversible : en augmentant la température, le matériau perd son aimantation qu'il retrouve lorsque la température diminue et passe sous la température de Curie du matériau.

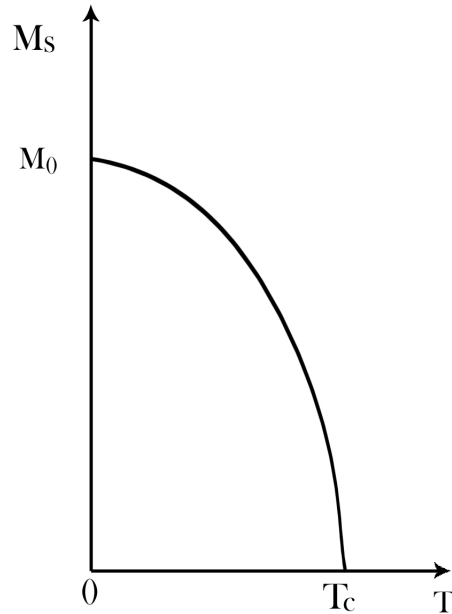


FIGURE 1.11 – La variation de la magnétisation par rapport à la température

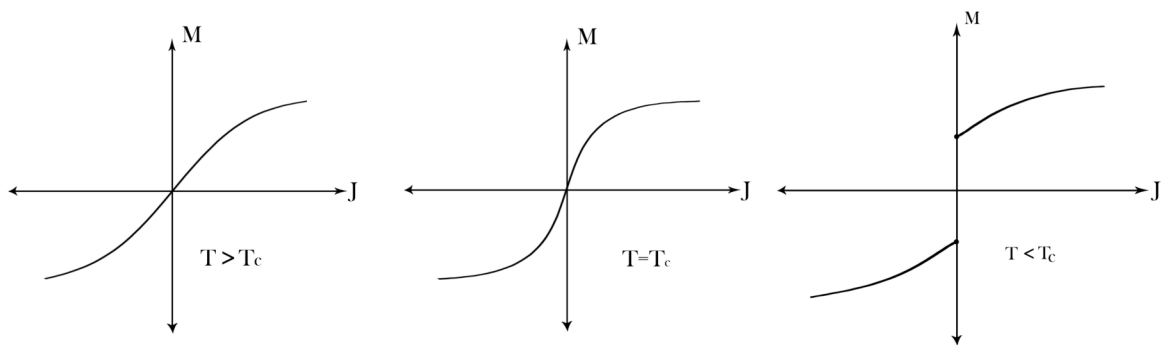


FIGURE 1.12 – L'influence de la température sur la magnétisation [4]

T_c : c'est la température critique pour laquelle l'aimantation spontanée commence à apparaître.

Malheureusement le modèle d'Ising à une dimension ne montre pas la transition de phase malgré qu'il possède une solution trouvée par la méthode élégante des matrices de transfert. Ce résultat négatif a découragé Ising de poursuivre ses recherches dans son sujet.

Le modèle d'Ising reste délaissé pendant environ une décennie jusqu'à ce que Rudolf Peirls, en 1939, montre par un argument très simple qu'à deux dimensions, une transition de phase était garantie pour certaines températures [4]. En 1941, Hendrick Kramers et Gregory Wannier ont localisé la transition de phase précisément pour le modèle à deux dimensions en supposant une

telle valeur unique [5]. En 1944, Lars Onsager donna une solution exacte complète au modèle d'Ising à deux dimensions dans le cas $B = 0$ [6].

Jusqu'à nos jours le modèle d'Ising à trois dimensions n'est pas soluble exactement et il convient d'utiliser des méthodes numériques pour le résoudre.

Terminons notre introduction par les exposants critiques qui sont l'un des problèmes fondamentaux dans la théorie des transitions de phase. Au voisinage du point critique, le système a un comportement spécial : de nombreuses grandeurs thermodynamiques commencent à diverger au point critique. Mais on peut préciser ces résultats si l'on détermine le comportement des grandeurs thermodynamiques les plus importantes au voisinage du point critique en fonction de la température. A cet effet, on utilise des lois en puissance dont les exposants s'appellent les exposants critiques qui sont définis de telle façon à être positifs ou nuls.

Parmi les exposants critiques citons [8] :

L'exposant α : La chaleur spécifique C diverge au point critique.

$$C \sim |\epsilon|^\alpha, \quad (1.2)$$

en gardant le champ magnétique nul. ϵ est la température réduite définie comme :

$$\epsilon = \frac{T - T_c}{T_c} \quad (1.3)$$

L'exposant β : Il décrit la manière avec laquelle le paramètre d'ordre (qui n'est autre que la magnétisation pour un système ferromagnétique) dans une région petite tend vers zéro quand la température croît vers la température critique.

$$m \sim (-\epsilon)^\beta, \quad (1.4)$$

en gardant le champ magnétique nul et pour $\epsilon < 0$.

L'exposant δ : Il décrit comment varie le paramètre d'ordre à champ magnétique faible lorsque le système s'approche de la température critique.

$$C \sim |h|^\frac{1}{\delta}, \quad (1.5)$$

en gardant $\epsilon = 0$.

Expérimentalement, les exposants critiques ont les mêmes valeurs. Par exemple, tous les ferromagnétiques semblent avoir des valeurs de β qui vérifient

$$0.31 \leq \beta \leq 0.38 \quad (1.6)$$

On dit que ces exposants sont universels.

Ce mémoire de fin d'étude est structuré comme suit :

Après une brève introduction où on s'intéresse aux propriétés magnétiques de certains matériaux. Le premier chapitre est consacré au comportement paramagnétique et ferromagnétique de certains matériaux. On étudie ensuite, dans le chapitre deux, le modèle d'Ising à une dimension, par la méthode des matrices de transfert. On montre que ce modèle ne présente pas de transition de phase.

Le troisième chapitre est consacré au modèle d'Ising à deux dimensions. On cherche une solution à ce modèle par la méthode d'Onsager mais en se basant sur le traitement de Kaufman de cette solution car il a utilisé le langage élégant des représentations spinorielles plus simple à suivre.

On termine ce mémoire par une conclusion. Ce mémoire est doté d'appendices où on a cité les théorèmes et lemmes mathématiques utiles pour la solution d'Onsager-Kaufman dans l'appendice A. Certains détails de calculs sont exposés dans les appendices suivants.

Chapitre 2

Solution du modèle d'Ising à une dimension

Le modèle d'Ising unidimensionnel est une chaîne de N spins, chaque spin n'interagissant seulement qu'avec ses plus proches voisins et le champ magnétique externe. L'énergie pour la configuration spécifiée par s_1, s_2, \dots, s_N est :

$$E_I \{s_i\} = -\epsilon \sum_{k=1}^N s_k s_{k+1} - B \sum_{i=1}^N s_k, \quad (2.1)$$

Nous imposons la condition aux limites périodique suivante :

$$s_{N+1} \equiv s_1 \quad (2.2)$$

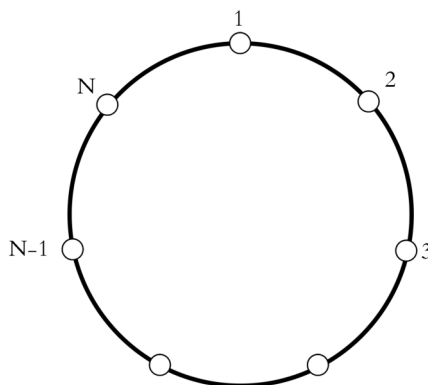


FIGURE 2.1 – Réseau d'Ising fermé à une dimension [1]

Chaque état du système est déterminé par l'ensemble $s_1, \dots, s_i, \dots, s_N$, où s_i ne peut prendre que les valeurs $+1$ (spin vers le haut) ou -1 (spin vers le bas). La fonction de partition devient

alors :

$$Z_I(B, T) = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \exp \left[\beta \sum_{k=1}^N (\epsilon s_k s_{k+1} + B s_k) \right] \quad (2.3)$$

À l'origine, Ising avait utilisé une méthode combinatoire pour évaluer la fonction de partition [7]. La méthode matricielle de Kramers et Wannier est cependant plus simple et plus élégante [5]. Définissons un opérateur P dans l'espace des spins (matrice 2×2) par les éléments matriciels suivants :

$$\langle s_k | P | s_{k+1} \rangle = \exp \beta [\epsilon s_k s_{k+1} + \frac{1}{2} B (s_k + s_{k+1})] \quad (2.4)$$

Si un spin $s_k = 1$ correspond au vecteur unitaire $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et un spin $s_k = -1$ au vecteur unitaire $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on trouve immédiatement les éléments matriciels de la forme suivante :

$$\langle +1 | P | +1 \rangle = \exp \beta (\epsilon + B) \quad (2.5)$$

$$\langle -1 | P | -1 \rangle = \exp \beta (\epsilon - B) \quad (2.6)$$

$$\langle -1 | P | +1 \rangle = \langle +1 | P | -1 \rangle = \exp(-\beta \epsilon). \quad (2.7)$$

Alors la représentation matricielle de P est la suivante :

$$P = \begin{bmatrix} \exp \beta (\epsilon + B) & \exp(-\beta \epsilon) \\ \exp(-\beta \epsilon) & \exp \beta (\epsilon - B) \end{bmatrix}$$

On insère la relation de fermeture $\sum_{s=1} |s\rangle \langle s| = 1$ dans (2.3) et on obtient :

$$\begin{aligned} Z_I(B, T) &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \langle s_1 | P | s_2 \rangle \langle s_2 | P | s_3 \rangle \dots \langle s_N | P | s_1 \rangle \\ &= \sum_{s_1} \langle s_1 | P^N | s_1 \rangle = \text{Tr} P^N. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Puisque P est symétrique alors on peut calculer la trace (2.8) et mettre P sous forme diagonale. Les valeurs propres apparaissent directement sur la diagonale.

$$\begin{bmatrix} \exp \beta (\epsilon + B) - \lambda & \exp(-\beta \epsilon) \\ \exp(-\beta \epsilon) & \exp \beta (\epsilon - B) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Celles-ci se déduisent de l'équation caractéristique suivante :

$$\lambda^2 - 2\lambda \exp(\beta \epsilon) \cosh(\beta B) + 2 \sinh(2\beta \epsilon) = 0$$

Les valeurs propres λ_+ et λ_- de la matrice P sont les racines de l'équation caractéristique précédente :

$$\lambda_{\pm} = \exp(\beta \epsilon) [\cosh(\beta B) \pm \sqrt{\cosh^2(\beta B) - 2 \exp(-2\beta \epsilon) \sinh(2\beta \epsilon)}] \quad (2.9)$$

et par conséquent l'équation (3.8) devient :

$$Z_I(B, T) = \text{Tr} P^N = \text{Tr} \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix}^N = \lambda_+^N + \lambda_-^N$$

Puisque on considère la limite où N est grand, il est commode de faire apparaître le rapport $\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \ll 1$:

$$\frac{1}{N} \ln Z_I(B, T) = \ln \lambda_+ + \frac{1}{N} \ln \left[1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \ln \lambda_+ \quad (2.10)$$

On s'intéresse à la limite thermodynamique, c'est-à-dire qu'on veut calculer l'énergie libre par spin, dans la limite où le nombre de spins tend vers l'infini. Dans cette limite, l'énergie libre par spins, qui, par définition est :

$$\frac{1}{N} A_I(B, T) \equiv -kT \ln Z_I(B, T) \quad (2.11)$$

s'obtient par :

$$\frac{1}{N} A_I(B, T) = -\epsilon - kT \ln \left[\cosh(\beta B) + \sqrt{\cosh^2(\beta B) - 2 \exp(-2\beta\epsilon) \sinh(2\beta\epsilon)} \right] \quad (2.12)$$

Ainsi on peut déduire les fonctions thermodynamiques [1]

$$U_I(B, T) = -kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{A_I}{kT} \right) \quad (\text{l'énergie interne}) \quad (2.13)$$

$$C_I(B, T) = \frac{\partial U_I}{\partial T} \quad (\text{la capacité calorifique}) \quad (2.14)$$

$$M_I(B, T) = -\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{A_I}{kT} \right) \quad (\text{la magnétisation}). \quad (2.15)$$

$$(2.16)$$

La magnétisation par spin :

$$\frac{1}{N} M_I(B, T) = -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{A_I}{kT} \right) \quad (2.17)$$

s'obtient :

$$\frac{1}{N} M_I(B, T) = \frac{\sinh(\beta B)}{\sqrt{\cosh^2(\beta B) - 2 \exp(-2\beta\epsilon) \sinh(2\beta\epsilon)}}. \quad (2.18)$$

2.1 Absence de transition de phase à une dimension

Le modèle d'Ising unidimensionnel ne présente pas de transition de phase (phénomène ferromagnétique) (voir figure 2.2), car quelque soit la température, la configuration moyenne des spins est déterminée par deux tendances en opposition : la tendance vers un alignement complet des spins pour minimiser l'énergie et la tendance vers une randomisation pour maximiser l'entropie. Pour le modèle d'Ising unidimensionnel, il perd toujours l'alignement car il n'existe pas assez de plus proches voisins. On remarque pour la magnétisation par spins que lorsque le champ externe est nul, alors $\frac{1}{N} M_I(0, T) = 0$ donne une connaissance directe de toutes les informations

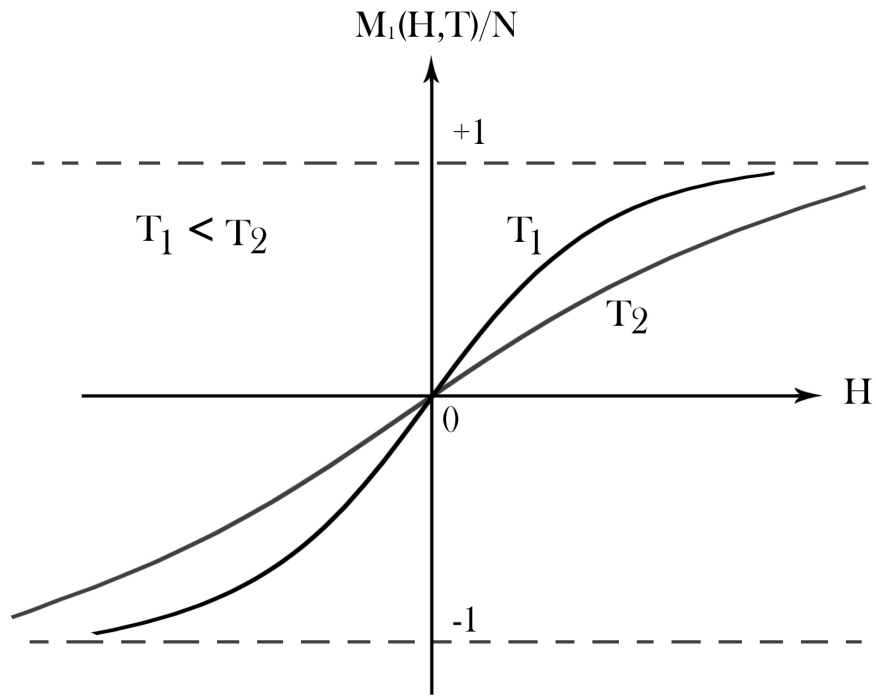


FIGURE 2.2 – L'absence de la magnétisation spontanée pour le modèle d'Ising à une dimension [1]

qu'on a vu précédemment, à savoir que le modèle d'Ising à une dimension est paramagnétique. Il ne présente pas de transition de phase (figure (2.2)).

Chapitre 3

LE MODÈLE D'ISING À DEUX DIMENSIONS (La solution d'Onsager-Kaufman)

3.1 La formulation matricielle

Notre première étape dans ce chapitre consiste à formuler le modèle d'Ising bidimensionnel en terme de matrices de transfert. Cette formulation va nous guider pour trouver la solution exacte pour ce modèle [1].

Prenons un réseau carré de $N = n^2$ spins constitué de n lignes et n colonnes comme indiqué à la figure 3.1.

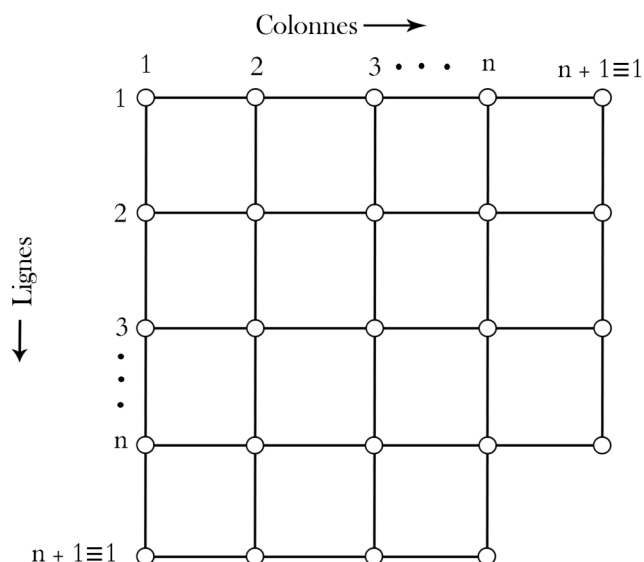


FIGURE 3.1 – Réseau bidimensionnel d'Ising. Figure tirée de [1]

Pour faire le lien avec la condition aux limites toroïdale, on imagine que le réseau soit agrandi d'une rangée et d'une colonne et on impose à la configuration de la $(n+1)$ rangée et de la $(n+1)$ colonne d'être identique à celle de la première rangée et de la première colonne respectivement. Cette condition aux limites confère au réseau la topologie d'un tore, comme on le voit sur la figure 3.2.

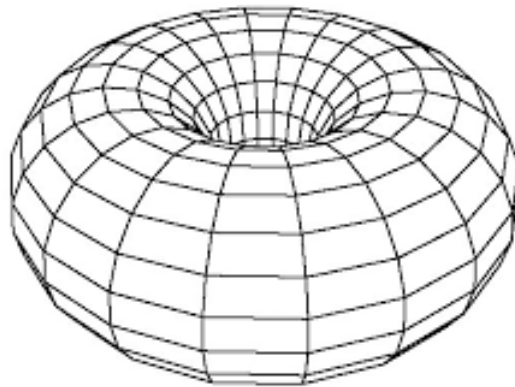


FIGURE 3.2 – La topologie toroïdale du réseau bidimensionnel d'Ising. Figure tirée de [2]

Soit $\mu_\alpha (\alpha = 1, \dots, n)$ désignant la collection de toutes les coordonnées de spins pour la ligne α :

$$\mu_\alpha \equiv \{s_1, s_2, \dots, s_n\}. \quad (3.1)$$

La condition toroïdale implique la définition suivante :

$$\mu_{n+1} \equiv \mu_1. \quad (3.2)$$

La configuration totale du réseau bidimensionnel d'Ising est alors spécifiée par $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ avec la supposition que chaque ligne α interagit seulement avec la ligne $(\alpha - 1)$ et la ligne $(\alpha + 1)$. Soit $E(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1})$ l'énergie d'interaction entre la ligne α et $(\alpha + 1)$. Soit $E(\mu_\alpha)$ l'énergie d'interaction des spins dans la ligne α en plus de l'énergie d'interaction avec le champ magnétique externe H . On peut alors écrire :

$$E(\mu, \mu') = -\epsilon \sum_{k=1}^n s_k s'_k, \quad (3.3)$$

$$E(\mu) = -\epsilon \sum_{k=1}^n s_k s_{k+1} - H \sum_{k=1}^n s_k \quad (3.4)$$

avec μ et μ' indiquant l'ensemble de toutes les coordonnées de spins dans deux lignes voisines :

$$\begin{aligned} \mu &\equiv \{s_1, \dots, s_n\}, \\ \mu' &\equiv \{s'_1, \dots, s'_n\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

La limite toroïdale implique cette condition :

$$s_{n+1} \equiv s_1. \quad (3.6)$$

L'énergie totale du réseau pour la configuration $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ est donnée par :

$$E_I \{\mu_1, \dots, \mu_n\} = \sum_{\alpha=1}^n [E(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}) + E(\mu_\alpha)]. \quad (3.7)$$

On peut alors écrire la fonction de partition comme :

$$Z_I(H, T) = \sum_{\mu_1} \dots \sum_{\mu_n} \exp \left\{ -\beta \sum_{\alpha=1}^n [E(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}) + E(\mu_\alpha)] \right\}, \quad (3.8)$$

avec $\beta = 1/kT$. k est la constante de Boltzmann et T la température.

On définit la matrice \mathbf{P} de dimension $2^n \times 2^n$ dont les éléments matriciels sont donnés par la relation suivante :

$$\langle \mu | \mathbf{P} | \mu' \rangle \equiv \exp \left\{ -\beta [E(\mu, \mu') + E(\mu)] \right\}. \quad (3.9)$$

On remplace la relation (3.9) dans l'équation (3.8) et on obtient :

$$\begin{aligned} Z_I(H, T) &= \sum_{\mu_1} \dots \sum_{\mu_n} \langle \mu_1 | \mathbf{P} | \mu_2 \rangle \langle \mu_2 | \mathbf{P} | \mu_3 \rangle \dots \langle \mu_n | \mathbf{P} | \mu_1 \rangle \\ &= \sum_{\mu_1} \langle \mu_1 | \mathbf{P}^n | \mu_1 \rangle = \text{Tr} \mathbf{P}^n \end{aligned} \quad (3.10)$$

On rappelle que la trace d'une matrice est indépendante de sa représentation matricielle. Pour faciliter les calculs, il faut transformer l'équation (3.10) sous forme diagonale :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{2^n} \end{bmatrix}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2^n}$ représentant les 2^n valeurs propres de \mathbf{P} . La matrice \mathbf{P}^n est alors aussi de forme diagonale, d'éléments matriciels $(\lambda_1)^n, (\lambda_2)^n, \dots, (\lambda_{2^n})^n$

$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{2^n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{2^n} \end{bmatrix} \dots = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^n & & & & \\ & (\lambda_2)^n & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (\lambda_{2^n})^n \end{bmatrix}$$

Alors on peut écrire la fonction de partition (3.10) sous cette forme :

$$Z_I(H, T) = \sum_{\alpha=1}^{2^n} (\lambda_\alpha)^n \quad (3.11)$$

D'après la forme (3.9) on s'attend à ce que les valeurs propres de \mathbf{P} soient en général de la forme e^n lorsque n est grand, puisque $E(\mu, \mu')$ et $E(\mu)$ sont de l'ordre de n . Si λ_{max} est la valeur propre la plus grande de \mathbf{P} on compte trouver :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \lambda_{max} = \text{nombre fini.} \quad (3.12)$$

Si ce résultat est vrai et que toutes les valeurs propres λ_α sont positives, alors

$$(\lambda_{max})^n \leq Z_I \leq 2^n (\lambda_{max})^n,$$

ou bien en passant à la forme logarithmique, pour simplifier les calculs par la suite :

$$\frac{1}{n} \ln \lambda_{max} \leq \frac{1}{n^2} \ln Z_I \leq \frac{1}{n} \ln \lambda_{max} + \frac{1}{n} \ln 2. \quad (3.13)$$

On en déduit que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \lambda_{max}, \quad (3.14)$$

où $N = n^2$. On verra par la suite que (3.12) est vraie et que toutes les valeurs propres λ_α sont positives.

Nous allons maintenant passer, dans ce qui suit, à la description d'une représentation explicite de \mathbf{P} .

3.1.1 La matrice \mathbf{P}

A partir de (3.3), (3.4) et (3.9), on trouve les éléments matriciels de P sous la forme suivante :

$$\langle s_1, \dots, s_n | \mathbf{P} | s'_1, \dots, s'_n \rangle = \prod_{k=1}^n e^{\beta H s_k} e^{\beta \epsilon s_k s_{k+1}} e^{\beta \epsilon s_k s'_k}. \quad (3.15)$$

On définit maintenant les trois matrices V'_1 , V_2 et V_3 de dimension $2^n \times 2^n$ dont les éléments matriciels sont :

$$\langle s_1, \dots, s_n | V'_1 | s'_1, \dots, s'_n \rangle = \prod_{k=1}^n e^{\beta \epsilon s_k s'_k} \quad (3.16)$$

$$\langle s_1, \dots, s_n | V_2 | s'_1, \dots, s'_n \rangle = \delta_{s_1 s'_1} \dots \delta_{s_n s'_n} \prod_{k=1}^n e^{\beta \epsilon s_k s_{k+1}} \quad (3.17)$$

$$\langle s_1, \dots, s_n | V_3 | s'_1, \dots, s'_n \rangle = \delta_{s_1 s'_1} \dots \delta_{s_n s'_n} \prod_{k=1}^n e^{\beta H s_k} \quad (3.18)$$

avec $\delta_{s_1 s'_1}$ est le symbole de Kronecher. Donc V_2 et V_3 sont de forme diagonale.

En utilisant la relation de fermeture comme suit :

$$\begin{aligned} \langle s_1, \dots, s_n | \mathbf{P} | s'_1, \dots, s'_n \rangle &= \sum_{s''_1, \dots, s''_n} \sum_{s'''_1, \dots, s'''_n} \langle s_1, \dots, s_n | V_3 | s''_1, \dots, s''_n \rangle \\ &\times \langle s''_1, \dots, s''_n | V_2 | s'''_1, \dots, s'''_n \rangle \langle s'''_1, \dots, s'''_n | V'_1 | s'_1, \dots, s'_n \rangle, \end{aligned} \quad (3.19)$$

on peut vérifier facilement que :

$$\mathbf{P} = V_3 V_2 V'_1 \quad (3.20)$$

3.1.2 Rappel sur le produit tensoriel des matrices

Dans un souci de présenter les matrices V_3, V_2 et V'_1 d'une manière convenable, on va faire un petit rappel concernant le produit tensoriel de matrices. Pour cela, soit A et B deux matrices carrées de dimension $m \times m$ dont les éléments matriciels sont notés respectivement par $\langle i | A | j \rangle$ et $\langle i | B | j \rangle$, avec i et j pouvant prendre indépendamment, les valeurs $1, 2, \dots, m$. Alors le produit tensoriel $A \otimes B$ est la matrice de dimension $m^2 \times m^2$ dont les éléments matriciels sont :

$$\langle ii' | A \otimes B | jj' \rangle \equiv \langle i | A | j \rangle \langle i' | B | j' \rangle. \quad (3.21)$$

Cette définition peut être immédiatement élargie à la définition du produit tensoriel $A \otimes B \otimes \dots \otimes C$ de n'importe quel nombre de matrices A, B, \dots, C de dimension $m \times m$:

$$\langle ii' \dots i'' | A \otimes B \otimes \dots \otimes C | jj' \dots j'' \rangle \equiv \langle i | A | j \rangle \langle i' | B | j' \rangle \dots \langle i'' | C | j'' \rangle.$$

Si AB désigne le produit ordinaire de matrices A et B alors :

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD). \quad (3.22)$$

Pour vérifier cela, prenons les éléments matriciels :

$$\begin{aligned} \langle ii' | (A \otimes B)(C \otimes D) | jj' \rangle &= \sum_{kk'} \langle ii' | A \otimes B | kk' \rangle \langle kk' | C \otimes D | jj' \rangle \\ &= \sum_k \langle i | A | k \rangle \langle k | C | j \rangle \cdot \sum_{k'} \langle i' | B | k' \rangle \langle k' | D | j' \rangle \\ &= \langle i | AC | j \rangle \langle i' | BD | j' \rangle \\ &= \langle ii' | (AC) \otimes (BD) | jj' \rangle \end{aligned} \quad (3.23)$$

Par généralisation de la relation (3.23) ci-dessus, on peut prouver la relation suivante :

$$(A \otimes B \otimes \dots \otimes C)(D \otimes E \otimes \dots \otimes F) = (AD) \otimes (BE) \otimes \dots \otimes (CF) \quad (3.24)$$

3.1.3 Les matrices de spin

On va maintenant introduire quelques matrices spéciales avec lesquelles V'_1 , V_2 et V_3 peuvent être exprimées. Soient les trois familles de matrices de Pauli de dimension 2×2 notées par X , Y et Z :

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ces matrices vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} X^2 &= 1, & Y^2 &= 1, & Z^2 &= 1 \\ XY + YX &= 0, & YZ + ZY &= 0, & ZX + XZ &= 0 \\ XY &= iZ, & YZ &= iX, & ZX &= iY \end{aligned} \quad (3.25)$$

Soient les trois ensembles de matrices X_α , Y_α et Z_α avec $(\alpha = 1, \dots, n)$ de dimension $2^n \times 2^n$ définies comme suit :

$$\begin{aligned} X_\alpha &= 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes X \otimes \dots \otimes 1 && (\text{n facteurs}) \\ Y_\alpha &= 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes Y \otimes \dots \otimes 1 && (\text{n facteurs}) \\ Z_\alpha &= 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes Z \otimes \dots \otimes 1 && (\text{n facteurs}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

X , Y et Z formant le facteur α du produit. Pour n'importe quel $\alpha \neq \beta$ on peut facilement vérifier les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_\beta] &= [Y_\alpha, Y_\beta] = [Z_\alpha, Z_\beta] = 0 \\ [X_\alpha, Y_\beta] &= [X_\alpha, Z_\beta] = [Y_\alpha, Z_\beta] = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Pour tout α donné, les matrices X_α , Y_α et Z_α vérifient toutes les relations précédentes (3.25).

L'identité suivante est valable pour toute matrice X dont le carré est la matrice unité

$$e^{\theta X} = \cosh \theta + X \sinh \theta, \quad (3.28)$$

avec θ représentant un nombre. On peut prouver ceci comme suit :

Si n est pair alors $X^n = 1$ et si n est impair, on trouve $X^n = X$.

Alors :

$$e^{\theta X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} X^n = \sum_{n \text{ pair}} \frac{\theta^n}{n!} + X \sum_{n \text{ impair}} \frac{\theta^n}{n!} = \cosh \theta + X \sinh \theta \quad (3.29)$$

3.1.4 Les matrices V'_1 , V_2 et V

Par l'utilisation de (3.16), il est clair que V'_1 est le produit direct de n matrices identiques 2×2 :

$$V'_1 = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}, \quad (3.30)$$

où :

$$\langle s|\mathbf{a}|s'\rangle = \exp(\beta\epsilon s s'). \quad (3.31)$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} \exp(\beta\epsilon) & \exp(-\beta\epsilon) \\ \exp(-\beta\epsilon) & \exp(\beta\epsilon) \end{bmatrix} = \exp(\beta\epsilon) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \exp(-\beta\epsilon) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \exp(\beta\epsilon) I + \exp(-\beta\epsilon) X \end{aligned} \quad (3.32)$$

avec I est la matrice identité 2×2 . On définit :

$$\tanh(\theta) \equiv \exp(-2\beta\epsilon) \quad (3.33)$$

En utilisant (3.32) :

$$X = \frac{\exp(\theta X) - \cosh(\theta)}{\sinh \theta} I \quad (3.34)$$

et en remplaçant (3.34) dans (3.32), on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \exp(\beta\epsilon) + \exp(-\beta\epsilon) \left[\frac{\exp(\theta X)}{\sinh \theta} - \coth(\theta) \right] I \\ &= \exp(\beta\epsilon) + \exp(-\beta\epsilon) \left[\frac{\exp(\theta X)}{\sinh \theta} - \exp(2\beta\epsilon) \right] I \end{aligned} \quad (3.35)$$

On a :

$$\sinh \theta = \frac{1}{\sqrt{\coth^2 \theta - 1}}. \quad (3.36)$$

On remplace (3.35) dans (3.32) et on trouve le résultat :

$$\begin{aligned} &= \exp(\beta\epsilon) + \exp(-\beta\epsilon) \left[\exp(\theta X) \sqrt{\coth^2 \theta - 1} - \exp(2\beta\epsilon) \right] \\ &= \exp(-\beta\epsilon) \exp(\theta X) \sqrt{\exp(4\beta\epsilon) - 1} \\ &= \exp(\theta X) \sqrt{\exp(2\beta\epsilon) - \exp(-2\beta\epsilon)} \\ &= \exp(\theta X) \sqrt{2 \sinh 2\beta\epsilon} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Maintenant on peut développer (3.30) comme suit :

$$V_1' = [2 \sinh(2\beta\epsilon)]^{n/2} e^{\theta X} \otimes e^{\theta X} \otimes e^{\theta X} \otimes \dots \otimes e^{\theta X} \quad (3.38)$$

On montre facilement que

$$e^{\theta X} \otimes e^{\theta X} \otimes \dots \otimes e^{\theta X} = e^{\theta X_1} e^{\theta X_2} \dots e^{\theta X_n} = e^{\theta(X_1 + X_2 + \dots + X_n)} \quad (3.39)$$

En appliquant (3.39) à (3.30), on trouve :

$$V_1' = [2 \sinh(2\beta\epsilon)]^{n/2} V_1 \quad (3.40)$$

$$V_1 = \prod_{\alpha=1}^n e^{\theta X_\alpha}, \quad (3.41)$$

avec

$$\tanh \theta \equiv e^{-2\beta\epsilon} \quad (3.42)$$

Par un calcul simple, on trouve :

$$V_2 = \prod_{\alpha=1}^n e^{\beta\epsilon Z_\alpha Z_{\alpha+1}} \quad (3.43)$$

$$V_3 = \prod_{\alpha=1}^n e^{\beta H Z_\alpha}, \quad (3.44)$$

avec : $Z_{n+1} \equiv Z_n$ (condition aux limites toroïdale). On trouve alors :

$$P = [2 \sinh(2\beta\epsilon)]^{n/2} V_3 V_2 V_1. \quad (3.45)$$

Dans le cas d'absence d'un champ magnétique externe ($H = 0$), on a $V_3 = 1$. La forme de P se simplifie alors à :

$$P = [2 \sinh(2\beta\epsilon)]^{n/2} V_2 V_1. \quad (3.46)$$

Ceci complète la formulation du modèle d'Ising bidimensionnel. Notre prochaine section traite directement la solution d'Onsager avec la considération des rappels mathématiques qui seront définis dans l'appendice de ce mémoire de fin d'étude .

3.2 La solution d'Onsager-Kaufman

En l'absence d'un champ magnétique extérieur, la formule (3.14) et (3.46) donne :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_I(0, T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln [\lambda_{max}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln [2 \sinh(2\beta\epsilon)]^{n/2} V_2 V_1 \\ &= \frac{1}{2} \ln [2 \sinh(2\beta\epsilon)] + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\lambda) \end{aligned} \quad (3.47)$$

où

$$\lambda = \text{la plus grande valeur propre de } V \quad (V = V_2 V_1), \quad (3.48)$$

avec V_2 et V_1 sont donnés par les formules précédentes (3.43) et (3.41). Ces formules sont valables si toutes les valeurs propres de V sont positives et la $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \lambda$ existe.

Notre but essentiel dans les prochaines sections est de diagonaliser la matrice V .

3.2.1 L'expression de V en termes des représentations spinorielles

En utilisant la représentation des Γ_μ (voir (4.5) dans l'appendice A à la fin de ce mémoire), on peut écrire :

$$\Gamma_{2\alpha}\Gamma_{2\alpha-1} = Y_\alpha Z_\alpha = iX_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad (3.49)$$

Essayons maintenant d'écrire V_1 et V_2 en termes d'une représentation spinorielle. De (4.1) et (3.49), on a :

$$V_1 = \prod_{\alpha=1}^n e^{\theta X_\alpha} = \prod_{\alpha=1}^n e^{-i\theta \Gamma_{2\alpha}\Gamma_{2\alpha-1}} \quad (3.50)$$

V_1 est donc la représentation spinorielle d'un produit commutatif de rotations planes. Par l'utilisation des relations (voir (4.2), (4.3) et (4.4)) écrites dans l'appendice A), on peut vérifier les relations suivantes par récurrence :

$$\Gamma_3\Gamma_2 = X_1 Z_2 Y_1 = iZ_1 Z_2 \quad (3.51)$$

$$\Gamma_5\Gamma_4 = X_1 X_2 Z_3 X_1 Y_2 = iZ_2 Z_3. \quad (3.52)$$

.
.
.

$$\Gamma_{2\alpha+1}\Gamma_{2\alpha} = iZ_\alpha Z_{\alpha+1} \quad (\alpha = 1, \dots, n-1) \quad (3.53)$$

On vérifie aussi ces propriétés :

$$\Gamma_1\Gamma_2 = -iZ_1 Z_1 X_1$$

$$\Gamma_1\Gamma_4 = -iZ_1 Z_2 X_1 X_2$$

$$\Gamma_1\Gamma_6 = -iZ_1 Z_3 X_1 X_2 X_3$$

.
.
.

$$\Gamma_1\Gamma_{2\alpha} = -iZ_1 Z_\alpha (X_1 \dots X_\alpha) \quad (3.54)$$

On peut alors écrire la formule (3.43) sous cette forme :

$$V_2 = \left[\prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{\beta \epsilon Z_\alpha Z_{\alpha+1}} \right] e^{\beta \epsilon Z_n Z_1}. \quad (3.55)$$

On applique les relations de récurrence (3.54) qu'on a trouvé précédemment. La formule (3.55) devient :

$$V_2 = e^{\beta\epsilon Z_n Z_1} \left[\prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{\beta\epsilon Z_\alpha Z_{\alpha+1}} \right] = e^{i\beta\epsilon U \Gamma_1 \Gamma_{2n}} \prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{-i\beta\epsilon \Gamma_{2\alpha+1} \Gamma_{2\alpha}} \quad (3.56)$$

avec :

$$U \equiv X_1 X_2 \cdots X_n \quad (3.57)$$

Si ce n'est la présence de U dans le premier facteur dans (3.56), V_2 serait aussi une représentation spinorielle d'un produit de rotations planes commutatives. A noter que ce facteur provient de la condition aux limites toroïdales imposées à notre problème dès le début. Au fait, on verra dans la suite que cette condition imposée va simplifier considérablement les calculs.

On remplace (3.58) et (3.50) dans (3.28). On obtient donc :

$$V \equiv V_2 V_1 = e^{i\phi U \Gamma_1 \Gamma_{2n}} \left[\prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{-i\phi \Gamma_{2\alpha+1} \Gamma_{2\alpha}} \right] \left[\prod_{\lambda=1}^n e^{-i\theta \Gamma_{2\lambda} \Gamma_{2\lambda-1}} \right], \quad (3.58)$$

où :

$$\phi = \beta\epsilon, \quad \epsilon > 0, \quad \theta \equiv \tanh^{-1} e^{-2\phi} \quad (3.59)$$

Citons ci-dessous quelques propriétés de U (en utilisant les relations (4.5) de l'appendice A) :

$$\begin{aligned} U^2 &= (X_1 X_2 \cdots X_n) (X_1 X_2 \cdots X_n) \\ &= X_1 X_1 X_2 X_2 X_3 X_3 \cdots X_n X_n = 1. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Par utilisation des mêmes relations précédentes, on peut vérifier les formules suivantes :

$$U(1+U) = 1+U \quad (3.61)$$

$$U(1-U) = -(1-U) \quad (3.62)$$

$$U = i^n \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_{2n} \quad (3.63)$$

U commute avec le produit d'un nombre pair de Γ_μ et anticommute avec le produit d'un nombre impair de Γ_μ . On peut le vérifier en utilisant (3.62) et (3.61). D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} e^{i\phi \Gamma_1 \Gamma_{2n} U} &= \left[\frac{1}{2} (1+U) + \frac{1}{2} (1-U) \right] [\cosh \phi + i \Gamma_1 \Gamma_{2n} U \sinh \phi] \\ &= \frac{1}{2} (1+U) [\cosh \phi + i \Gamma_1 \Gamma_{2n} \sinh \phi] + \frac{1}{2} (1-U) [\cosh \phi - i \Gamma_1 \Gamma_{2n} \sinh \phi] \\ &= \frac{1}{2} (1+U) e^{i\phi \Gamma_1 \Gamma_{2n}} + \frac{1}{2} (1-U) e^{-i\phi \Gamma_1 \Gamma_{2n}} \end{aligned} \quad (3.64)$$

On remplace ce résultat dans (3.59) et on trouve :

$$V = \frac{1}{2} (1 + U) V^+ + \frac{1}{2} (1 - U) V^- \quad (3.65)$$

avec :

$$V^\pm \equiv e^{\pm i\phi\Gamma_1\Gamma_{2n}} \left[\prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{-i\phi\Gamma_{2\alpha+1}\Gamma_{2\alpha}} \right] \left[\prod_{\lambda=1}^n e^{-i\theta\Gamma_{2\lambda}\Gamma_{2\lambda-1}} \right] \quad (3.66)$$

V^+ et V^- sont des représentations spinorielles de rotations.

3.2.2 La représentation dans laquelle U est diagonale

Il est évident que les trois matrices U , V^+ et V^- commutent entre elles. Elles peuvent donc être diagonalisées simultanément. Nous transformons tout d'abord V en une représentation dans laquelle U est diagonale (mais V^\pm ne sont pas nécessairement de représentation diagonale pour cette étape) :

$$RVR^{-1} \equiv \tilde{V} = \frac{1}{2} (1 + \tilde{U}) \tilde{V}^+ + \frac{1}{2} (1 - \tilde{U}) \tilde{V}^- \quad (3.67)$$

$$\tilde{U} \equiv RUR^{-1} \quad (3.68)$$

$$\tilde{V}^\pm \equiv RV^\pm R^{-1} \quad (3.69)$$

Puisque $U^2 = 1$, les valeurs propres de U sont ± 1 . De (3.60), on peut voir que U peut s'écrire sous la forme $U = X \otimes X \otimes X \otimes \dots \otimes X$. Par conséquent, une forme diagonale de U serait $U = Z \otimes Z \otimes \dots \otimes Z$ et les valeurs propre $+1$ et -1 vont apparaître en nombre égal. On pourrait aussi obtenir d'autres formes diagonales de U en permutant les positions relatives des valeurs propres le long de la diagonale. Un choix judicieux de R serait de telle manière que les valeurs propres $+1$ se situent dans une sous-matrice et -1 se situent dans une autre sous-matrice $+1$ et -1 (respectivement), de façon à ce que \tilde{U} s'écrive :

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

où $+1$ est une matrice unité de dimension $2^{n-1} \times 2^{n-1}$. Puisque V^\pm commutent avec \tilde{U} , alors leurs formes sont les suivantes :

$$\tilde{V}^\pm = \begin{bmatrix} A^\pm & 0 \\ 0 & B^\pm \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

avec A^\pm et B^\pm sont des matrices de dimension $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ non nécessairement de forme diagonale. Puisque $\frac{1}{2} (1 + \tilde{U})$ annule la sous-matrice d'en bas et $\frac{1}{2} (1 - \tilde{U})$ annule la sous-matrice

d'en haut, on peut séparer les matrices (3.71) de la manière suivante :

$$\frac{1}{2} (1 + \tilde{U}) \tilde{V}^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$\frac{1}{2} (1 - \tilde{U}) \tilde{V}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^- \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Donc :

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & B^- \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Pour diagonaliser V , il suffit de diagonaliser \tilde{V} . La diagonalisation de V est réalisée par la diagonalisation de (3.72) et (3.73) séparément et de façon indépendante, sachant que chacune des matrices (3.72) et (3.73) possède n valeurs propres non nulles. La combinaison de ces valeurs propres non nulles constitue les valeurs propres de V .

Pour diagonaliser (3.72) et (3.73), tout d'abord il faut diagonaliser \tilde{V}^- et \tilde{V}^+ séparément et indépendamment. Mais alors cela va nous mener à considérer le double des valeurs propres (c.a.d. même celles nulles) dans chaque cas. Il faut trouver un moyen d'éliminer certaines valeurs propres mais rappelons que ce qui nous intéresse c'est de trouver la valeur propre la plus grande. De ce fait cette étape d'écartier certaines valeurs propres de \tilde{V}^- et \tilde{V}^+ n'est pas essentielle.

3.2.3 Les valeurs propres de V^+ et V^-

Pour trouver les valeurs propres de V^+ et V^- nous allons d'abord chercher les valeurs propres des rotations qu'on désignera par Ω^+ et Ω^- correspondant aux représentations spinorielles V^+ et V^- respectivement selon la correspondance suivante :

$$V^\pm \longleftrightarrow \Omega^\pm \quad (3.75)$$

Les valeurs propres des rotations Ω^\pm

En utilisant le lemme 1 (voir appendice A), qui stipule que : Si $\omega(\mu\nu | \theta) \longleftrightarrow S_{\mu\nu}(\theta)$ alors

$$S_{\mu\nu}(\theta) = e^{-\frac{1}{2}\theta\Gamma_\mu\Gamma_\nu} \quad (3.76)$$

et d'après (3.66), on a :

$$e^{\pm i\phi\Gamma_1\Gamma_{2n}} \longleftrightarrow \omega(1, 2n | \mp 2i\phi) \quad (3.77)$$

$$e^{i\phi\Gamma_{2\alpha+1}\Gamma_{2\alpha}} \longleftrightarrow \omega(2\alpha + 1, 2\alpha | -2i\phi) \quad (3.78)$$

$$e^{-i\theta\Gamma_{2\lambda}\Gamma_{2\lambda-1}} \longleftrightarrow \omega(2\lambda, 2\lambda - 1 | 2i\theta) \quad (3.79)$$

La combinaison de ces trois relations ci-dessus donne ce résultat :

$$\Omega^\pm = \omega(1, 2n | \mp 2i\phi) \left[\prod_{\alpha=1}^{n-1} \omega(2\alpha + 1, 2\alpha | - 2i\phi) \right] \left[\prod_{\lambda=1}^n \omega(2\lambda, 2\lambda - 1 | 2i\theta) \right] \quad (3.80)$$

avec $\omega(\mu\nu|\alpha) = \omega(\nu\mu | -\alpha)$ est la rotation plane dans le plans $\mu\nu$ à travers l'angle α . Il est clair que les valeurs propres de Ω^\pm sont identiques aux valeurs propres de :

$$\omega^\pm \equiv \Delta \Omega^\pm \Delta^{-1} \quad (3.81)$$

Δ est la racine du dernier terme de (3.80) :

$$\Delta \equiv \sqrt{\prod_{\lambda=1}^n \omega(2\lambda, 2\lambda - 1 | 2i\theta)} = \prod_{\lambda=1}^n \omega(2\lambda, 2\lambda - 1 | i\theta). \quad (3.82)$$

En utilisant la propriété $\omega(\mu\nu|\alpha) = \omega(\mu\nu | -\alpha)$, on trouve :

$$\omega^\pm = \Delta \chi^\pm \Delta \quad (3.83)$$

$$\Delta = \omega(1, 2 | i\theta) \omega(3, 4 | i\theta) \cdots \omega(2n - 1, 2n | i\theta) \quad (3.84)$$

On a :

$$\begin{aligned} \Delta \Omega^\pm \Delta^{-1} &= \Delta \chi^\pm \Delta \\ \Delta \Omega^\pm &= \Delta \chi^\pm \Delta \Delta \\ \Omega^\pm &= \chi^\pm \Delta \Delta \end{aligned} \quad (3.85)$$

Alors :

$$\chi^\pm = \omega(2n, 1 | \pm 2i\phi) [\omega(2, 3 | 2i\phi) \omega(4, 5 | 2i\phi) \cdots \omega(2n - 2, 2n - 1 | 2i\phi)] \quad (3.86)$$

Explicitement, cela donne :

$$\Delta = \begin{bmatrix} J & & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & J & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ & & & \dots & J & \end{bmatrix}, J \equiv \begin{bmatrix} \cosh \theta & -i \sinh \theta \\ i \sinh \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\chi^\pm = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \pm b \\ 0 & K & & & & & \\ 0 & & K & & & & \\ \vdots & & & K & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & 0 \\ \mp b & & & \cdots & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad K \equiv \begin{bmatrix} \cosh 2\phi & -i \sinh 2\phi \\ i \sinh 2\phi & \cos 2\phi \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} a &= \cosh 2\phi \\ b &= -i \sinh 2\phi \end{aligned}$$

$$\Delta \chi^\pm \Delta = \omega^\pm = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \mp B^* \\ B^* & A & B & 0 & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & B^* & A & B & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \mp B & \cdot & \cdot & \cdot & & B^* & A \end{bmatrix}, \quad A \equiv \begin{bmatrix} \cosh 2\phi \cosh 2\theta & -i \cosh 2\phi \sinh 2\theta \\ i \cosh 2\phi \sinh 2\theta & \cosh 2\phi \cosh 2\theta \end{bmatrix},$$

On a :

$$B \equiv \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sinh 2\phi \sinh 2\theta & i \sinh 2\phi \sinh^2 \theta \\ -i \sinh 2\phi \cosh^2 \theta & -\frac{1}{2} \sinh 2\phi \sinh 2\theta \end{bmatrix}, \quad B^* \equiv \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sinh 2\phi \sinh 2\theta & i \sinh 2\phi \sinh^2 \theta \\ -i \sinh 2\phi \cosh^2 \theta & -\frac{1}{2} \sinh 2\phi \sinh 2\theta \end{bmatrix}$$

B^* est le complexe conjugué de B .

$$\begin{aligned} \det A &= \cosh^2 2\phi \\ \det B &= \det B^* = 0 \end{aligned} \tag{3.87}$$

Pour trouver les valeurs propres de ω^\pm , essayons la formule suivante pour un vecteur propre de ω^\pm :

$$\psi \equiv \begin{bmatrix} zu \\ z^2 u \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z^n u \end{bmatrix}$$

où z représente un nombre et u c'est un vecteur à deux composantes : $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

Le fait de poser cette condition,

$$\omega^\pm \psi = \lambda \psi \quad (3.88)$$

nous conduit au système d'équations aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} (zA + z^2B \mp z^n B^*) u &= z\lambda u \\ (z^2A + z^3B + zB^*) u &= z^2\lambda u \\ (z^3A + z^4B + z^2B^*) u &= z^3\lambda u \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ (z^{n-1}A + z^nB + z^{n-2}B^*) u &= z^{n-1}\lambda u \\ (z^nA \mp zB + z^{n-1}B^*) u &= z^n\lambda u \end{aligned} \quad (3.89)$$

La deuxième équation jusqu'à la $n - 1$ équation sont identiques. Il reste donc uniquement trois équations indépendantes :

$$\begin{aligned} (A + zB \mp z^{n-1}B^*) u &= \lambda u \\ (A + zB + z^{-1}B^*) u &= \lambda u \\ (A \mp z^{1-n}B + z^{-1}B^*) u &= \lambda u. \end{aligned} \quad (3.90)$$

On résout ces équations en posant :

$$z^n = \mp 1. \quad (3.91)$$

Les trois équations précédentes deviennent une seule équation :

$$(A + zB + z^{-1}B^*) u = \lambda u \quad (3.92)$$

avec le signe \mp dans (3.91) associé à ω^+ ou ω^- pour lesquels on trouve n valeurs de z :

$$z_k = e^{2i\pi k/n} \quad (k = 0, 1, \dots, 2n - 1) \quad (3.93)$$

où :

$$\begin{aligned} k &= 1, 3, 5, \dots, 2n - 1 \text{ (pour } \omega^+) \\ k &= 0, 2, 4, \dots, 2n - 2 \text{ (pour } \omega^-). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Pour chaque k , deux valeurs propres λ_k sont déterminées par l'équation suivante :

$$(A + z_k B + z_k^{-1} B^*) u = \lambda_k u \quad (3.95)$$

λ_k est associée à ω^\pm .

Notons que nous avons corrigé une erreur intervenue dans [1] selon laquelle $\det A = 1$ et $\det B = 0$ et par suite $\det |A + z_k B + z_k^{-1} B^*| = 1$, chose qui n'est pas vraie car le déterminant de la somme de matrices n'est pas égal à la somme des déterminants de chacune des matrices. Néanmoins cette erreur n'influe pas sur le résultat final et en utilisant le logiciel Mathematica [10], on trouve effectivement que :

$$\det |A + z_k B + z_k^{-1} B^*| = 1. \quad (3.96)$$

Donc les deux valeurs de λ_k doivent prendre la forme suivante :

$$\lambda_k = e^{\pm \gamma_k} \quad (k = 0, 1, \dots, 2n - 1). \quad (3.97)$$

Calculons la trace de l'équation (3.95). On trouve directement γ_k :

$$\text{Tr}(A + zB + z^{-1}B^*) = \text{Tr}[A + (z + z^{-1})B] \quad (3.98)$$

car on a : $B^* = B$ et $z + z^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi k}{n}$.

Alors on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A + 2 \cos(\frac{2\pi k}{n})B) &= 2 \cosh 2\phi \cosh 2\theta + 2 \cos(\frac{2\pi k}{n})[-\sinh 2\phi \sinh 2\theta] \times \\ &\quad \cosh 2\phi \cosh 2\theta - \cos(\frac{2\pi k}{n}) \sinh 2\phi \sinh 2\theta \end{aligned} \quad (3.99)$$

D'autre part, comme les valeurs propres λ_k doivent être de la forme

$$\lambda_k = e^{\pm \gamma_k} \quad (3.100)$$

Donc :

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(A + zB + z^{-1}B^*) = \frac{1}{2} (e^{\gamma_k} + e^{-\gamma_k}) = \cos \gamma_k \quad (3.101)$$

avec : $(k = 0, 1, \dots, 2n - 1)$. Si γ_k est solution de l'équation précédente alors $-\gamma_k$ est aussi solution. Par conséquent, on va définir γ_k pour être la solution positive de l'équation (3.101).

$$\gamma_k = \gamma_{2n-k} \quad (3.102)$$

$$0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n. \quad (3.103)$$

On utilise la relation (3.102) pour vérifier la première équation :

$$\begin{aligned} \cosh(\gamma_{2n-k}) &= \cosh(2\phi) \cosh(2\theta) - \cos(\frac{\pi}{n}(2n - k)) \sinh(2\phi) \sinh(2\theta) \\ &= \cosh(2\phi) \cosh(2\theta) - \cos(\frac{\pi 2n}{n} - \frac{2\pi k}{n}) \sinh(2\phi) \sinh(2\theta) \\ &= \cosh(2\phi) \cosh(2\theta) - \cos(\frac{2\pi k}{n}) \sinh(2\phi) \sinh(2\theta) = \cosh(\gamma_k). \end{aligned} \quad (3.104)$$

La seconde relation peut être vue en notant que $\frac{\partial \gamma_k}{\partial k} = \frac{\pi}{n} \sin(\frac{2\pi k}{n}) / \sinh(\gamma_k)$, qui est positive pour

$k \leq n$. On peut tracer graphiquement γ_k en fonction de ϕ avec $\phi = \frac{\epsilon}{kT}$. Lorsque $n \rightarrow \infty$, les courbes $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ de la figure (3.3) fusionnent pour former un continuum. Les valeurs propres de ω^\pm sont identiques à celles de ω^\pm . Par conséquent Ω^\pm est le produit commutatif des rotations planes dans le plan $(\mu\nu)$.

Les 2^n valeurs propres de V^\pm peuvent être écrites immédiatement à l'aide du lemme 3 ; les valeurs propres Ω^\pm (ω^\pm) sont : $\lambda_0(= e^{\pm\gamma_0}), \lambda_1(= e^{\pm\gamma_1}), \lambda_2(= e^{\pm\gamma_2}), \dots, \lambda_{2n-1}(= e^{\pm\gamma_{2n-1}})$.

Alors les valeurs propres de V^\pm sont :

$$\text{Les valeurs propres de } V^- \text{ sont } e^{1/2(\pm\gamma_0 \pm \gamma_2 \pm \gamma_4 \dots \pm \gamma_{2n-2})} \quad (3.105)$$

$$\text{Les valeurs propres de } V^+ \text{ sont } e^{1/2(\pm\gamma_1 \pm \gamma_3 \pm \gamma_5 \dots \pm \gamma_{2n-1})} \quad (3.106)$$

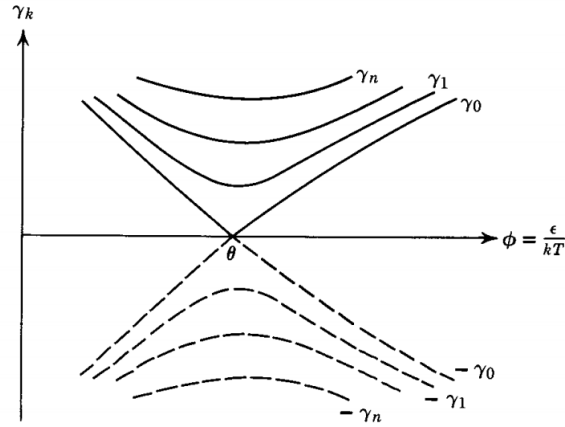


FIGURE 3.3 – Les solutions de (3.101). Figure tirée de [1]

3.2.4 Les valeurs propres de V

Comme nous l'avons expliqué, l'ensemble des valeurs propres de V est constitué de la moitié de l'ensemble des valeurs propres de V^+ et de la moitié des valeurs propres de V^- . Les valeurs propres V^\pm sont toutes positives et de l'ordre de e^n . Pour trouver explicitement l'ensemble des valeurs propres de V , il serait nécessaire de décider quelle est la moitié des valeurs propres de V^+ ou V^- qui devrait être écartée. Néanmoins, nous ne nous intéressons qu'à la plus grande valeur propre de V .

Supposons que la matrice F de dimension $2^n \times 2^n$ transforme (3.72) en forme diagonale et que la matrice G de dimension $2^n \times 2^n$ transforme (3.73) aussi en forme diagonale :

$$F \left[\frac{1}{2} (1 + \tilde{U}) \tilde{V}^+ \right] F^{-1} = V_D^+ \quad (3.107)$$

$$G \left[\frac{1}{2} (1 - \tilde{U}) \tilde{V}^- \right] G^{-1} = V_D^- \quad (3.108)$$

où V_D^\pm sont les matrices diagonales avec la moitié des valeurs propres de (3.105) et (3.106) respectivement, apparaissant le long de la diagonale. Il est possible de choisir F et G de telle sorte que $F\tilde{U}F^{-1}$ et $G\tilde{U}G^{-1}$ restent des matrices diagonales. Alors F et G ne font que permuter les valeurs propres de U le long de la diagonale. Mais la convention a été adoptée que \tilde{U} soit de la forme (3.70). Par conséquent, F et G ne modifient pas U du tout ou intervertissent simplement les deux sous matrices 1 et -1 en (3.70). C'est-à-dire que F et G soit commute soit anticommute avec \tilde{U} . Cela signifie que :

$$V_D^+ = \frac{1}{2} (1 \pm \tilde{U}) F\tilde{V}^+F^{-1} \quad (3.109)$$

$$V_D^- = \frac{1}{2} (1 \pm \tilde{U}) G\tilde{V}^-G^{-1} \quad (3.110)$$

où les signes \pm peuvent être définitivement déterminés par un calcul explicite. Dans notre cas, cette détermination n'est pas nécessaire. Nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{2} (1 \pm \tilde{U}) = \frac{1}{2} (1 \pm Z_1 Z_2 \cdots Z_n) \quad (3.111)$$

$$F\tilde{V}^+F^{-1} = \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{2}\gamma_{2k-1}Z_{Pk}} \quad (3.112)$$

$$G\tilde{V}^-G^{-1} = \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{2}\gamma_{2k-2}Z_{Qk}} \quad (3.113)$$

où P et Q sont deux permutations définies des entiers $1, 2, \dots, n$. La permutation P envoie k dans Pk et la permutation Q envoie k dans Qk . Les (3.112) et (3.113) sont obtenues en notant que $F\tilde{V}^+F^{-1}$ et $G\tilde{V}^-G^{-1}$ doivent respectivement avoir les mêmes valeurs propres que V^+ et V^- . Puisque les valeurs propres de Z_k sont ± 1 , alors nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 \pm \tilde{U}) &= 1 && \text{(si un nombre pair de } Z_k \text{ vaut } \pm 1) \\ \frac{1}{2} (1 \pm \tilde{U}) &= 0 && \text{(si un nombre impair de } Z_k \text{ vaut } \pm 1). \end{aligned} \quad (3.114)$$

Cette condition est invariante pour toute permutation qui envoie $\{Z_k\}$ vers $\{Z_{pK}\}$. Par conséquent, les valeurs propres (3.110) sont constituées des valeurs propres (3.108). Alors en utilisant

(3.116), (3.102) et (3.103), on va trouver le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
V_D^- &= \frac{1}{2} (1 + \tilde{U}) G \tilde{V}^- G^{-1} \\
&= \frac{1}{2} (1 + \tilde{U}) \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{2} \gamma_{2k-2} Z_{Q_k}} \\
&= \frac{1}{2} (1 + \tilde{U}) e^{\frac{1}{2} (\gamma_0 Z_{Q_1} + \gamma_2 Z_{Q_2} + \dots + \gamma_{2n-2} Z_{Q_n})} \\
&= \frac{1}{2} (1 + \tilde{U}) e^{\frac{1}{2} (\pm \gamma_0 \pm \gamma_2 + \dots \pm \gamma_{2n-2})} \\
&= e^{\frac{1}{2} (\pm \gamma_0 \pm \gamma_2 + \dots \pm \gamma_{2n-2})}.
\end{aligned} \tag{3.115}$$

En utilisant la relation (3.114), on trouve la plus grande valeur propre de :

$$V_D^- = e^{1/2(\pm \gamma_0 + \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{2n-2})}$$

où le signe \pm correspond au signe \pm dans (3.113). Comme $n \rightarrow \infty$, ces deux possibilités donnent le même résultat car γ_0 est négligeable par rapport à l'exposant entier de la dernière équation. Une conclusion similaire peut être tirée pour V_D^+ . Par conséquent, on en déduit aussi pour $n \rightarrow \infty$ que :

$$\text{la plus grande valeur propre de } V_D^- = e^{1/2(\pm \gamma_0 + \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{2n-2})} \tag{3.116}$$

$$\text{la plus grande valeur propre de } V_D^+ = e^{1/2(\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5 + \dots + \gamma_{2n-1})} \tag{3.117}$$

La plus grande valeur propre de V est la valeur propre la plus grande d'entre les deux équations (3.116) et (3.117). En utilisant les relations (3.102) et (3.103) V_D^- et V_D^+ , alors la plus grande valeur propre de V est :

$$\Lambda = e^{1/2(\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5 + \dots + \gamma_{2n-1})} \tag{3.118}$$

3.2.5 La valeur propre la plus grande de V

Pour trouver la valeur propre la plus grande de V , il faut passer par un calcul explicite. En utilisant la dernière équation (3.118), on obtient :

$$L \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} (\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5 + \dots + \gamma_{2n-1}). \tag{3.119}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\gamma(\nu) &\equiv \gamma_{2k-1} \\
\nu &\equiv \frac{\pi}{n} (2k-1).
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Comme $n \rightarrow \infty$, ν devient une variable continue. Alors on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \gamma_{2k-1} \rightarrow \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\nu \gamma(\nu).$$

En conséquence :

$$L \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\nu \gamma(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\nu \gamma(\nu). \quad (3.121)$$

La dernière expression de l'intégrale résulte du fait que γ_k est symétrique. Pour exprimer L convenablement, rappelons que γ_ν est la solution positive de l'équation :

$$\cosh \gamma(\nu) = \cosh 2\phi \cosh 2\theta - \cos \nu \sinh 2\phi \sinh 2\theta \quad (3.122)$$

avec :

$$\begin{aligned} \phi &\equiv \beta\epsilon, \\ \theta &\equiv \tanh^{-1} e^{-2\phi} \end{aligned} \quad (3.123)$$

On peut vérifier aisément que :

$$\begin{aligned} \sinh 2\theta &= \frac{1}{\sinh 2\phi} \\ \cosh 2\theta &= \coth 2\phi. \end{aligned} \quad (3.124)$$

En utilisant (3.124) et les propriétés précédentes, l'équation (3.122) devient :

$$\begin{aligned} \cosh \gamma(\nu) &= \cosh 2\phi \coth 2\theta - \cosh \frac{\pi}{n}(2k-1) \\ \cosh \gamma(\nu) &= \cosh 2\phi \coth 2\theta - \cosh \nu \end{aligned} \quad (3.125)$$

Sachant que [12]

$$|z| = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dt \ln(2 \cosh z - 2 \cos t). \quad (3.126)$$

Avec l'utilisation de (3.122), on peut écrire $\gamma(\nu)$ de cette forme :

$$\begin{aligned} \gamma(\nu) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\nu \ln(2 \cosh \gamma\nu - 2 \cos t) \\ \gamma(\nu) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\nu' \ln(2 \cosh 2\phi \cosh 2\phi - 2 \cos \nu - 2 \cos \nu') \end{aligned} \quad (3.127)$$

En conséquence :

$$L = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\nu \int_0^\pi d\nu' \ln[2 \cosh 2\phi \coth 2\theta - 2(\cos \nu + \cos \nu')] \quad (3.128)$$

La double intégrale dans (3.128) s'étend sur le carré ombré dans le plan $\nu\nu'$ indiqué à la figure (4.4). Il est évident que l'intégrale reste inchangée si l'on change la région d'intégration du carré

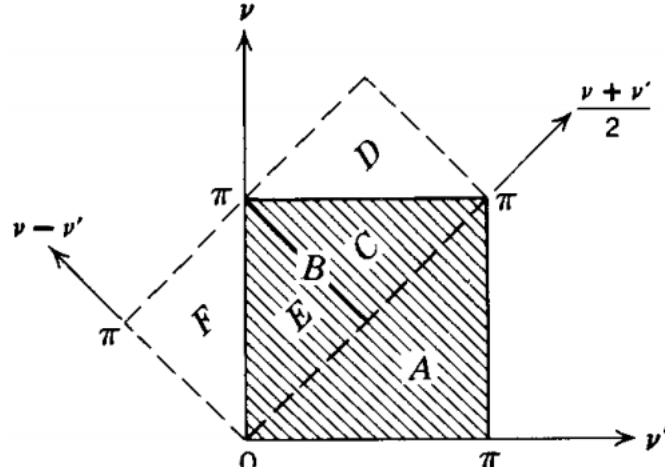


FIGURE 3.4 – Les régions d'intégration de. Figure tirée de [1]

vers le rectangle comme indiqué en pointillés. Ce qui correspond au domaine d'intégration :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\nu + \nu'}{2} \leq \pi \\ 0 &\leq \nu - \nu' \leq \pi \end{aligned} \quad (3.129)$$

Soit

$$\begin{aligned} \delta_1 &\equiv \frac{\nu + \nu'}{2} \\ \delta_2 &\equiv \nu - \nu' \end{aligned} \quad (3.130)$$

L'intégrale devient :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\delta_1 \int_0^\pi d\delta_2 \ln(2 \cosh 2\phi \coth 2\phi - 4 \cos \delta_1 \cos \frac{1}{2}\delta_2) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\delta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\delta_2 \ln(2 \cosh 2\phi \coth 2\phi - 4 \cos \delta_1 \cos \delta_2) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\delta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\delta_2 \ln(2 \cos \delta_2) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\delta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\delta_2 \ln\left(\frac{D}{\cos \delta_2} - 2 \cos \delta_1\right) \end{aligned}$$

avec :

$$D \equiv \cosh 2\phi \coth 2\phi. \quad (3.131)$$

Pour simplifier les calculs, on utilise l'identité suivante [12] :

$$\cosh^{-1} x = \ln[x + \sqrt{x^2 - 1}]. \quad (3.132)$$

L'égalité précédente devient alors :

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\delta_2 \ln(2 \cos \delta_2) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\delta_2 \cosh^{-1} \left(\frac{D}{2 \cos \delta_2} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\delta \left[(\ln 2 \cos \delta) + \ln \left(\frac{D}{2 \cos \delta} + \sqrt{\frac{D^2}{4 \cos^2 \delta} - 1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\delta \ln \left[D + \sqrt{D^2 - 4 \cos^2 \delta} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\delta \ln \left[D \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4 \cos^2 \delta}{D^2}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\delta \ln \left[D(1 + \sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2 \delta}) \right]
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Où :

$$\kappa = \frac{2}{D}. \tag{3.134}$$

Dans la dernière intégrale, il est clair qu'on peut remplacer $\cos^2 \delta$ par $\sin^2 \delta$ sans changer la valeur de l'intégrale. Par conséquence on trouve que :

$$L = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\cosh^2 2\beta\epsilon}{\sinh 2\beta\epsilon} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \ln \left(1 + \sqrt{1 - \kappa^2 \sinh^2 \varphi} \right) \tag{3.135}$$

3.3 Les fonctions thermodynamiques

L'énergie libre de Helmholtz par spin peut s'écrire sous la forme suivante :

$$a_I(0, T) = -kT \ln Z(B, T). \tag{3.136}$$

Par l'utilisation de (3.7), (3.119) et (3.135) :

$$\beta a_I(0, T) = -\ln(2 \cosh 2\beta\epsilon) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\phi \ln(1 + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}), \tag{3.137}$$

l'énergie interne par spin est :

$$u(0, T) = \frac{d}{d\beta} [\beta a_I(0, T)] = -2\epsilon \tanh 2\beta\epsilon + \frac{\kappa}{2\pi} \frac{d\kappa}{d\beta} \int_0^\pi d\phi \frac{\sin^2 \phi}{\Delta(1 + \Delta)} \tag{3.138}$$

avec $\Delta \equiv \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}$.

On peut écrire l'intégrale suivante de cette forme :

$$\int_0^\pi d\phi \frac{\sin^2 \phi}{\Delta(1 + \Delta)} = \int_0^\pi \frac{1}{\kappa^2} \frac{(1 - \Delta)(1 + \Delta)}{\Delta(1 + \Delta)} \frac{d\phi}{\Delta} = - \int_0^\pi \frac{\pi}{\kappa^2} d\phi + \frac{1}{\kappa^2} \int_0^\pi \frac{d\phi}{\Delta}. \tag{3.139}$$

Par conséquent, on trouve l'énergie interne par spin :

$$\begin{aligned}\mu_I(0, T) &= -2\epsilon \tanh(2\beta\epsilon) + \frac{1}{2\kappa} \frac{d\kappa}{d\beta} \left[-1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}} \right] \\ \mu_I(0, T) &= -\epsilon \coth(2\beta\epsilon) \left[1 + \frac{2}{\pi} \kappa' K_1(\kappa) \right]\end{aligned}\quad (3.140)$$

avec $\frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{d\beta} = -2\epsilon \coth(2\beta\epsilon) [2 \tanh^2(2\beta\epsilon) - 1]$ et la capacité calorifique peut s'écrire comme (voir appendice B) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} c_I(0, T) &= \frac{2}{\pi} (\beta\epsilon \coth(2\beta\epsilon))^2 \left\{ 2K_1(\kappa) - 2E(\kappa) - (1 - \kappa') \left[\frac{\pi}{2} + \kappa' K_1(\kappa) \right] \right\} \\ \frac{1}{k} c_I(0, T) &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\epsilon}{kT} \coth \frac{2\epsilon}{kT} \right)^2 \left\{ 2K_1(\kappa) - 2E(\kappa) - (1 - \kappa') \left[\frac{\pi}{2} + \kappa' K_1(\kappa) \right] \right\}\end{aligned}\quad (3.141)$$

avec :

$$\kappa' = 2 \tanh^2(2\beta\epsilon) - 1$$

et

$$\kappa = \frac{2}{\cosh 2\beta\epsilon \coth 2\beta\epsilon}$$

et où E_κ représente une intégrale elliptique de second type (voir [12]) :

$$E(\kappa) \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi} \quad (3.142)$$

Le graphe (3.5) montre la variation de κ et κ' en fonction de $\beta\epsilon$.

L'intégrale elliptique $K_1(\kappa)$ contient une singularité au voisinage de $\kappa = 1$ (où $\kappa' = 0$)

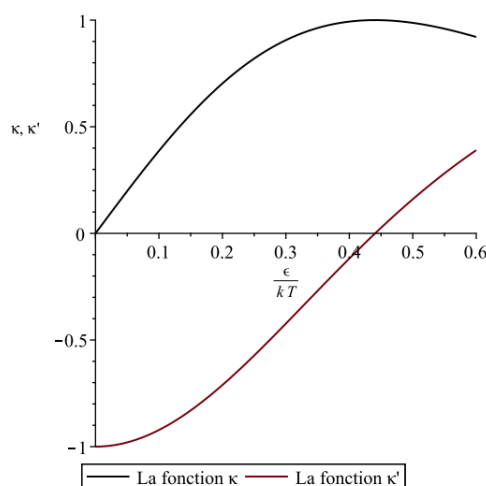


FIGURE 3.5 – Les fonctions κ et κ' . Le graphe est tracé avec Maple 2018.

$$\begin{aligned}
K(\kappa) &\approx \ln \frac{4}{\kappa'} \quad \frac{dK(\kappa)}{d\kappa} \approx \frac{\pi}{2} \\
E(\kappa) &\approx 1
\end{aligned}
\tag{3.143}$$

Ainsi, toutes les fonctions thermodynamiques portent une singularité à $T = T_c$,

$$\begin{aligned}
2 \tanh^2 \frac{2\epsilon}{KT_c} &= 1 \\
\frac{\epsilon}{KT_c} &= 0.4406868 \\
KT_c &= (2.269185)\epsilon
\end{aligned}
\tag{3.144}$$

D'autres relations satisfaites par T_c sont :

$$\begin{aligned}
e^{-\epsilon/KT_c} &= \sqrt{2} - 1 \\
\cosh \frac{2\epsilon}{KT_c} &= \sqrt{2} \\
\sinh \frac{2\epsilon}{KT_c} &= 1
\end{aligned}
\tag{3.145}$$

Ainsi à $T = T_c$

$$\frac{1}{K} c_I(0, T) \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\epsilon}{KT_c} \right)^2 \left[-\ln \left| 1 - \frac{T}{T_c} \right| + \ln \left(\frac{KT_c}{2\epsilon} \right) - \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \right]
\tag{3.146}$$

Lorsque $|T - T_c| \rightarrow 0$ le rapport $\frac{c_I(0, T)}{K}$ s'approche de l'infini d'une manière logarithmique, comme le montre la figure (3.6). Nous voyons dans (3.138) et (3.143) que l'énergie interne est continue à $T = T_c$. Ainsi la transition de phase à $T = T_c$ ne comporte aucune chaleur latente. On cite, pour la chaleur spécifique, les deux approximations plus la solution exacte dans le graphe suivant :

Approximation de Bragg-Williams

L'approximation de Bragg-Williams aide à comprendre les transitions de phase apparaissant dans des domaines complètement différents de la physique (transition ferromagnétique à non ferromagnétique [1]). Ceci est une transition de phase du second ordre. Cette approximation nous aide à comprendre comment transformer une matière d'une phase à une autre autour de la température critique. Dans la phase de transition du seconde ordre, les propriétés de la matière changent autour de la température critique mais les états restent les mêmes.

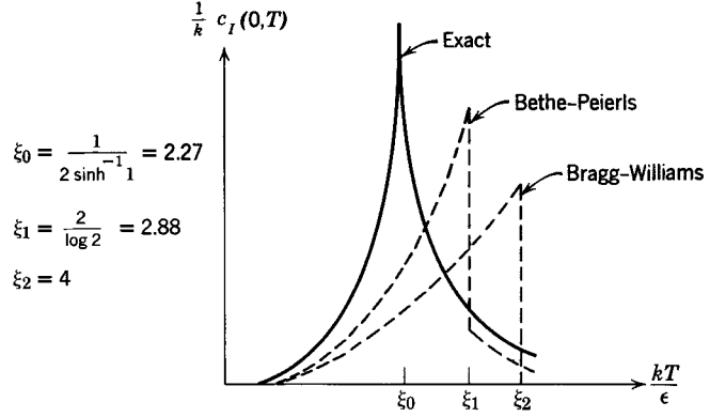


FIGURE 3.6 – La capacité calorifique du modèle d’Ising à deux dimensions [1]

$$\frac{1}{Nk} C_I(0, T) = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ -\frac{\epsilon\gamma}{2} \frac{dL_0^2}{dT} & T < T_c \end{cases}$$

avec

$$L_0^2 = 3\left(1 - \frac{T}{T_c}\right), 0 < 1 - \frac{T}{T_c} < 1$$

$$\frac{dL_0^2}{dT} = \frac{-3}{T_c}$$

$$\frac{1}{Nk} C_I(0, T) = \frac{3\epsilon\gamma}{2T_c}$$

$$L_0^2 = (1 - 2e^{-2T_c/T})^2 \frac{dL_0^2}{dT} = -8 \frac{T_c}{T^2} (1 - 2e^{-\frac{2T_c}{T}})$$

Approximation de Bethe-Peierls

L’approximation de Bethe-Peierls est une amélioration par rapport à l’approximation de Bragg-Williams, dans la mesure où on prend en compte un ordre spécifique à courte portée [1].

$$\frac{1}{Nk} C_I(0, T) = \begin{cases} \frac{2\gamma\epsilon^2}{(kT)^2} \frac{e^{2\epsilon/kT} T}{(1+e^{2\epsilon/kT})^2} & T > T_c \\ 0 & T < T_c \end{cases}$$

Solution exacte

$$\frac{1}{Nk} C_I(0, T) = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \frac{3}{2} & 0 < 1 - \frac{T}{T_c} \leq 1 - \frac{4(\gamma\epsilon)^2}{T^2} (1 - 2e^{-2\gamma\epsilon/T}) \end{cases}$$

avec $kT_c = \gamma\epsilon$

Nous avons montré que la transition de phase se fait avec absence de chaleur latente. Cela

implique que la transition de phase est probablement de deuxième ordre. Pour dire qu'il existe effectivement une transition de phase à $T = T_c$ de deuxième ordre, nous devons examiner l'ordre à long terme ,i.e., l'aimantation spontanée. Cela ne peut pas être fait dans les calculs écrits jusqu'ici, puisque nous avons défini $H = 0$ depuis le début. Pour calculer l'aimantation spontanée, nous devons calculer la dérivée de l'énergie par rapport à H lorsque $H = 0$. Le résultat est traité par [13] et est compliqué. Faute de temps, on ne peut pas le faire ici dans ce mémoire et on va donner directement l'expression de la magnétisation par spin :

$$m_I(0, T) = \begin{cases} 0, & \text{for } T > T_c \\ \left\{ 1 - [\sinh(2\beta\epsilon)]^{-4} \right\}^{\frac{1}{8}}, & \text{for } T < T_c \end{cases}$$

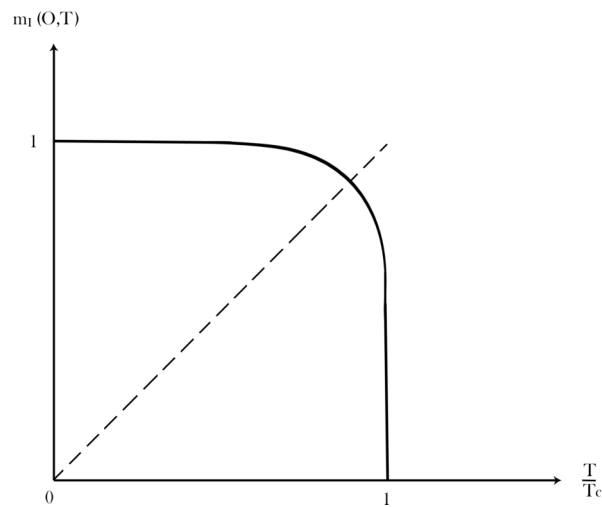


FIGURE 3.7 – la magnétisation spontanée du modèle d’Ising à deux dimensions. figure tirée de [1]

Chapitre 4

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié le modèle d'Ising à une et deux dimensions. Rappelons que le but d'Ising derrière élaboration de son modèle était étudier les matériaux ferromagnétiques et de chercher une quelconque transition de phase. on a donc, dans le deuxième chapitre, décrit les matériaux magnétiques sous ses différents états (paramagnétique, ferromagnétique et transition de phase). Au début, on a défini la transition de phase ferromagnétique-paramagnétique, c'est que le ferromagnétisme dépend de la température du matériau. A partir d'une certaine température, appelée température de Curie, le ferromagnétisme disparaît pour laisser place au paramagnétisme. Dit simplement, un matériau paramagnétique acquiert une aimantation aussi longtemps qu'il est soumis à un champ magnétique : dès que celui-ci n'existe plus, il perd cette aimantation. Pour les corps paramagnétiques, l'aimantation a le même sens que celle de l'état ferromagnétique ; on a ensuite cherché une solution pour le modèle d'Ising dans le but de tirer les fonctions thermodynamiques. on a d'abord étudié le modèle d'Ising à une dimension par la méthode des matrices de transfert. Après des calculs on a remarqué que le modèle d'Ising unidimensionnel ne présente pas une transition de phase. on a ensuite étudié, dans ce mémoire, la solution d'Onsager pour le modèle d'Ising à deux dimensions. Malgré la simplicité du calcul à une dimension, le calcul à deux dimensions est plus complexe. Nous nous sommes intéressés à la solution d'Onsager mais revu par Kaufman dont la méthode est plus élégante et plus claire car utilisant la méthode des représentations. Après avoir trouvé la fonction de partition, les fonctions thermodynamiques s'en déduisent facilement.

APPENDICE A

Théorèmes et lemmes mathématiques utilisés

Nous allons passer en revue les propriétés d'une certaine classe de matrices utiles pour la solution du modèle d'Ising à deux dimension en l'absence de champ magnétique ($B = 0$).

Soit la matrice Γ_μ ($\mu = 1, \dots, 2n$) définie comme un ensemble de matrices satisfaisant la règle d'anti-commutation suivante :

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, \dots, 2n) \quad (4.1)$$

Les propriétés suivantes de Γ_μ sont données sans démonstrations :

- a : La dimensionnalité de Γ_μ ne peut pas être inférieure à $2^n \times 2^n$
- b : Si Γ_μ et Γ'_μ sont deux matrices qui satisfont à (4.1), alors il existe une matrice non singulière S tel que $\Gamma_\mu = S\Gamma'_\mu S^{-1}$. L'inverse est évidemment aussi vrai.
- c : N'importe quelle matrice de dimension $2^n \times 2^n$ est une combinaison linéaire d'une matrice unité, les matrices Γ_μ (de dimension $2^n \times 2^n$) et tous les produits de matrices indépendants : $\Gamma_\mu \Gamma_\nu, \Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\lambda, \dots$

Pour $n = 1$, (4.1) définit deux matrices de Pauli de dimension 2×2 et la troisième matrice peut être obtenu à partir du leur produit. C'est évident que chaque matrice de dimension 2×2 est la combinaison linéaire des matrice de Pauli et de la matrice unité. Pour $n = 2$, (4.1) définit les matrice de Dirac γ_μ de dimension 4×4 .

Une représentation possible de Γ_μ de dimension $2^n \times 2^n$ est :

$$\Gamma_1 = Z_1 \qquad \Gamma_2 = Y_1 \qquad (4.2)$$

$$\Gamma_3 = X_1 Z_2 \qquad \Gamma_4 = X_1 Y_2 \qquad (4.3)$$

$$\Gamma_5 = X_1 X_2 Z_3 \qquad \Gamma_6 = X_1 X_2 Y_3 \qquad (4.4)$$

$$\begin{array}{l} : \\ : \end{array} \qquad \begin{array}{l} : \\ : \end{array}$$

Alors par récurrence, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\Gamma_{2\alpha-1} &= X_1 X_2 \cdots X_{\alpha-1} Z_\alpha & (\alpha = 1, \dots, n) \\ \Gamma_{2\alpha} &= X_1 X_2 \cdots X_{\alpha-1} Y_\alpha & (\alpha = 1, \dots, n)\end{aligned}\tag{4.5}$$

Une représentation équivalente est obtenue en échangeant les rôles de X_α et Z_α ($\alpha = 1, \dots, n$). Il est également évident que chaque représentation, telle que (4.5) est obtenue par une permutation arbitraire des numérotation de $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2n}$.

Nous verrons dans la suite que V_1 et V_2 sont des matrices qui transforment la collection de $\{\Gamma_\mu\}$ pour un autre collection équivalente $\{\Gamma'_\mu\}$.

Soit donnée une collection définie Γ_μ et la matrice ω de dimension $2n \times 2n$ qui décrit une transformation linéaire orthogonale parmi les membres de Γ_μ :

$$\Gamma'_\mu = \sum_{\nu=1}^{2n} \omega_{\mu\nu} \Gamma_\nu\tag{4.6}$$

avec $\omega_{\mu\nu}$ sont des nombres complexes qui satisfont :

$$\sum_{\mu=1}^{2n} \omega_{\mu\nu} \omega_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}.\tag{4.7}$$

Cette relation peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\omega^T \omega = 1\tag{4.8}$$

où ω^T est la matrice transposée de ω . Si on voit Γ_μ comme la composante d'un vecteur dans l'espace de dimension $2n$, alors ω induit une rotation dans le même espace :

$$\begin{bmatrix} \Gamma'_1 \\ \Gamma'_2 \\ \vdots \\ \Gamma'_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1,2n} \\ \omega_{31} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{2n,1} & \omega_{2n,2} & \cdots & \omega_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{2n} \end{bmatrix}$$

On remplace (4.6) dans (4.1) et on démontre que la collection Γ'_μ satisfait aussi à (4.1), à cause de (4.7). En conséquence :

$$\Gamma'_\mu = S(\omega) \Gamma_\mu S^{-1}(\omega),\tag{4.9}$$

où $S(\omega)$ est une matrice non singulière de dimension $2^n \times 2^n$. L'existence de $S(\omega)$ doit se démontrer par une construction explicite. Il y a donc une correspondance

$$\omega \leftrightarrow S(\omega),\tag{4.10}$$

qui établit $S(\omega)$ en tant qu'une représentation matricielle de dimension $2^n \times 2^n$ d'une rotation

dans l'espace de dimension $2n$. En combinant (4.9) et (4.6), on trouve :

$$S(\omega)\Gamma_\mu S^{-1}(\omega) = \sum_{\nu=1}^{2n} \omega_{\mu\nu} \Gamma_\nu \quad (4.11)$$

On appelle ω la rotation et $s(\omega)$ sa représentation spinorielle. C'est évident que si ω_1 et ω_2 sont deux rotations alors $\omega_1\omega_2$ est aussi une rotation.

$$S(\omega_1\omega_2) = S(\omega)S(\omega_2) \quad (4.12)$$

On va maintenant étudier quelques rotations spéciales ω et leurs représentations $S(\omega)$. Considérons une rotation plane à deux dimension de l'espace de dimension $2n$. La rotation dans le plan $\mu\nu$ à travers l'angle θ est définie par la transformation

$$\Gamma'_\lambda = \Gamma_\lambda \quad (\lambda \neq \mu, \lambda \neq \nu) \quad (4.13)$$

$$\Gamma'_\mu = \Gamma_\mu \cos \theta - \Gamma_\nu \sin \theta \quad (\mu \neq \nu) \quad (4.14)$$

$$\Gamma'_\nu = \Gamma_\mu \sin \theta + \Gamma_\nu \cos \theta \quad (\mu \neq \nu) \quad (4.15)$$

où θ représente un nombre complexe. La rotation matricielle, notée par $\omega(\mu\nu|\theta)$ est donnée explicitement par :

$$\omega(\mu\nu|\theta) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mu th & \nu th \\ \text{colonne} & \text{colonne} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & \cos \theta & \cdots & -\sin \theta & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \sin \theta & \cdots & \cos \theta & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{array} \right] \begin{array}{l} \mu th \text{ ligne} \\ \\ \nu th \text{ ligne} \end{array} \end{array} \quad (4.16)$$

$\omega(\mu\nu|\theta)$ est appelé la rotation plane dans le plan $\mu\nu$. On peut vérifier facilement que :

$$\omega(\mu\nu|\theta) = \omega(\nu\mu|-\theta) \quad (4.17)$$

$$\omega^T(\mu\nu|\theta)\omega(\mu\nu|\theta) = 1$$

Les propriétés de ω et $S(\omega)$ qui sont applicables pour la solution du modèle d'Ising sont résumées dans les lemmes suivants :

Lemme 1 Si $\omega(\mu\nu|\theta) \leftrightarrow S_{\mu\nu}(\theta)$, alors

$$S_{\mu\nu}(\theta) = e^{-1/2\theta\Gamma_\mu\Gamma_\nu} \quad (4.18)$$

Preuve puisque $\Gamma_\mu\Gamma_\nu = -\Gamma_\nu\Gamma_\mu$ pour $\mu \neq \nu$, $(\Gamma_\mu\Gamma_\nu)^2 = \Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\mu\Gamma_\nu = -1$. On peut écrire :

$$e^{-1/2\theta\Gamma_\mu\Gamma_\nu} = \cos \frac{\theta}{2} - \Gamma_\mu\Gamma_\nu \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.19)$$

A partir de $(\Gamma_\mu\Gamma_\nu)(\Gamma_\nu\Gamma_\mu) = (\Gamma_\nu\Gamma_\mu)(\Gamma_\mu\Gamma_\nu) = 1$ on trouve

$$e^{1/2\theta\Gamma_\mu\Gamma_\nu} e^{-1/2\theta\Gamma_\mu\Gamma_\nu} = e^{1/2\theta\Gamma_\mu\Gamma_\nu} e^{1/2\theta\Gamma_\nu\Gamma_\mu} = e^{1/2\theta(\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu)}$$

Par conséquent :

$$S_{\mu\nu}^{-1}(\theta) = e^{1/2\theta\Gamma_\mu\Gamma_\nu} \quad (4.20)$$

Un simple calcul va donner :

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}(\theta)\Gamma_\lambda S_{\mu\nu}^{-1}(\theta) &= \Gamma_\lambda & (\lambda \neq \mu, \lambda \neq \nu) \\ S_{\mu\nu}(\theta)\Gamma_\mu S_{\mu\nu}^{-1}(\theta) &= \Gamma_\mu \cos \theta + \Gamma_\nu \sin \theta \\ S_{\mu\nu}(\theta)\Gamma_\nu S_{\mu\nu}^{-1}(\theta) &= \Gamma_\mu \sin \theta - \Gamma_\nu \cos \theta \end{aligned}$$

Lemme 2 Les valeurs propres de $\omega(\mu\nu|\theta)$ 1 ($2n-2$, dégénérées), et $e^{\pm i\theta}$ (non dégénérées). Les valeurs propres de $S_{\mu\nu}(\theta)$ sont $e^{\pm i\theta/2}$ (chaque 2^{n-1} -fois dégénérées).

Preuve La première partie est triviale. La deuxième partie peut être prouvée en choisissant une représentation spéciale pour $\Gamma_\mu\Gamma_\nu$, puisque les valeurs propres de $S_{\mu\nu}(\theta)$ sont indépendantes de la représentation. En tant que représentation pour Γ_μ et Γ_ν , on utilise (4.5) avec X et Z inchangées. Comme le nombre de Γ_μ dans (4.5) n'est pas unique, nous sommes libres de choisir n'importe quelle représentation de Γ pour être Γ_μ et Γ_ν . On choisit

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= Z_1 X_2 \\ \Gamma_\nu &= Z_1 Y_2 \end{aligned}$$

puis :

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu = X_2 Y_2 = i Z_2 = 1 \times \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \times 1 \times \cdots \times 1$$

Par conséquent

$$S_{\mu\nu}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} - \Gamma_\mu\Gamma_\nu \sin \frac{\theta}{2} = 1 \times \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} \times 1 \times \cdots \times 1$$

Les éléments matriciels de $S_{\mu\nu}$ dans cette représentation sont :

$$\langle s_1, \dots, s_n | S_{\mu\nu}(\theta) | s'_1, \dots, s'_n \rangle = e^{1/2i\theta s_2} \prod_{k=1}^n \delta_{s_k s'_k} \quad (4.21)$$

Les éléments diagonaux sont $e^{i\theta/2}$ et $e^{-i\theta/2}$, chacun apparaissant le même nombre de fois, c'est-à-dire, 2^{n-1} fois.

Lemme 3 Soit ω le produit commutatif de n rotations planes :

$$\omega = \omega(\alpha\beta|\theta_1)\omega(\gamma\delta|\theta_2)\cdots\omega(\mu\nu|\theta_n) \quad (4.22)$$

où $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu$ est la permutation de l'ensemble des nombres entiers $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$ et $\theta_1, \dots, \theta_n$ sont les nombres complexes. Alors

(a) $\omega \leftrightarrow S(\omega)$, avec

$$S(\omega) = e^{-1/2\theta_1\Gamma_\alpha\Gamma_\beta} e^{-1/2\theta_2\Gamma_\gamma\Gamma_\delta} \dots e^{-1/2\theta_n\Gamma_\mu\Gamma_\nu} \quad (4.23)$$

(b) les $2n$ valeurs propres de ω sont :

$$e^{\pm i\theta_1}, e^{\pm i\theta_2}, \dots, e^{\pm i\theta_n} \quad (4.24)$$

(c) les 2^n valeurs propres de $S(\omega)$ sont :

$$e^{\frac{1}{2}i(\pm\theta_1 \pm \theta_2 \pm \dots \pm \theta_n)} \quad (4.25)$$

avec le signe \pm est choisi d'une façon indépendante.

Preuve Ce lemme est une conséquence directe des lemmes 1 et 2 et du fait que $[\Gamma_\mu\Gamma_\nu, \Gamma_\alpha\Gamma_\beta] = 0$.

Par ce lemme, les valeurs propres de $S(\omega)$ peuvent être immédiatement obtenues à partir de (4.24). L'utilité de cela repose sur le fait que V_2V_1 peut être exprimés en termes de $S(\omega)$.

APPENDICE B

Dans cet appendice, on va démontrer la formule suivante :

$$\frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{d\beta} = -2\epsilon \coth 2\beta\epsilon (2 \tanh^2 2\beta\epsilon - 1) \quad (4.26)$$

On pose : $\kappa = \frac{2}{D}$, $D = \cosh(2\phi) \coth(2\phi)$, $\phi = \epsilon\beta$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{d\beta} &= \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{d\phi} \frac{d\phi}{d\beta} = \epsilon \frac{d\kappa}{d\phi} = -2\epsilon \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{D} \right) \left(\frac{1}{\kappa} \right) \\ &= -2\epsilon \frac{dD}{d\phi} \left(\frac{1}{D} \right) \\ &= -2\epsilon \frac{\epsilon}{D} \left[\sinh(2\phi) \coth(2\phi) - \frac{\coth(2\phi)}{\sinh(2\phi)} \right] \\ &= -2\epsilon \frac{\coth(2\phi)}{\cosh(2\phi) \frac{\cosh(2\phi)}{\sinh(2\phi)}} \left[\sinh(2\phi) - \frac{1}{\sinh(2\phi)} \right] \\ &= -2\epsilon \frac{\coth(2\phi)}{\cosh^2(2\phi)} [2 \sinh^2(2\phi) - \cosh^2(2\phi)] \\ &= -2\epsilon \coth(2\phi) [2 \tanh^2(2\phi) - 1] \end{aligned} \quad (4.27)$$

C.Q.F.D.

On va maintenant retrouver l'expression (3.141) de la chaleur spécifique. Pour cela, nous allons écrire (4.27) de cette manière :

$$-2\epsilon \tanh(2\beta\epsilon) - \frac{1}{2\kappa} \frac{d\kappa}{d\beta} = -\epsilon \coth(2\beta\epsilon) \quad (4.28)$$

L'équation (3.138) devient :

$$u_I(0, T) = -2\epsilon \tanh(2\beta\epsilon) - \frac{1}{2\kappa} \frac{d\kappa}{d\beta} + \frac{1}{2\kappa} \frac{d\kappa}{d\beta} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}}.$$

On remplace (4.28) dans (4.29) et on trouve :

$$\begin{aligned}
u_I(0, T) &= -\epsilon \coth(2\beta\epsilon) + \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{d\beta} \frac{1}{\pi} K_1(x) \\
&= -\epsilon \coth(2\beta\epsilon) - \coth(2\beta\epsilon) (2 \tanh^2(2\beta\epsilon) - 1) \frac{2}{\pi} K_1(x) \\
&= -\epsilon \coth(2\beta\epsilon) (1 - \kappa' \frac{2}{\pi} K_1(x))
\end{aligned} \tag{4.29}$$

où :

$$K_1(\kappa) \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}} \tag{4.30}$$

et

$$\kappa \equiv \frac{2 \sinh(2\beta\epsilon)}{\cosh^2(2\beta\epsilon)} \tag{4.31}$$

$$\kappa' \equiv 2 \tanh^2(2\beta\epsilon) - 1. \tag{4.32}$$

APPENDICE C

On veut montrer, dans cet appendice que :

$$\kappa^2 + \kappa'^2 = 1. \quad (4.33)$$

On a :

$$\begin{aligned} \kappa^2 + \kappa'^2 &= \frac{4 \sinh^{(2\beta\epsilon)}}{\cosh^2(2\beta\epsilon)} + 4 \tanh^4(2\beta\epsilon) + 1 - 4 \tanh^2(2\beta\epsilon) \\ &= \frac{4 \sinh^2(2\beta\epsilon)}{\cosh^4(2\beta\epsilon)} - \frac{4 \sinh^2(2\beta\epsilon)}{\cosh^2(2\beta\epsilon)} + 4 \tanh^4(2\beta\epsilon) + 1 \\ &= \frac{4 \sinh^2(2\beta\epsilon)}{\cosh^2(2\beta\epsilon)} \left[\frac{1}{\cosh^2(2\beta\epsilon)} - 1 \right] + 4 \tanh^4(2\beta\epsilon) + 1 \\ &= 4 \tanh^2(2\beta\epsilon) \left[\frac{\cosh^2(2\beta\epsilon) - \sinh^2(2\beta\epsilon)}{\cosh^2(2\beta\epsilon)} - 1 \right] + 4 \tanh^4(2\beta\epsilon) + 1 \\ &= 4 \tanh^2(2\beta\epsilon) [1 - \tanh^2(2\beta\epsilon) - 1] + 4 \tanh^4(2\beta\epsilon) + 1 \\ &= -4 \tanh^4(2\beta\epsilon) + 4 \tanh^4(2\beta\epsilon) + 1 = 1 \end{aligned}$$

On peut déduire la capacité calorifique par les relations qu'on a utilisées précédemment (voir appendice B) :

$$C_I(0, T) = \frac{du_I}{dT} = \frac{du_I}{d\beta} \frac{d\beta}{dT} \quad (4.34)$$

$$\beta = \frac{1}{kT} \rightarrow \frac{d\beta}{dT} = -k\beta^2 \quad (4.35)$$

$$\frac{1}{k} C_I = -\beta^2 \frac{du_I}{d\beta} \quad (4.36)$$

$$u_I = -\epsilon \coth(2\beta\epsilon) \left[1 + \frac{2}{\pi} \kappa' K_1(\kappa) \right] \quad (4.37)$$

$$\frac{du_I}{d\beta} = \frac{2\epsilon^2}{\sinh^2(2\beta\epsilon)} \left[1 + \frac{2}{\pi} \kappa' K_1(\kappa) \right] - \epsilon \coth(2\beta\epsilon) \left[\frac{2}{\pi} \frac{d\kappa'}{d\beta} K_1(\kappa) + \frac{2}{\pi} \kappa' \frac{dK_1}{d\beta} \right] \quad (4.38)$$

$$\frac{1}{k} C_I = \frac{-2\epsilon^2 \beta^2}{\sinh^2(2\beta\epsilon)} \left[1 + \frac{2}{\pi} \kappa' K_1(\kappa) \right] + \epsilon \beta^2 \frac{2}{\pi} \coth(2\beta\epsilon) \left[\frac{d\kappa'}{d\beta} k_1(\kappa) + \kappa' \frac{dK_1}{d\beta} \right] \quad (4.39)$$

on a $\kappa = \frac{2 \sinh(2\beta\epsilon)}{\cosh^2(2\beta\epsilon)}$, $\kappa' = 2 \tanh^2(2\beta\epsilon) - 1$, $\kappa^2 + \kappa'^2 = 1$, $\frac{dK_1}{d\kappa} = \frac{E(\kappa) - (1-\kappa^2)K_1(\kappa)}{\kappa(1-\kappa^2)} = \frac{E(\kappa) - \kappa'^2 K_1(\kappa)}{\kappa\kappa'^2}$.

$$\frac{d\kappa}{d\beta} = -2\epsilon K \coth(2\beta\epsilon) [2 \tanh^2(2\beta\epsilon) - 1] = -2\epsilon\kappa\kappa' \coth(2\beta\epsilon) \quad (4.40)$$

$$\frac{d\kappa'}{d\beta} = 4 \tanh(2\beta\epsilon) \frac{2\epsilon}{\cosh^2(2\beta\epsilon)} = \frac{8\epsilon \tanh(2\beta\epsilon)}{\cosh^2(2\beta\epsilon)} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} c_I(0, T) &= -\frac{2\epsilon^2 \beta^2}{\sinh^2(2\beta\epsilon)} \left[1 + \frac{2}{\pi} \kappa' K_1(\kappa) \right] + \frac{2\epsilon\beta^2}{\pi} \coth(2\beta\epsilon) \times \\ &\quad \left[\frac{8\epsilon \tanh(2\beta\epsilon)}{\cosh^2(2\beta\epsilon)} K_1(\kappa) + \kappa' \frac{dk_1}{d\kappa} \frac{d\kappa}{d\beta} \right] \\ &= \frac{-4\epsilon^2 \beta^2}{\pi \sinh^2(2\beta\epsilon)} \left[\frac{\pi}{2} + \kappa' K_1(\kappa) \right] + \frac{2\epsilon\beta^2}{\pi} \coth(2\beta\epsilon) \times \\ &\quad \left[\frac{8\epsilon \tanh(2\beta\epsilon)}{\cosh^2(2\beta\epsilon)} K_1(\kappa) - 2\epsilon\kappa\kappa'^2 \coth(2\beta\epsilon) \left(\frac{E(\kappa) - E(\kappa'^2)}{\kappa\kappa'^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

où on a utilisé l'identité suivante :

$$1 - \kappa' = \frac{2}{\cosh^2(2\beta\epsilon)} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} c_I(0, T) &= \frac{-4\epsilon^2 \beta^2}{\pi \sinh^2(2\beta\epsilon)} \frac{(1 - \kappa') \cosh^2(2\beta\epsilon)}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \kappa' K_1(\kappa) \right] + \\ &\quad \frac{2\epsilon\beta^2}{\pi} \coth(2\beta\epsilon) \left[\frac{8\epsilon \tanh(2\beta\epsilon)}{\cosh^2(2\beta\epsilon)} K_1(\kappa) - 2\epsilon \coth(2\beta\epsilon) (E(\kappa) - \kappa'^2 K_1(\kappa)) \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} c_I(0, T) &= \frac{2}{\pi} (\beta\epsilon \coth(2\beta\epsilon))^2 \left\{ -(1 - \kappa') \left[\frac{\pi}{2} + \kappa' K_1(\kappa) \right] \right\} \frac{2}{\pi} (\epsilon\beta)^2 \coth^2(2\beta\epsilon) \times \\ &\quad \left\{ \frac{8 \tanh(2\beta\epsilon)}{\coth(2\beta\epsilon)} K_1(\kappa) - 2 \frac{\coth(2\beta\epsilon)}{\coth(2\beta\epsilon)} [E(\kappa) - \kappa'^2 K_1(\kappa)] \right\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Pour faciliter les calculs on prend :

$$I = \frac{8 \tanh^2(2\beta\epsilon)}{\coth(2\beta\epsilon)} K_1(\kappa) - 2E(\kappa) + 2(2 \tanh^2(2\beta\epsilon) - 1)^2 K_1(\kappa) \quad (4.46)$$

on a $\frac{1}{\cosh^2(2\beta\epsilon)} = 1 - \tanh^2(2\beta\epsilon)$

$$\begin{aligned} I &= 8 \tanh^2(2\beta\epsilon) (1 - \tanh^2(2\beta\epsilon)) K_1(\kappa) - 2E(\kappa) + 2(4 \tanh^4(2\beta\epsilon) \\ &\quad - 4 \tanh^2(2\beta\epsilon) + 1) K_1(\kappa) \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} c_I(0, T) &= \frac{2}{\pi} (\beta\epsilon \coth(2\beta\epsilon))^2 \left\{ 2K_1(\kappa) - 2E(\kappa) - (1 - \kappa') \left[\frac{\pi}{2} + \kappa' K_1(\kappa) \right] \right\} \\ \frac{1}{k} c_I(0, T) &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\epsilon}{kT} \coth \frac{2\epsilon}{kT} \right)^2 \left\{ 2K_1(\kappa) - 2E(\kappa) - (1 - \kappa') \left[\frac{\pi}{2} + \kappa' K_1(\kappa) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.48)$$

APPENDICE D

Dans cet appendice nous avons vérifié par le logiciel Mathematica que : $\det|A + z_k B + z_k^{-1} B^*| = 1$ apparue dans l'équation (3.96)

$$A = \begin{bmatrix} \text{Cosh}[2a]\text{Cosh}[2t] & -I * \text{Cosh}[2a]\text{Sinh}[2t] \\ I * \text{Cosh}[2a]\text{Sinh}[2t] & \text{Cosh}[2a]\text{Cosh}[2t] \end{bmatrix}$$

$\text{Cosh}[2a]\text{Cosh}[2t], -I\text{Cosh}[2a]\text{Sinh}[2t], I\text{Cosh}[2a]\text{Sinh}[2t], \text{Cosh}[2a]\text{Cosh}[2t]$

$\text{Simplify}[\text{Det}[A]]$

$\text{Cos}[2t]\text{Cosh}[2a], -I\text{Cosh}[2a]\text{Sinh}[2t], I\text{Cosh}[2a]\text{Sinh}[2t], \text{Cosh}[2a]\text{Cosh}[2t]$

$\text{Cosh}[2a]^2$

$p = \text{Cos}[2t]\text{Cosh}[2a]^2\text{Cosh}[2t] - \text{Cosh}[2a]^2\text{Sinh}[2t]^2$

$\text{Simplify}[p]$

$\text{Cosh}[2a]^2(\text{Cos}[2t]\text{Cosh}[2t] - \text{Sinh}[2t]^2)$

$$B = \begin{bmatrix} -0.5 * \text{Sinh}[2a]\text{Sinh}[2t] & I * \text{Sinh}[2a](\text{Sinh}[t])^2\text{Sinh}[2t] \\ -I * \text{Sinh}[2a](\text{Cosh}[t])^2 & -0.5 * \text{Sinh}[2a]\text{Sinh}[2t] \end{bmatrix}$$

$-0.5\text{Sinh}[2a]\text{Sinh}[2t], I\text{Sinh}[2a]\text{Sinh}[t]^2, -I\text{Cosh}[t]^2\text{Sinh}[2a], -0.5\text{Sinh}[2a]\text{Sinh}[2t]$

$\text{Simplify}[\text{Det}[b1]]$

0.

$z = \text{Exp}[2 * I * \text{Pi} * k/n]$

$e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

$$b1 = \begin{bmatrix} -0.5 * \text{Sinh}[2a]\text{Sinh}[2t] & I * \text{Sinh}[2a](\text{Cosh}[t])^2 \\ -I * \text{Sinh}[2a](\text{Sinh}[t])^2 & -0.5 * \text{Sinh}[2a]\text{Sinh}[2t] \end{bmatrix}$$

$$-0.5\text{Sinh}[2a]\text{Sinh}[2t], I\text{Cosh}[t]^2\text{Sinh}[2a], -I\text{Sinh}[2a]\text{Sinh}[t]^2, -0.5\text{Sinh}[2a]\text{Sinh}[2t]$$

Simplify[Det[b1]]

0.

$$h = A + z * B + (1/z)b1$$

Simplify[Det[h]]

1.

Bibliographie

- [1] K. Huang, *Statistical Mechanics*, J.Wiley and Sons, Inc., New York (1963).
- [2] www.futura-science.com/sciences/definition/physique-magnetisme-14883.
- [3] C. Kittel, *Introduction à la physique du solide*, Edition Dunod, 8ème édition (**1963**).
- [4] B. A. Cipra, *An introduction to the Ising model*, Notes de cours, St. Olaf College, Northfield, Minesotta 550557.
- [5] H. A. Kramers and G.H Wannier, *Phys, Rev.60,252 (1941)*.
- [6] Lars Onsager, *Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model With an Order-Disorder Transition*, Sterling Chemistry Laboratory, Yale University, New Haven, Connecticut.
- [7] E. Ising, *Z, Phy.31,253 (1925)*.
- [8] C. Domb *The Critical Point : A Historical Introduction To The Modern Theory Of Critical Phenomena*, Taylor and Francis 1996
- [9] Bruria. Kaufman, *Crystal Statistics.II.Partition Function Evaluated by Spinor Analysis*,Columbia University, New York City, New York.
- [10] Wolfram Language Documentation Center- *Wolfram Mathematica 11.0*
- [11] Un logiciel utile pour tout type de calculs *Maple2018*
- [12] I.S.Gradshteyn, I.M. Ryzhik *Table of Integrals, Series, and Products* Elsevier 2007.
- [13] C.N. Yang *Phys. Rev. 85,809 (1952)*

الخلاصة :

نموذج Ising هو نموذج للفيزياء الإحصائية الذي يفسر الفيرومغناطيسية لبعض المواد من خلال النظر في أن العزوم المغناطيسية لللف المغزلي للإلكترونات في هذه المواد موجهة على طول محور معين (يمكن أن يأخذ إسقاط اللف المغزلي قيمتين فقط (أعلى وأسفل أو \pm)). Ising، قدم نموذج في البداية ، لشرح انتقال الطور في المواد الفيرومغناطيسية . يحتوي نموذج Ising أحادي البعد على حل دقيق يتم العثور عليه بواسطة طريقة مصفوفة النقل. لسوء الحظ ، لا يظهر هذا النموذج انتقالاً طورياً ، لذلك هذا الحل ليس مثيراً للاهتمام. توضح دراسة نموذج Ising ثنائي الأبعاد وجود انتقال طور ، وبعض الأعمال تنبأت بدرجة الحرارة التي يحدث فيها هذا الانتقال. ومن هنا ظهر الاهتمام النظري في دراسة هذا النموذج. في عام 1944 ، نجح Onsager في إيجاد حل دقيق لتعميم طريقة مصفوفة النقل ثنائية الأبعاد. حتى اليوم ، فإن نموذج Ising ثلاثي الأبعاد لا يقبل حلاً دقيقاً ويجب استخدام الطرق الرقمية لإيجاد الحل.

الهدف من مذكرة الماستر هذه هو دراسة حلول نموذج Ising أحادي وثنائي البعد. ونتطرق لحل Onsager لنموذج Ising ثنائي البعد.

الكلمات المفتاحية: نموذج Ising ، حل Onsager ، الفيرومغناطيسية ، البارامغناطيسية

Résumé :

Le modèle d'Ising est un modèle de la physique statistique qui permet d'expliquer le ferromagnétisme de certains matériaux en considérant que les moments magnétiques de spin des électrons dans ces matériaux sont orientés selon un axe (la projection du spin pouvant prendre que deux valeurs (haut et bas ou \pm)). Ising a introduit initialement son modèle, pour expliquer la transition de phase dans les matériaux ferromagnétiques. Le modèle d'Ising à une dimension possède une solution exacte trouvée par la méthode de la matrice de transfert. Malheureusement ce modèle ne montre pas de transition de phase, donc solution qui n'est pas intéressante. L'étude du modèle d'Ising à deux dimensions montre l'existence d'une transition de phase et des travaux ont permis de prédire la température à laquelle se produit la transition. D'où l'intérêt théorique porté à l'étude de ce modèle. Onsager, en 1944, a réussi à trouver une solution exacte, en généralisant la méthode de la matrice de transfert à deux dimensions. Jusqu'à nos jours, le modèle d'Ising à trois dimensions n'est pas soluble exactement et il convient d'utiliser les méthodes numériques.

Le but de ce mémoire de master est d'étudier la solution du modèle d'Ising unidimensionnel et à deux dimensions. On s'intéresse à la solution d'Onsager pour le modèle d'Ising à deux dimensions.

Mots clés : Modèle d'Ising, solution d'Onsager, ferromagnétisme, paramagnétisme