

RESUME

Les matériaux à gradient fonctionnel qui s'inscrivent dans la gamme des matériaux composites, voyant le jour dans les années 1984-1985, présentent une variation continue des propriétés thermomécaniques selon une fonction donnée suivant une ou plusieurs directions. Généralement constitués de métal et de céramique alliant ainsi les bonnes propriétés de ces deux derniers. L'un des principaux avantages que présentent ces matériaux est la possibilité de réduire les contraintes résiduelles et les contraintes thermiques, ce qui permet d'augmenter la résistance et la ténacité des structures ou des éléments structuraux constitués par ce nouveau matériau. Ces caractéristiques ont trouvé leur application dans les éléments de structures aéronautiques et spatiales qui sont sujets à des environnements de fonctionnement thermiques et mécaniques sévères. Ce travail est consacré à l'étude des vibrations libres d'une plaque FGM. A partir des équations du mouvement qui sont développées en se basant sur la théorie de Reissner-Mindlin et en se servant du principe de Hamilton, ces équations seront dérivées en termes de déplacements et rotations. La résolution des équations différentielles obtenues se fera pour le cas d'une plaque FGM sur appuis-simples par la méthode de Navier. Des graphes seront tracés et les résultats obtenus seront commentés.

ملخص

المواد ذات التدرج الوظيفي التي تصنف ضمن فئة المواد المركبة و التي رأت النور في سنة 1984 إلى 1985، تظهر تدرجا مستمرا للخصائص الميكانيكو- حرارية حسب دالة معطاة و وفقا لإتجاه أو أكثر. متكونة غالبا من خزف و معدن، جامعة لخواصهما الجيدة معا. من أبرز محاسنها إمكانيتها على إزالة الإجهادات المخلفة و الإجهادات الحرارية، الذي يمكن من مضاعفة مقاومة و تماسك الهياكل أو العناصر الهيكلية المشكلة من هذه المواد. هذه الخصائص وجدت تطبيقا لها في عناصر هياكل الطيران و الفضاء التي هي موضوع لطبيعة عمل قاسية ميكانيكيا و حراريا. هذا العمل مخصص لدراسة الإهتزازات الحرة لصفحة من المواد ذات التدرج الوظيفي. إبتداء من معادلات الحركة المستخرجة و المطورة بالإستناد على نظريات رايسنر- ميدلين و بالإعتماد على فكرة الأعمال الإفتراضية و مبدأ هاميلتون، هذه المعادلات ستكون مشتقة من حيث الإنتقال و الدوران. حل المعادلات التفاضلية التي تم الحصول عليها سيتم لحالة الصفحة المتمركزة على دعائم بسيطة بواسطة طريقة نافيه. رسوم بيانية ستتجز و سيتم التعليق على النتائج المستخلصة

SUMMARY

Functionally graded materials which subscribe in the range of composite materials, seeing the day in the year 1984-1985, show a continuous variation of the thermomechanical properties in one or more directions according to a given function. Usually made of metal and ceramic and combines the good properties of the preceding two. One of the main advantages of these materials is the ability to reduce residual stresses and thermal stresses, which increases the strength and toughness of structures or structural elements formed by this new material. These characteristics have been applied in aeronautical and aerospace structures which are subjected to severe thermal and mechanical environment operations. This work is devoted to the study of free vibration of FGM plates. From the equations of motion which are developed, based on the theory of Reissner - Mindlin and using the Hamilton's principle, these equations are derived in terms of displacements and rotations. Solving the differential equations will be obtained for the case of FGM plate simply supported by the Navier method. Graphs will be plotted and results discussed.

REMERCIEMENTS

Nous remercions messieurs mesdames les membres du jury de l'attention qu'ils accorderont à lire et à examiner ce mémoire, les enseignants qui ont fait preuve de patience le long de notre formation et toute personne ayant contribué à sa réalisation. Un grand merci à Mme MAHI Amale qui nous a consacré beaucoup de son temps, et nous a accompagné durant tout le travail et nous a comblés de conseils et de directives précieuses.

TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....	1
1. MATERIAUX COMPOSITES ET A GRADIENT DE PROPRIETES.....	3
1.1. Introduction	3
1.2. Matériaux composites.....	3
1.3. Matériaux à gradient fonctionnel.....	13
1.4. Procédés de fabrication.....	16
1.5. Domaines d'utilisation des FGM.....	18
1.6. Conclusion.....	19
2. MECANIQUE DES MATERIAUX FGM.....	20
2.1. Introduction.....	20
2.2. Lois de distribution des propriétés.....	20
2.3. Théories des déformations des plaques FGM.....	24
2.4. Conclusion.....	29
3. ETUDE DES VIBRATIONS DE LA PLAQUE FGM.....	30
3.1. Introduction.....	30
3.2. Champs des déplacements, déformations et des contraintes.....	30
3.3. Principe des travaux virtuels.....	33
3.4. Application du principe de Hamilton.....	37
3.5. Calcul des fréquences de la plaque FGM.....	40
3.6. Conclusion.....	45

4. RESULTATS, VALIDATION ET INTERPRETATION.....	46
4.1. Introduction.....	46
4.2. Organigramme du programme de calcul.....	47
4.3. Validation des résultats.....	49
4.4. Etude de la plaque P-FGM (Al/Al ₂ O ₃).....	59
4.5. Etude de la plaque P-FGM (Al/ZrO ₂).....	64
4.6. Conclusion.....	69
CONCLUSION GENERALES ET PERSPECTIVES.....	70

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

LISTE DES SYMBOLES

REFERENCES

INTRODUCTION

Avec l'évolution technologique et les exigences de concurrence économique, les laboratoires de recherches ont poussé d'avantage leurs objectifs techniques, visant à satisfaire la demande en matière de performances et de qualité. Ces performances prescrites ne peuvent être atteintes avec des matériaux purs à cause des propriétés de ces derniers qui ne sont pas assez polyvalentes pour certaines utilisations. Pour résoudre ce problème, la combinaison d'un métal avec d'autres métaux ou non métaux en état de fusion est utilisée, c'est ce qu'on appelle alliage, ceci donne des propriétés différentes de celles des matériaux de base. L'utilisation de l'alliage est limitée par l'équilibre thermodynamique [1], car il y'a une limite à laquelle un matériau peut être dissous dans une solution d'un autre. Ainsi qu'il est prohibitif de combiner deux matériaux par ce procédé avec un écart de température de fusion des composants. La métallurgie des poudres (powdered metallurgy, PM) est une autre méthode de production d'une pièce qui ne peut être produite par alliage conventionnel, où l'alliage est produit sous forme de poudre à faire fritter. Malgré les excellentes caractéristiques de la métallurgie des poudres, il existe quelques limitations telles que des formes complexes qui ne peuvent être réalisées à l'aide des PM ; Les pièces sont poreuses et ont une faible résistance [1]. Bien que ces limitations sont avantageuses à certaines applications (par exemple, filtre et applications non structurelles) mais, elles sont préjudiciables à d'autres. Une autre méthode de production des matériaux avec combinaison de propriétés est celle de combinaison de matériaux à l'état solide, donnant des matériaux composites.

Les matériaux composites sont des matériaux constitués généralement de deux ou plusieurs matériaux différents dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Ces matériaux sont constitués d'une matrice et d'un renfort, souvent ce dernier est sous forme de fibres. Ainsi, il est possible d'améliorer les propriétés thermomécaniques du matériau obtenu telles que la légèreté, la rigidité, la résistance à l'usure, et bien d'autres. Les matériaux composites vont échouer dans des conditions extrêmes à travers un processus appelé délamination (séparation des fibres de la matrice) dû à la transition brutale de composition. Cela peut se produire par exemple, dans une application à haute température, où deux matériaux avec différents coefficients de dilatation thermique sont utilisés. Pour résoudre ce problème, et face à un défi de conception

et de construction d'une navette spatiale hypersonique devant résister au choc thermique de la pénétration de la navette dans l'atmosphère terrestre (une température extérieure de 2000K et une température intérieure de 1000K dans moins de 10 mm d'épaisseur), des chercheurs japonais, au milieu des années 1980, ont imaginé un nouveau matériau ayant une face avec d'excellentes propriétés thermiques (céramique), et l'autre face avec d'excellentes propriétés mécaniques (métal), c'est ainsi qu'est né le concept des matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials, FGM) [1].

Les matériaux à gradient de propriétés sont un nouveau type de matériaux composites sophistiqués qui ont une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces tout en préservant les caractéristiques des matériaux constituants [3]. Faire varier progressivement les propriétés du matériau peut prévenir la fissuration au niveau des interfaces, réduire les contraintes résiduelles et maintenir ainsi l'intégrité structurelle à un niveau souhaitable [2]. Les FGM sont aussi utilisés comme barrière thermique, revêtement résistant à la corrosion... . De nos jours, ces nouveaux matériaux sont largement utilisés dans des environnements à haute température. Vu que la céramique a une faible conductivité thermique, et donc une excellente résistance à la température, les FGM sont typiquement fait de céramique et de métal. Le métal est utilisé à cause de sa bonne résistance à la rupture [2].

Dans ce travail, le but recherché est d'abord de se familiariser et de comprendre ce que sont les matériaux FGM puis de déterminer leurs propriétés (qui ne sont pas constantes) en fonction des coordonnées du point considéré et de la fonction de distribution considérée. Il faudra ensuite modéliser ces matériaux en se basant sur la théorie de Reissner-Mindlin et en se servant du principe de Hamilton, puis dériver les équations de mouvements en termes de déplacements et rotations. La résolution des équations différentielles obtenues se fera par la suite pour le cas de deux plaques FGM sur appuis-simples par la méthode de Navier. Les résultats représentant les fréquences naturelles seront établis puis commentés, des graphes appropriés seront tracés pour montrer l'influence des paramètres considérés dans cette étude.

CHAPITRE 1

MATERIAUX COMPOSITES ET A GRADIENT DE PROPRIETES

1.1. Introduction :

Selon sa classe, chaque type de matériau possède des propriétés et des caractérisations qui lui sont propres : les métaux sont en général tenaces et ductiles, mais leur masse volumique est souvent élevée ; les matières plastiques, légères, font preuve d'une faible rigidité, bénéficient de propriétés mécaniques moyennes et sont parfois fragiles ; quant aux céramiques, elles ont un module de Young et une résistance théorique à la traction très élevée, mais elles sont intrinsèquement fragiles. En combinant divers types de matériaux normalement non miscibles, et tout en contrôlant leurs morphologies et leurs répartitions, on obtient des matériaux composites, dont les propriétés sont totalement différentes de celles des composants de base [4].

1.2. Matériaux composites :

1.2.1. Définitions :

Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées renforts et matrice. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure. On trouve plus particulièrement les matériaux composites à renfort fibres longues continues utilisées dans l'industrie nautique, automobile, aéronautique et spatiale, et ceux-ci sont les plus étudiés. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée [5].

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tridirectionnel ou plus). La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure 1.1 [5].

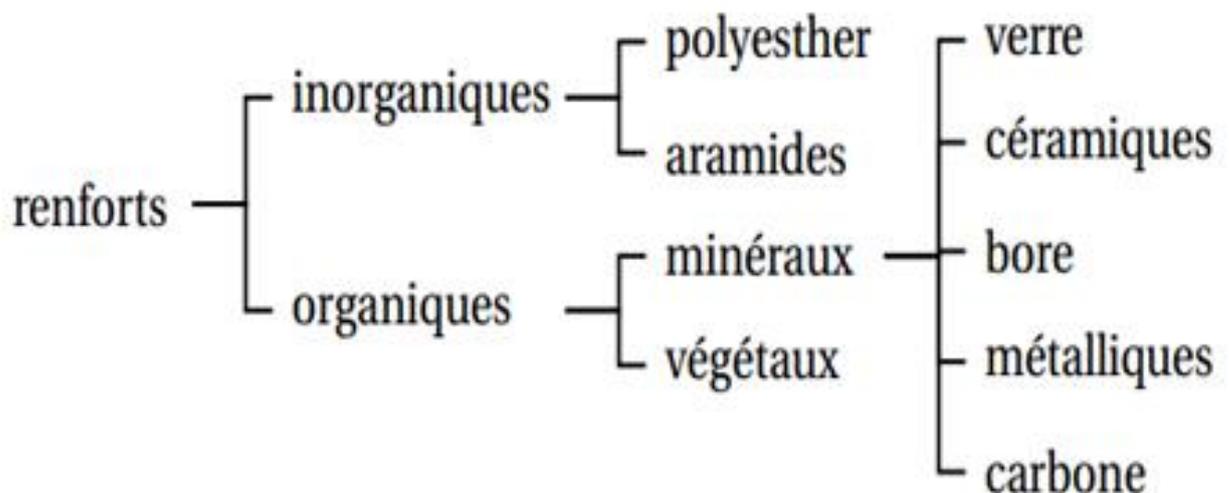


Figure 1.1 : Types de renforts

D'un point de vue géométrique, on peut distinguer trois grands types de renforts [6]:

- **les fibres longues**, c'est-à-dire de longueur comparable aux dimensions de la pièce (Figure 1.2.a) ;
- **les fibres courtes**, c'est-à-dire de longueur faible devant les dimensions de la pièce (Figure 1.2.b) ;
- **les particules**, ou charges renforçantes (Figure 1.2.c).

Tous ces renforts sont inclus au sein d'une matrice qui répartit les efforts entre eux et les protège des agressions extérieures. En outre, lorsque les renforts sont des fibres, celles-ci peuvent être soit orientées dans une direction précise, soit disposées "en vrac", aléatoirement.

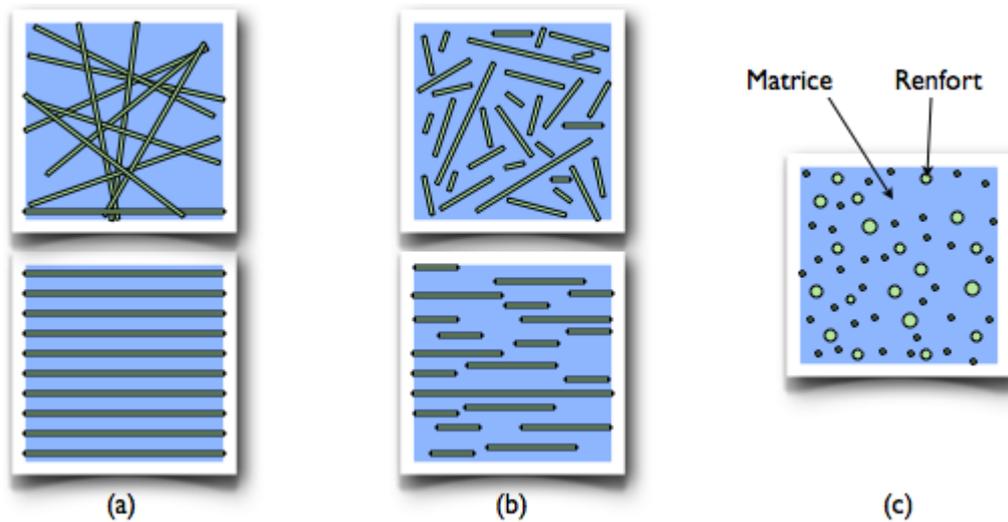


Figure 1.2 : Les structures géométriques des composites :
 (a) fibres longues, (b) fibres courtes, (c) particules.

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone, des températures de 2 200°C peuvent être atteintes. La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure 1.3 [5].

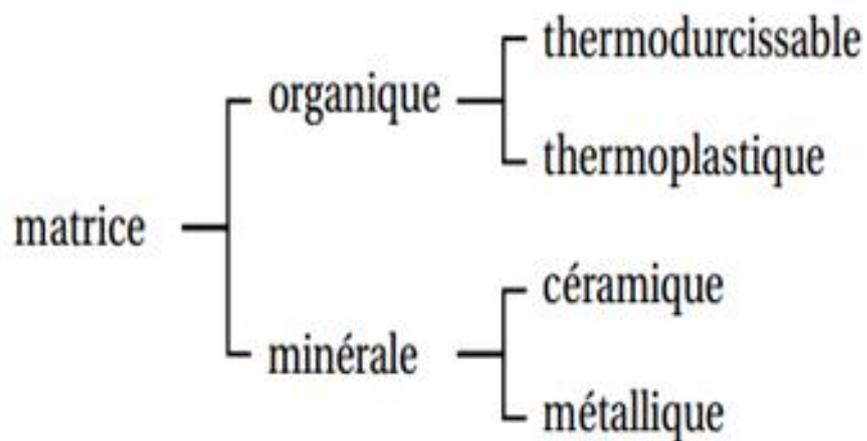


Figure 1.3 : Types de matrices

Les composites étant des matériaux hétérogènes, ils possèdent des interfaces, c'est-à-dire des surfaces de contact entre la matrice et le renfort. Tant que le composite est intact, les deux constituants adhèrent parfaitement l'un à l'autre, et l'interface ne joue donc aucun rôle particulier. Cependant, l'interface joue un rôle important lorsque le composite subit des dégradations mécaniques et commence à se fissurer suite à une surcharge, à la fatigue... [6].

En effet, les interfaces ont la propriété de dévier les fissures : lorsqu'une fissure se propage dans la matrice et atteint l'interface (Figure 1.4.a), elle ne traverse généralement pas cette dernière et les renforts ne sont donc pas endommagés. Au lieu de cela, la fissure change de direction et suit l'interface (Figure 1.4.b). En d'autres termes, au lieu d'une rupture brutale, on observe plutôt une décohésion, c'est-à-dire un décollement progressif entre les renforts et la matrice. L'interface joue donc le rôle de fusible et rend les composites plus ductiles et plus tenaces, c'est-à-dire plus résistants à la rupture, que leurs constituants élémentaires [6].

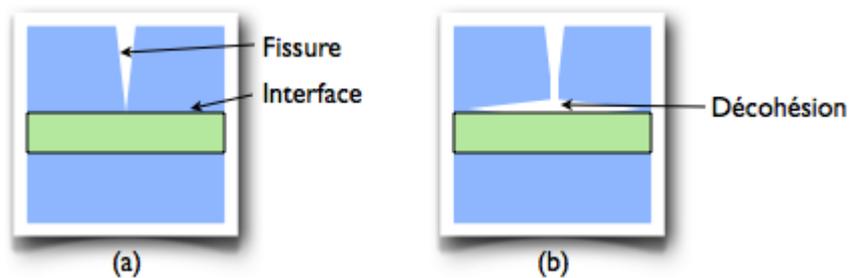


Figure 1.4 : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites

Lorsqu'une fissure atteint l'interface (a), elle est déviée (b). Au lieu d'une rupture brutale, on observe donc une décohésion progressive des constituants.

1.2.2. Structure des matériaux composites :

La distinction des matériaux composites s'opère essentiellement en fonction de la géométrie des renforts.

Les composites à fibres courtes ou à particules sont généralement de simples "matrices chargées" aux propriétés améliorées, mises en forme selon les mêmes procédés que leurs matrices seules (du moins tant que la proportion de renforts n'est pas trop élevée). La conception et la fabrication de pièces utilisant ces matériaux ne présentent pas de signes distinctifs particuliers [6].

En revanche, les pièces composites à fibres longues possèdent généralement des structures bien particulières. Ces structures permettent au concepteur de "mettre la matière là où on en a besoin", en optimisant l'orientation et la disposition des renforts en fonction du chargement subi par la pièce. En pratique, le diamètre des fibres d'un composite "moderne" étant microscopique, les pièces composites sont généralement réalisées à partir d'éléments structurels "prêts à mettre en forme" contenant un grand nombre de fibres, comme des fils à tisser ou des nappes à superposer. Elles possèdent donc des structures caractéristiques présentées ci-dessous [6].

1.2.2.1. Composites tissés :

De nombreuses pièces composites sont réalisées à l'aide de tissus ou composites tissés.

Dans ces structures, les fibres sont tressées ou alignées en "câbles" nommés torons ou simplement fils, comptant chacun quelques centaines ou milliers de fibres. Ces fils sont ensuite tissés selon des motifs plus ou moins sophistiqués. Une fois la mise en forme terminée, la matrice est présente à deux niveaux : au sein des fils (entre les fibres), et au sein du tissu (entre les fils), comme le montre la Figure 1.5 [6].

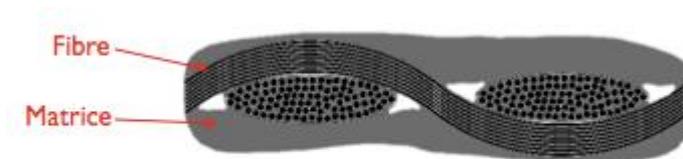


Figure 1.5 : Structure d'un composite tissé :
Fibres (regroupées en fils) et matrice (intra- et inter-fils).

Les motifs du tissu peuvent être extrêmement variés. De nombreux tissus sont plans (Figure 1.6) et ne comportent qu'une couche de fils ; l'épaisseur de la pièce est alors obtenue en cousant plusieurs couches entre elles, ou encore en les empilant pour former un stratifié (décrit ci-dessous). Les tissus de la Figure 1.6 sont équilibrés, c'est-à-dire qu'ils comportent autant de fils dans les deux directions de tissage. Ils possèdent donc la même résistance et la même rigidité dans ces deux directions, mais il faut bien noter qu'ils n'ont pas pour autant un comportement isotrope : ils résistent a priori mieux en traction dans la direction des fils qu'en traction à 45° ou en cisaillement. En outre, il est possible de faire varier la proportion de fils dans les deux directions pour jouer sur cette anisotropie, lorsque le chargement appliqué à la pièce le justifie : les tissus ainsi obtenus sont dits non équilibrés (Figure 1.8.a).

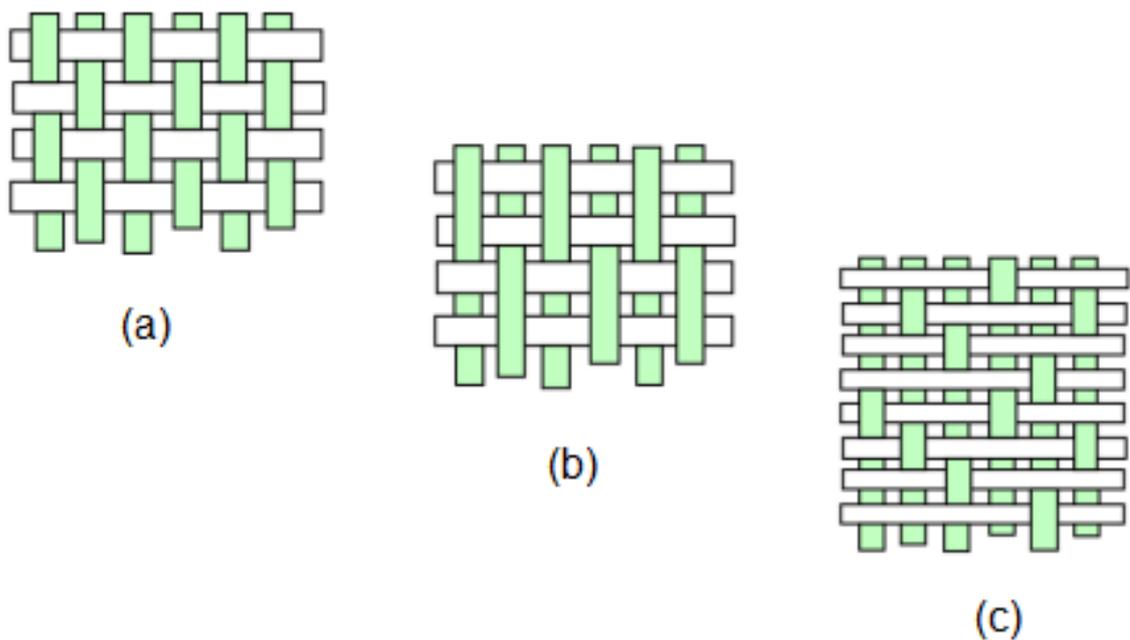


Figure 1.6 : Exemples de tissus plans courants.

D'autres tissus sont tridimensionnels et possèdent des fils dans plusieurs directions non coplanaires (Figure 1.7). Ces tissus permettent de réaliser directement des pièces d'épaisseur variable et, par rapport aux assemblages de tissus plans, résistent mieux à l'arrachement, moyennant une fabrication plus complexe.

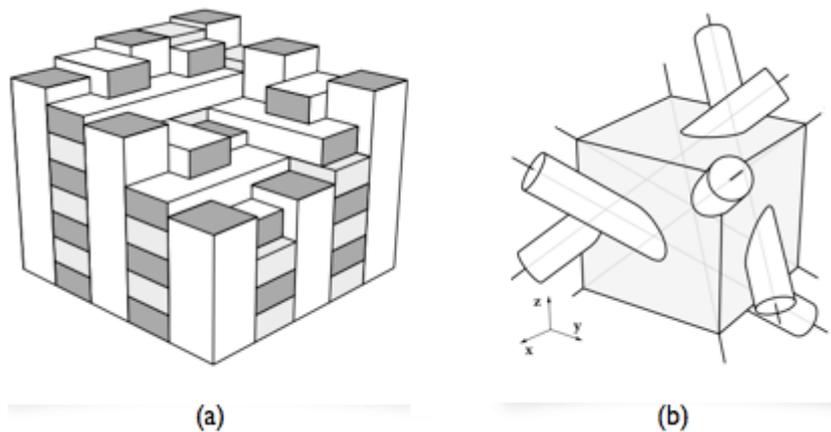


Figure 1.7 : Exemples de tissus tridimensionnels : (a) tissu triorthogonal, (b) tissu "4D"

Tissu "4D" : les renforts sont orientés selon les quatre diagonales d'un cube.

1.2.2.2 : Composites stratifiés :

La stratification est une autre structure couramment rencontrée dans les pièces composites. Dans un stratifié, les fibres sont agencées en couches fines (quelques dixièmes de millimètre) nommées plis, qui sont empilées les unes sur les autres ; après la mise en forme, ces couches seront liées entre elles par l'intermédiaire de la matrice. Au sein d'un pli, les renforts peuvent avoir n'importe quel type de disposition, pourvu qu'elle soit plane [6]:

- soit l'un des tissus plans décrits ci-dessous (Figure 1.8.a), ce qui donne un comportement plus ou moins anisotrope selon la proportion de fils dans les deux directions ;

- soit un mat : les fibres sont disposées "en vrac" sans orientation privilégiée sur quelques couches (Figure 1.8.b), ce qui donne un comportement quasi-isotrope dans le plan ;
- soit un tissu unidirectionnel : les fibres sont disposées parallèlement les unes aux autres sur quelques couches (Figure 1.8.c) et uniquement maintenues dans cette disposition par quelques fils de trame, ce qui donne un comportement fortement anisotrope.

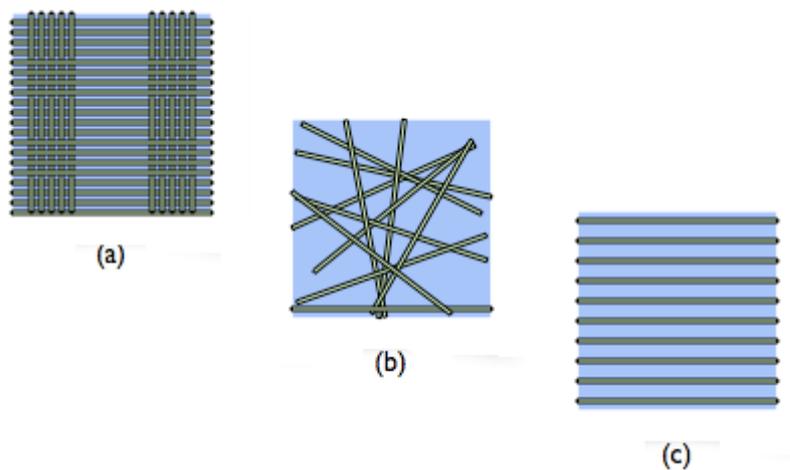


Figure 1.8 : Dispositions possibles des fibres dans un pli : (a) tissu plan (ici non équilibré), (b) mat, (c) unidirectionnel.

En jouant sur l'ordre et l'orientation des plis (Figure 1.9), il est possible d'adapter finement les propriétés mécaniques du stratifié aux sollicitations extérieures, et donc d'atteindre un haut niveau d'optimisation en mettant la matière là où elle est le plus utile. A l'échelle de la structure, les comportements mécaniques ainsi obtenus peuvent être très complexes, et vont du quasi-isotrope à une anisotropie marquée lorsque l'application le nécessite. Les stratifiés sont globalement moins coûteux à fabriquer que les tissus 3D : en contrepartie, ils sont sujets au délaminage (c'est-à-dire que les plis peuvent se décoller les uns des autres, lorsque la matrice qui les relie se fissure).

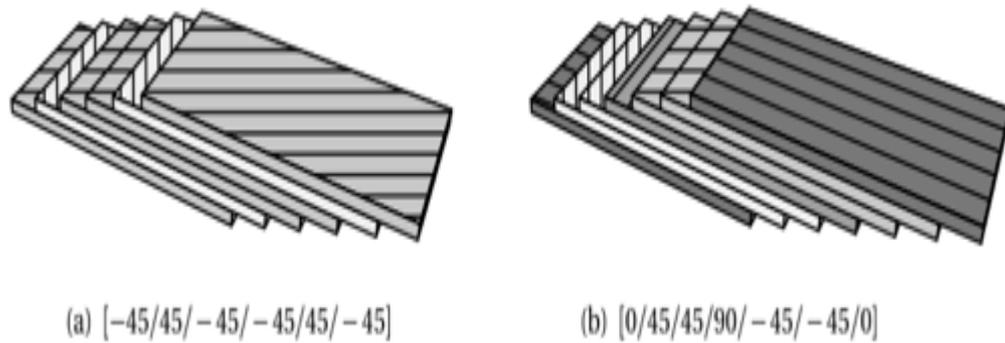


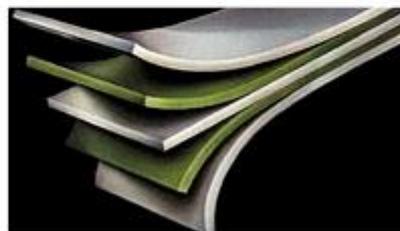
Figure 1.9 : Exemples de stratifiés à base de plis unidirectionnels.

Les nombres entre crochets désignent l'angle de chaque pli (en degrés) par rapport à une direction de référence.

Cette structure n'est pas spécifique aux composites modernes : les dérivés du bois comme le contreplaqué possèdent souvent une structure stratifiée (Figure 1.10.a). Il existe également des stratifiés hybrides tels que le GLARE ("GLASS REINFORCED") utilisé dans l'A380, constitué d'un empilement de fines feuilles d'aluminium alternées avec des plis unidirectionnels de fibres de verre et matrice époxy (Figure 1.10.b).



(a)



(b)

Figure 1.10 : Exemples de multi-matériaux stratifiés : (a) contreplaqué, (b) GLARE (aluminium et composite verre/époxy).

1.2.2.3. Structures en sandwich :

Les pièces composites tissées ou stratifiées sont généralement minces. Par conséquent, elles ne résistent efficacement qu'aux sollicitations en membrane, c'est-à-dire dans leur plan, et résistent mal aux sollicitations hors plan (flexion et torsion). Pour concevoir des pièces rigides en flexion et en torsion, une technique couramment employée est celle des structures en sandwich, constituées de deux peaux (généralement stratifiées) collées sur une âme épaisse mais légère, comme une mousse de polymères ou un nid d'abeilles, à l'aide d'adhésifs (Figure 1.11).



Figure 1.11 : Une structure en sandwich

L'intérêt de cette disposition est encore une fois de mettre la matière là où elle est nécessaire : lorsqu'un tel "sandwich" est sollicité en torsion ou en flexion, les peaux travaillent essentiellement en membrane, tandis que l'âme travaille essentiellement en cisaillement hors plan (et à des niveaux de contrainte bien plus faibles). Il est ainsi possible d'obtenir des pièces ultralégères, résistantes et rigides en flexion et en torsion, comme le montre le tableau comparatif de la Figure 1.12.

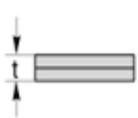
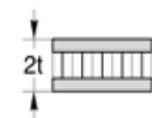
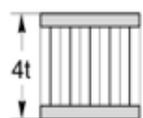
			
Rigidité relative	1.0	7.0	37.0
Résistance relative	1.0	3.5	9.2
Masse relative	1.0	1.03	1.06

Figure 1.12 : Comparaison des caractéristiques mécaniques en flexion (rigidité et résistance) et des masses de trois structures

Les matériaux composites disposent d'atouts par rapport à des produits concurrents, tels que : la légèreté, la résistance mécanique et chimique, la maintenance réduite, et la liberté des formes [7]. Cependant, ce type de matériaux généralement constitués de couches, ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces, ce qui provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations des matrices ainsi que le problème de délamination dû à la transition brutale de composition, en particulier dans des environnements à haute température [3]. Viennent alors les matériaux à gradient fonctionnel (aussi dit à gradient de propriétés), qui représentent une nouvelle version des matériaux composites.

1.3. Matériaux à gradient fonctionnel :

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle gamme de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient à travers l'épaisseur (ou autre direction) selon une fonction donnée : continue (Figure 1.13) ou discrète (Figure 1.14). Cette variation est due à l'irrégularité de distribution des particules constituant le FGM.

La structure spéciale de ces matériaux permet d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant délamination et décollement) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux.

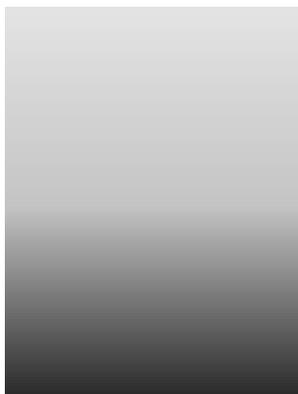


Figure 1.13 : Variation continue des propriétés



Figure 1.14 : Variation discrète des propriétés

La variation continue des propriétés (Figures 1.15 et 1.16) trouve son application lorsque, par exemple les deux faces sont exposées à différentes températures, à une haute température sur la face supérieure et une basse température sur la face inférieure. Dans ce cas la face supérieure est en 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux. La céramique est choisie grâce à ses caractéristiques exceptionnelles [3] :

- faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- haute température de fusion ou de décomposition ;
- haut module d'élasticité et haute dureté ;
- charge à la rupture élevée ;
- bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- conservation des propriétés à haute température ;
- faible coefficient de dilatation thermique (bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- faible conductivité thermique (bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

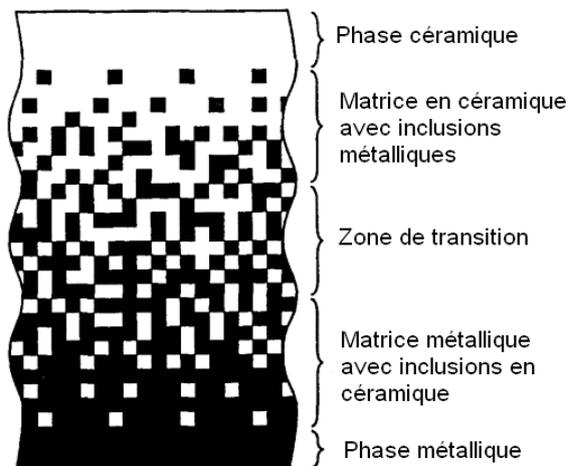


Figure 1.15 : Variation continue de la microstructure (schématisée)

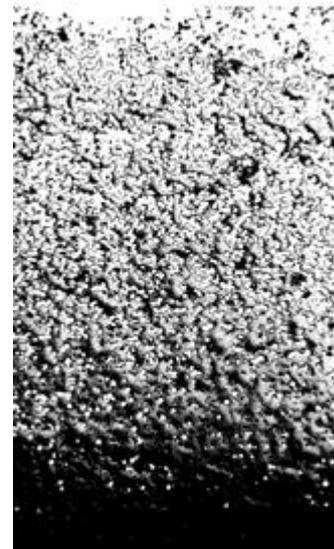


Figure 1.16 : Variation continue de la microstructure (photo)

En ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la température, de la déformation et des contraintes. Cette possibilité d'ajustement est demandée lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu [3].

Faire varier la microstructure en assurant un espacement non uniforme (Figure 1.17) ou en incluant plusieurs renforcements (Figure 1.18) trouve son application dans la réduction des différences entre les propriétés thermomécaniques des différentes couches adjacentes des plaques multicouches [3].

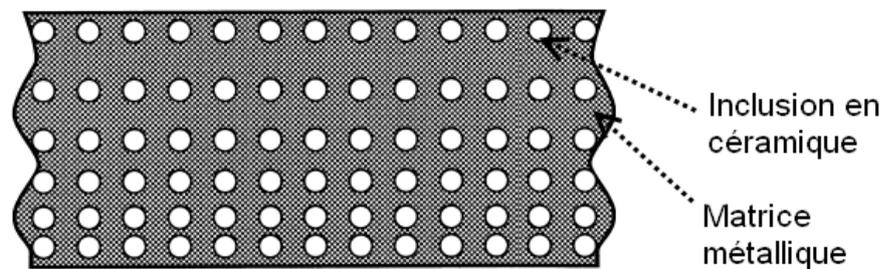


Figure 1.17 : Variation discrète de la microstructure avec espacement non-uniforme

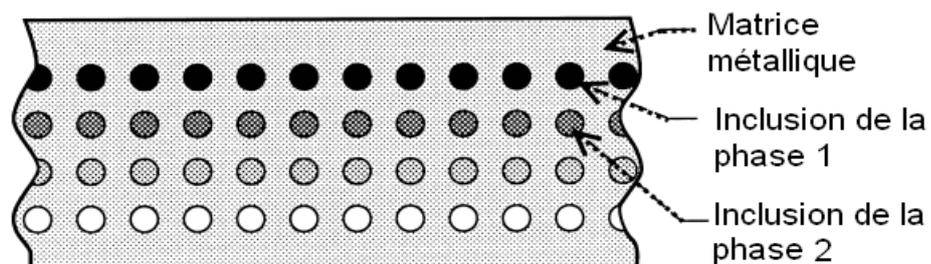


Figure 1.18 : Variation multi-phases de la microstructure

Afin d'obtenir une transition douce entre couches dont les propriétés sont différentes, une réduction des contraintes thermiques induites entre couches au niveau des bords libres peut être obtenue en appliquant la technique de la variation fonctionnelle des propriétés. Il est aussi possible d'étendre ces possibilités à la réalisation de jonctions efficaces des matériaux dissemblables en formant des joints à gradient fonctionnel. Dans le domaine de la résistance à la rupture, l'introduction d'une deuxième phase permet de créer des champs de contraintes locales de compression dans les zones critique sujettes à des amorces de criques.

1.4. Procédés de fabrication :

Lors de la fabrication des matériaux FGM, il y'a recours à plusieurs méthodes :

1.4.1. La métallurgie des poudres :

La métallurgie des poudres est la plus importante des méthodes de fabrication des FGM, un exemple du procédé de fabrication typique est schématisé et illustré (Figure 1.19). En premier, les matériaux A et B sont pesés et mélangés (Figure 1.19.a), puis chaque poudre est mélangée dans un broyeur de forme V (V-shapemill) (Figure 1.19.b), jalonnement pas à pas de la poudre pré-mélangée selon une répartition spatiale prédéfinie de la composition comme représenté dans Figure 1.19.c, la dernière étape est un frittage montré dans la Figure 1.19.d [8].

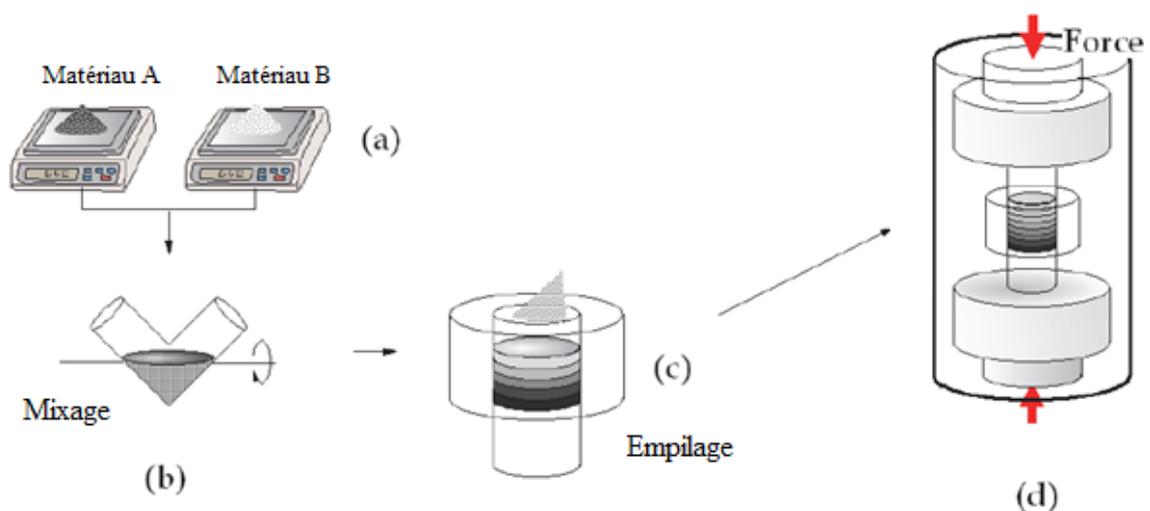


Figure 1.19 : Exemple du procédé de fabrication typique des FGM par la métallurgie des poudres.

1.4.2. La méthode centrifuge :

C'est la méthode par laquelle est produit un FGM à gradient continu. La fabrication des FGM à partir de la force centrifuge est classée en trois catégories (Figure 1.20) [7]:

- procédé centrifuge (Application de la méthode de coulée centrifuge) où une force centrifuge appliquée à un métal en fusion homogène, dispersé avec des particules céramiques ou des particules de composés intermétalliques, entraîne la formation de la granulométrie désirée (Figure 1.20.a)
- Procédé de bouillie centrifuge (sédimentation centrifuge) lorsqu'une suspension de deux types de particules solides, les particules à haute vitesse et les particules à faible vitesse, sont soumises à la force centrifuge (Watanabe et al., 2010) comme le montre la Figure 1.20.b, après sédimentation complète, la partie liquide de la suspension sera retirée, et par conséquent, il ne devient pas une partie du FGM.
- Procédé de pressurisation centrifuge par lequel la force centrifuge est utilisée uniquement pour la pressurisation simple. Dans cette méthode, la gradation de la composition doit être formée avant l'application de la force centrifuge. Watanabe et al. mettent au point une méthode de poudre mélangée centrifuge (Figure 1.20.c) (Watanabe et al., 2009), et un procédé de coulée centrifuge réactive (Watanabe et al., 2004a), qui appartiennent à cette catégorie.

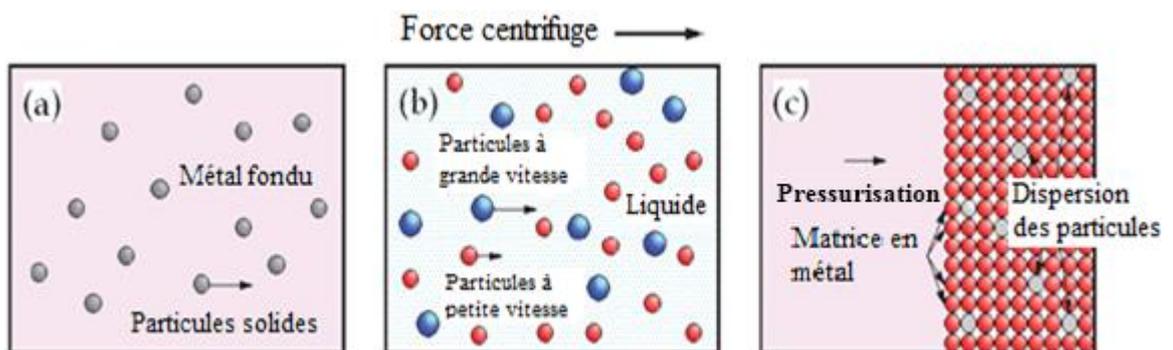


Figure 1.20 : Les trois types de méthodes de fabrication des MGF sous la force centrifuge.

1.4.3. Technique de dépôt en phase vapeur (Vapour Deposition Technique) :

Il existe différentes techniques de dépôt en phase vapeur, ils comprennent: le dépôt par pulvérisation cathodique, dépôt chimique en phase vapeur (CVD) et le dépôt physique en phase vapeur (PVD). Ces méthodes de dépôt en phase vapeur sont utilisées pour déposer des revêtements de surface fonctionnellement gradués et ils donnent une excellente microstructure, mais ils ne peuvent être utilisés que pour le dépôt de revêtement de surface mince [1].

1.4.4. Méthode de fabrication de solide de forme libre (Solid Freeform (SFF) Fabrication Method) :

Solid freeform est un procédé de fabrication d'additifs qui offre de nombreux avantages, notamment: une vitesse de production plus élevée, moins d'énergie, une utilisation maximale de matériaux, une capacité à produire des formes complexes et la liberté de conception. Les pièces sont produites directement à partir de CAD (exemple : AutoCAD) [1].

1.5. Domaines d'utilisation des FGM :

Les matériaux FGM sont utilisés dans de nombreux domaines, tels que [1] :

L'aérospatiale :

Les Matériaux à gradient fonctionnel peuvent résister à un très fort gradient thermique, ce qui les rend appropriés pour une utilisation dans les structures et les corps plans de l'espace, composant de moteur-fusée, etc. Ils sont surtout utilisés en tant que barrière thermique et revêtement résistant à la corrosion. Si la technique de traitement est améliorée, les FGM sont prometteurs et peuvent être utilisés dans des domaines plus larges de l'aérospatiale.

La médecine :

Les tissus vivants comme les os et les dents sont considérés comme des matériaux à gradient fonctionnel naturels (Par exemple la variation de la microstructure de l'os est

montrée da la Figure 1.21. Pour remplacer ces tissus, un matériau compatible est nécessaire ce qui donne place aux FGM.

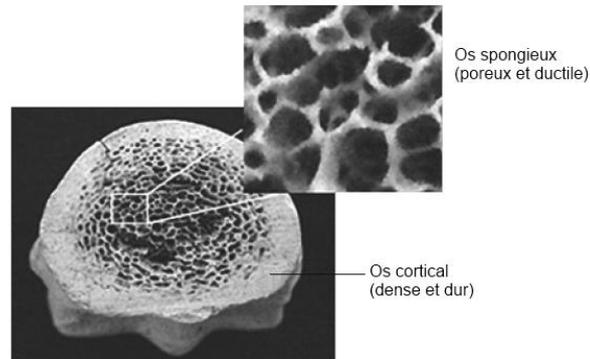


Figure 1.21 : variation de la microstructure de l'os.

La défense :

Les FGM montrent une habilité à inhiber la propagation de fissure, ce qui les rend utiles pour les applications de la défense. En tant que matériaux résistants à la pénétration ils sont utilisés pour des plaques de blindage et des gilets pare-balles.

L'énergie :

Les FGM sont utilisés dans des dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtement protecteur sur les aubes de turbines dans les moteurs à turbine à gaz.

Optoélectronique :

Les FGM trouvent aussi leur application en optoélectronique comme matériaux à indice de réfraction gradué et dans les disques audio-vidéo, supports de stockage magnétiques.

1.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, les matériaux composites ont été bien définis, aboutissant aux matériaux à gradient fonctionnel, ces derniers ont été bien détaillés. Les procédés de fabrications des FGM et quelques domaines de leurs utilisation ont été présentés.

CHAPITRE 2

MECANIQUE DES FGM

2.1. Introduction :

Le but de ce chapitre est de définir les lois de distributions lors de la modélisation des FGM. Ensuite seront détaillées les différentes théories de déformation, en détaillant la théorie classique et la théorie du premier ordre qui sera objet de notre étude.

2.2. Lois de distribution des propriétés :

Afin de modéliser correctement notre matériau P-FGM, les propriétés doivent dépendre de la position et de la température du point considéré.

La face supérieure de propriétés P_t est soumise à la température T_t , la face inférieure de propriétés P_b est soumise à la température T_b , tel que représenté dans la Figure 2.1.

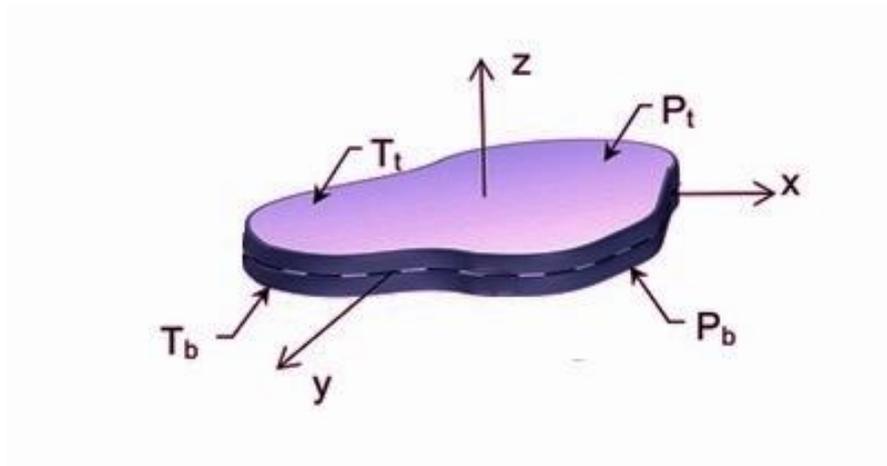


Figure 2.1 : élément structural en FGM

La dépendance des propriétés de la position implique la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [3] :

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (2.1)$$

P : Propriété le long de l'axe z

P_i : La propriété du matériau i

V_i : La fraction volumique du matériau i

Dans le cas d'une structure FGM composée de céramique et de métal inoxydable, la loi de Voigt se réduit à [3]:

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (2.2)$$

« m » étant l'index du métal et « c » l'index de la céramique.

Avec :

$$V_m + V_c = 1 \quad (2.3)$$

Il existe plusieurs lois de distribution à travers l'épaisseur [3] :

2.2.1. La loi de mélange en puissance (P-FGM) :

Suivant la loi de propriétés en fonction de la fraction volumique (Figure 2.2):

$$P(z, T) = [P_t(T) - P_b(T)]V(z) + P_b(T) \quad (2.4)$$

$V(z)$ étant la fraction volumique du P-FGM définit par :

$$V(z) = ((z/h) + 0.5)^n, -\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}$$

Et n l'index de la fraction volumique du P-FGM.

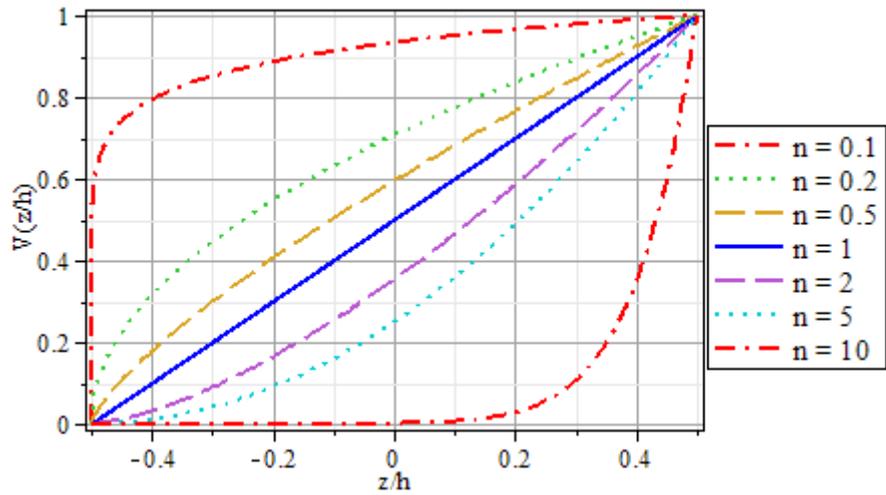


Figure 2.2 : Variation de la fraction volumique du P-FGM

2.2.2. La loi de mélange exponentielle (E-FGM) :

Suivant la loi de propriétés (Figure 2.2) :

$$P(z, T) = P_b(T) \text{Exp}[\left(\frac{z}{h} + 0.5\right) \ln(P_t(T)/P_b(T))] \quad (2.5)$$

Tel que : $-h/2 \leq z \leq +h/2$

Le module de Young obéissant à la loi E-FGM est représenté graphiquement sur la Figure 2.3

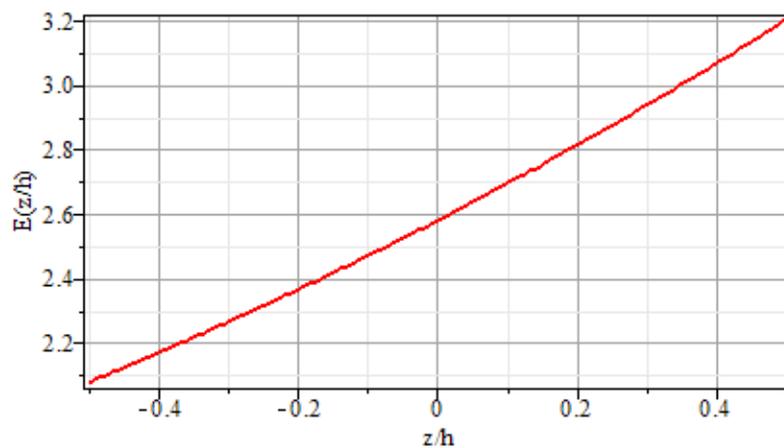


Figure 2.3 : Variation du module de Young E du E-FGM

2.2.3. La loi de mélange sinusoïdale (S-FGM) :

Suivant la loi de propriétés en fonction de la fraction volumique (Figure 2.4) :

$$P(z, T) = [P_t(T) - P_b(T)]V(z) + P_b(T), -h/2 \leq z \leq 0 \quad (2.6)$$

$$P(z, T) = [P_t(T) - P_b(T)]V'(z) + P_b(T), 0 \leq z \leq +h/2$$

Avec :

$$V(z) = 0.5(1 + 2z/h)^p$$

$$V'(z) = 1 - 0.5(1 - 2z/h)^p$$

p étant l'index de la fraction volumique du S-FGM.

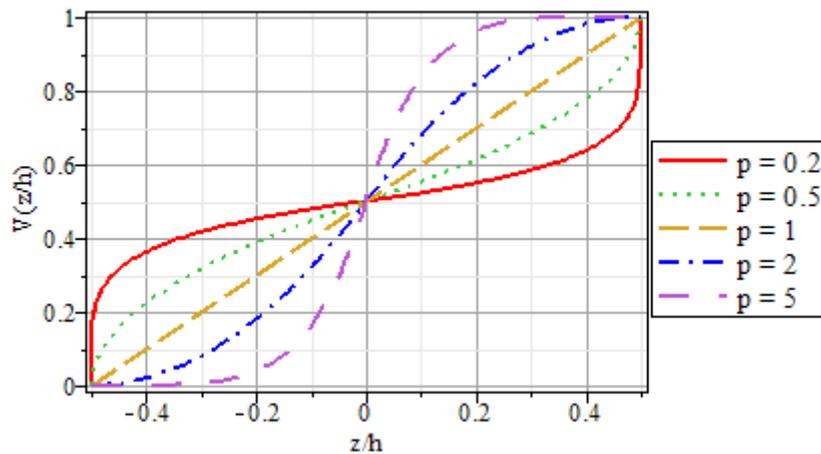


Figure 2.4 : Variation de la fraction volumique de S-FGM

2.3. Théories de déformations des plaques FGM :

Il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer, afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique. En 1888 Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernouli pour fonder une théorie des plaques minces (aussi appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). Mindlin a consolidé la théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) à partir des travaux de Rayleigh (1977), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque [3].

2.3.1. Théorie classique des plaques minces (Kirchhoff) (CPT) :

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces, par Kirchhoff, généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation en cisaillement, appelées poutres d'Euler-Bernouli. Les hypothèses de Kirchhoff reprises par Love sont les suivantes [3]:

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élanement h/a ou $h/b \leq 0.05$). Elle possède un plan moyen également appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés. L'inertie de rotation est aussi négligée.
- La contraintes normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.

L'effet de la déformation en cisaillement transverse augmente d'une manière significative lorsque le rapport d'élanement h/a ou h/b est supérieur ou égale à 0.05. Étant donné que cette théorie néglige la flexibilité de cisaillement transverse, ceci conduit à une surestimation de la rigidité de flexion et en conséquence une surestimation des fréquences de vibration et une sous-estimation des déplacements [3].

Le champ des déplacements d'un point de coordonnées (x,y,z) à l'instant t , s'écrit [9]:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)\end{aligned}\tag{2.7}$$

Où : u, v, w sont les déplacements le long des axes de coordonnées x, y et z d'un point du plan moyen (plan $z = 0$).

Étant donné que les hypothèses de Kirchhoff négligent le cisaillement transverse et l'effet de la déformation axiale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est due essentiellement à la flexion et aux déformations en plan (Figure 2.5) [3].

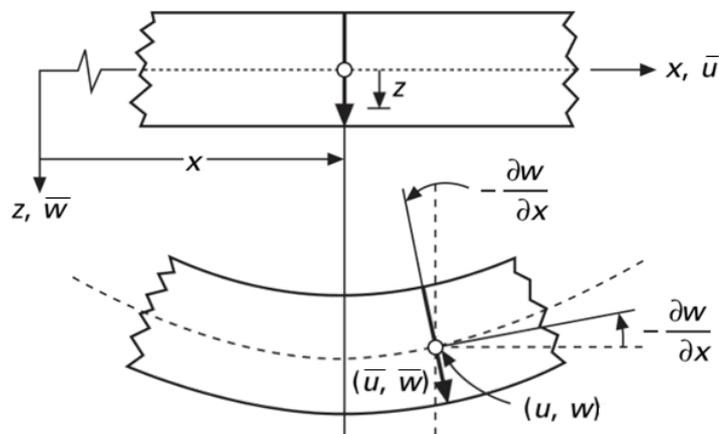


Figure 2.5 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques

2.3.2. Théorie du premier ordre des plaques semi-épaisses (Reissner-Mindlin) (FSDPT) :

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion, une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire.

Contrairement à la théorie des plaques minces, la théorie de Mindlin suppose que les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et non nécessairement normales à celui-ci après déformation. D'autres variantes de la théorie supposent que ces sections ne restent ni droites, ni normales après déformation. Dans la littérature trois approches d'approximation pour les plaques épaisses sont répertoriées (Mindlin, Reissner, Narasimhamurthy, Schmidt, Levinson, Ambartsumyan). L'approche de Reissner suppose un champ de déplacement mixte contenant les contraintes normales dans le plan et les contraintes de cisaillement. L'approche de Henchy-Mindlin suppose un champ de déplacement alors que l'approche d'Ambartsumyan suppose un champ de contraintes normales et de cisaillement. Etant donné que la théorie des plaques du premier ordre ne satisfait pas les conditions aux limites au niveau des surfaces supérieures et inférieures de la plaque (contraintes de traction non nulles), un facteur de correction dépend de la géométrie de la plaque, de la variation du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées [3].

La distribution de la déformation est supposée constante dans l'épaisseur, le champ des déplacements est alors le suivant (Figure 2.6) :

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\Psi_x(x, y, t) \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\Psi_y(x, y, t) \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)\end{aligned}\tag{2.8}$$

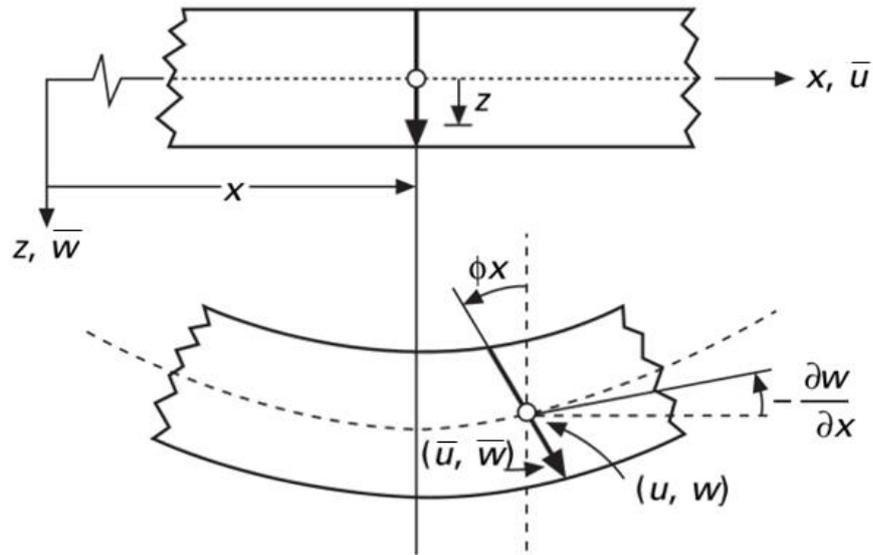


Figure 2.6 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre

Depuis que les déformations de cisaillement transverse sont représentées en tant que constante à travers l'épaisseur, il s'ensuit que la contrainte de cisaillement transverse soit aussi constante.

Il est connu depuis la théorie élémentaire des poutres homogènes, que la contrainte de cisaillement transverse varie paraboliquement à travers l'épaisseur de la poutre. Dans les poutres et plaques composites la contrainte varie quadratiquement à travers l'épaisseur. Cet écart entre l'état de la contrainte actuel et l'état de la contrainte prédit par la théorie du premier ordre, est ainsi corrigé dans le calcul des résultantes des forces de cisaillement transverse par la multiplication de l'intégral par un facteur de correction K [10].

Cela revient à modifier les rigidités de cisaillement transversal de la plaque. Le facteur K est calculé de telle sorte que l'énergie de déformation due aux contraintes de cisaillement transversal (3.12) soit égale à l'énergie de déformation due à des véritables contraintes transversales prédites dans la théorie d'élasticité 3-D [10].

Comme les résultantes en membranes et les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur de la plaque. Elles sont schématisées sur la Figure 2.7 [9].

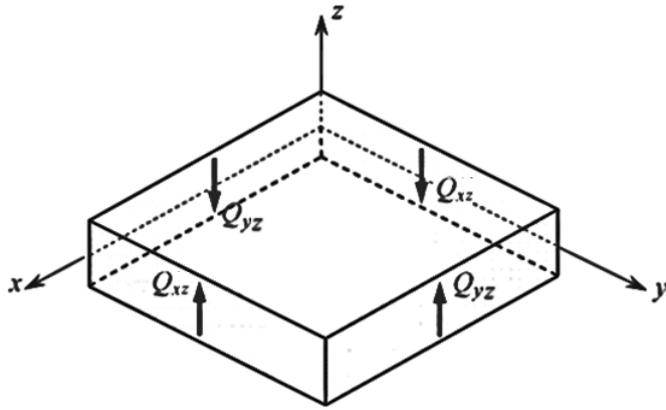


Figure 2.7 : représentation schématique des résultantes de cisaillement transverse

2.3.3. Théorie des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) :

Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, afin d'éviter l'utilisation d'un facteur de cisaillement et pour tenir compte d'hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff, il sera alors nécessaire de passer à un schéma d'ordre supérieur (2^{ème} ordre, 3^{ème} ordre, voire plus), dans le développement des déplacements en série. Par conséquent, ces théories introduisent des fonctions supplémentaires dont les termes sont souvent difficiles à interpréter.

Les hypothèses qui sont à la base du développement des théories d'ordre supérieur sont [3] :

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque ;
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformation.
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable ;
- La contrainte normale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.

Les déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre supérieur sont représentées dans la Figure 2.8 :

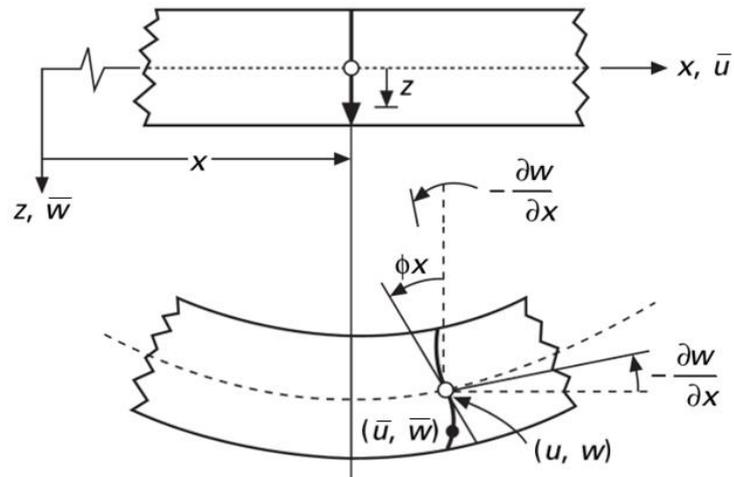


Figure 2.8 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre supérieur

2.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, les lois de distribution des propriétés des matériaux à gradient de propriétés ont été définis, les théories de déformation détaillées et les champs de déplacement écrits sous formulations classiques et du premier ordre.

CHAPITRE 3

ETUDE DES VIBRATIONS DE LA PLAQUE FGM

3.1. Introduction :

Dans ce chapitre, le système d'équations différentielles sera écrit à partir de formulations du premier ordre et à partir de la version dynamique des travaux virtuels appelée principe de Hamilton. Le problème aux valeurs propres sera établi à partir de la méthode de Navier présentée afin d'aboutir au calcul des fréquences de la plaque FGM.

3.2. Champs des déplacements, déformations et des contraintes :

Dans la théorie du premier ordre, les hypothèses de Kirchhoff sont simplifiées par la suppression de la troisième partie, les normales transversales ne restent pas perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (Figure 3.1). Cela revient à inclure des déformations de cisaillement transversal dans la théorie. L'inextensibilité des normales transversales nécessite que w ne soit pas fonction de l'épaisseur de coordonnées z [10].

Parmi les schémas du 1^{er} ordre, le modèle de Reissner-Mindlin néglige les déplacements du plan moyen dans le plan de la plaque, dans ce cas les déplacements sont [3] :

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z, t) &= z \Psi_x(x, y, t) \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= z \Psi_y(x, y, t) \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Où : Ψ_x et Ψ_y sont les rotations de la normale transversale autour des axes « y » et « x » respectivement (Figure 3.1).

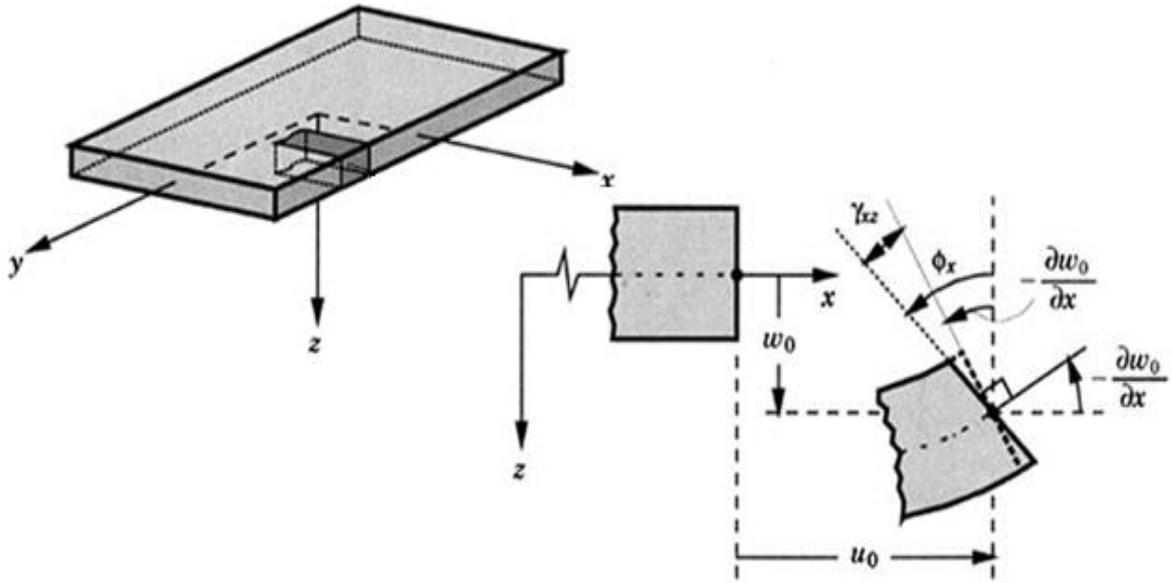


Figure 3.1 : Géométrie non déformée et déformée d'un bord d'une plaque sous les hypothèses du premier ordre

Le champ des déformations axiales est alors :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = z \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = z \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Et le champ des déformations en cisaillement est :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy} &= z \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = \Psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Et le champ des contraintes est : (équations constitutives)

Les contraintes agissant sur un point matériel sont représentées dans la figure 3.2 :

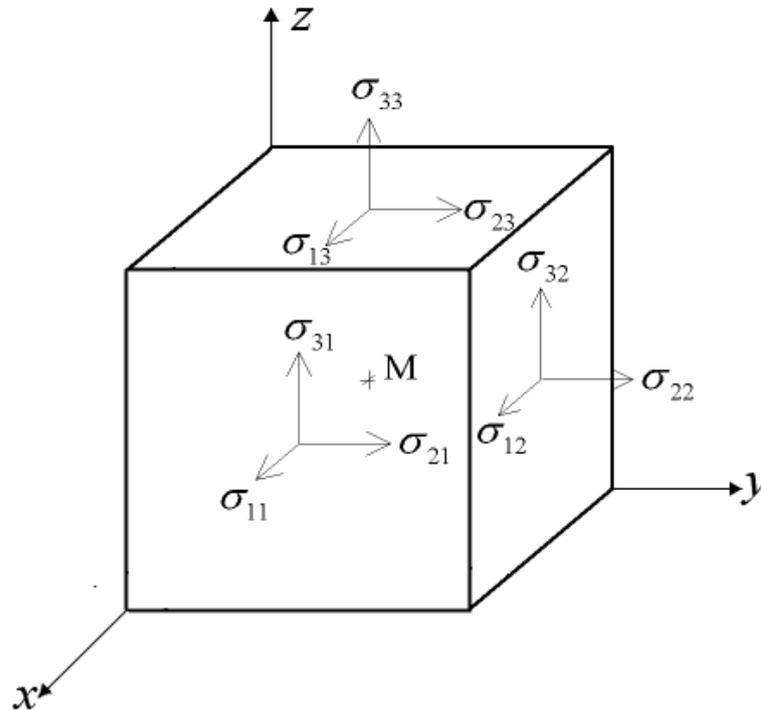


Figure 3.2 : tenseur des contraintes

Etant donné que la plaque FGM possède deux plans de symétrie (xz) et (yx) et que la contrainte normale σ_z est négligeable dans le volume de la plaque, par rapport aux contraintes σ_x et σ_y , on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= Q_{11} \varepsilon_x + Q_{12} \varepsilon_y \\
 \sigma_y &= Q_{21} \varepsilon_x + Q_{22} \varepsilon_y \\
 \sigma_z &= 0 \\
 \sigma_{xy} &= Q_{66} \gamma_{xy} \\
 \sigma_{xz} &= Q_{55} \gamma_{xz} \\
 \sigma_{yz} &= Q_{44} \gamma_{yz}
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Où les Q_{ij} sont les coefficients de rigidité réduite :

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} \\
Q_{12} &= Q_{21} = \frac{\nu(z) \cdot E(z)}{1 - \nu(z)^2} \\
Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2 [1 + \nu(z)]}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

E : module de Young

ν : coefficient de poisson

3.3. Principe des travaux virtuels :

3.3.1.énergie potentielle :

L'énergie totale de déformation de la plaque FGM s'écrit sous la forme [3] :

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \tag{3.6}$$

Où V est le volume de l'élément plaque considéré.

L'équation (3.6) peut être écrite sous la forme :

$$U = \frac{1}{2} \int (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dV \tag{3.7}$$

Et la variation de l'énergie potentielle :

$$\delta U = \int \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \tag{3.8}$$

δ : opérateur de variation

On aura :

$$\delta U = \int (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz}) dV \quad (3.9)$$

Tel que :

$$dV = dA \cdot dz \text{ et } dA = dx \cdot dy$$

A étant la surface de l'élément plaque.

En remplaçant les déformations par leurs expressions respectives, et sachant que :

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \cdot z dz \\ M_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} \cdot z dz \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yx} \cdot z dz \\ Q_{xz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz \\ Q_{yz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta U = \int & \left(M_{xx} \frac{\partial \delta \Psi_x}{\partial x} + M_{yy} \frac{\partial \delta \Psi_y}{\partial y} + M_{xy} \left(\frac{\partial \delta \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \Psi_y}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + Q_{xz} \left(\delta \Psi_x + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + Q_{yz} \left(\delta \Psi_y + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right) dA \end{aligned} \quad (3.11)$$

En Introduisant le coefficient de correction du cisaillement K , il s'ensuit [10] :

$$Q_{xz} = K \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz$$

$$Q_{yz} = K \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz$$
(3.12)

3.3.2. L'énergie cinétique :

L'énergie cinétique de la plaque FGM en vibration libre est donnée par l'expression [3] :

$$E_c = \frac{1}{2} \int \rho(z) \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)^2 \right] dV$$
(3.13)

ρ : La masse volumique.

Tel que :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = z \frac{\partial \Psi_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = z \frac{\partial \Psi_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = z \frac{\partial w}{\partial t}$$
(3.14)

D'où :

$$E_c = \frac{1}{2} \int \rho(z) \left[z^2 \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV$$
(3.15)

Tel que :

$$\int dV = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int dA dz$$

Donc :

$$E_c = \frac{1}{2} \int \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(z) \cdot z^2 dz \left[\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(z) dz \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dA \quad (3.16)$$

Or par définition :

$$I_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(z) dz$$

$$I_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(z) \cdot z dz \quad (3.17)$$

$$I_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(z) \cdot z^2 dz$$

Où I_0, I_1, I_2 sont les inerties axiales, de couplage et de rotation respectivement.

L'énergie cinétique devient alors :

$$E_c = \frac{1}{2} \int I_2 \left\{ \left[\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] + I_0 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dA \quad (3.18)$$

Et la variation de l'énergie cinétique :

$$\delta E_c = \int \left\{ I_2 \left[\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \frac{\partial \delta \Psi_x}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \frac{\partial \delta \Psi_y}{\partial t} \right] + I_0 \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right\} dA \quad (3.19)$$

3.4. Application du principe de Hamilton :

Afin de déterminer les équations différentielles du mouvement vibratoire de la plaque FGM, nous nous appuyons sur le principe de Hamilton qui est un principe général pouvant être appliqué à une large classe de problèmes de mécanique des solides déformables et qui stipule que:

$$\int_0^t \delta \mathcal{L} dt = 0 \quad (3.20)$$

Où \mathcal{L} représente le Lagrangien et t la variable temps.

Or l'application du principe de Hamilton nécessite la détermination de chaque terme de l'énergie, nous avons :

$$\mathcal{L} = E_c - U \quad (3.21)$$

Et la variation du Lagrangien :

$$\delta \mathcal{L} = \delta E_c - \delta U \quad (3.22)$$

L'équation (3.22) implique :

$$\int_0^t \delta E_c dt - \int_0^t \delta U dt = 0 \quad (3.23)$$

Nous devons donc évaluer :

$$\int_0^t \delta E_c dt \quad \text{et} \quad \int_0^t \delta U dt$$

En remplaçant δE_C et δU par leurs expressions respectives, en intégrant par partie et en collectant les termes de $\delta\Psi_x$, $\delta\Psi_y$ et δw nous obtenons les 3 équations différentielles qui régissent le mouvement de la plaque FGM :

$$\begin{aligned}\delta\Psi_x &: -\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_{xz} + I_2 \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} = 0 \\ \delta\Psi_y &: -\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_{yz} + I_2 \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} = 0 \\ \delta w &: -\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\end{aligned}\quad (3.24)$$

Dans ces équations différentielles, nous devons remplacer les forces et les moments par leurs expressions après avoir intégré les équations (3.10). Les rigidités qui apparaissent dans ces équations sont:

Les rigidités en membrane :

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{ij} dz \quad (3.25)$$

Et les rigidités de flexion :

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{ij} z^2 dz \quad (3.26)$$

Exemples de calcul :

Exemple 1 :

$$\begin{aligned}M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \cdot z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (Q_{11} \cdot z \cdot \varepsilon_x + Q_{12} \cdot z \cdot \varepsilon_y) dz \\ M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (Q_{11} \cdot z^2 \cdot \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + Q_{12} \cdot z^2 \cdot \frac{\partial \Psi_y}{\partial y}) dz\end{aligned}$$

$$M_{xx} = \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{11} \cdot z^2 \cdot dz + \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{12} \cdot z^2 \cdot dz$$

En posant :

$$D_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{11} z^2 \cdot dz \quad \text{et} \quad D_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{12} z^2 \cdot dz$$

Nous obtenons :

$$M_{xx} = D_{11} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y}$$

Exemple 2 :

$$Q_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz = \sigma_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{55} \gamma_{xz} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{55} \left(\Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz$$

Nous obtenons de la même manière Q_{xz} :

$$Q_{xz} = \left(\Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{55} dz = A_{55} \left(\Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

On aura finalement :

$$M_{xx} = D_{11} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y}$$

$$M_{yy} = D_{21} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y}$$

$$M_{xy} = D_{66} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right) \tag{3.27}$$

$$Q_{xz} = A_{55} \left(\Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$Q_{yz} = A_{44} \left(\Psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

En remplaçant les forces et moments par leurs expressions respectives dans les équations différentielles, nous obtenons :

$\delta\Psi_x$:

$$-D_{11} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x \partial y} - D_{66} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial y^2} - D_{66} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x \partial y} + A_{55} \left(\Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + I_2 \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} = 0$$

$\delta\Psi_y$:

$$-D_{12} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x \partial y} - D_{22} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial y^2} - D_{66} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x \partial y} - D_{66} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x^2} + A_{44} \left(\Psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + I_2 \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} = 0$$

δw :

$$-A_{55} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} - A_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{44} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} - A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Finalement, le système d'équations différentielles obtenu est le suivant :

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x \partial y} - A_{55} \left(\Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= I_2 \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} \\ D_{22} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x \partial y} - A_{44} \left(\Psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= I_2 \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} \quad (3.28) \\ A_{55} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + A_{44} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + A_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}$$

3.5. Calcul des fréquences de la plaque FGM :

3.5.1. Méthode de Navier :

La méthode de Navier est une méthode qui approxime les déplacements et rotations par des séries finies. Elle ne peut être appliquée qu'aux poutres et plaques sur appuis simples car les conditions aux limites correspondantes sont automatiquement satisfaites. Elle approxime les déplacements et rotations de la structure à travers les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
U &= \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] \sin\omega t \\
V &= \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] \sin\omega t \\
W &= \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] \sin\omega t \\
\Psi_x &= \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Psi_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] \sin\omega t \\
\Psi_y &= \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \varphi_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] \sin\omega t
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Où : U_{mn} , V_{mn} et W_{mn} sont les amplitudes des déplacements, Ψ_{mn} et φ_{mn} sont les amplitudes des rotations. ω est la fréquence circulaire de vibration et t est la variable temps.

Cette forme des déplacements et rotations vérifie exactement les conditions aux limites de la plaque. Les déplacements U , V , W , Ψ_x et Ψ_y sont ensuite injectés dans les équations du mouvement. Il faut alors isoler les termes U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , Ψ_{mn} et φ_{mn} . Les coefficients de ces termes doivent être identiquement nuls (pour ne pas avoir une solution triviale), ce qui donne un système d'équations algébriques homogènes et linéaires. Le déterminant de ce système d'équations fournit les fréquences propres.

Le champ de déplacements de Navier est donc : (il n'est pas nécessaire d'inclure la double sommation)

$$\begin{aligned}
w(x, y, t) &= A. \sin(\alpha. x) . \sin(\beta. y) . \sin(\omega. t) \\
\Psi_x(x, y, t) &= B. \cos(\alpha. x) . \sin(\beta. y) . \sin(\omega. t) \\
\Psi_y(x, y, t) &= C. \sin(\alpha. x) . \cos(\beta. y) . \sin(\omega. t)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

3.5.2. Problème aux valeurs propres :

Les conditions d'appuis simples considérées se résument à :

$$\Psi_y = w = M_x = 0 \quad x=0, a \quad (3.31)$$

$$\Psi_x = w = M_y = 0 \quad y=0, b$$

En remplaçant les expressions (3.30) dans le système (3.28), nous obtenons :

$$(A_{55}m a b^2 \pi)A_{mn} + (D_{11}m^2 b^2 \pi^2 + D_{66}n^2 a^2 \pi^2 + A_{55} a^2 b^2)B_{mn} + (D_{12}m n b \pi^2 + D_{66}n m a b \pi^2)C_{mn} = \omega_{mn}^2 (a^2 b^2 I_2)B_{mn}$$

$$(A_{44}n a^2 b \pi)A_{mn} + (D_{12}m n a b \pi^2 + D_{66}m n a b \pi^2)B_{mn} + (D_{22}n^2 a^2 b^2 \pi^2 + D_{66}m^2 b^2 \pi^2 + A_{44}a^2 b^2)C_{mn} = \omega_{mn}^2 (a^2 b^2 I_2)C_{mn}$$

$$(A_{55}m^2 b^2 \pi^2 + A_{44} n^2 a^2 \pi^2)A_{mn} + (A_{55}m a b^2 \pi)B_{mn} + (A_{44}n a^2 b \pi)C_{mn} = \omega_{mn}^2 (a^2 b^2 I_0)A_{mn}$$

Détermination des matrices masse et rigidité :

$$\begin{aligned} K_{11}A_{mn} + K_{12}B_{mn} + K_{13}C_{mn} - \omega_{mn}^2 I_2 B_{mn} &= 0 \\ K_{21}A_{mn} + K_{22}B_{mn} + K_{23}C_{mn} - \omega_{mn}^2 I_2 C_{mn} &= 0 \\ K_{31}A_{mn} + K_{32}B_{mn} + K_{33}C_{mn} - \omega_{mn}^2 I_0 A_{mn} &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Avec :

$$K_{11} = A_{55} \frac{mab^2\pi}{a^2b^2} = A_{55} \frac{m\pi}{a}$$

$$K_{12} = (D_{11}m^2 b^2 \pi^2 + D_{66}n^2 a^2 \pi^2 + A_{55}a^2 b^2)/a^2b^2$$

$$K_{13} = (D_{12}m n a b \pi^2 + D_{66}n m a b \pi^2)/a^2b^2 = (D_{12} + D_{66}) \frac{mn}{ab} \pi^2$$

$$K_{21} = A_{44} \frac{na^2b\pi}{a^2b^2} = A_{44} \frac{n\pi}{b}$$

$$K_{22} = (D_{21}m n a b \pi^2 + D_{66}m n a b \pi^2)/a^2b^2 = (D_{12} + D_{66}) \frac{mn}{ab} \pi^2$$

$$K_{23} = (D_{22}n^2 b^2 \pi^2 + D_{66}m^2 b^2 \pi^2 + A_{44}a^2 b^2)/a^2b^2$$

$$K_{31} = (A_{55}m^2 b^2 + A_{44} n^2 a^2)/a^2b^2$$

$$K_{32} = A_{55} \frac{mab^2}{a^2b^2} \pi A_{44} \frac{n\pi}{a}$$

$$K_{33} = A_{44} \frac{na^2b\pi}{a^2b^2} \pi A_{44} \frac{n\pi}{b}$$

Soit sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{Bmatrix} - \omega_{mn}^2 \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \\ I_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Donnant la forme :

$$\left[\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} - \omega_{mn}^2 \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \\ I_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Ce qui peut être écrit sous la forme suivante :

$$[[K] - \omega_{mn}^2[M]]\{q\} = \{0\}$$

Tel que : $m = n = 1, 2, 3, \dots$

Où : $[K]$ matrice rigidité

$[M]$ matrice masse

$\{q\}$ vecteur propre

$\{q\} = \{0\}$ étant une solution triviale, nous obtenons le problème aux valeurs propres standard suivant :

$$|[K] - \omega_{mn}^2[M]| = 0 \quad (3.34)$$

En posant :

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n\pi}{b}$$

Nous avons :

$$\begin{bmatrix} \alpha A_{55} & A_{55} + \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} & \alpha\beta(D_{12} + D_{66}) \\ \beta A_{44} & \alpha\beta(D_{21} + D_{66}) & A_{44} + \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} \\ A_{44} + \alpha^2 A_{55} + \beta^2 A_{44} & \alpha A_{55} & \beta A_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \\ I_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.35)$$

En transformant le système pour obtenir des matrices symétriques, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 A_{55} + \beta^2 A_{44} & \alpha A_{55} & \beta A_{44} \\ \alpha A_{55} & A_{55} + \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} & \alpha\beta(D_{12} + D_{66}) \\ \beta A_{44} & \alpha\beta(D_{21} + D_{66}) & A_{44} + \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.36)$$

En résolvant ce système, les fréquences naturelles de notre système vibratoire libre sont facilement calculées par des procédures standards de résolution.

3.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, les équations différentielles du mouvement de la plaque FGM ont été écrites en se basant sur la version dynamique des travaux virtuels connue en tant que principe de Hamilton. En utilisant la méthode analytique de Navier appliquée à une plaque FGM sur appuis simples, nous aboutissons à la forme canonique du problème représenté par l'équation (3.36) dont la résolution nous permettra d'obtenir l'ensemble des fréquences naturelles du système vibratoire analysé.

CHAPITRE 4

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

4.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons élaborer un programme informatique qui calcule les fréquences propres naturelles d'une plaque P-FGM sous appuis simples en fonction de l'index de la fraction volumique n et de l'allongement b/h et présenter les résultats obtenus suite à son exécution. Nous commencerons par valider nos résultats en les comparant avec ceux de deux articles déjà publiés [11] et [12], nous présenterons enfin des tableaux et des graphes pour discuter l'influence de l'allongement b/h et l'index de la fraction volumique n sur les fréquences propres naturelles.

Afin de comparer nos résultats avec ceux des travaux déjà effectués, et les valider par la suite, on considère une plaque P-FGM carrée à deux constituants (100% céramique au niveau de la face supérieure et 100% métal au niveau de la face inférieure). Le rapport b/h définit l'allongement de notre plaque d'épaisseur h égale à 0.0254 m, les propriétés du métal et de la céramique pris en compte dans les deux cas de plaques sont les suivantes :

Plaque P-FGM: Al/ZrO₂:

ZrO₂ : $E = 200$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho = 5700$ Kg/m³

Al : $E = 70$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho = 2702$ Kg/m³

Plaque P-FGM: Al/Al₂O₃:

Al₂O₃: $E = 380$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho = 3800$ Kg/m³

Al : $E = 70$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho = 2702$ Kg/m³

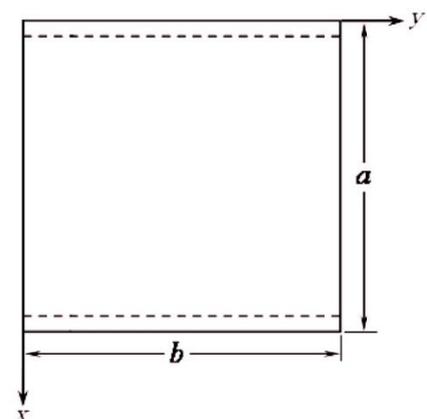
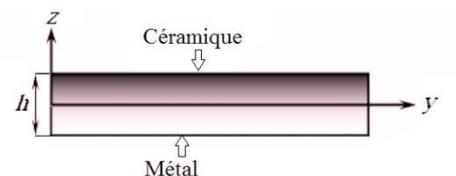
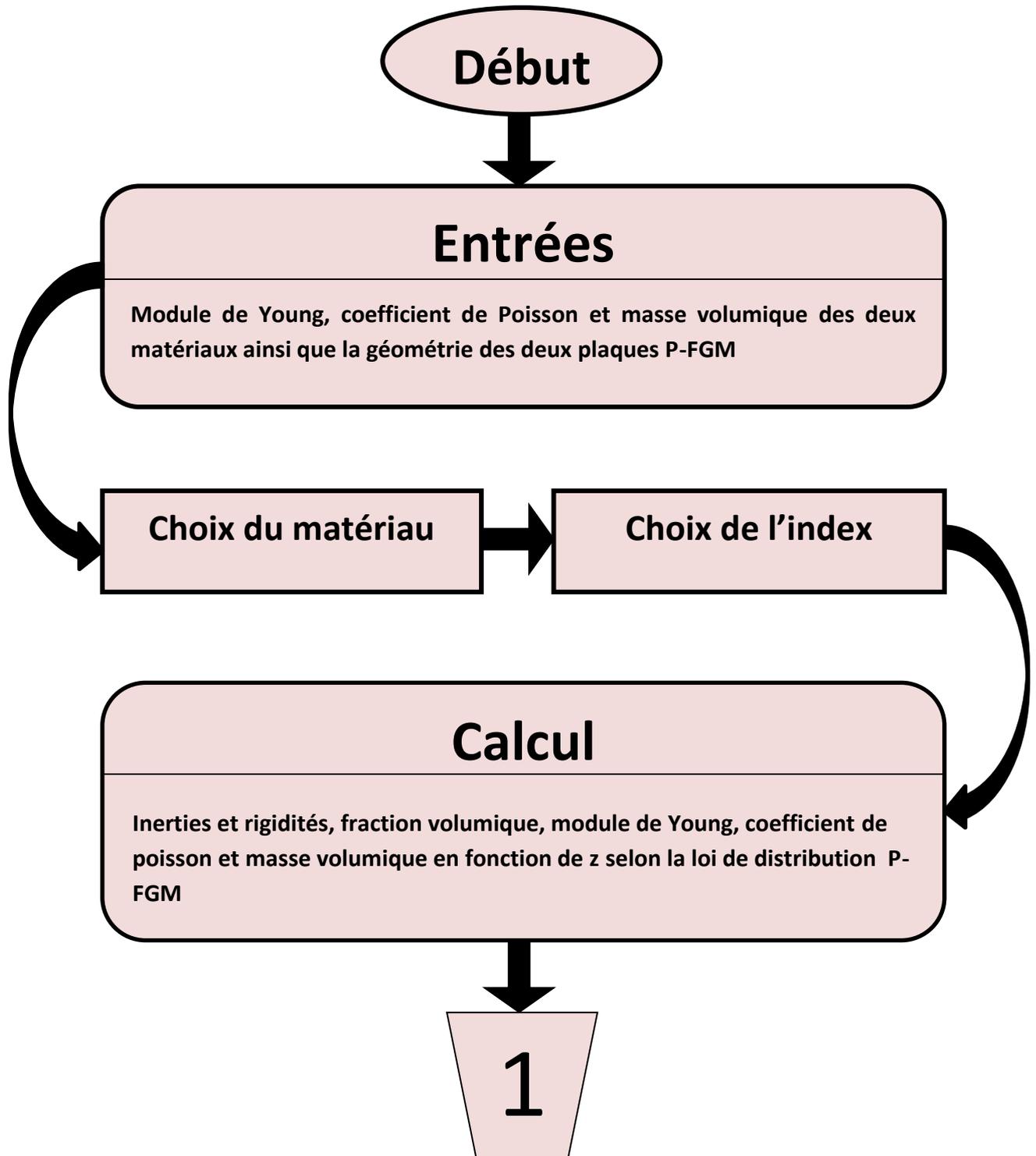


Figure 4.1 : Géométrie de la plaque

- Al : Aluminium (métal).
ZrO₂ : Zircon (céramique).
Al₂O₃ : Alumine (céramique).

4.2. Organigramme du programme de calcul :



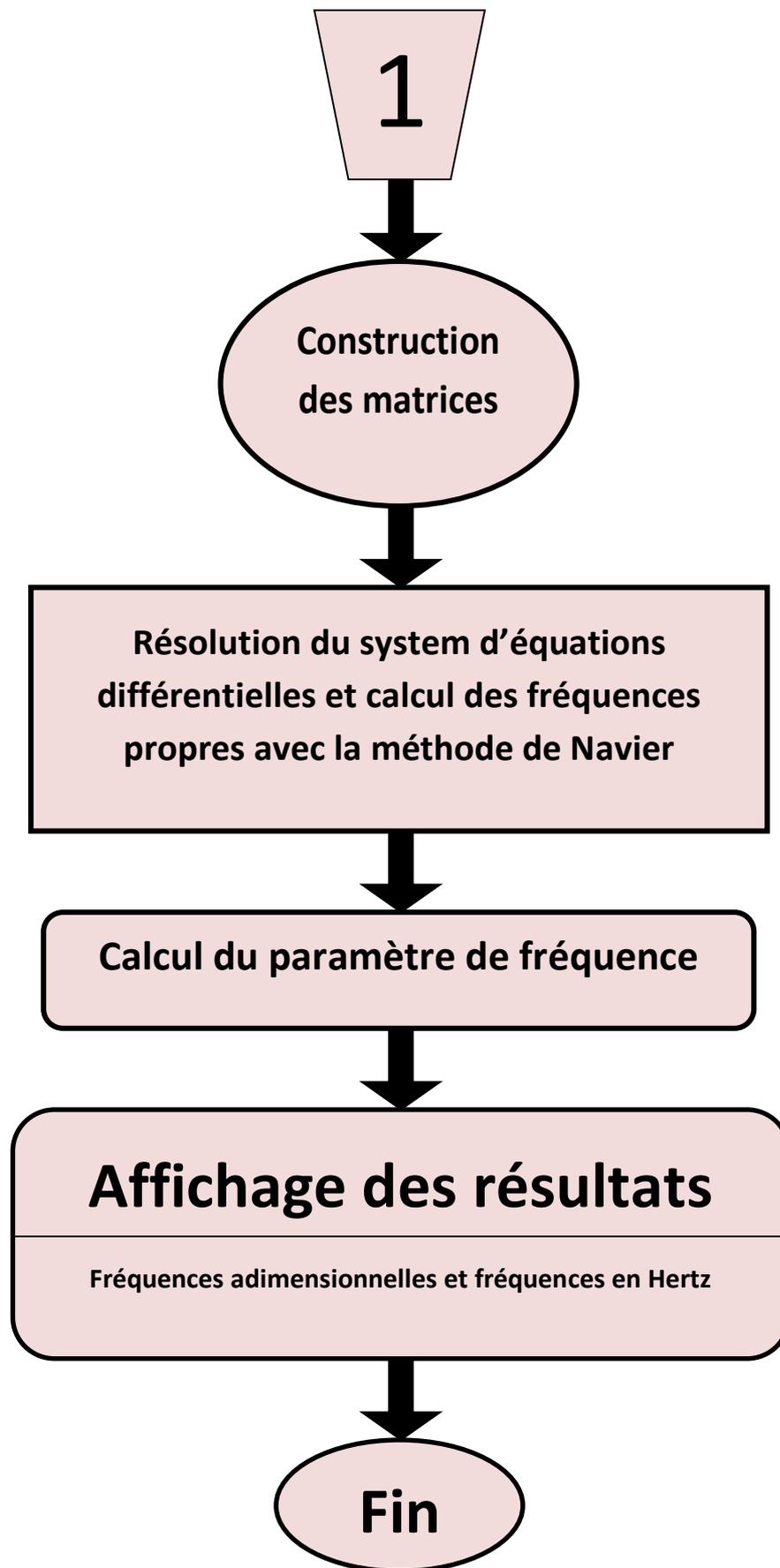


Figure 4.2 : Organigramme du programme de calcul

4.3. Validation des résultats :

Pour valider la méthode de calcul adoptée dans notre travail, nos résultats sont comparés à d'autres résultats obtenus et publiés auparavant. Dans tout ce qui va suivre, les fréquences propres naturelles sont présentées sous forme adimensionnelles suivantes selon le cas :

$$\bar{\omega} = \omega(h\sqrt{\rho_c/E_c}) \quad (4.1)$$

$$\bar{\omega} = \omega(a^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (4.2)$$

$\bar{\omega}$: Fréquence propre naturelle adimensionnelle ou paramètre de fréquence

ω : Fréquence propre naturelle

4.3.1. Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque P-FGM carrée simplement supportée, $\bar{\omega} = \omega(h\sqrt{\rho_c/E_c})$:

Le tableau 4.1 présente la variation du paramètre de la fréquence fondamentale en fonction de l'index de la fraction volumique n et du rapport d'allongement b/h concernant une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃ simplement supportée. L'erreur relative entre nos résultats et ceux de l'article de référence est calculée pour permettre la comparaison.

Tableau 4.1 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque P-FGM Al/Al₂O₃

b/h	Source	Index de la fraction volumique n					
		0	0,5	1	4	10	∞
		Paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega (h \sqrt{\rho_c / E_c})$					
5	Présente théorie	0,21121	0,18058	0,16502	0,13716	0,13045	0,1075
	Réf. [11]	0,2112	0,1806	0,1650	0,1371	0,1304	0,1075
	Réf. [12]	0,2055	0,1757	0,1587	0,1356	0,1284	-
	% erreur (Présente/Réf. [11])	0,00%	0,01%	-0,01%	-0,04%	-0,04%	0,00%
	% erreur (Réf. [12]/Réf. [11])	-2,77%	-2,79%	-3,97%	-1,11%	-1,56%	-
10	Présente théorie	0,05769	0,04921	0,04455	0,03826	0,03628	0,02937
	Réf. [11]	0,0577	0,0492	0,0445	0,0383	0,0363	0,0294
	Réf. [12]	0,0567	0,0482	0,0435	0,0376	0,0359	-
	% erreur (Présente/Réf. [11])	0,00%	-0,02%	-0,02%	-0,03%	-0,03%	-0,03%
	% erreur (Réf. [12]/Réf. [11])	-1,69%	-2,12%	-2,49%	-1,81%	-1,00%	-
20	Présente théorie	0,0148	0,01281	0,0115	0,01013	0,00963	0,00753
	Réf. [11]	0,0148	0,0128	0,0115	0,0101	0,0096	-
	Réf. [12]	0,0146	0,0124	0,0112	0,0097	0,0093	-
	% erreur (Présente/Réf. [11])	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-
	% erreur (Réf. [12]/Réf. [11])	-1,09%	-3,22%	-2,86%	-4,43%	-3,44%	-

[11]: Sh. Hosseini-Hashemi, H. RokniDamavandiTaher, H. Akhavan, M. Omidi. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling* 34 (2010) 1276–1291.

[12]: X. Zhao, Y.Y. Lee, K.M. Liew, Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, *J. Sound Vib.* 319 (2009) 918–939.

Il faut noter que l'article de référence [11] est basé sur une méthode analytique exacte alors que l'article de référence [12] est basé sur une méthode d'approximation numérique appelée « pk-Ritz method ».

L'erreur relative entre les fréquences calculées par notre présente théorie et celles de l'article [11] est très petite et varie entre 0.00% lorsque $b/h = 20$ (plaque mince) et 0.04% lorsque $b/h = 5$ (plaque relativement épaisse). Ceci est dû aux forces de cisaillement transverses qui deviennent de plus en plus importantes avec l'augmentation de l'épaisseur. Notons que nous n'avons introduit ces forces dans notre calcul qu'avec un facteur de correction de cisaillement K évalué par la formule empirique suivante [11] :

$$K = \frac{5}{6} + C_1(e^{-C_2.n} - e^{-C_3.n}).\left(10.\frac{h}{a} - 2\right) - C_4(e^{-C_5.n} - e^{-C_6.n}).\left(10.\frac{h}{a} - 1\right) \quad (4.3)$$

C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 et C_6 sont des constantes concernant le matériau.

Les figures 4.3, 4.4 et 4.5 montrent l'influence de l'index de la fraction volumique n sur le paramètre de la fréquence fondamentale de notre plaque P-FGM, avec b/h égal à 5, 10 et 20 respectivement. Les résultats considérés sont ceux de la référence [11], la référence [12] et notre présente théorie.

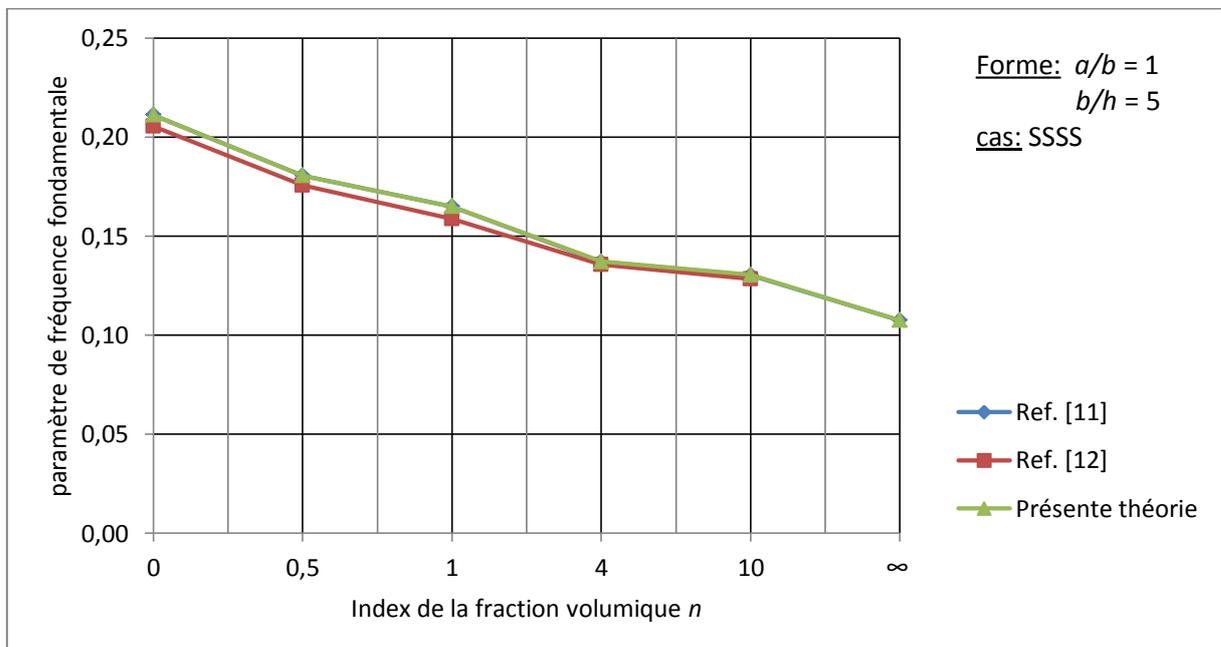


Figure 4.3 : Paramètre de fréquence fondamentale adimensionnelle en fonction de l'index de la fraction volumique d'une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃ sur appuis simples ($b/h = 5$)

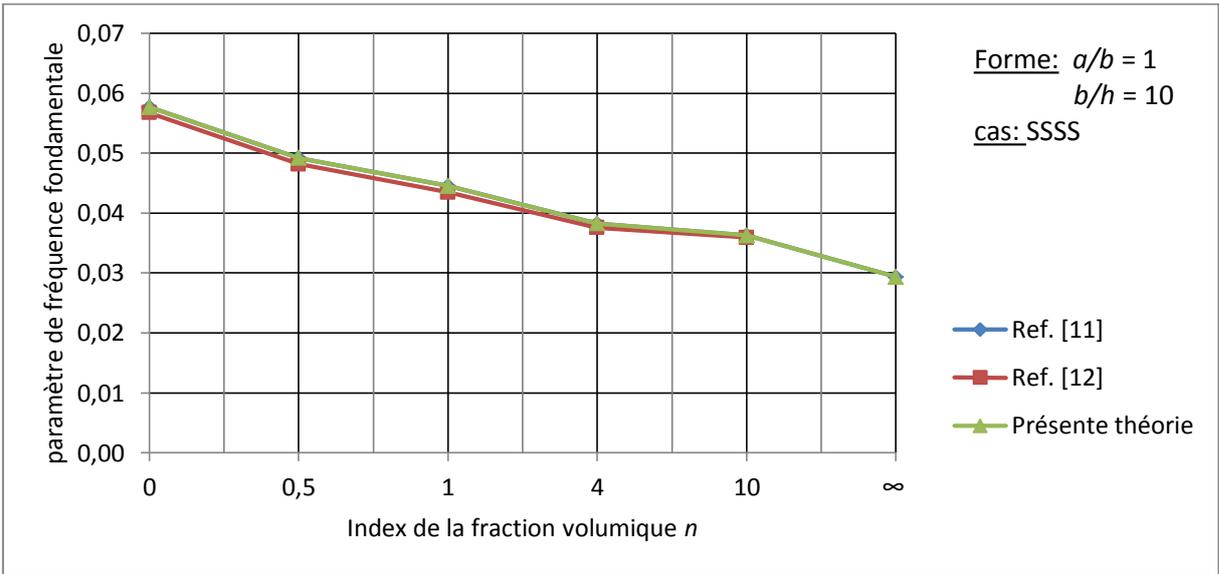


Figure 4.4 : Paramètre de fréquence fondamentale adimensionnelle en fonction de l'index de la fraction volumique d'une plaque carrée P-FGM $AlAl_2O_3$ sur appuis simples ($b/h = 10$)

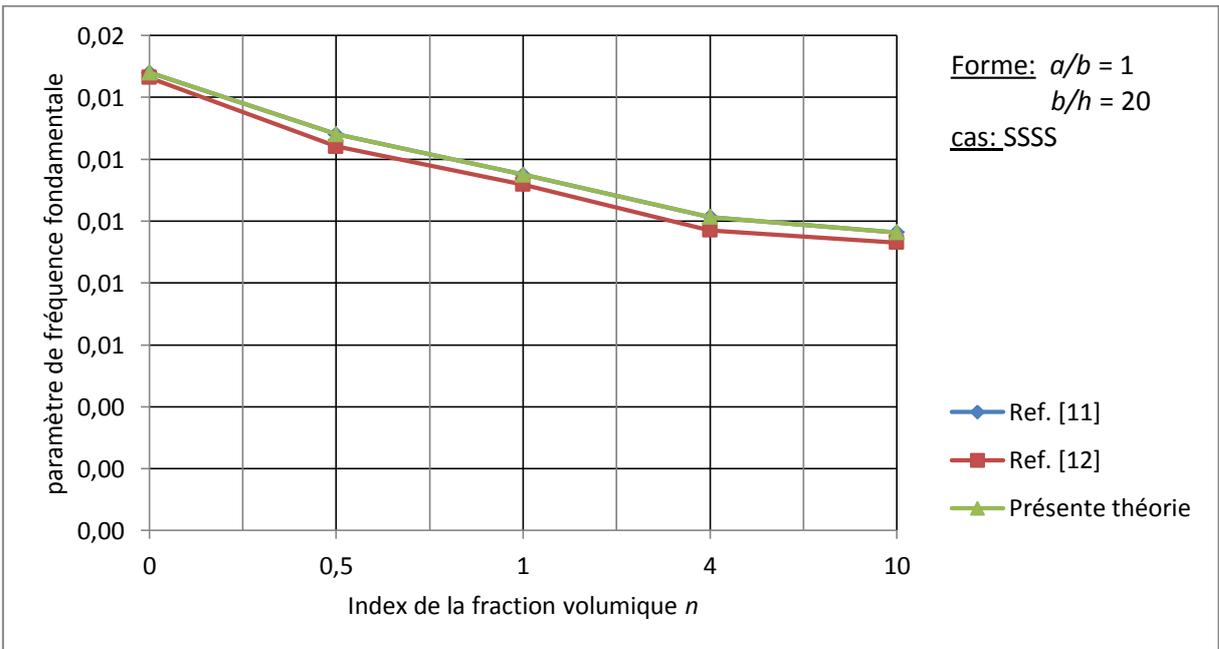


Figure 4.5 : Paramètre de fréquence fondamentale adimensionnelle en fonction de l'index de la fraction volumique d'une plaque carrée P-FGM Al/Al_2O_3 sur appuis simples ($b/h = 20$)

Le paramètre de fréquence fondamentale représenté sur les figures 4.3, 4.4 et 4.5 diminue en augmentant l'index de la fraction volumique, c'est-à-dire en introduisant plus de métal dans la plaque P-FGM, ce qui amoindrit sa rigidité. Nous remarquons que notre courbe est confondue avec la courbe représentant les résultats de la référence [11], cela est dû à l'erreur relative minime entre les fréquences obtenues avec les deux méthodes de calcul.

Les figures 4.6, 4.7 et 4.8 montrent l'évolution de notre erreur relative et celle de la référence [12], par rapport à la référence [11]. On a choisi la référence [11] comme base de comparaison parce qu'elle utilise une méthode de résolution analytique exacte.

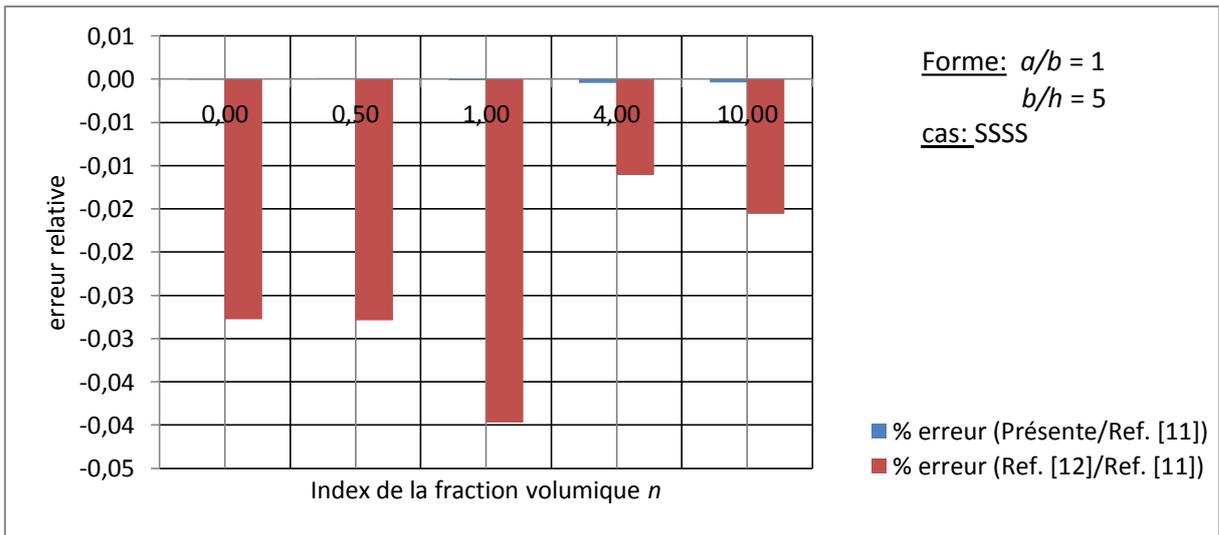


Figure 4.6: Evolution de l'erreur relative entre les résultats de [12] et [11] et de la présente théorie et [11] ($b/h = 5$)

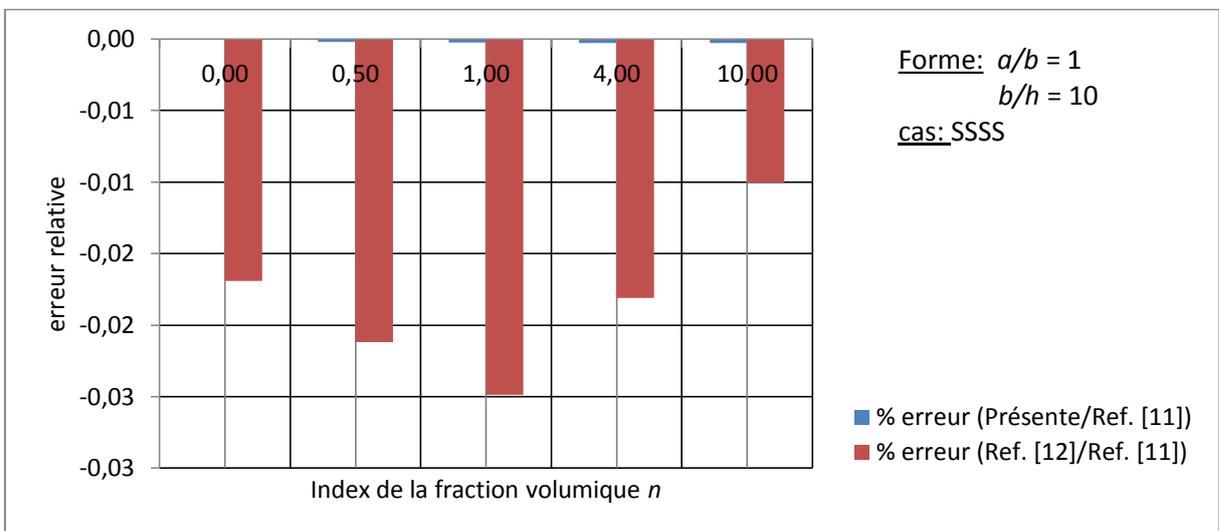


Figure 4.7 : Evolution de l'erreur relative entre les résultats de [12] et [11] et de la présente théorie et [11] ($b/h = 10$)

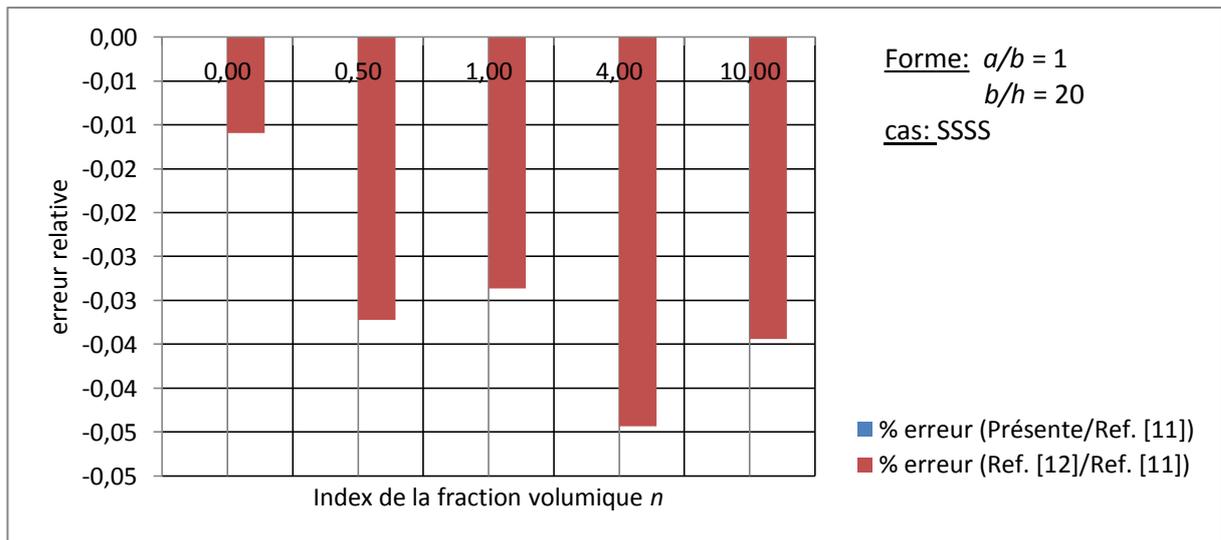


Figure 4.8 : Evolution de l'erreur relative entre les résultats de [12] et [11] et de la présente théorie et [11] ($b/h = 20$)

L'erreur relative représentée sur les figures 4.6, 4.7 et 4.8 nous fait remarquer une bonne concordance avec les résultats de l'article de référence [11].

4.3.2. Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque FGM carrée simplement supportée, $\bar{\omega} = \omega(a^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$:

Le tableau 4.2 présente la variation du paramètre de la fréquence fondamentale en fonction de l'index de la fraction volumique n avec un rapport d'allongement b/h égal à 10, pour deux plaques carrées P-FGM : Al/Al₂O₃ et Al/ZrO₂ simplement supportés.

Le tableau 4.2 montre que l'erreur relative entre les fréquences calculées par la présente théorie et celles de l'article [11] est très petite pour les deux plaques P-FGM, ce qui montre que nos résultats sont très bons et bien meilleurs que ceux de la référence [12].

Tableau 4.2 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale des plaques P-FGM : Al/Al₂O₃ et Al/ZrO₂ simplement supportées avec b/h égal à 10

Plaque FGM	Source	Index de la fraction volumique n						
		0	0,5	1	2	5	8	10
		Paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega(a^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$						
Al/Al ₂ O ₃	Présente théorie	5,76932	4,92067	4,45453	4,0063	3,78369	3,6828	3,62771
	Réf. [11]	5,7693	4,9207	4,4545	4,0063	3,7837	3,683	3,6277
	Réf. [12]	5,6763	4,8209	4,3474	3,9474	3,7218	3,641	3,5923
	% erreur (Présente/Réf. [11])	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,00%
	% erreur (Réf. [12]/Réf. [11])	-1,64%	-2,07%	-2,46%	-1,49%	-1,66%	-1,15%	-0,99%

Al/ZrO ₂	Présente théorie	5,76932	5,31762	5,25317	5,28727	5,294	5,23123	5,18929
	Réf. [11]	5,7693	5,3176	5,2532	5,3084	5,2940	5,2312	5,1893
	Réf. [12]	5,6763	5,1105	4,8713	4,6977	4,5549	4,4741	4,4323
	% erreur (Présente/Réf. [11])	0,00%	0,00%	0,00%	0,40%	0,00%	0,00%	0,00%
	% erreur (Réf. [12]/Réf. [11])	-1,64%	-4,05%	-7,84%	-13,00%	-16,23%	-16,92%	-17,08%

[11]: Sh. Hosseini-Hashemi, H. RokniDamavandiTaher, H. Akhavan, M. Omidi. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling* 34 (2010) 1276–1291.

[12]: X. Zhao, Y.Y. Lee, K.M. Liew, Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, *J. Sound Vib.* 319 (2009) 918–939.

Les figures 4.9 et 4.10 montrent l'influence de l'index de la fraction volumique n sur le paramètre de la fréquence fondamentale de nos deux plaques P-FGM : Al/Al₂O₃ et Al/ZrO₂ respectivement, avec b/h égal à 10. Les résultats considérés sont ceux de la référence [11], la référence [12] et la présente théorie.

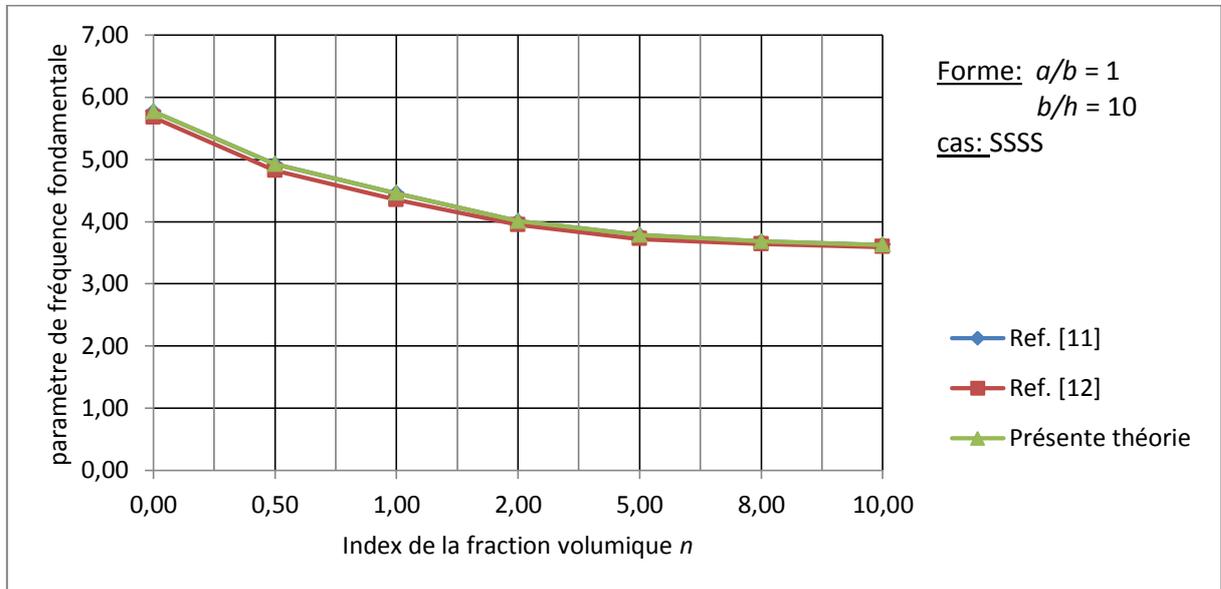


Figure 4.9 : Paramètre de fréquence fondamentale adimensionnelle en fonction de l'index de la fraction volumique d'une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃ sur appuis simples ($b/h = 10$)

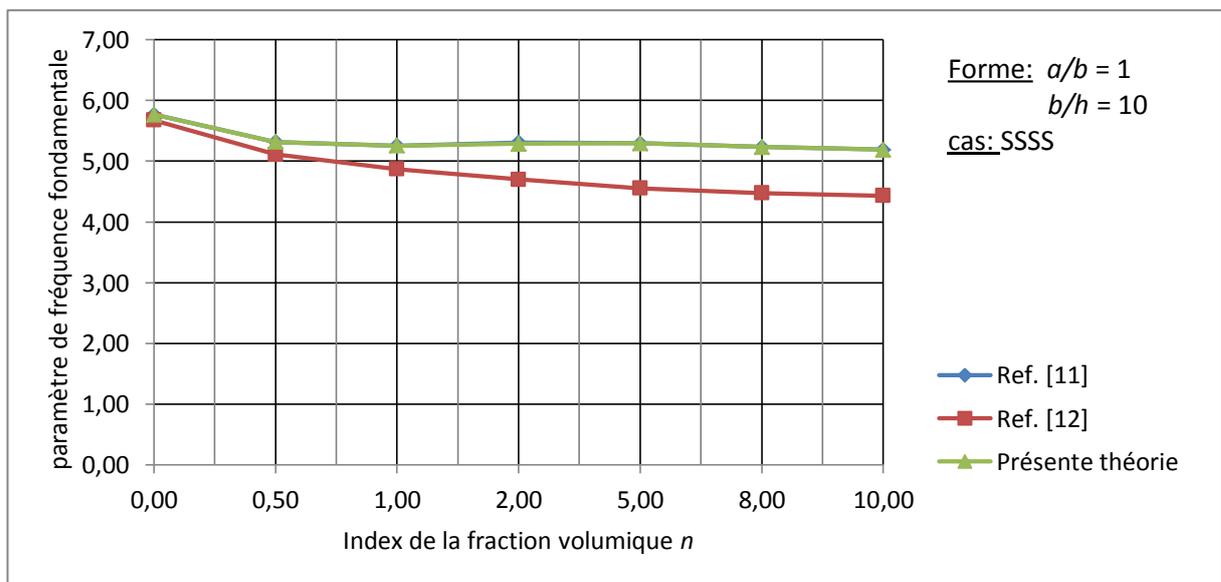


Figure 4.10 : Paramètre de fréquence fondamentale adimensionnelle en fonction de l'index de la fraction volumique d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO₂ sur appuis simples ($b/h = 10$)

Les figures 4.11 et 4.12 montrent l'évolution de notre erreur relative et celle de la référence [12], par rapport à la référence [11]. Cette étude d'erreur pour deux types de plaques P-FGM nous permet de juger que nos résultats de très bons vu la concordance avec les résultats de la référence [11].

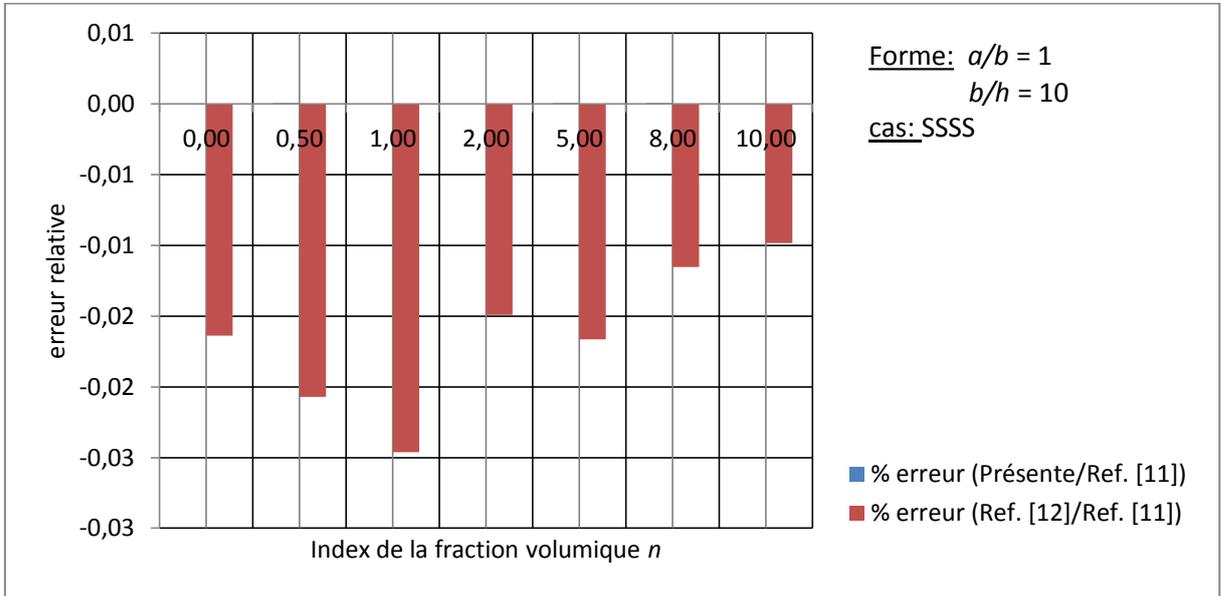


Figure 4.11 : Evolution de l'erreur relative entre les résultats de [12] et [11] et de la présente théorie et [11] ($b/h = 10$) pour une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃

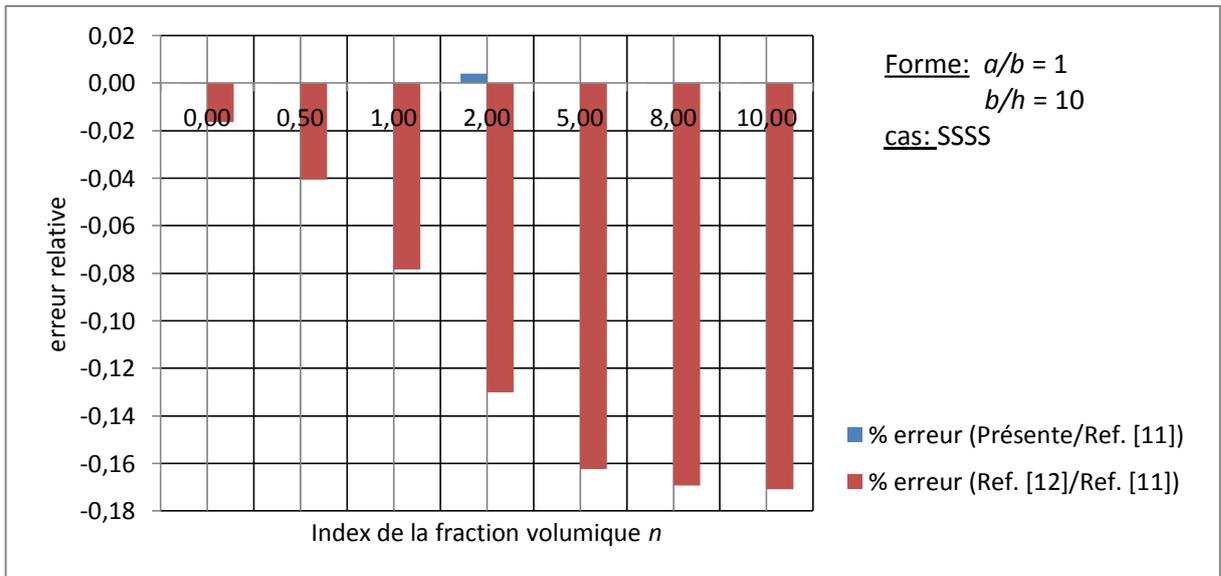


Figure 4.12 : Evolution de l'erreur relative entre les résultats de [12] et [11] et de la présente théorie et [11] ($b/h = 10$) pour une plaque carrée P-FGM Al/ZrO₂

4.4 Influence de l'index n sur la rigidité et la masse volumique d'une plaque P-FGM :

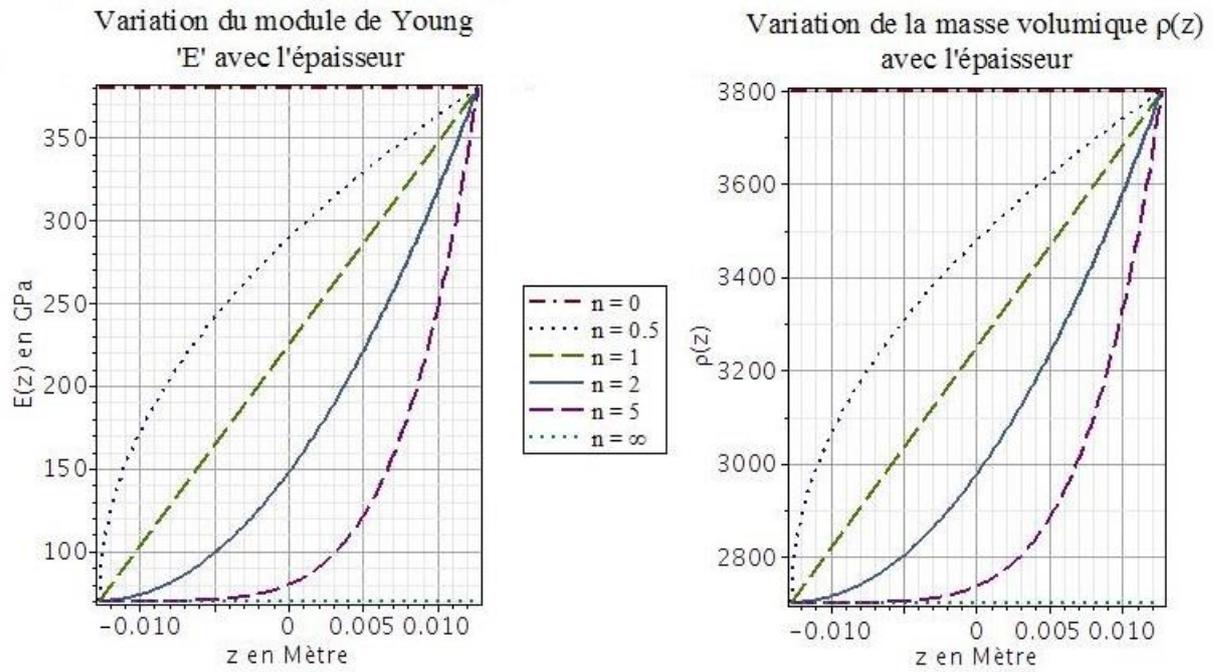


Figure 4.13 : Variation du module de Young et de la masse volumique suivant l'épaisseur de la plaque Al/Al₂O₃

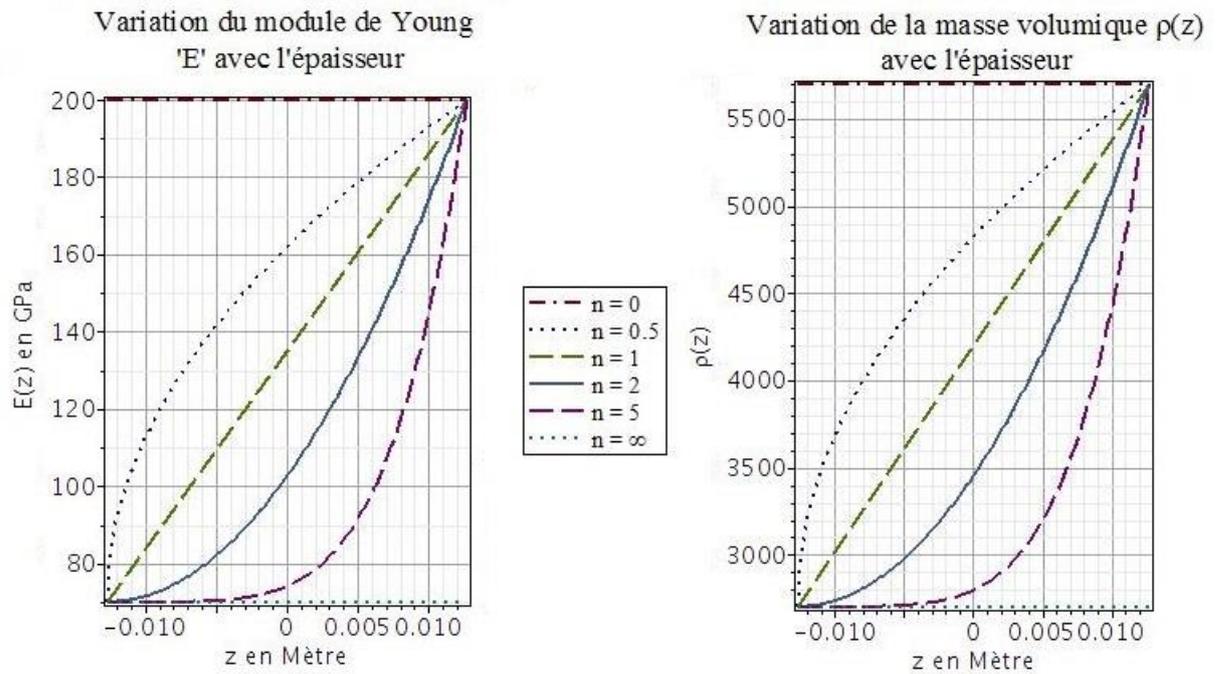


Figure 4.14 : Variation du module de Young et de la masse volumique suivant l'épaisseur de la plaque Al/ZrO₂

4.5. Etude de la plaque P-FGM (Al/Al₂O₃):

Nous présentons dans le tableau 4.3 les paramètres de fréquences propres naturelles adimensionnelles suivant la formule (4.2), en variant le rapport d'allongement b/h et l'index de la fraction volumique n .

Tableau 4.3 : Influence du rapport b/h et de l'index n sur les 5 premières fréquences propres naturelles adimensionnelles d'une plaque carrée P-FGM (Al/Al₂O₃)

b/h	Mode	Index de la fraction volumique n					
		0	0,5	1	2	5	∞
		Paramètre de fréquence fondamentale					
5	1	5,28018	4,51449	4,12558	3,70906	3,38087	2,68754
	2	11,54537	9,65306	8,58585	7,41701	6,67421	5,87644
	3	11,54537	9,65306	8,58585	7,41701	6,67421	5,87644
	4	16,68917	13,76219	12,05114	10,19537	9,1176	8,49457
	5	19,71386	16,14605	14,03494	11,76356	10,49222	10,03409
10	1	5,76932	4,92067	4,45453	4,0063	3,78369	2,93651
	2	13,76369	11,3442	9,80901	8,36553	7,99857	7,00553
	3	13,76369	11,3442	9,80901	8,38553	7,99857	7,00553
	4	21,12074	16,95006	14,20103	11,78115	11,29981	10,75017
	5	25,73367	20,34733	16,77264	13,71925	13,19189	13,09809
20	1	5,91986	5,12339	4,60065	3,82314	4,03183	3,01313
	2	14,60704	12,38986	10,44295	7,73532	8,99675	7,43479
	3	14,60704	12,38986	10,44295	7,73532	8,99675	7,43479
	4	23,07729	19,22033	15,41539	10,67326	13,12676	11,74603
	5	28,61075	23,56181	18,38107	12,33007	15,55975	14,56249
50	1	5,96468	5,2386	4,96215	4,7424	4,42051	3,03594
	2	14,87936	13,06911	12,37847	11,82781	11,02148	7,5734
	3	14,87936	13,06911	12,37847	11,82781	11,02148	7,5734
	4	23,75566	20,8671	19,76286	18,87977	17,58718	12,09131
	5	29,65209	26,04788	24,66824	23,56271	21,94496	15,09252
120	1	5,97185	5,24467	4,96811	4,74866	4,42712	3,03959
	2	14,92396	13,10688	12,41557	11,86671	11,06258	7,5961
	3	14,92396	13,10688	12,41557	11,86671	11,06258	7,5961
	4	23,8693	20,96336	19,8574	18,97885	17,69179	12,14915
	5	29,8291	26,19783	24,81549	23,717	22,1078	15,18261

Nous présentons dans le tableau 4.4 les fréquences propres naturelles en Hertz de notre plaque P-FGM, en variant le rapport d'allongement b/h et l'index de la fraction volumique n .

Tableau 4.4 : Influence du rapport b/h et de l'index n sur les 5 premières fréquences propres naturelles en Hertz, d'une plaque carrée P-FGM (Al/Al_2O_3)

b/h	Mode	Index de la fraction volumique n					
		0	0,5	1	2	5	∞
		Fréquence en Hertz					
5	1	83152,502	71094,342	64969,807	58410,426	53242,118	42323,509
	2	181816,863	152016,649	125210,244	116803,252	105105,741	92542,347
	3	181816,863	152016,649	135210,244	116803,252	105105,741	92542,347
	4	262821,616	216727,389	189781,8	160556,949	143584,241	133772,68
	5	310454,466	254268,54	221022,63	185252,845	165231,836	158017,163
10	1	22713,864	19372,72	17537,516	15772,842	14896,414	11561,052
	2	54187,736	44662,218	38618,147	33013,891	31490,431	27580,832
	3	54187,736	44662,218	38618,147	33013,891	31490,431	27580,832
	4	83152,502	66732,535	55909,574	46382,465	44487,451	42323,509
	5	101313,675	80107,594	66034,005	54012,794	51936,557	51567,303
20	1	5826,635	5042,71	4528,198	3762,937	3968,34	2965,679
	2	14377,011	12194,744	10278,498	7613,505	8855,073	7317,706
	3	14377,011	12194,744	10278,498	7613,505	8855,073	7317,706
	4	22713,864	18917,646	15172,63	10505,176	12920,04	11561,052
	5	28160,187	23190,755	18091,602	12135,892	15314,718	14333,158
50	1	939,319	824,976	781,441	746,835	696,143	478,101
	2	2343,206	2058,128	1949,366	1862,648	1735,667	1192,661
	3	2343,206	2058,128	1949,366	1862,648	1735,667	1192,661
	4	3741,049	3286,158	3112,262	2973,193	2769,635	1904,144
	5	4669,621	4102,028	3884,762	3710,663	3455,9	2376,775
120	1	163,272	143,391	135,83	129,83	121,039	83,103
	2	408,026	358,347	339,446	324,44	302,455	207,68
	3	408,026	358,347	339,446	324,44	302,455	207,68
	4	652,595	573,145	542,908	518,888	483,699	332,162
	5	815,537	716,257	678,464	648,431	604,435	415,098

4.5.1. Influence de l'allongement b/h sur les fréquences propres naturelles d'une plaque P-FGM (Al/Al_2O_3) :

Les figures 4.15 et 4.16 montrent l'influence de l'allongement b/h sur la première et sur la cinquième fréquence propre naturelle d'une plaque P-FGM Al/Al_2O_3 (Aluminium/Alumine), pour différents index de fraction volumique (0, 0.5, 1, 2, 5 et l'infini). Nous remarquons que la première et la cinquième fréquence diminuent en augmentant le rapport b/h de notre plaque.

Plus le rapport d'allongement b/h est grand, plus on a des longueurs d'ondes de flexion importantes. Par conséquent, la plaque aura des périodes propres de vibration plus grandes, sachant que ces dernières sont des inverses de fréquence, les fréquences propres naturelles seront plus petites.

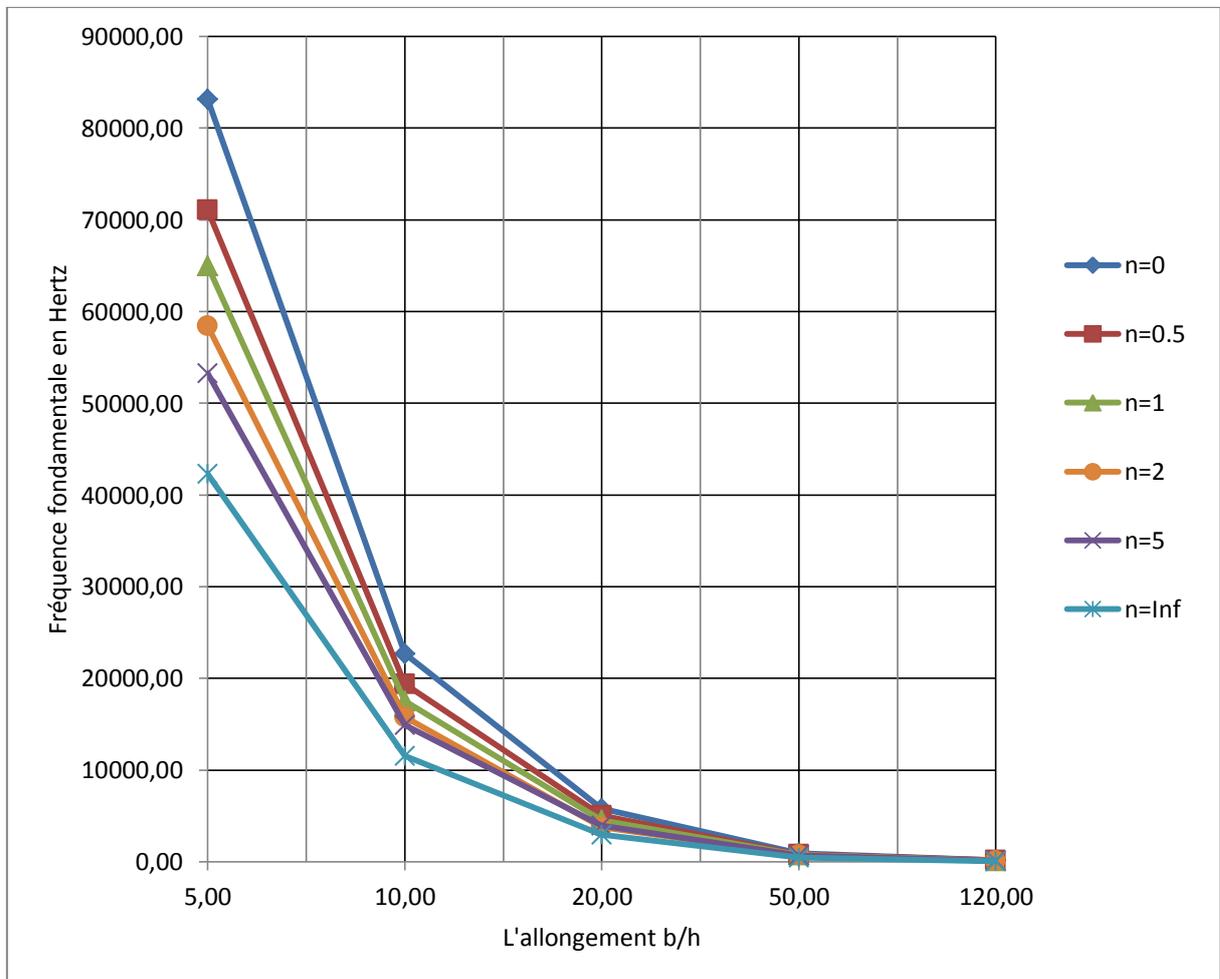


Figure 4.15 : Influence du rapport b/h sur la fréquence fondamentale d'une plaque P-FGM Al/Al_2O_3

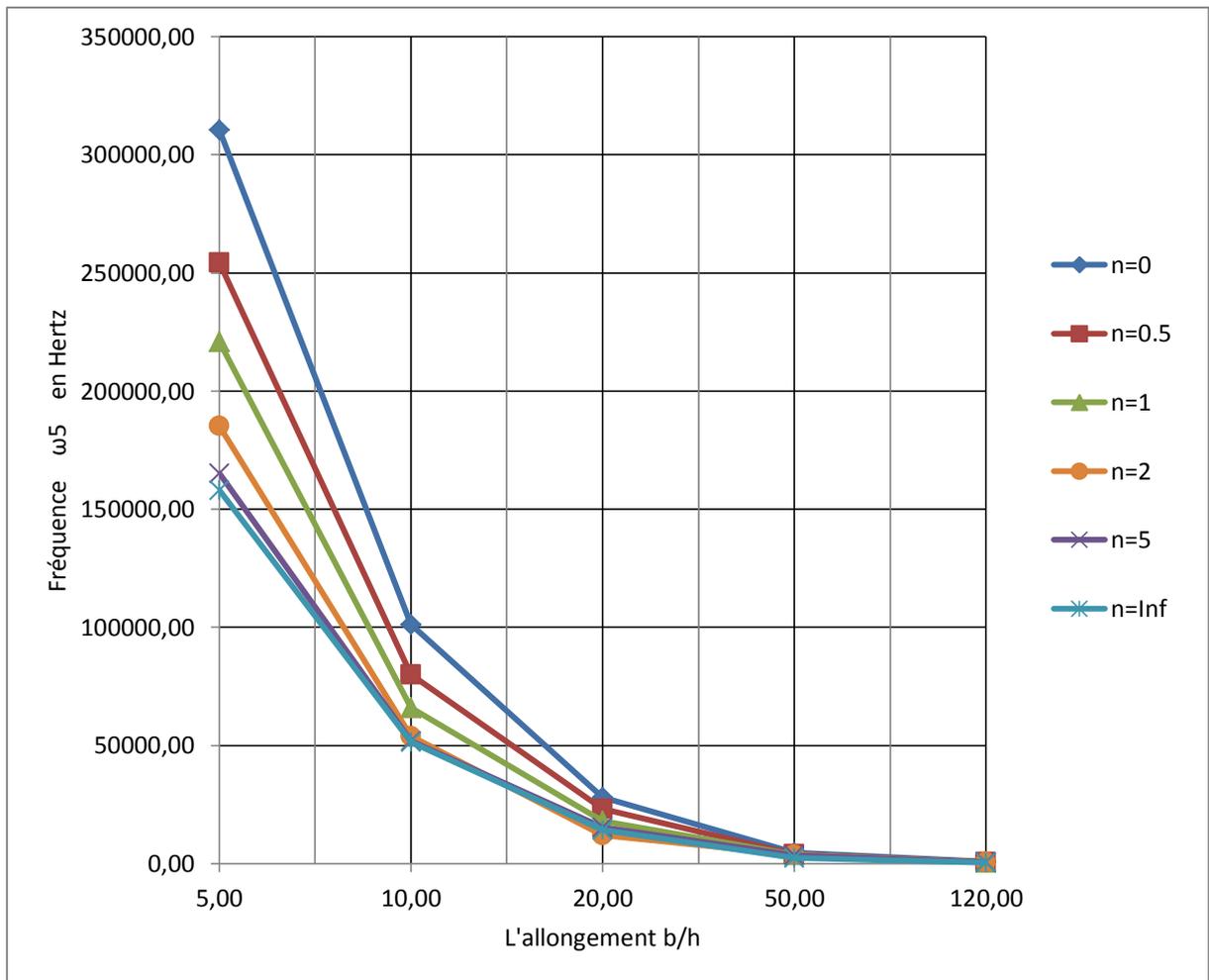


Figure 4.16 : Influence du rapport b/h sur la fréquence ω_5 d'une plaque P-FGM Al/Al₂O₃

4.5.2. Influence de l'index n sur les fréquences propres d'une plaque P-FGM (Al/Al₂O₃) :

Les figures 4.17 et 4.18 montrent l'influence de l'index de la fraction volumique n sur la première et sur la cinquième fréquence propre naturelle d'une plaque P-FGM Al/Al₂O₃ (Aluminium/Alumine), pour différents rapport d'allongement b/h (5, 10, 20, 50 et 120). Nous remarquons que la première et la cinquième fréquence deviennent plus petites en augmentant l'index de la fraction volumique de notre plaque.

En introduisant plus d'aluminium dans la plaque P-FGM, cette dernière perd de la rigidité par rapport à la même plaque avec une plus faible fraction volumique de métal (figure 4.12), parce que le module de Young de l'aluminium est très faible devant celui de l'alumine. Cette diminution de la rigidité globale de la plaque réduit ses fréquences propres naturelles.

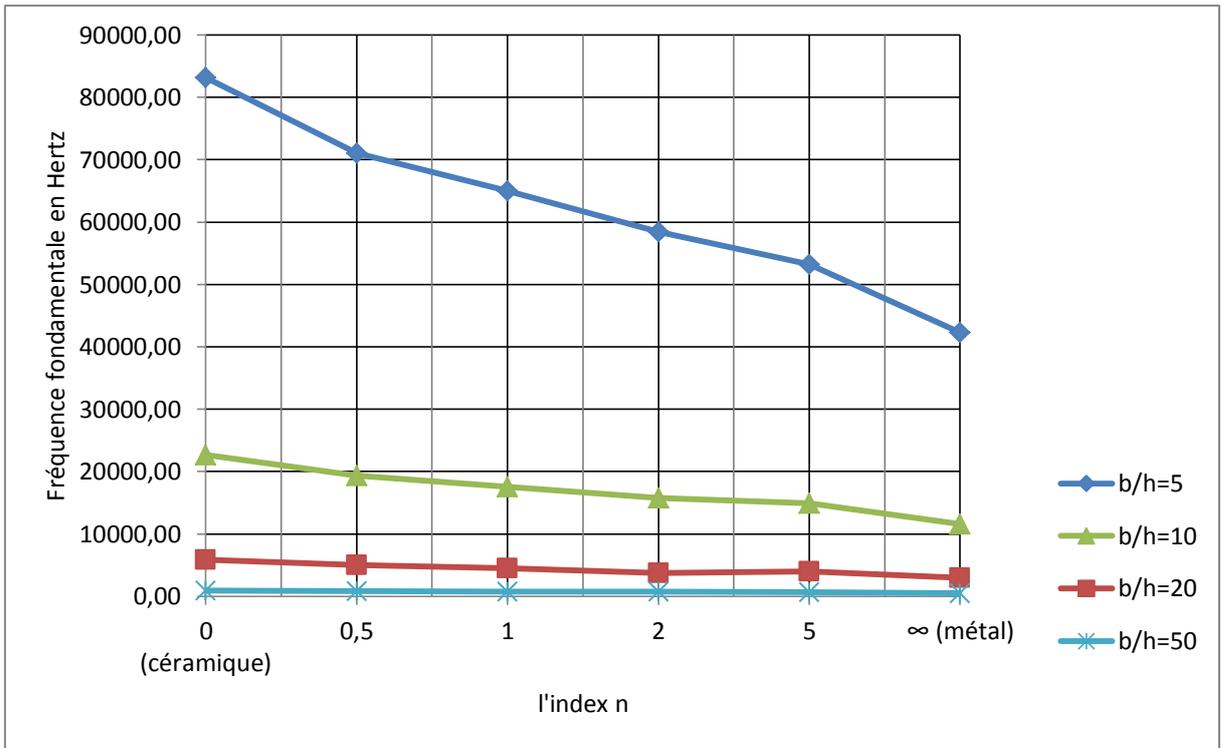


Figure 4.17 : Influence de l'index n sur la fréquence fondamentale d'une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃

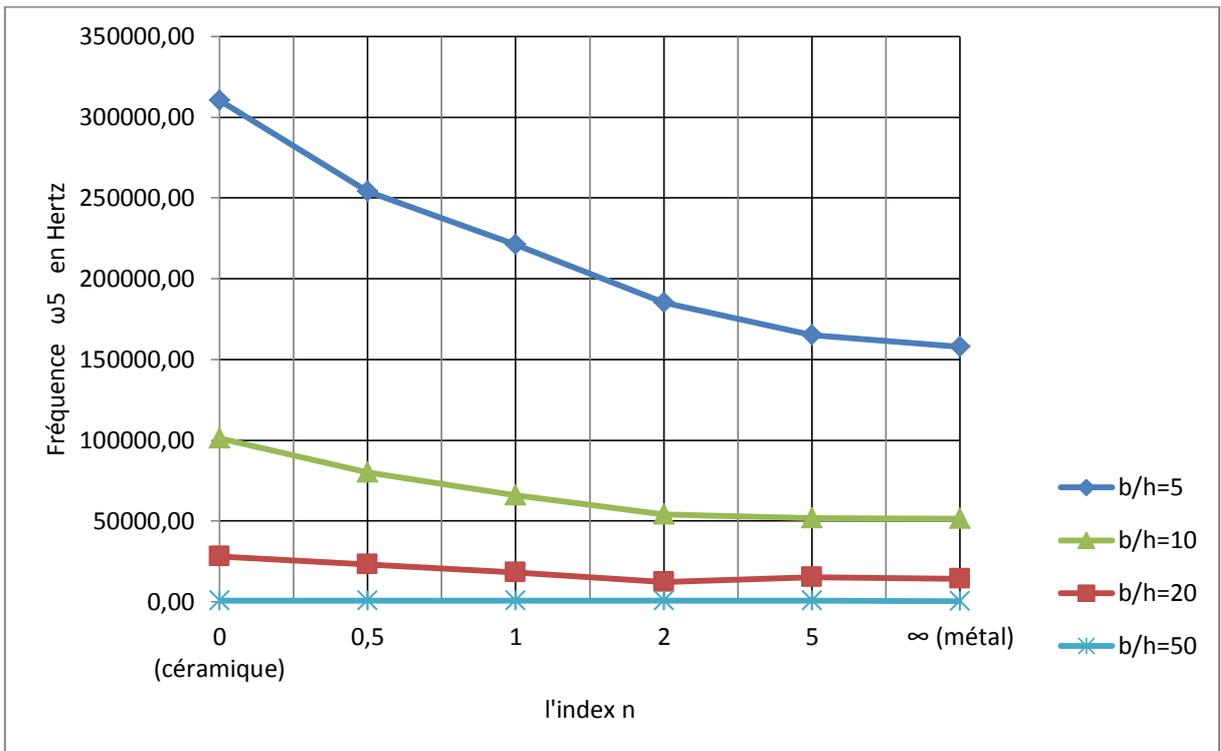


Figure 4.18 : Influence de l'index n sur la fréquence ω_5 d'une plaque carrée P-FGM Al/Al₂O₃

4.6. Etude de la plaque P-FGM (Al/ZrO₂) :

Nous présentons dans le tableau 4.5 les paramètres de fréquences propres naturelles adimensionnelles suivant la formule (4.2), en variant le rapport d'allongement b/h et l'index de la fraction volumique n .

Tableau 4.5 : Influence du rapport b/h et de l'index n sur les 5 premières fréquences propres naturelles adimensionnelles d'une plaque carrée P-FGM (Al/ZrO₂)

		Index de la fraction volumique n					
		0	0,5	1	2	5	∞
a/h	Mode	Paramètre de fréquence fondamentale					
5	1	5,28018	4,97847	4,87716	4,83223	4,86657	4,53709
	2	11,54537	10,72867	10,3588	10,09931	10,17155	9,92057
	3	11,54537	10,72867	10,3588	10,09931	10,17155	9,92057
	4	16,68917	15,3676	14,71017	14,21143	14,31585	14,34048
	5	19,71386	18,07048	17,22573	16,57094	16,69489	16,93949
10	1	5,76932	5,31762	5,25317	5,28727	5,294	4,95739
	2	13,76369	12,12086	11,85052	11,8543	11,79741	11,8267
	3	13,76369	12,12086	11,85052	11,8543	11,79741	11,8267
	4	21,12074	17,96161	17,43436	17,36785	17,21527	18,14838
	5	25,73367	21,46701	20,7587	20,6361	20,41367	22,11213
20	1	5,91986	5,4882	5,45398	5,5477	5,53246	5,08675
	2	14,60704	12,95008	12,80608	13,09509	12,89937	12,55137
	3	14,60704	12,95008	12,80608	13,09509	12,89937	12,55137
	4	23,07729	19,68047	19,38573	19,90697	19,42113	19,82958
	5	28,61075	23,83854	23,43014	24,11733	23,40277	24,58431
50	1	5,96468	5,72087	5,70821	5,7805	5,82378	5,12526
	2	14,87936	14,27208	14,23958	14,41769	14,523	12,78536
	3	14,87936	14,27208	14,23958	14,41769	14,523	12,78536
	4	23,75566	22,78756	22,73422	23,01508	23,17901	20,41249
	5	29,65209	28,44489	28,37712	28,72481	28,92598	25,4791
120	1	5,97185	5,72754	5,71507	5,78794	5,83187	5,13142
	2	14,92396	14,31358	14,28226	14,46398	14,57328	12,82368
	3	14,92396	14,31358	14,28226	14,46398	14,57328	12,82368
	4	23,86929	22,89331	22,84297	23,13298	23,30705	20,51013
	5	29,8291	28,60964	28,5465	28,90841	29,12532	25,6312

Nous présentons dans le tableau 4.6 les fréquences propres naturelles en Hertz de notre plaque P-FGM, en variant le rapport d'allongement b/h et l'index de la fraction volumique n .

Tableau 4.6 : Influence du rapport b/h et de l'index n sur les 5 premières fréquences propres naturelles en Hertz d'une plaque carrée P-FGM (Al/ZrO₂)

a/h	Mode	Index de la fraction volumique n					
		0	0,5	1	2	5	∞
		Fréquence en Hertz					
5	1	49255,292	46440,81	45495,794	45076,664	45396,991	42323,509
	2	107699,015	100080,552	96630,248	94209,702	94883,606	92542,347
	3	107699,015	100080,552	96630,248	94209,702	94883,606	92542,347
	4	155682,089	143354,001	137221,269	132568,928	133542,978	133772,68
	5	183897,354	168567,392	160687,318	154579,1866	155735,441	158017,163
10	1	13454,532	12401,123	12250,827	12330,346	12346,05	11561,052
	2	32098,045	28266,84	27636,396	27645,191	27512,52	27580,832
	3	32098,045	28266,84	27636,396	27645,191	27512,52	27580,832
	4	49255,292	41887,953	40658,368	40503,255	40147,42	42323,509
	5	60013,042	50062,837	48410,991	48125,076	47606,36	51567,303
20	1	3451,401	3199,736	3179,783	3234,421	3225,537	2965,679
	2	8516,207	7550,165	7466,208	7634,708	7520,599	7317,706
	3	8516,207	7550,165	7466,208	7634,708	7520,599	7317,706
	4	13454,532	11474,118	11302,276	11606,175	11322,92	11561,052
	5	16680,655	13898,358	13660,255	14060,902	13644,296	14333,158
50	1	556,405	533.661	532.481	539.224	543.261	478,101
	2	1387,996	1331.346	1328.315	1344.930	1354.753	1192,661
	3	1387,996	1331.346	1328.315	1344.930	1354.753	1192,661
	4	2216,006	2125.698	2120.723	2146.922	2162.215	1904,144
	5	2766,045	2653.433	2647.111	2679.545	2698.311	2376,775
120	1	96.714	92.758	92.556	93.736	94.447	83.103
	2	241.694	231.809	231.301	234.244	236.014	207.680
	3	241.694	231.809	231.301	234.244	236.014	207.680
	4	386.564	370.758	369.942	374.639	377.458	332.162
	5	483.083	463.334	462.311	468.172	471.685	415.098

4.6.1. Influence de l'allongement b/h sur les fréquences d'une plaque carrée P-FGM (Al/ZrO_2) :

Les figures 4.19 et 4.20 montrent l'influence de l'allongement b/h sur la première et sur la cinquième fréquence propre naturelle d'une plaque P-FGM Al/ZrO_2 (Aluminium/Zircone), pour différents index de fraction volumique (0, 0.5, 1, 2, 5 et l'infini). Nous remarquons que les fréquences diminuent en augmentant le rapport d'allongement b/h de notre plaque.

Plus le rapport d'allongement b/h est grand, plus on a des longueurs d'ondes de flexion importantes. Par conséquent, la plaque aura des périodes propres de vibration plus grandes, sachant que ces dernières sont des inverses de fréquence, les fréquences propres naturelles seront plus petites.

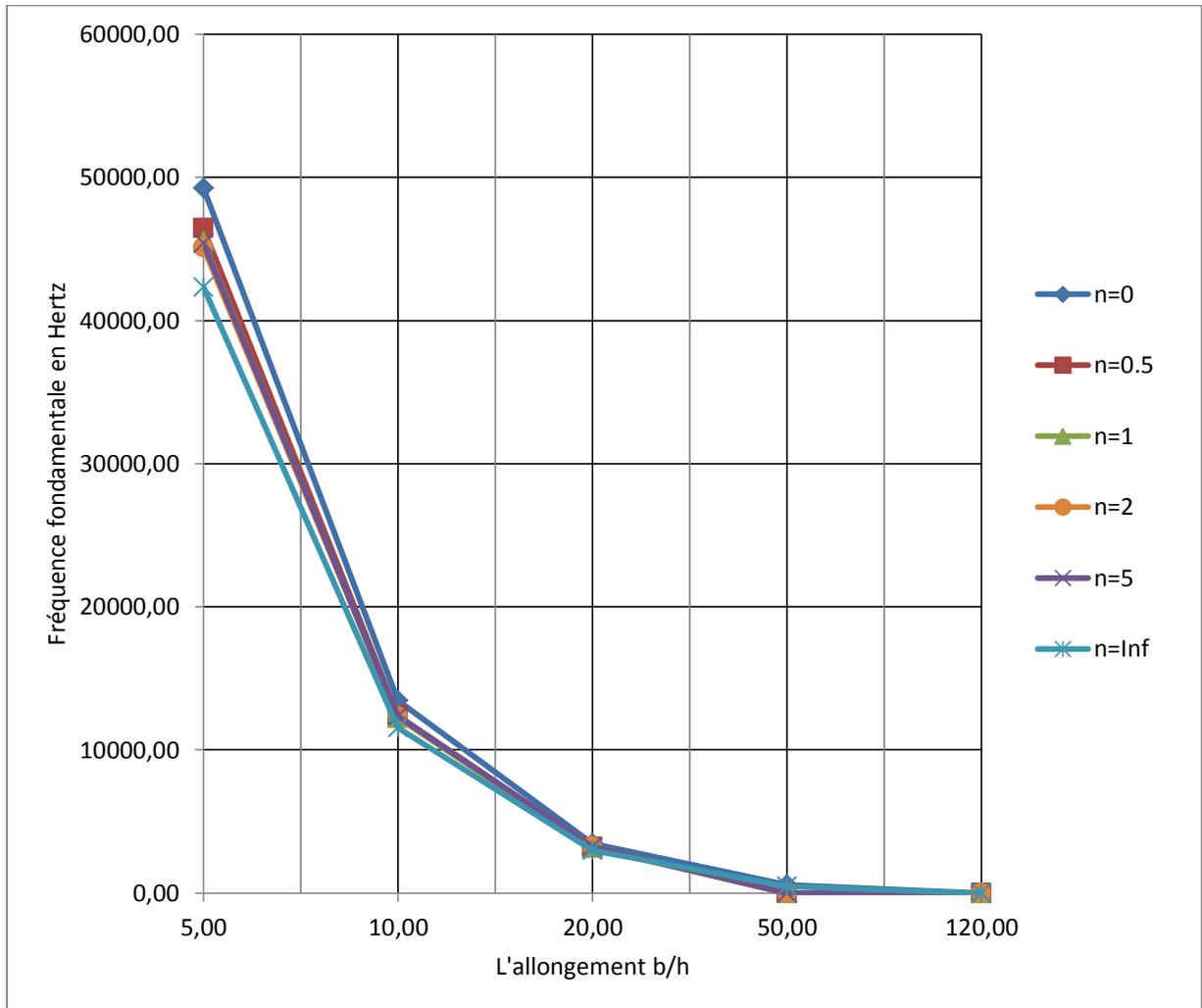


Figure 4.19 : Influence du rapport b/h sur la fréquence fondamentale d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO_2

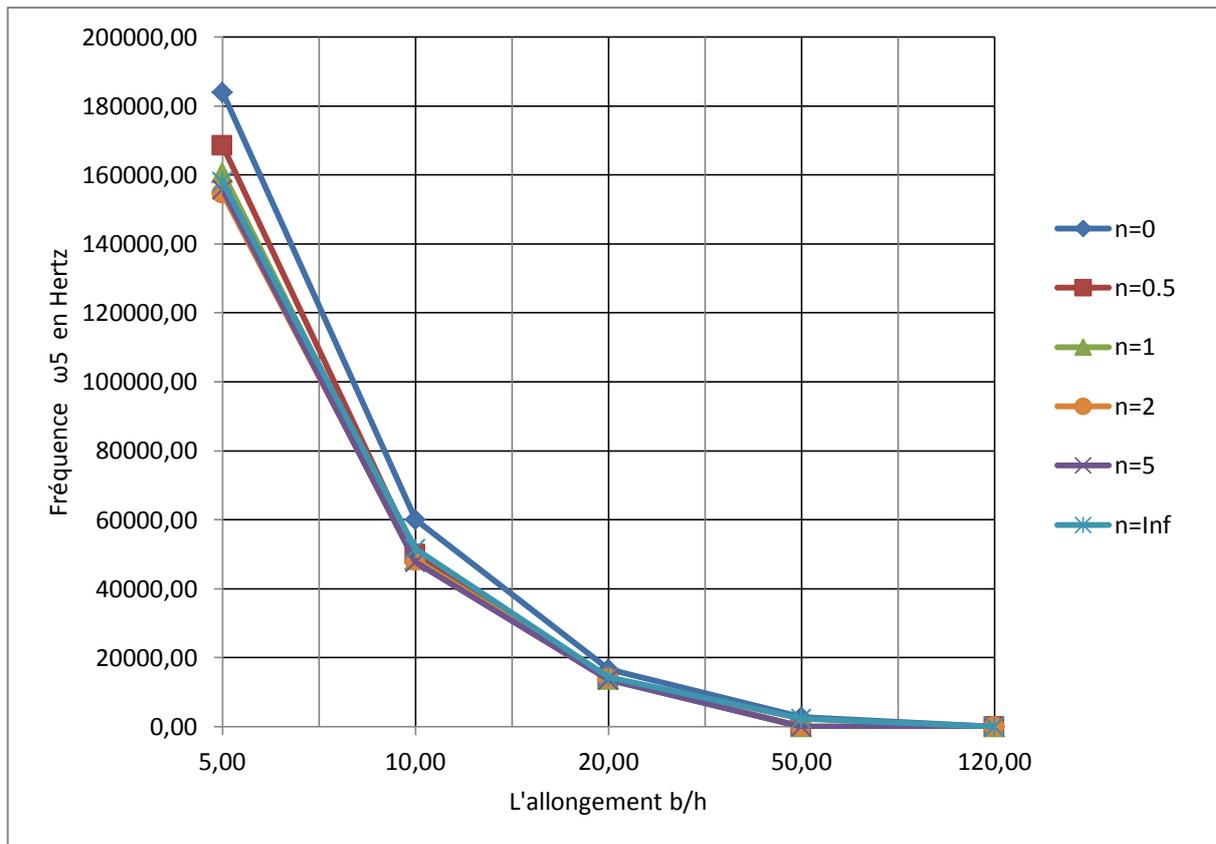


Figure 4.20 : Influence du rapport b/h sur la fréquence ω_5 d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO₂

4.6.2. Influence de l'index n sur les fréquences d'une plaque carrée P-FGM (Al/ZrO₂) :

Les figures 4.21 et 4.22 montrent l'influence de l'index de la fraction volumique n sur la première et sur la cinquième fréquence propre naturelle d'une plaque P-FGM Al/ZrO₂ (Aluminium/Zircone), pour différents rapport d'allongement b/h (5, 10, 20, 50 et 120). Nous remarquons que les fréquences diminuent légèrement en augmentant l'index de la fraction volumique n , contrairement à la plaque P-FGM Al/Al₂O₃ où on remarque une diminution flagrante de fréquences propres lorsqu'il y a introduction de plus de métal.

Comme pour la plaque Al/Al₂O₃, la céramique utilisée pour la présente plaque est beaucoup plus rigide que le métal utilisé, et malgré cela les fréquences propres n'étaient pas trop influencées par la diminution de la rigidité globale (figure 4.13). Cette différence entre le comportement dynamique des deux plaques est due à la grande différence entre les masses volumiques de l'aluminium et du zircon (Al : 2702 Kg/m³, Zr : 5700 Kg/m³) qui se traduit en réduction des inerties en ajoutant un matériau avec une masse volumique plus faible. Donc, l'assouplissement du P-FGM est compensé par son allègement.

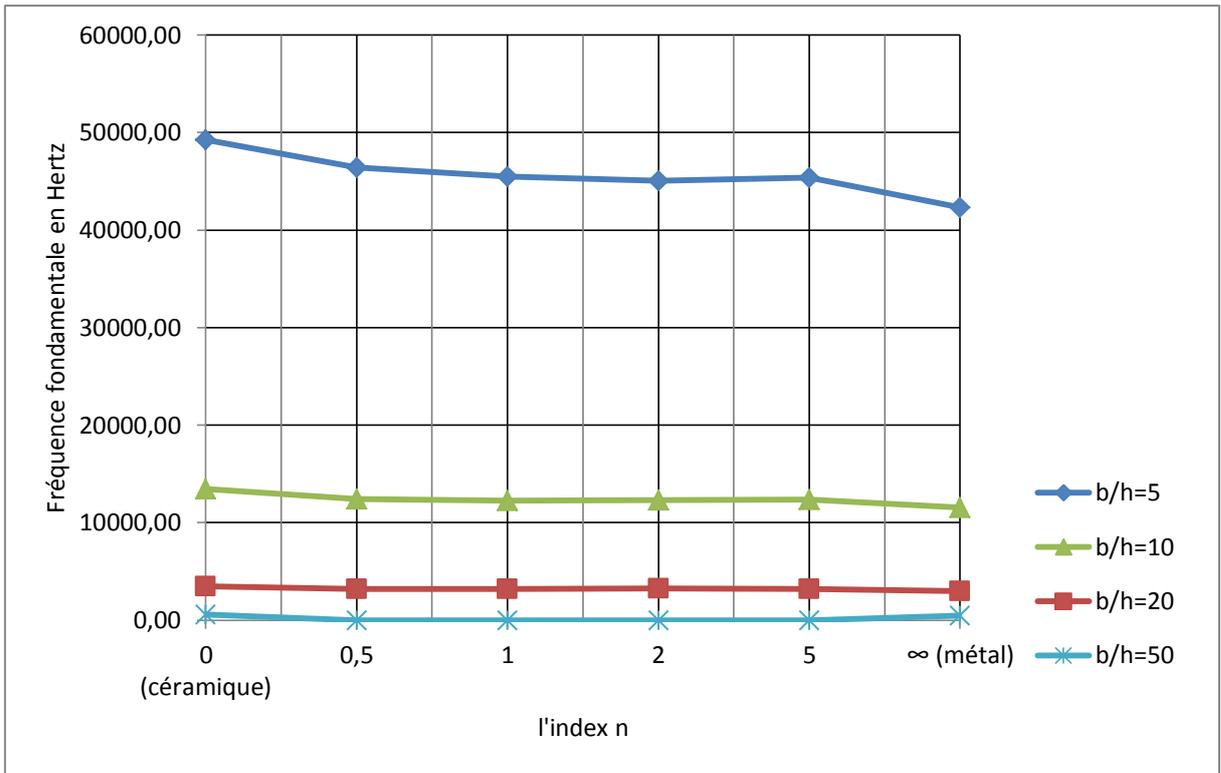


Figure 4.21 : Influence de l'index n sur la fréquence fondamentale d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO₂

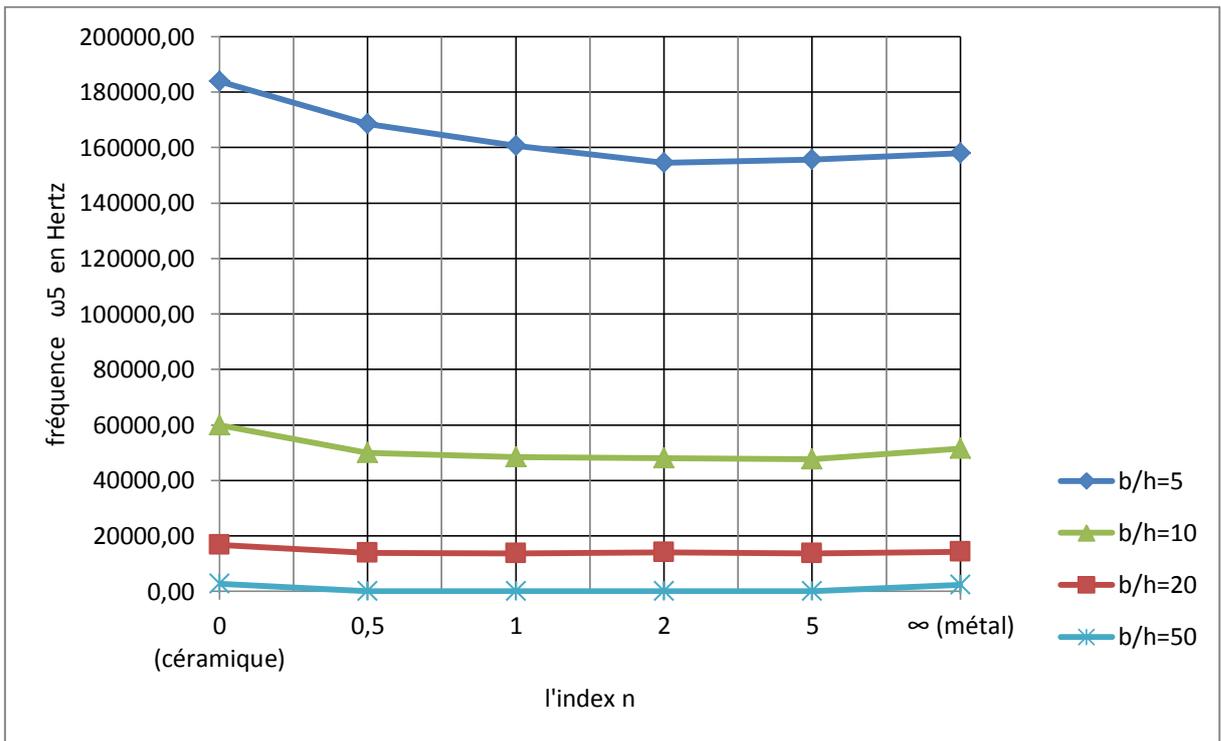


Figure 4.22 : Influence de l'index n sur la fréquence ω_5 d'une plaque carrée P-FGM Al/ZrO₂

4.7. Conclusion :

L'étude des vibrations libres de la plaque P-FGM sur appuis simples s'est faite en tenant compte de la théorie du premier ordre (Reissner-Mindlin). La méthode de Navier a permis la résolution du système d'équations différentielles et l'obtention des fréquences propres naturelles du système. De ce fait, le programme de calcul élaboré a été validé par comparaison avec des résultats déjà publiés. Ensuite, une étude paramétrique de la plaque a été réalisée, en tenant compte des variables suivantes :

- L'index de la fraction volumique n (concentration des matériaux constituants),
- Le rapport d'allongement b/h (géométrie de la plaque)

Il a été noté que les fréquences naturelles du système vibratoire décroissent lorsque l'index de la fraction volumique n croit (en augmentant la concentration du métal et en diminuant celle de la céramique) pour les deux plaques avec des matériaux différents et sujettes aux mêmes conditions.

La géométrie de la plaque influe aussi sur les fréquences naturelles calculées, plus le rapport d'allongement est grand, moins les fréquences sont importantes.

Enfin, nous concluons que ces évolutions de fréquences naturelles des plaques étudiées sont une conséquence directe de la variation de la rigidité et de l'inertie globales en fonction des paramètres pris en considération dans cette étude.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les matériaux à gradient fonctionnel, étant des matériaux composites sophistiqués et ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, ils permettent de générer des changements en conséquence des propriétés des matériaux, et d'éliminer les discontinuités au niveau des interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées. Ainsi un FGM constitué de métal et de céramique combinera la résilience et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique [3].

Afin de modéliser un FGM, une étude du comportement dynamique de l'élément considéré est indispensable. Dans le cadre de ce travail, nous avons effectué une étude vibratoire de deux plaques P-FGM carrées à deux constituants (100% céramique au niveau de la face supérieure et 100% métal à la face inférieure), sur appuis simples aux quatre bords, et sans contraintes thermiques. Nous avons calculé les fréquences propres naturelles avec un programme informatique élaboré et validé (après une comparaison avec les résultats des articles [11] et [12]), en utilisant la méthode de Navier pour résoudre le système d'équations différentielles écrit en se basant sur la théorie de déformations du premier ordre et en appliquant le principe de Hamilton. Des tableaux et des graphes ont été présentés pour montrer l'influence de l'index de la fraction volumique n et du rapport d'allongement b/h sur les fréquences propres naturelles du système vibratoire, car ces deux paramètres ont un effet direct sur la rigidité et l'inertie globales de la plaque P-FGM. Autant les deux paramètres déjà cités augmentent, les fréquences propres de vibration diminuent.

Le travail présenté dans ce mémoire de fin d'études peut être développé ou enrichi. Une étude de poutres et plaques en vibrations libres, ainsi qu'une étude de flambage des poutres et plaques FGM dans des environnements thermiques sont envisageables. Il sera aussi intéressant d'étudier des poutres et des plaques en combinant des matériaux composites stratifiés avec des matériaux à gradient fonctionnel.

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1 : Types de renforts.....	4
Figure 1.2 : Les structures géométriques des composites.....	5
Figure 1.3 : Types de matrices.....	5
Figure 1.4 : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites.....	6
Figure 1.5 : Structure d'un composite tissé.....	7
Figure 1.6 : Exemples de tissus plans courants.....	8
Figure 1.7 : Exemples de tissus tridimensionnels.....	9
Figure 1.8 : Dispositions possibles des fibres dans un pli.....	10
Figure 1.9 : Exemple de stratifiés à base de plis unidirectionnels.....	11
Figure 1.10 : Exemples de multi-matériaux stratifiés.....	11
Figure 1.11 : Une structure en sandwich.....	12
Figure 1.12 : Comparaison des caractéristiques mécaniques en flexion et des masses de trois structures.....	12
Figure 1.13 : Variation continue des propriétés.....	13
Figure 1.14 : Variation discrète des propriétés.....	13
Figure 1.15 : Variation continue de la microstructure (schématisée).....	14
Figure 1.16 : Variation continue de la microstructure (photo).....	14
Figure 1.17 : Variation discrète de la microstructure avec espacement non-uniforme.....	15
Figure 1.18 : Variation multi-phases de la microstructure.....	15
Figure 1.19 : Exemple du procédé de fabrication typique des FGM par la métallurgie des poudres.....	16

Figure 1.20 : Les trois types de méthodes de fabrication des MGF sous la force centrifuge...	17
Figure 1.21 : Variation de la microstructure de l'os.....	19
Figure 2.1 : Elément structural en FGM.....	20
Figure 2.2 : Variation de la fraction volumique du P-FGM.....	22
Figure 2.3 : Variation du module de Young E du E-FGM.....	22
Figure 2.4 : Variation de la fraction volumique de S-FGM.....	23
Figure 2.5 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques.....	25
Figure 2.6 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre.....	27
Figure 2.7 : Représentation schématique des résultantes de cisaillement.....	28
Figure 2.8 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre supérieur.....	29
Figure 3.1 : Géométrie non déformée et déformée d'un bord d'une plaque sous les hypothèses du premier ordre.....	31
Figure 3.2 : Tenseur des contraintes.....	32
Figure 4.1 : Géométrie de la plaque.....	46
Figure 4.2 : Organigramme du programme de calcul.....	47
Figure 4.3 : Paramètre de fréquence fondamentale adimensionnelle en fonction de l'index de la fraction volumique d'une plaque P-FGM Al/Al_2O_3 sur appuis simples ($b/h = 5$) suivant la formule (4.1).....	51
Figure 4.4 : Paramètre de fréquence fondamentale adimensionnelle en fonction de l'index de la fraction volumique d'une plaque P-FGM Al/Al_2O_3 sur appuis simples ($b/h = 10$) suivant la formule (4.1).....	52

Figure 4.5 : Paramètre de fréquence fondamentale adimensionnelle en fonction de l'index de la fraction volumique d'une plaque P-FGM Al/Al ₂ O ₃ sur appuis simples (b/h = 20) suivant la formule (4.1).....	52
Figure 4.6 : Evolution de l'erreur relative entre les résultats de [11] avec [10] et de la présente théorie avec [10] (b/h = 5) suivant la formule (4.1).....	53
Figure 4.7 : Evolution de l'erreur relative entre les résultats de [11] avec [10] et de la présente théorie avec [10] (b/h = 10) suivant la formule (4.1).....	53
Figure 4.8 : Evolution de l'erreur relative entre les résultats de [11] avec [10] et de la présente théorie avec [10] (b/h = 20) suivant la formule (4.1).....	54
Figure 4.9 : Paramètre de fréquence fondamentale adimensionnelle en fonction de l'index de la fraction volumique d'une plaque P-FGM Al/Al ₂ O ₃ sur appuis simples (b/h = 10) suivant la formule (4.2).....	56
Figure 4.10 : Paramètre de fréquence fondamentale adimensionnelle en fonction de l'index de la fraction volumique d'une plaque P-FGM Al/ZrO ₂ sur appuis simples (b/h = 10) suivant la formule (4.2).....	56
Figure 4.11 : Evolution de l'erreur relative entre les résultats de [11] avec [10] et de la présente théorie avec [10] (b/h = 10) suivant la formule (4.2) pour une plaque P-FGM Al/Al ₂ O ₃	57
Figure 4.12 : Evolution de l'erreur relative entre les résultats de [11] avec [10] et de la présente théorie avec [10] (b/h = 10) suivant la formule (4.2) pour une plaque P-FGM Al/ZrO ₂	57
Figure 4.13 : Variation du module de Young et de la masse volumique par rapport à l'épaisseur de la plaque Al/Al ₂ O ₃	58
Figure 4.14 : Variation du module de Young et de la masse volumique par rapport à l'épaisseur de la plaque Al/ZrO ₂	58
Figure 4.15 : Influence du rapport b/h sur le paramètre de la fréquence fondamentale d'une plaque P-FGM Al/Al ₂ O ₃	61
Figure 4.16 : Influence du rapport b/h sur la fréquence ω ₅ d'une plaque P-FGM Al/Al ₂ O ₃	62

Figure 4.17 : Influence de l'index n sur le paramètre de la fréquence fondamentale d'une plaque P-FGM Al/Al ₂ O ₃	63
Figure 4.18 : Influence de l'index n sur la fréquence ω_5 d'une plaque P-FGM Al/Al ₂ O ₃	63
Figure 4.19 : Influence du rapport b/h sur le paramètre de la fréquence fondamentale d'une plaque P-FGM Al/ZrO ₂	66
Figure 4.20 : Influence du rapport b/h sur la fréquence ω_5 d'une plaque P-FGM Al/ZrO ₂	67
Figure 4.21 : Influence de l'index n sur le paramètre de la fréquence fondamentale d'une plaque P-FGM Al/ZrO ₂	68
Figure 4.22 : Influence de l'index n sur la fréquence ω_5 d'une plaque P-FGM Al/ZrO ₂	68
Tableau 4.1 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale d'une plaque P-FGM Al/Al ₂ O ₃ suivant la formule (4.1).....	50
Tableau 4.2 : Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale des plaques P-FGM : Al/Al ₂ O ₃ et Al/ZrO ₂ simplement supportées suivant la formule (4.2) avec b/h égal à 10.....	55
Tableau 4.3 : Influence du rapport b/h et de l'index n sur les 5 premières fréquences propres naturelles adimensionnelles d'une plaque P-FGM (Al/Al ₂ O ₃).....	59
Tableau 4.4 : Influence du rapport b/h et de l'index n sur les 5 premières fréquences propres naturelles en Hertz, d'une plaque P-FGM (Al/Al ₂ O ₃).....	60
Tableau 4.5 : Influence du rapport b/h et de l'index n sur les 5 premières fréquences propres naturelles adimensionnelles d'une plaque P-FGM (Al/Al/ZrO ₂).....	65
Tableau 4.6 : Influence du rapport b/h et de l'index n sur les 5 premières fréquences propres naturelles en Hertz d'une plaque P-FGM (Al/Al/ZrO ₂).....	66

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

A	: Surface (m^2)
A_{ij}	: Rigidité en membrane (N/m)
A, B, C	: Paramètres de Navier
D_{ij}	: Rigidité de flexion ($N.m^2/m$)
E	: Module de Young (N/m^2)
E_c	: Energie cinétique (N.m)
I_0, I_1, I_2	: Inerties axiale, de couplage et de rotation respectivement
K	: Coefficient de correction du cisaillement
K_{ij}	: Sous matrices de $[K]$
M_{xx}, M_{yy}	: Moments de flexion (N.m/m)
M_{xy}	: Moment de torsion (N.m/m)
P	: Propriété le long de l'axe z
P_i	: Propriété du matériau i
P_t, P_b	: Propriétés au niveau des surfaces, supérieure et inférieure de la plaque FGM respectivement
P_m, P_c	: Propriétés du métal et de la céramique respectivement
Q_{xz}, Q_{yz}	: Résultantes des efforts de cisaillement dans les plans (xy) et (xz) respectivement (N/m)
Q_{ij}	: Coefficients de rigidité réduite (N/m^2)
T	: Température le long de l'axe z
T_t, T_b	: Températures au niveau des surfaces, supérieure et inférieure de la plaque FGM respectivement
U	: Energie potentielle (N.m)
U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}	: Amplitudes des déplacements le long des axes x, y et z respectivement (m)
V	: Volume de l'élément plaque considéré
$V(z)$: Fraction volumique de la plaque P-FGM
V_i	: Fraction volumique de l'élément i
V_c, V_m	: Fraction volumique des composants en céramique et en métal respectivement
\mathcal{L}	: Lagrangien du système (N.m)
a	: Longueur de la plaque (m)

b	: Largueur de la plaque (m)
h	: Epaisseur de la plaque (m)
n	: Index de la fraction volumique
t	: Variable temps (s)
u, v, w	: Déplacements les long des axes x, y et z respectivement d'un point du plan moyen (m)
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$: Déplacements les longs des axes x, y et z respectivement (m)
x, y, z	: Coordonnées cartésiennes (m)
Ψ_x, Ψ_y	: Rotations de la normale transversale sur les axes « y » et « x » respectivement
Ψ_{mn}, φ_{mn}	: Amplitudes des rotations
α, β	: Paramètres de forme
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: Déformations de cisaillement dans les plans $(xy), (xz)$ et (yz) respectivement (N/m^2)
δ	: Opérateur de variation
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$: Déformations dans les directions x, y et z respectivement
ν	: Coefficient de Poisson
ρ	: Masse volumique (Kg/m^3)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Contraintes dans les directions des axes x, y et z respectivement (N/m^2)
$\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$: Contraintes de cisaillement dans les plans $(xy), (xz)$ et (yz) respectivement (N/m^2)
ω	: Fréquence circulaire naturelle (Hz)
$\bar{\omega}$: Fréquence naturelle adimensionnelle
CPT	: Théorie classique des plaques (classical plate theory)
FSDPT	: Théorie de déformation des plaques du premier ordre
HSDPT	: Théorie de déformation des plaques d'ordre supérieur

REFERENCES

1. Rasheedat M. Mahamood, Esther T. Akinlabi *Member, IAENG*, Mukul Shukla and Sisa Pityana, "Functionally Graded Material: An Overview". dans Proceedings of the World Congress on Engineering 2012 Vol III WCE 2012, July 4 - 6, 2012, London, U.K.
2. A.Mahi, E.A.Adda Bedia, A.Benkhedda, "Free vibration analysis of FGM plates under initial thermal stresses". dans Advanced Materials research Vol. 682 (2013) pp 49-56
3. Amale MAHI "ANALYSE ET ETUDE DES PLAQUES COMPOSITES FGM EN VIBRATIONS LIBRES". thèse de doctorat, Blida, 05 Avril 2012.
4. Jean-Paul Baïlon, Jean-Marie Dorlot "Des matériaux". 3^{ème} édition 2001.
5. Laurent Gornet, "Généralités sur les matériaux composites". cel-00470296, version 1 - 6 Apr 2010.
6. Lionel Gendre , "MATERIAUX COMPOSITES ET STRUCTURES COMPOSITES" publiée le 17-03-2011.
7. Jean-Marc Béguin, "Les matériaux composites dynamisme et innovation". dans LE 4 PAGES N° 158 - février 2002.
8. Yoshimi Watanabe, Hisashi Sato, " Review Fabrication of Functionally Graded Materials under a Centrifugal Force". Nagoya Institute of Technology Japan.

9. J.M. Berthelot. "Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures".
10. J.N. Reddy. "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and analysis".
11. Sh. Hosseini-Hashemi, H. RokniDamavandiTaher, H. Akhavan, M. Omidi. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling* 34 (2010) 1276–1291.
12. X. Zhao, Y.Y. Lee, K.M. Liew, Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, *J. Sound Vib.* 319 (2009) 918–939.