

UNIVERSITE SAAD DAHLEB BLIDA
Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales

MÉMOIRE DU MASTER

en Aéronautique

Spécialité : Propulsion Avion

THEME

ETUDE D'UN ECOULEMENT A TRAVERS UNE ONDE DE CHOC NORMALE A HAUTE TEMPERATURE DANS UNE TUYERE SUPERSONIQUE

Présenté par :

Mr. HAMADA Farid

Dirigé par :

Mr. ZEBBICHE Toufik

Blida, Octobre 2013

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



RÉSUMÉ

Lorsque la température génératrice de la chambre de combustion augmente et commence à dépasser les 1000K° en général, la chaleur spécifique à pression constante ainsi que le rapport thermodynamique des chaleurs spécifiques ne restent plus constants et commence à varier avec cette température (température génératrice). Le gaz reste parfait. Son équation d'état reste toujours valable sauf il sera nommé par gaz à haute température inférieur au seuil de dissociation des molécules. Les équations de conservation restent inchangées par rapport aux hypothèses d'un gaz parfait sauf l'équation d'énergie ou il faut tenir compte de l'effet de variation des chaleurs spécifiques.

Le but de ce travail est de développer un programme de calcul numérique en langage Fortran permettant de déterminer les rapports thermodynamiques à travers une onde de choc normale à haute température et l'application dans une tuyère supersonique. Un nouveau modèle sera développé dans ce contexte comme une généralisation du modèle d'un gaz parfait caloriquement parfait. Autrement dit le modèle d'un gaz parfait à γ constant devient un cas particulier de notre modèle à haute température. L'application sera faite pour le cas dans une tuyère supersonique lorsque cette dernière entre dans le régime non adapté. Comme l'onde de choc est rencontrée dans le cas d'un écoulement supersonique, l'écoulement juste après le choc devient toujours subsonique, puisque dans ce cas le choc normal est toujours fort. Une étude de l'écoulement aval au choc dans une tuyère supersonique sera parmi notre intérêt afin de trouver les paramètres de l'écoulement à la sortie de la tuyère. La comparaison sera faite avec le modèle du gaz parfait à γ constant (Existe déjà) en diminuant la température génératrice de la chambre de combustion. L'application sera faite pour l'air.

ABSTRACT

When the generator temperature of the combustion chamber increases and begins to exceed 1000K ° in general, the specific heat at constant and thermodynamic ratio of specific heat ratio will remain more constant pressure and begins with the varied temperature (temperature generator). The gas remains perfect. Its state equation remains valid unless it shall be appointed by gas calorifically imperfect and thermally perfect or simply by high gas temperature below the threshold of dissociation of the molecules. The conservation equations are unchanged from the assumptions of an ideal gas except the energy equation and to consider the effect of variation of specific heats.

The purpose of this work is to develop a program in numerical calculation in language Fortran allowing to determine the thermodynamic relations through high temperature a normal shock wave and application in a supersonic nozzle. A new model will be developed in this context as a generalization of the model of a perfect gas calorically perfect i.e. the model of an ideal gas at constant γ is a special case of our model at high temperatures. The application will be made for the case in a supersonic nozzle when it enters the system not suitable. As the shock wave is encountered in the case of supersonic flow, the flow just after the shock is always subsonic, since in this case the normal shock is still strong. A study of the impact downstream flow in a supersonic nozzle will be among our interest to find the parameters of the flow at the outlet of the nozzle. The comparison will be made with the model of the ideal gas constant γ (already exists) by reducing the generator temperature of the combustion chamber. The application will be made for the air.

ملخص

عندما تكون درجة الحرارة المولدة من غرفة الاحتراق في تزايد و تبدأ في يتجاوز $1000K$ ° بشكل عام، فإن الحرارة النوعية للضغط الثابت والنسبة الحرارية للحرارة النوعية لا تبقى ثابتة وتبدأ في التغيير مع درجة الحرارة المولدة من غرفة الاحتراق. يبقى الغاز مثالي. وتبقى معادله حالته صالحة على الدوام ولكن تسمى غاز ناقص مزود بسرعات حرارية وكامل حراريا أو ببساطة بغاز ذو درجة حرارة عالية دون عتبة تفكك الجزيئات. معادلات الحفظ تبقى دون تغيير بالنسبة لفرضية الغاز المثالي باستثناء معادلة الطاقة التي يجب فيها تأثير التغيير الحرارة النوعية بعين الاعتبار.

الهدف من هذه الدراسة هو تطوير برنامج حساب عددي Fortran يعمل على تحديد العلاقات الحرارية من خلال موجة صدمة عادية في درجات الحرارة العالية و التطبيق في فوهة الأسرع من الصوت . وسيتم تطوير نموذج جديد في هذا السياق باعتبارها تعميم نموذج لغاز مثالي بسرعات حرارية . أي نموذج الغاز المثالي في γ ثابت هو حالة خاصة من نموذجنا في درجات حرارة عالية . سيتم التطبيق على حالة الفوهة الأسرع من الصوت عندما تدخل النظام الغير مناسب . بما أن موجة الصدمة تتواجد في حالة تدفق أسرع من الصوت، وتدفق بعد الصدمة يكون دائما دون سرعة الصوت، لأن في هذه الحالة الصدمة العادية تكون قوية. لذلك دراسة التدفق بعد الصدمة تأثير في فوهة الأسرع من الصوت تصب في مصلحتنا بما أن نتمكن من تعيين خصائص التدفق عند مخرج من فوهة. و سيتم إجراء المقارنة مع نموذج الغاز المثالي γ ثابت (موجود سابقا) عن طريق خفض درجة حرارة المولدة من غرفة الاحتراق . سيتم التطبيق على الهواء.

DÉDICACES

A mes chers parents, qui ont consacré toute leur vie pour mon éducation et ma réussite, et à qui je souhaite une longue vie heureuse.

REMERCIEMENTS

J'adresse, tout d'abord, mes remerciements à mon directeur de recherche Monsieur T.ZEBBICHE, Professeur à l'université de Blida, pour sa disponibilité, ses orientations et ses conseils judicieux qui m'ont permis de mener à terme ce modeste travail.

Je remercie Monsieur R.RENANE, et Monsieur R.ALLOUCHE; chargés de cours à l'institut d'Aéronautique et des études spatiales pour leurs conseils et perspectives pointues concernant mon travail.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation durant toute la durée de mes études du primaire à l'université.

Mes sincères remerciements à tous les membres du jury qui ont accepté de lire et d'évaluer ce travail.

Mes remerciements s'adressent tout particulièrement à mes parents et à tous les membres de ma famille qui m'ont aidé et soutenu tout au long de mon parcours.

Enfin, je remercie mes amis et camarades de la promotion et auxquels je souhaite succès et réussite.

TABLE DES MATIERES

RESUME	3
DÉDICACES	6
REMERCIEMENTS	7
TABLE DES MATIERES	8
Liste des illustrations, graphiques et tableaux	12
Liste des symboles et des abréviations	16
INTRODUCTION	19
1. GENERALITES SUR LES TUYERES SUPERSONIQUES	21
1.1. Introduction	21
1.2. Applications et rôles des tuyères supersoniques	22
1.2.1. Moteur d'avion	23
1.2.2. Moteur fusée	24
1.2.3. Les souffleries	24
1.3. Différentes types de tuyères	25
1.3.1. Tuyère conique	25
1.3.2. Tuyère à contour profilé	26
1.3.2.1. Tuyère à zone d'expansion	26
1.3.2.2. Tuyère à détente centré	27
1.3.3. Tuyère à double galbe	27
1.3.4. Tuyère annulaire	28
1.3.5. Tuyère à corps central	29
1.3.5.1. Tuyère type bouchon	29

1.3.5.2. Tuyère type détente-déviation	30
1.4. Définitions importantes	30
1.4.1. Nombre de Mach et différents régimes d'écoulement	30
1.4.2. Onde de Mach	31
1.4.3. Onde de choc	33
1.4.3.1. Onde de choc normal (droite)	33
1.4.3.2. Onde de choc oblique	34
1.4.3.3. Onde de choc attaché et détachée	36
1.4.3.4. Onde de choc conique	36
1.4.3.5. Détente de Prandtl Meyer	37
1.5. Ecoulement monodimensionnel dans une tuyère	39
1.5.1. Equation fondamentale	39
1.5.1.1. Equation de continuité	40
1.5.1.2. Equation de la quantité de mouvement	40
1.5.1.3. Equation de l'énergie	40
1.5.1.4. Equation d'état	40
1.5.2. Relations de la dynamique des gaz	40
1.5.2.1. Grandeurs totales	41
1.5.2.2. Grandeurs critiques	42
1.5.3. Paramètres thermodynamiques à travers le choc normal	43
1.5.3.1. Grandeurs soniques	44
1.5.3.2. Relation de Prandtl.....	45
1.5.3.3. Paramètres statiques à travers le choc	46
1.5.3.3.1. Rapport des masses volumiques statiques	46
1.5.3.3.2. Rapport des pressions statiques	46
1.5.3.3.3. Rapport des températures statiques	47
1.5.3.4. Paramètres totales à travers le choc	47
1.5.3.4.1. Rapport des températures totales	47
1.5.3.4.2. Rapport des pressions totales	48
1.5.3.5. Variation d'entropie à travers le choc	49
1.5.4. Effet des variations de section sur l'écoulement	50
1.6. Fonctionnement d'une tuyère supersonique	52
1.6.1. Régime subsonique et régime sonique	53
1.6.2. Régime supersonique	53

1.6.2.1.	Régime adapté	54
1.6.2.2.	Régime sous adapté	55
1.6.2.3.	Régime sur adapté	55
2.	RELATIONS THERMODYNAMIQUES POUR UN ECOULEMENT	
	SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE	57
2.1.	Introduction	57
2.2.	Classification des gaz	57
2.2.1.	Gaz caloriquement et thermiquement parfait	58
2.2.2.	Gaz thermiquement parfait caloriquement imparfait	58
2.2.3.	Mélange chimiquement réactif d'un gaz parfait	59
2.2.4.	Gaz réel	59
2.3.	Paramètres thermodynamiques à haute température	60
2.3.1.	La vitesse du son	62
2.3.2.	Relation entre la température et la vitesse	63
2.3.3.	Relation entre la température et le nombre de Mach	63
2.3.4.	Relation entre la température et la masse volumique	64
2.3.5.	Relation entre la température et la pression	65
2.3.6.	Relation entre la température et la section	65
2.4.	Paramètre thermodynamique pour un gaz parfait	66
3.	ONDE DE CHOC NORMALE POUR UN GAZ CALORIQUEMENT	
	IMPARFAIT	67
3.1.	Introduction	67
3.2.	Hypothèses fondamentales	68
3.3.	Formulation mathématique	69
3.3.1.	Modèle du gaz à haute température	69
3.3.2.	Modèle du gaz parfait	72
3.4.	Procédure de calcul	72
3.4.1.	La chaleur spécifique à pression constante $C_p(T)$	72
3.4.1.1.	L'interpolation polynomiale de $C_p(T)$	73
3.4.1.2.	Intégration de la chaleur spécifique $C_p(T)$	74
3.4.2.	Détermination des paramètres thermodynamiques	75

3.4.2.1.	Rapports des grandeurs statiques à travers le choc correspondant à T_0	75
3.4.2.1.1.	Détermination des températures T_* et T_1 avant le choc	75
3.4.2.1.2.	Rapport des vitesses du son $\frac{a_*}{a_0}$ et $\frac{a_1}{a_0}$ avant le choc	77
3.4.2.1.3.	Rapport des masses volumiques $\frac{\rho_*}{\rho_0}$ et $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ avant le choc	77
3.4.2.1.4.	Rapport des pressions $\frac{P_*}{P_0}$ et $\frac{P_1}{P_0}$ avant le choc	80
3.4.2.1.5.	Détermination de la température T_2 et le rapport des températures x_T à travers le choc	80
3.4.2.1.6.	Rapport des vitesses du son $\frac{a_2}{a_0}$ à travers le choc	82
3.4.2.1.7.	Rapport des masses volumiques $\frac{\rho_2}{\rho_0}$ après le choc	83
3.4.2.1.8.	Rapport des masses volumiques x_ρ à travers le choc	83
3.4.2.1.9.	Rapport des pressions x_p	83
3.4.2.2.	Rapports des grandeurs totales à travers le choc	83
3.4.2.2.1.	Température totale	83
3.4.2.2.2.	La vitesse du son totale	84
3.4.2.2.3.	Rapport des masses volumiques et des pressions totales.....	85
3.4.2.3.	Variation d'entropie à travers le choc	85
3.4.3.	L'erreur relative de modèle gaz parfait	86
3.4.4.	Application dans une tuyère supersonique	87
4.	RESULTATS ET COMMENTAIRES	90
4.1.	Introduction	90
4.2.	Résultats obtenus pour les paramètres de l'écoulement supersonique à haute température à travers l'onde de choc normale	91
4.2.1.	Résultats en fonction de la température totale T_0	93
4.2.2.	Résultats en fonction de nombre de Mach amont M_1	99
4.3.	Résultats sur l'erreur du modèle du gaz parfait	110
4.4.	Résultats sur l'application des tuyères supersoniques	115
	CONCLUSION	119
	APPENDICE A	121
	APPENDICE B	122
	REFERENCES	136

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure (1.1) : Tuyère de Laval	21
Figure (1.2) : Schéma d'une tuyère convergente-divergente (de Laval)	22
Figure (1.3) : Tuyère supersonique d'un avion de combat	23
Figure (1.4) : Tuyère propulsive d'un moteur fusée	24
Figure (1.5) : Schéma d'une soufflerie supersonique à deux cols	25
Figure (1.6) : Tuyère conique	26
Figure (1.7) : Forme de la tuyère à zone d'expansion	27
Figure (1.8) : Forme générale d'une tuyère à détente centrée	27
Figure (1.9) : Tuyère à double galbe	28
Figure (1.10) : Tuyère annulaire	28
Figure (1.11) : Géométrie de la tuyère à corps central type bouchon	29
Figure (1.12) : Géométrie de la tuyère à corps central type détente déviation	30
Figure (1.13) : Représentation des différents régimes d'écoulements	31
Figure (1.14) : Propagation des perturbations de l'écoulement en régime subsonique et supersonique	32
Figure (1.15) : Illustration d'une onde de choc normale	34
Figure (1.16) : Illustration d'une onde de choc oblique	35
Figure (1.17) : Choc oblique de type fort	35
Figure (1.18) : Choc oblique de type faible	35
Figure (1.19) : Quelques configurations caractéristiques pour une onde de choc oblique attachée et détachée	36
Figure (1.20) : L'avion YF-12	37
Figure (1.21) : Représentation d'une onde de choc conique	37

Figure (1.22) : Schéma de la détente de Prandtl-Meyer	38
Figure (1.23) : Schéma d'une onde de compression	38
Figure (1.24) : Représentation d'une onde de choc normale dans une tuyère supersonique	43
Figure (1.25) : Evolution des rapports thermodynamiques à travers un choc normal	49
Figure (1.26) : Effet des variations de section sur l'écoulement	50
Figure (1.27) : Principe de fonctionnement d'une tuyère convergente-divergente	54
Figure (1.28) : Présentation du régime adapté d'une tuyère	55
Figure (1.29) : Présentation du régime sous adapté d'une tuyère	55
Figure (1.30) : Présentation du régime sur adapté sans décollement d'une tuyère	56
Figure (1.31) : Schéma d'un décollement induit par un choc dans une tuyère	56
Figure (3.1) : Variation de la fonction $F_{\rho}(T)$ dans $[T_s, T_0]$	77
Figure (3.2) : Présentation de la condensation des nœuds	79
Figure (3.3) : L'intervalle d'existence de la solution T_2 par rapport à T_0 lorsque : (a) $M_1 = 2,00$, (b) $M_1 = 3,00$, (c) $M_1 = 4,00$, (d) $M_1 = 5,00$	82
Figure (3.4) : Variation de la fonction $F_A(T)$ dans $[T_s, T_*]$	88
Figure (4.1) : Variation de $C_p(T)$ en fonction de la température génératrice T_0	92
Figure (4.2) : Variation de $\gamma(T)$ en fonction de la température génératrice T_0	92
Figure (4.3) : Variation du rapport de température T_2/T_1 en fonction la température génératrice T_0	93
Figure (4.4) : Variation du rapport de la masse volumique ρ_2/ρ_1 en fonction la température génératrice T_0	94
Figure (4.5) : Variation du rapport de pression P_2/P_1 en fonction la température génératrice T_0	95
Figure (4.6) : Variation du nombre de Mach M_2 en fonction de la température génératrice T_0	96
Figure (4.7) : Variation du l'entropie S_{12}/r en fonction la température génératrice T_0	97
Figure (4.8) : Variation du rapport de pression totale P_{02}/P_{01} en fonction de la température génératrice T_0	98
Figure (4.9) : Variation du rapport de température T_2/T_1 en fonction du nombre de Mach amont M_1	100
Figure (4.10) : Variation du rapport de la masse volumique ρ_2/ρ_1 en fonction du	

nombre de Mach amont M_1	101
Figure (4.11) : Variation du rapport de pression P_2/P_1 en fonction du nombre de Mach amont M_1	102
Figure (4.12) : Variation du nombre de Mach M_2 en fonction du nombre de Mach amont M_1	102
Figure (4.13) : Variation de l'entropie S_{12}/r en fonction du nombre de Mach amont M_1	103
Figure (4.14) : Variation du rapport de pression totale P_{02}/P_{01} en fonction de nombre du Mach amont M_1	104
Figure (4.15) : L'évolution de l'erreur relative du rapport de température T_2/T_1 en fonction du nombre du Mach amont M_1	113
Figure (4.16) : L'évolution de l'erreur relative du rapport de la masse volumique ρ_2/ρ_1 en fonction du nombre du Mach amont M_1	113
Figure (4.17) : L'évolution de l'erreur relative du rapport de pression P_2/P_1 en fonction du nombre du Mach amont M_1	114
Figure (4.18) : L'évolution de l'erreur relative du nombre de Mach M_2 en fonction du nombre du Mach amont M_1	114
Figure (4.19) : L'évolution de l'erreur relative de l'entropie S_{12}/R en fonction du nombre du Mach amont M_1	115
Figure (4.20) : L'évolution de l'erreur relative du rapport de pression totale P_{02}/P_{01} en fonction du nombre de Mach amont M_1	115
Figure (4.21) : Effet de T_0 sur la variation du nombre de Mach à travers la tuyère. (a) : Forme de la tuyère dimensionnée sur la base du modèle <i>GP</i> donnant $M_s = 3.00$. (b) : Variation à Haute Température du nombre de Mach à travers la tuyère du cas (a).	116
Figure (4.22) : Correction du nombre de Mach d'une tuyère dimensionnée par le modèle <i>GP</i>	117
Figure (4.23) : Formes des tuyères donnant la même variation du nombre de Mach	118
Tableau (3.1) : Coefficient du polynôme $C_p(T)$	73
Tableau (3.2) : Algorithme de Dichotomie	76
Tableau (4.1) : Valeurs numériques des paramètres thermodynamiques à travers l'onde de choc normale.....	99

Tableau (4.2) : Résultats numériques des variations du rapport de température T_2/T_1 à haute température en fonction de nombre de Mach amont M_1	105
Tableau (4.3) : Résultats numériques des variations du rapport de la masse volumique ρ_2/ρ_1 à haute température en fonction de nombre de Mach amont M_1 ...	106
Tableau (4.4) : Résultats numériques des variations du rapport de pression P_2/P_1 à haute température en fonction de nombre de Mach amont M_1	107
Tableau (4.5) : Résultats numériques des variations du nombre de Mach M_2 à haute température en fonction de nombre de Mach amont M_1	108
Tableau (4.6) : Résultats numériques des variations de l'entropie S_{12}/r à haute température en fonction de nombre de Mach amont M_1	109
Tableau (4.7) : Résultats numériques des variations du rapport de pression totale P_{02}/P_{01} à haute température en fonction de nombre de Mach amont M_1	110
Tableau (4.8) : Correction du nombre de Mach de sortie de la tuyère	118

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

1. Lettres latines

A : Aire d'une section de la tuyère

a : Vitesse du son

C_p : Chaleur spécifique à pression constant

C_v : Chaleur spécifique à volume constant

H : Enthalpie

U : Energie interne

W : Travail

M : Nombre de Mach

P : Pression

v : Volume

R : Constante des gaz

S : Entropie

T : Température

\bar{T} : Température limite

V : Vitesse des gaz

E : Energie de molécule

t : Temps

x_p : Rapport de pression à travers le choc

x_T : Rapport de température à travers le choc
 x_ρ : Rapport des masses volumiques à travers le choc
 b_j : Constante d'interpolation de la fonction $C_p(T)$
 K : Nombre d'itération
 a_j : Coefficient de la fonction polynomiale de la chaleur spécifique C_p
 c_j : Coefficient de la fonction d'enthalpie
 F_A : La fonction de rapport des sections
 F_ρ : La fonction de rapport de masse volumique
 s_j : La fonction de condensation de *Robert*
 N_p : Nombre de discrétisation
 b_1, b_2 : Paramètres de contrôle de la distribution des nœuds
 Δx : Le pas
 n : Nombre de panneau
 x_1, x_2 : Les bornes d'intégrale
GP : Gaz parfait
HT : Gaz à haute température

2. Lettres grecques

μ : Angle de Mach
 δ : La déflexion
 ε : Facteur de perte de poussée
 ϵ : Angle de choc
 ε : La précision
 α : Angle formé par l'axe de la tuyère et la paroi extérieur du bouchon
 β : Angle formé par l'axe de la tuyère et la paroi intérieur du bouchon
 ρ : Masse volumique
 γ : Rapport des chaleurs spécifiques
 Δ : Le discriminant
 ε_x : Erreur relative

3. Indices

i : Numéro du point

0 : Conditions totales (point d'arrêt)

1 : Le point de référence de l'écoulement amont (avant le choc)

2 : Le point de référence de l'écoulement aval (après le choc)

***** : Condition critique

s : Section de sortie

INTRODUCTION

Le développement extraordinaire de l'informatique a entraîné pour les sciences de l'ingénieur, et particulièrement pour l'aérodynamique, une révolution dans les méthodes d'étude théorique. Cette révolution, que l'on peut faire remonter au début des années soixante, a conduit à l'émergence d'une nouvelle discipline, l'aérodynamique numérique, qui joue un rôle de plus en plus important dans la conception et l'optimisation des véhicules ou engins aériens. Depuis une vingtaine d'années, nous pouvons dire que l'aérodynamique numérique a perdu beaucoup de son caractère empirique grâce aux efforts convergents des mathématiciens pour résoudre les problèmes mathématiques liés aux méthode de calcul en aérodynamique et aux aérodynamiciens pour mieux analyser les algorithmes qu'ils mettent en œuvre.

Nous pouvons partager l'aérodynamique en deux branches essentielles : externe et interne. La première branche est consacrée à l'étude de l'écoulement en présence de l'air libre, tels que les écoulements autour des profils d'ailes. L'autre est spécialisée dans l'étude des écoulements internes des fluides tels que les moteurs fusés, les moteurs d'avion et les tuyères.

Les tuyères supersoniques interviennent dans beaucoup de structures telles que les moteurs fusées et missiles, moteurs avions et dans la fabrication des souffleries supersoniques pour la modélisation et la réalisation expérimentale des écoulements supersoniques.

Les méthodes numériques en aérodynamique et le développement de l'informatique ont eu deux sortes de conséquences, D'une part, des théories simplifiées (théories linéarisées, théories asymptotiques comme celle de la couche limite) ou des méthodes plus

exactes bien connues dans leur principe (méthodes des singularités et la méthode des caractéristiques) ont vu leur champ d'applications considérablement élargi. D'autre part, des problèmes, jusque-là inaccessibles à cause de leur complexité mathématique (par exemple, le calcul des ondes de choc et des écoulements transsoniques, ou le calcul d'écoulements fortement décollés), ont pu être résolus numériquement à l'aide de nouvelles méthodes.

Les ondes de choc se produisent lorsqu'un écoulement supersonique décélère brusquement en réponse à une augmentation importante de la pression ou lorsque l'écoulement change de direction et que ce changement s'accompagne d'une compression.

Le but de cette étude est de développer un programme de calcul numérique en langage Fortran permettant de déterminer les rapports thermodynamiques à travers une onde de choc normale à haute température dans une tuyère supersonique.

Ce présent mémoire est présenté en quatre chapitres comme suit :

- Le premier chapitre est consacré à l'étude de l'écoulement dans une tuyère supersonique d'une manière général accompagné par un bref historique sur le développement du domaine des tuyères ainsi que la présentation de quelques notions fondamentales indispensables pour l'étude de la conception d'une tuyère dans le domaine supersonique.
- Le deuxième chapitre est consacré à la détermination des équations de la thermodynamique d'un écoulement supersonique sur l'hypothèse d'un gaz calorifiquement imparfait.
- Le troisième chapitre consacré à la détermination des paramètres thermodynamique à travers l'onde de choc normale à haute température et de calculer l'erreur relative entre le modèle gaz parfait et notre modèle avec l'application dans une tuyère supersoniques.
- Dans le dernier chapitre, on présentera les principaux résultats relatifs au chapitre précédent.

CHAPITRE 1

GENERALITE SUR LES TUYERES SUPERSONIQUES

1.1 Introduction

D'un point de vue historique, la tuyère est le fruit du travail de nombreux chercheurs et ingénieurs à la fin du *XIX^{ème}* siècle. *Gustave de Laval* construisit en 1887 une petite machine à vapeur pour prouver que de tels appareils peuvent être fabriqués dans de semblables dimensions, et en 1890 il développe une tuyère permettant d'augmenter la vitesse de la vapeur entrant dans la turbine. On la connaît de nos jours sous le nom de tuyère de Laval et elle présente une importance particulière dans la conception de fusée, de turbines à vapeur et à gaz... [34].

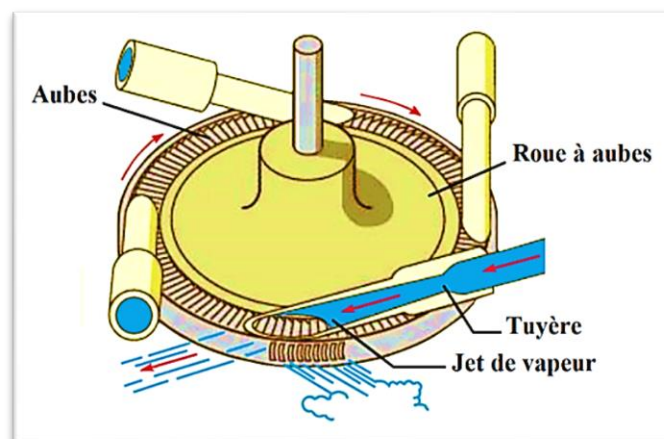


Figure (1.1) : Tuyère de Laval [34].

La fonction de la tuyère est de convertir l'énergie thermique issue de la chambre de combustion en énergie cinétique. Elle convertit ainsi les gaz de faible vitesse, de pression

et température élevées en gaz de vitesse très importante mais de basse pression et température.

La forme générale du contour d'une tuyère, présente trois parties essentielles, voir la figure (1.2) [19] :

- **Le convergent** : la partie amont de la tuyère. Situé entre la chambre de combustion et le col, son rétrécissement contribue à l'accélération des gaz où l'écoulement est subsonique.
- **Le col** : est la partie du canal d'écoulement des gaz qui a le plus petit diamètre et qui, par le choix de ses dimensions, fixe le point de fonctionnement du moteur où l'écoulement atteint la vitesse du son
- **Le divergent** : il augmente la vitesse d'éjection des gaz au cours de leur détente et améliore, de ce fait, leur effet propulsif où l'écoulement atteint des vitesses supersoniques

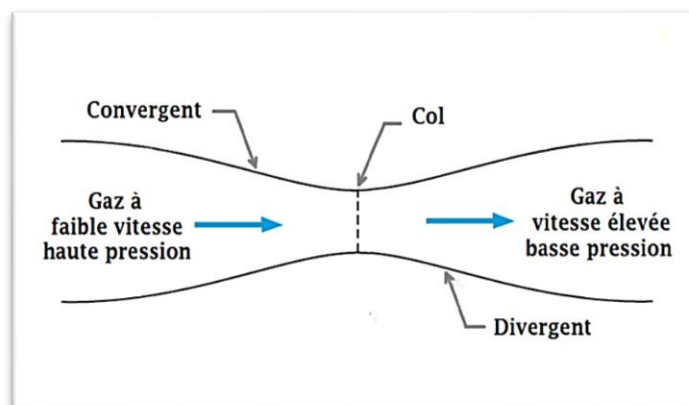


Figure (1.2) : Schéma d'une tuyère convergente-divergente (de Laval) [8].

1.2 Applications et rôles des tuyères supersoniques

Les tuyères sont des canaux d'injection ayant pour rôle principale de transformer l'énergie de pression en énergie cinétique. Les profils de ces tuyères sont tels qu'ils se confondent avec une ligne de courant. Leur détermination se fait généralement par la méthode des caractéristiques.

Au début, les tuyères ont été considérées comme étant des organes annexes. Leurs rôles consistaient essentiellement pour le cas d'un turboréacteur, d'assurer le

fonctionnement du compresseur à un régime de vol donné et cela pour une adaptation convenable de sa forme géométrique.

Les tuyères supersoniques interviennent dans beaucoup de structures telles que [20] :

1.2.1 Moteur d'avion

Pour les premiers avions supersonique militaires le souci primordial était d'assurer de bonnes conditions de vol subsonique ou transsonique de sorte que l'emploi d'un divergent était pratiquement proscrit pour éviter les régimes de sur détente à ces vitesses modérées.

La rentabilité de tels projets n'est assurée que si les performances optimales sont obtenues de tous les éléments du moteur. Dans tels projets le rôle assigné à la tuyère est défini de la façon suivante [19]:

- La tuyère doit assurer le blocage de l'écoulement aux divers régimes de fonctionnement par la variation de la surface au col en fonction du débit et des conditions de température et de pression des gaz à évacuer.
- Elle doit aussi réaliser la détente optimale des gaz de combustion. C'est-à-dire, la poussée maximale du régime de la croisière. Ce problème est délicat, car la section de sortie doit être raccordée au maître couple du moteur ou à la structure de l'avion par carénage.
- Aux régimes du vol intermédiaires, la tuyère ne doit pas provoquer des pertes de poussée trop élevées du fait de son inadaptation.
- A l'atterrissage, la tuyère doit contribuer au freinage de l'avion par l'organisation d'un reversement de la poussée, le plus souvent par déviation du jet à la sortie. Elle participe aussi à l'atténuation du bruit.



Figure (1.3) : Tuyère supersonique d'un avion de combat [21].

1.2.2 Moteur fusée

Pour les moteurs fusés, la tuyère représente la partie essentielle, car elle permet d'accélérer les gaz à la sortie de la chambre de combustion jusqu'à une certaine vitesse dans le but d'obtenir une force de poussée comme une résultante de cette accélération. Notons ici que la structure d'un missile est constituée de la chambre de combustion et de la tuyère. Cette dernière constitue environ 70% de la masse totale d'une chambre propulsive, voir figure (1.4) [16].



Figure (1.4) : Tuyère propulsive d'un moteur fusée [16].

1.2.3 Les souffleries

Pour simuler les conditions de fonctionnement des systèmes aérodynamiques réels (maquette d'avion, profil d'aile...), on utilise des souffleries. La figure (1.5) donne un exemple de soufflerie à deux cols. Ces installations comprennent un système d'alimentation et de mise en vitesse des gaz, une veine d'essai et un système d'évacuation des gaz ou une boucle de récupération permettant la recirculation des gaz [25].

L'accélération des gaz à vitesse supersonique est réalisée à l'aide d'une tuyère convergente-divergente et la récupération d'une partie de l'énergie cédée au fluide est réalisée par un diffuseur.

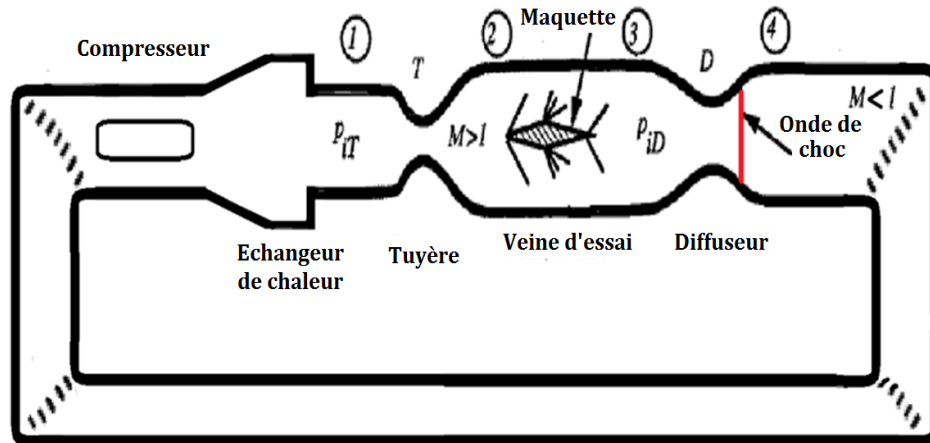


Figure (1.5) : Schéma d'une soufflerie supersonique à deux cols [25].

1.3 Différents types de tuyères

Par nécessité d'atteindre des vitesses supersoniques pour des besoins, surtout militaires, les tuyères sont devenues des organes essentiels pour le moteur à réaction. Le rendement de ces machines, leurs poussées ainsi que leur consommation dépendent énormément de la forme géométrique de la tuyère. Citons, quelques formes les plus connues :

1.3.1 Tuyère conique

Les tuyères coniques qui étaient très largement utilisées dans la conception des premiers moteurs fusés de par leur simplicité et leur facilité de construction sous forme d'un cône, voir figure (1.6). Généralement ces tuyères présentent des angles de divergence entre 15 et 30 degrés [20].

Elles sont actuellement encore employées pour équiper les très petits moteurs qui délivrent de faibles poussées (servant, par exemple, au contrôle d'altitude des satellites) car cette configuration engendre une perte considérable de poussée causée principalement par la divergence de l'écoulement à la section de sortie, au lieu d'être axiale pour un maximum de poussée. Cette perte est quantifiée par *Malina* en introduisant un facteur qui dépend de l'angle de divergence du cône [15]:

$$\lambda = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha) \quad (1.1)$$

Avec :

α : Angle de divergence de la tuyère.

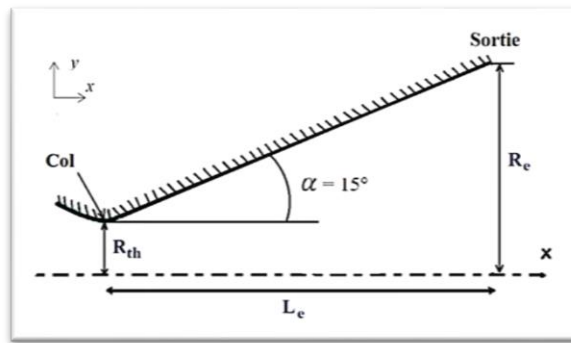


Figure (1.6) : Tuyère conique [12].

1.3.2 Tuyère à contour profilé

Après quelques années et en parallèle avec le développement expérimental et numérique, les constructeurs ont pensé à l'amélioration des performances des tuyères de propulsion. Ils ont remarqués que les tuyères coniques délivrent une certaine poussée mais avec une perte à cause de l'inclinaison de la portion supersonique qui est entre 15° et 30° . Donc l'inclinaison de la tuyère à la sortie est nulle, la poussée sera maximale. Les numériciens développent une méthode appelée méthode des caractéristiques pour régler ce problème. Quelques temps après, ils ont trouvé plusieurs formes. Nous citons les deux formes les plus importantes :

- Tuyère à détente centrée.
- Tuyère à zone d'expansion.

Pour accélérer l'écoulement, Il faut qu'il y ait une certaine détente dans la tuyère et comme l'écoulement est horizontal au col et à la sortie, il faut une dérivation de la paroi jusqu'à un certain angle maximal θ_{max} , ce que l'on appelle une zone de détente ou d'expansion ensuite un redressement pour donner $\theta_s = 0$ à la sortie ce que l'on appelle zone de redressement.

En général, la tuyère profilée possède des angles allant de 20° à 30° au col et de 5° à 14° à la sortie de la tuyère [20].

1.3.2.1 Tuyère à zone d'expansion

La forme de la zone d'expansion de la partie divergente est un peu arbitraire. Typiquement, une forme d'arc circulaire de grand rayon est utilisée dans les souffleries. A

la sortie de la tuyère, l'écoulement devient uniforme et parallèle à l'axe de révolution [20,26] comme indique la figure (1.7):

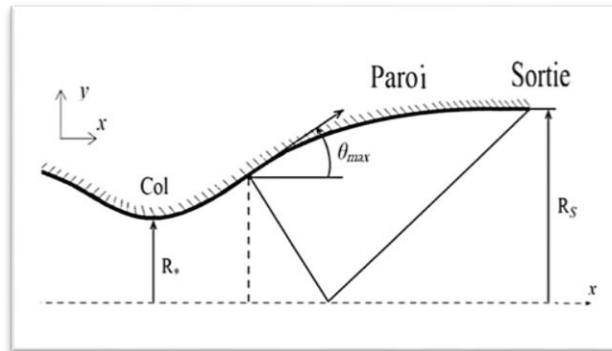


Figure (1.7) : Forme de la tuyère à zone d'expansion [20,35].

1.3.2.2 Tuyère à détente centrée :

La tuyère est de type à détente centrée, si la zone d'expansion est contractée en un point, où la détente prend place à travers des ondes de Prandtl Meyer centrées et générées à partir du coin du col de la tuyère avec un angle initial θ^* [20, 26] comme le montre la figure (1.8) :

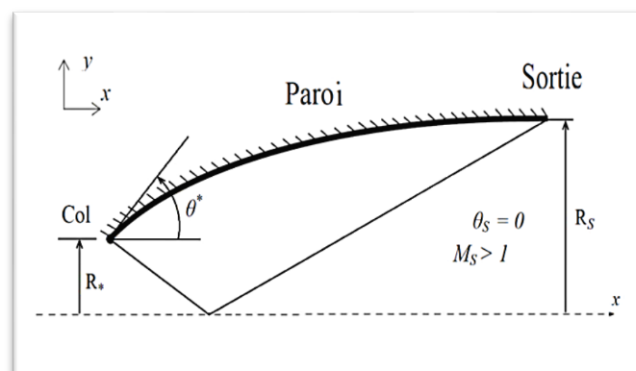


Figure (1.8) : Forme générale d'une tuyère à détente centrée [30].

1.3.3 Tuyère à double galbe

Ce type de tuyère est une nouvelle génération qui a récemment reçu l'attention des motoristes. Comme son nom l'indique, c'est une tuyère formée par une jonction de deux tuyères à simple galbe au niveau d'un point dit d'inflexion (voir la figure 1.9).

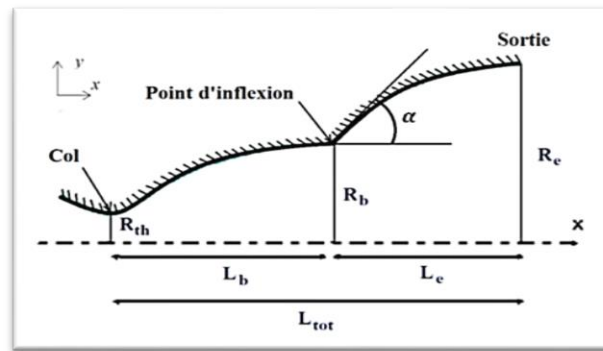


Figure (1.9) : Tuyère à double galbe [27].

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha : \text{L'angle formé par l'axe de la tuyère et la paroi extérieure au point de deflexion.} \\ R : \text{Le rayon.} \\ L : \text{La longueur.} \end{array} \right.$$

La tuyère double galbe présente des performances très élevées du moment qu'elle s'adapte à deux plages de fonctionnement (Auto-adaptation de l'écoulement), à des basses altitudes et à de très haute altitudes sans activation mécanique. Et aussi le décollement du jet à basse altitude, fixé à la jonction des deux galbes [27].

1.3.4 Tuyère annulaire

Dans ce type, les gaz d'échappement passent à partir du col jusqu'à la sortie de la tuyère à travers une conduite sous forme d'anneau au lieu d'une section circulaire normal. Cet anneau est formé au col d'un bouchon central et d'une paroi externe qui définit le gabarit de la tuyère voir la Figure (1.10).

Ce type de configuration induit toujours une perte de poussée du faite que le contour est de bordures coniques et qu'à la sortie, le gaz d'éjection n'est pas d'une direction axiale.

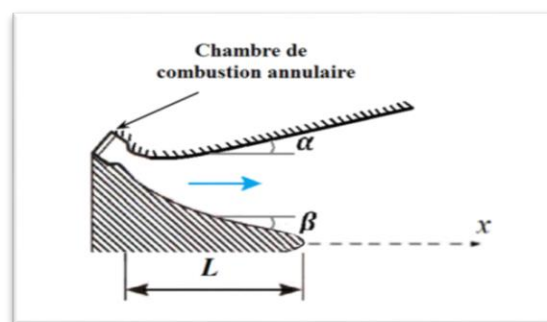


Figure (1.10) : Tuyère annulaire [10].

Avec :

$$\begin{cases} \alpha : \text{L'angle formé par l'axe de la tuyère et la paroi extérieure.} \\ \beta : \text{L'angle formé par l'axe de la tuyère et la paroi intérieure du bouchon.} \end{cases}$$

1.3.5 Tuyère à corps central

Contrairement aux configurations précédemment présentées, ce type de tuyères possède un corps central dont la chambre de combustion est directement reliée à la station du col. Dans cette configuration le processus de détente des gaz est directement ou indirectement régulé par la pression ambiante [11]. L'écoulement des gaz dans ce cas s'ajuste donc de lui-même pour être conforme aux conditions extérieures. Par contre dans la configuration précédente les processus de détente des gaz sont principalement influencés par le contour de la paroi à la section divergente de la tuyère. Ces tuyères sont classées en deux catégories :

- Tuyère type bouchon (Plug Nozzle).
- Tuyère type détente-déviation (Expansion-Deflection Nozzle).

1.3.5.1 Tuyère type à bouchon

Le col de ce type de tuyères possède la forme d'un anneau localisé au diamètre extérieur. L'écoulement est contrôlé par des ondes de détente provoquées par la déviation du bouchon dont la surface constitue le principal paramètre qui l'influence. Les gaz d'échappement subissent une détente de la pression de la chambre de combustion jusqu'à la pression ambiante comme il est indiqué dans la figure (1.11). La poussée de ce type de tuyères est identique à celle de la tuyère convergente-divergente [20].

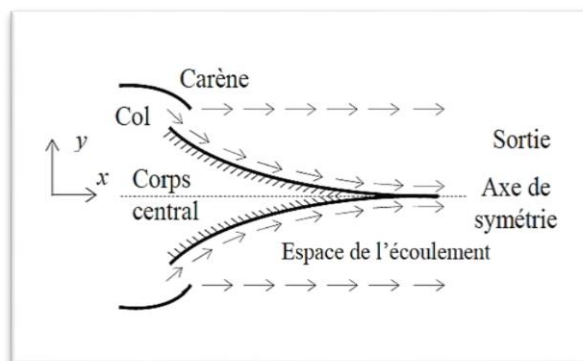


Figure (1.11) : Géométrie de la tuyère à corps central type bouchon [20].

1.3.5.2 Tuyère type détente-déviation

Dans ce type de tuyère une chambre de combustion compacte se positionne autour de la ligne centrale et présente un col annulaire au voisinage de cette dernière. Dans ce cas, les gaz se dirigent dans la direction de l'écoulement du bouchon central qui réalise une rotation de l'écoulement en expansion à une direction presque axiale. C'est pourquoi on la qualifie de tuyère à détente- déviation « E.D ». Cette configuration permet l'obtention de bonnes performances même dans des conditions au-dessous de celles pour lesquelles elle a été initialement conçue [20].

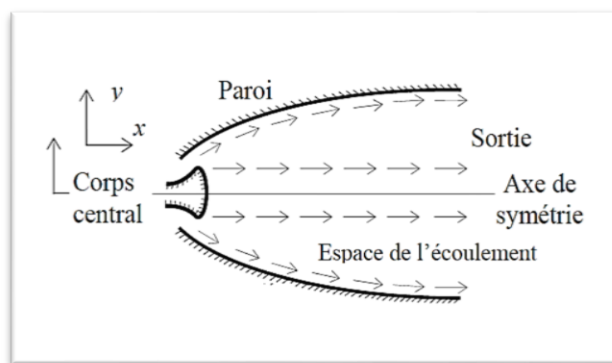


Figure (1.12) : Géométrie de la tuyère à corps central type détente déviation [20].

1.4 Définitions importantes

1.4.1 Nombre de Mach et différents régimes d'écoulement

Le nombre de Mach est le rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse de propagation de l'onde sonore (vitesse du son) défini par [1]:

$$M = \frac{V}{a} \quad (1.2)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} M : \text{Nombre de Mach} \\ V : \text{Vitesse de l'écoulement} \\ a : \text{Vitesse du son} \end{array} \right.$$

Telle, que la vitesse du son peut se calculer par la relation suivante [1]:

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (1.3)$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma : \text{Rapport des chaleurs spécifiques} \\ R : \text{Constante du gaz parfait} \\ T : \text{Température de l'écoulement} \end{array} \right.$$

Les différents régimes d'écoulements liés à cette définition (voir la figure I.13) sont [8]:

$$M < 0.8 \quad \Rightarrow \quad \text{Écoulement subsonique}$$

$$0.8 < M < 1.2 \quad \Rightarrow \quad \text{Écoulement transsonique}$$

$$M = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Écoulement sonique}$$

$$1.2 < M < 5 \quad \Rightarrow \quad \text{Écoulement supersonique}$$

$$M > 5 \quad \Rightarrow \quad \text{Écoulement hypersonique}$$

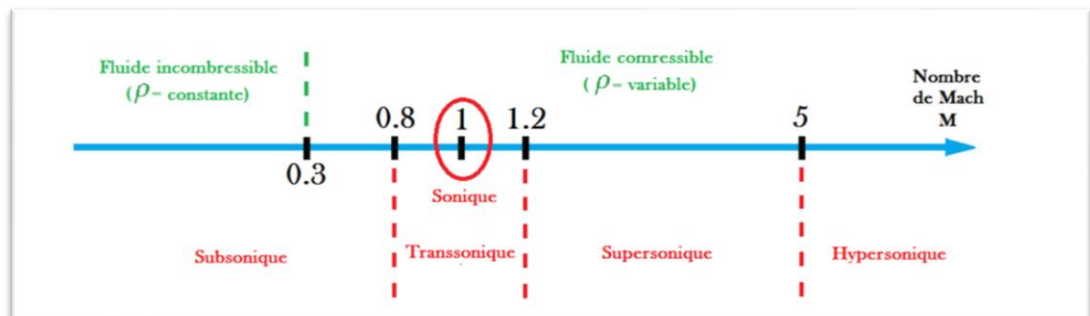


Figure (1.13) : Représentation des différents régimes d'écoulements [8].

1.4.2 Onde de Mach

Considérons une source ponctuelle de perturbations acoustiques (par exemple un émetteur), se déplaçant dans un fluide au repos [1].

- Si l'émetteur se déplace à une vitesse subsonique, sa vitesse ($V < a$). À l'instant ($t_0 = 0$), l'émetteur est au point A et à l'instant ($t = t_0 + \delta t$) il se trouve au point B. Pendant son déplacement entre les points A et B, le front de l'onde émise en ($t = 0$) s'est déplacé de « at », mais l'émetteur reste toujours à l'intérieur des ondes qui ont été émises entre ces deux instants.

- Si maintenant la vitesse de l'émetteur est supersonique ($V > a$). La célérité des ondes émises est toujours "a", et au cours de son déplacement entre les points A et B l'émetteur va générer plusieurs ondes acoustiques mais il est maintenant en permanence à l'extérieur de la famille des ondes acoustiques émises.

L'émetteur se déplace toujours devant ces fronts d'ondes formant une enveloppe de perturbations qui définit l'**onde de Mach**. L'angle formé par cette enveloppe par rapport à la direction de propagation est appelé **angle de Mach μ** .

D'après le triangle ABC, l'angle de Mach est déterminé par le nombre de Mach local [1,7]:

$$\mu = \arcsin \frac{at}{Vt} = \arcsin \frac{1}{M} \quad (1.4)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu : \text{angle de Mach} \\ M : \text{Nombre de Mach} \\ Vt : \text{Distance entre A et B} \\ at : \text{Distance entre A et C} \end{array} \right.$$

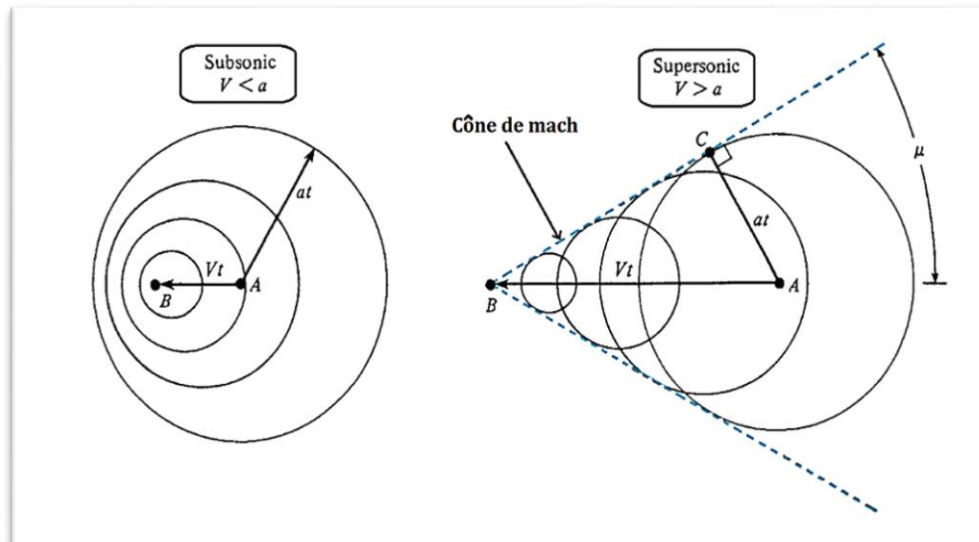


Figure (1.14) : Propagation des perturbations de l'écoulement en régime subsonique et supersonique [2].

1.4.3 Onde de choc

De nombreuses expériences montrent que les écoulements compressibles à grande vitesse peuvent subir des variations très rapides de leurs caractéristiques sur des distances très faibles. Ces variations sont tellement rapides que l'écoulement apparaît discontinu, on parle alors d'onde de choc. Les ondes de choc se produisent lorsqu'un écoulement supersonique décélère brusquement en réponse à une augmentation importante de la pression ou lorsque l'écoulement change de direction et que ce changement s'accompagne d'une compression.

Une onde de choc est une zone d'accumulation de perturbations élémentaires où les phénomènes physiques sont extrêmement violents. Au travers de cette zone d'épaisseur très faible (de l'ordre de $1/10000$ m) il en résulte une discontinuité de pression, de température, de masse volumique et de vitesse. Une onde de choc augmente la pression statique, la température statique ainsi que la densité du fluide. Cependant, le nombre de Mach ainsi que la pression totale diminuent [1, 2, 20, 24, 26].

Le choc est une région où se transforme une partie de l'énergie cinétique (vitesse moyenne organisée des particules) en énergie interne (fluctuations internes désorganisées des particules : chaleur ou température). Il existe de nombreuses variétés d'ondes de choc :

1.4.3.1 Onde de choc normale (droite)

La vitesse de propagation d'une onde de choc dépend des conditions de pression et de densité de part et d'autre du choc. Dans le cas où le vecteur vitesse est perpendiculaire au front du choc ; on parle d'une onde de choc droite ou normale (voir figure 1.15)

Les ondes de choc normal peuvent se produire dans la section divergente d'une tuyère, au col d'un diffuseur d'une soufflerie supersonique, dans les conduites et sur les corps arrondis. Dans tous ces cas l'écoulement est toujours supersonique avant le choc et subsonique après le choc.

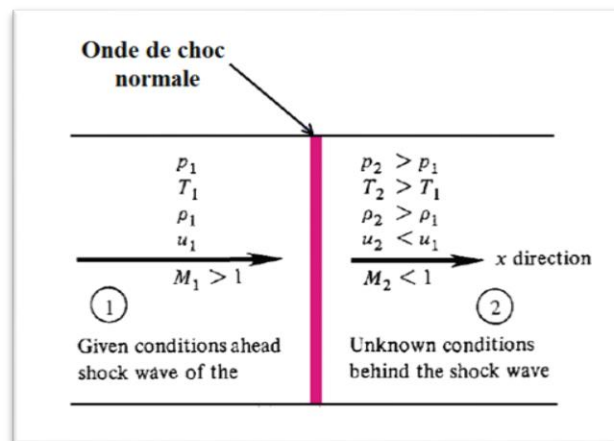


Figure (1.15) : Illustration d'une onde de choc normale [2].

1.4.3.2 Onde de choc oblique

Les ondes de choc obliques se développent lorsque l'écoulement change de direction et que ce changement de direction s'accompagne d'une compression à travers l'obstacle ce qui provoque une décélération d'écoulement et en parallèle une augmentation de pression.

La configuration d'étude est représentée sur la figure (1.16). Elle correspond à la situation où l'onde de choc est inclinée d'un angle ϵ par rapport à l'écoulement incident (amont du choc). L'angle β donne l'inclinaison de l'écoulement aval (qui est dévié par l'onde de choc) par rapport au plan du choc. Il en résulte que l'angle « δ » représente le changement de direction de l'écoulement, c'est à dire la déflexion. On notera aussi respectivement V_1 et V_2 les vitesses en amont et en aval de l'onde de choc [2].

$$\delta = \epsilon - \beta \quad (1.5)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon : \text{L'angle entre l'onde de choc et l'écoulement en amont du choc.} \\ \beta : \text{L'angle entre l'écoulement en aval du choc et le plan de choc.} \\ \delta : \text{La déflexion} \end{array} \right.$$

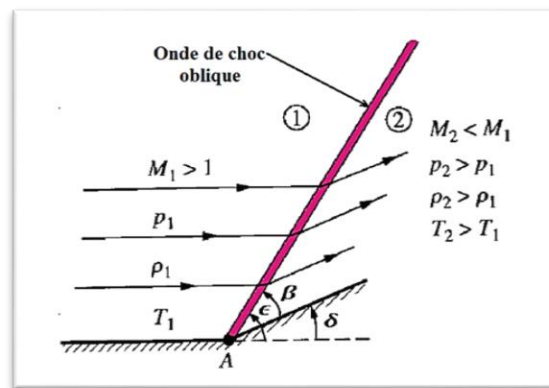


Figure (1.16) : Illustration d'une onde de choc oblique [2].

Il existe pour un même nombre de Mach amont M_1 et pour une même déflexion « δ » deux valeurs possibles pour l'angle de choc « ϵ » (et donc également deux valeurs possibles pour le Mach aval M_2) [1]:

- Si la valeur de « ϵ » devient plus élevée, $\epsilon_1 > \epsilon$. On dit que le choc oblique est fort. Dans ce cas, l'écoulement aval est subsonique (Voir figure 1.17).

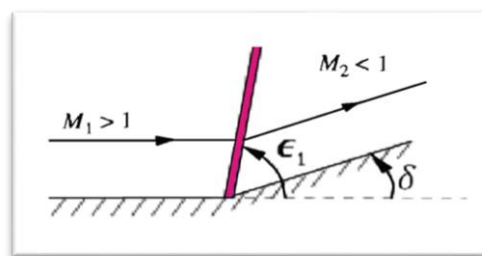


Figure (1.17) : Choc oblique de type fort [2].

- Si la valeur de « ϵ » devient plus petite, $\epsilon_1 < \epsilon$. On dit que le choc oblique est faible, et l'écoulement en aval du choc reste généralement supersonique, sauf pour une faible plage de valeurs de δ et M_1 , où l'écoulement devient faiblement subsonique. (Voir figure 1.18).

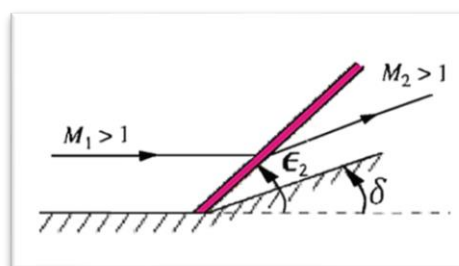


Figure (1.18) : Choc oblique de type faible [2].

1.4.3.3 Onde de choc attachée et détachée

On dit pour un choc oblique qu'il est attaché ou détaché, s'il y a un changement de la déflexion « δ » voir la figure (1.19).

- Si la valeur de « δ » devient plus élevée, $\delta_{max} > \delta$. On dit que le choc oblique est détaché.
- Si la valeur de « δ » devient plus petite, $\delta_{max} < \delta$. On dit que le choc oblique est attaché.

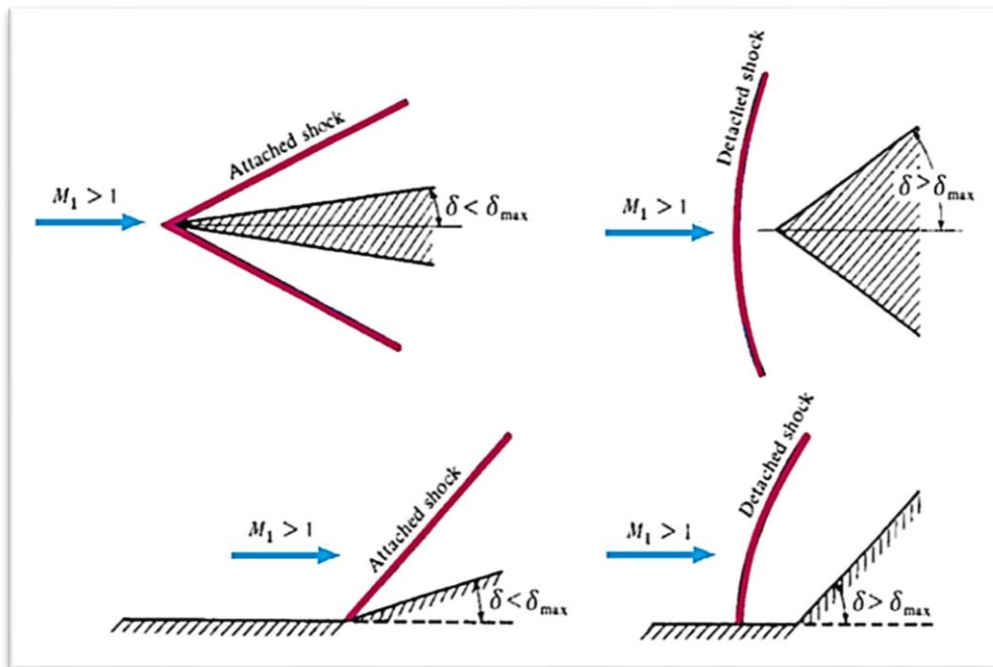


Figure (1.19) : Quelques configurations caractéristiques pour une onde de choc oblique attachée et détachée [2].

1.4.3.4 Onde de choc conique

Nous incluons ici le sujet de chocs coniques à cause de son importance pratique dans de nombreux problèmes de conception. Par exemple, beaucoup d'avions supersoniques ont des diffuseurs avec des pointes coniques à leurs entrées d'air. La figure (1.20) montre l'avion YF-12, qui est un exemple excellent de ce cas.

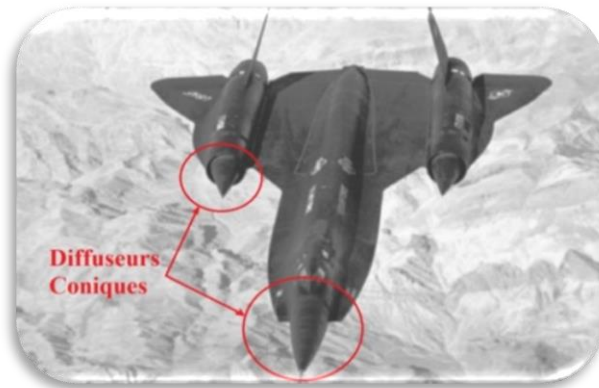


Figure (1.20) : L'avion YF-12 [32].

Les chocs coniques portent une grande similitude de flux associés aux chocs obliques (coin généré), figure (1.21). Nous examinons les flux coniques à incidence nulle (à l'angle zéro d'attaque). Pour l'équation de continuité dans des flux (tridimensionnels) axisymétriques à être satisfaits, les lignes de courant ne sont plus parallèles à la surface du cône, mais doivent se courber. Après le choc conique, la pression statique de la surface du cône augmente, et cette augmentation est isentropique. Les chocs coniques sont des chocs faibles et il n'y a aucun équivalent au choc oblique fort de la cale.

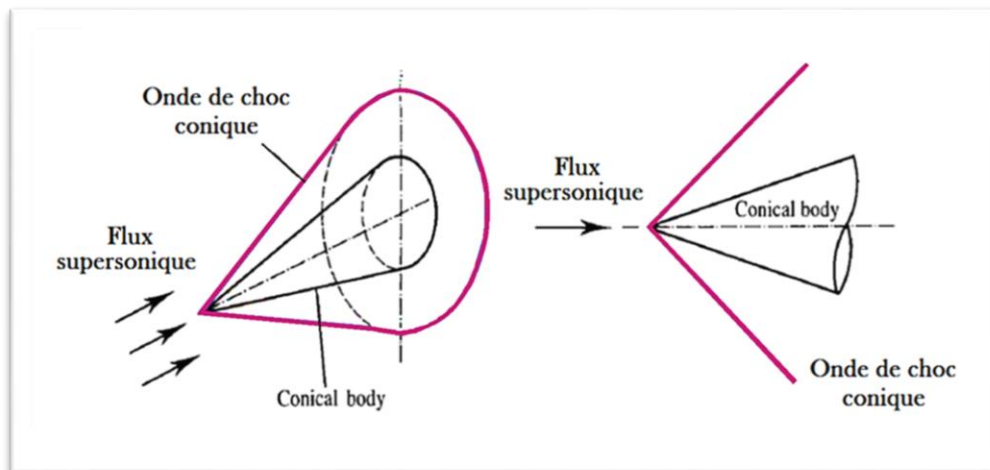


Figure (1.21) : Représentation d'une onde de choc conique [18].

1.4.3.5 Détente de Prandtl-Meyer

La déviation d'un écoulement supersonique peut engendrer une expansion ou une compression continue et isentropique [2, 26].

La détente de Prandtl-Meyer est un écoulement supersonique d'un fluide parfait sur une plaque plane terminée par une rampe déviée vers le bas comme l'indique la figure

(1.22). La déviation de cet écoulement génère des ondes de détentes (lignes de Mach) qui ont pour effet l'augmentation du nombre de Mach et la diminution des caractéristiques du fluide (masse volumique, pression et température).

La détente est une succession continue d'onde de Mach et chaque onde formant un angle μ avec la direction de l'écoulement amont. La zone de détente est limitée par l'angle de Mach amont μ_1 et l'angle de Mach aval μ_2 .

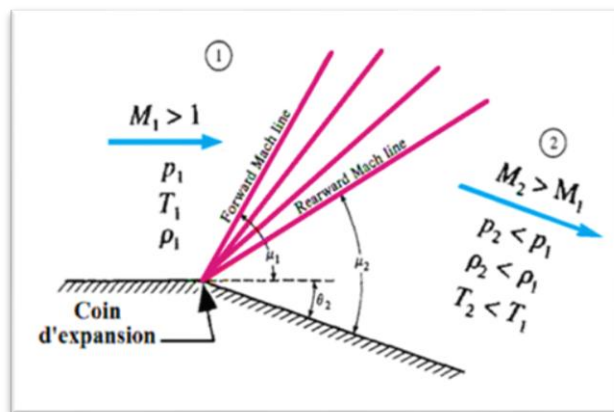


Figure (1.22) : Schéma de la détente de Prandtl-Meyer [2].

Dans le cas où la déviation de la rampe est vers le haut les ondes générées sont des ondes de compression (Voir figure 1.23) et les effets obtenus sont contraires à ceux mentionnés précédemment. L'importance de ces écoulements apparaît dans l'étude aérodynamique autour des profils.

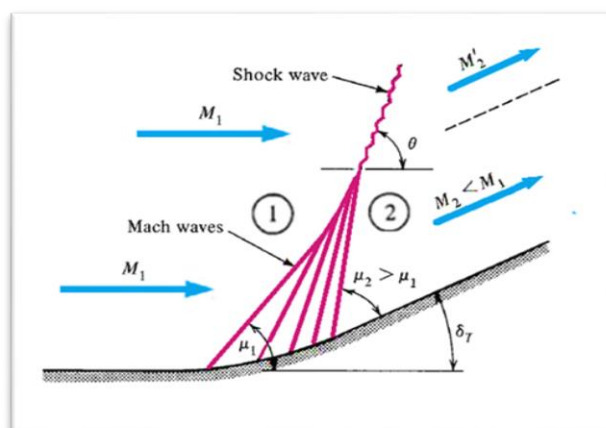


Figure (1.23) : Schéma d'une onde de compression [32].

1.5 Écoulement monodimensionnel dans une tuyère

La résolution du problème de l'écoulement dans les tuyères supersoniques consiste à résoudre les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie. Notons que ces équations sont des équations différentielles aux dérivées partielles dont la résolution n'est pas connue a priori. A ce titre le calcul se fait sur la base des hypothèses suivantes :

- Écoulement adiabatique : On suppose qu'il n'y a pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur.
- Écoulement de fluide parfait : On suppose que les effets de la viscosité sont négligeables. Il en résulte qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie mécanique sous forme de chaleur qui est un processus irréversible (selon le second principe de la thermodynamique). Ainsi, l'écoulement peut être considéré comme réversible.
- Écoulement sans combustion : On suppose qu'il n'y a pas de réactions chimiques au sein du fluide.
- L'absence de forces de volume : On suppose que les forces de volume, et notamment la gravité, sont négligeables.
- Écoulement monodimensionnel : On suppose que le vecteur vitesse ne possède qu'une seule composante non nulle.

Dans les tuyères, les écoulements qu'on va traiter sont adiabatiques réversibles : on parle d'écoulements isentropiques. Ces écoulements jouent un rôle important dans nombreux domaines d'application technologique.

1.5.1 Equations Fondamentales

Les équations fondamentales du mouvement d'un fluide sont essentiellement les équations de conservations qui découlent des lois fondamentales de la dynamique. Dans la réalité, on ajoute à ces équations de conservation, l'équation d'état du gaz considéré [1,20].

1.5.1.1 L'équation de continuité

L'équation de continuité doit traduire le principe de conservation de la masse. Pour un mouvement conservatif et permanent, elle est donnée par [7]:

$$\operatorname{div}(\rho V) = 0 \quad (1.6)$$

1.5.1.2 L'équation de la quantité de mouvement

Cette équation est un principe de la mécanique newtonienne qui se traduit par l'équation de conservation de quantité de mouvement. Pour un fluide parfait en écoulement permanent et en négligeant les forces de volumes, elle est donnée par [7]:

$$dP + \rho V dV = 0 \quad (1.7)$$

1.5.1.3 L'équation de l'énergie

Pour un gaz parfait en écoulement permanent isentropique et en l'absence du travail des forces extérieures (travail des forces internes est nul), et en négligeant l'énergie potentielle, L'équation d'énergie s'écrit [7]:

$$h + \frac{v^2}{2} = Cste \quad (1.8)$$

Avec :

$$h = C_p T \quad (1.9)$$

1.5.1.4 Equation d'état

L'équation d'état d'un gaz parfait est donnée par [2]:

$$P = \rho r T \quad (1.10)$$

Pour l'air : $r = 287.1029 \text{ J/(kg K)}$

1.5.2 Relations de la dynamique des gaz

Les équations isentropiques présentées ici sont dérivées des équations de conservations. Nous notons que le rapport des chaleurs spécifiques « γ » varie en fonction de la température. Cependant, dépendamment des besoins de précision du calcul, entre certaines plages de températures, cette variation est suffisamment faible pour être parfois considérée comme négligeable.

1.5.2.1 Grandeurs totales

Par définition, une grandeur totale est la grandeur qu'aurait une particule fluide si elle était ralentie de manière adiabatique jusqu'à une vitesse nulle. Cet état est désigné par le signe « 0 ».

Les équations isentropiques sont présentées sous forme de rapport entre une valeur totale et sa valeur statique.

D'après l'équation de la conservation de l'énergie (1.8), on obtient [1]:

$$C_p T + \frac{V^2}{2} = C_p T_0 \quad (1.11)$$

D'où :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{V^2}{2C_p T} = 1 + \frac{V^2}{2 \frac{\gamma R}{\gamma-1} T} = 1 + \frac{V^2}{\frac{2a^2}{\gamma-1}} \quad (1.12)$$

Nous remplaçons par l'équation (1.2) dans (1.12), on obtient le rapport isentropique la température :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \quad (1.13)$$

D'après la relation (1.13) on trouve le rapport isentropique de la pression :

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.14)$$

Et aussi à partir de la relation (1.14) on obtient le rapport de la masse volumique :

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (1.15)$$

Et pour le rapport des sections on a :

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (1.16)$$

Tel que :

$$\begin{cases} A_* : \text{Section du col} \\ A : \text{Section de la tuyère a une position donnée} \end{cases}$$

Les équations isentropiques donnent également une relation entre la section de passage disponible et le nombre de Mach. Ceci est basé sur le fait qu'en présence d'un col

en état critique dans un convergent-divergent, le nombre de Mach doit être égale à un. Si les conditions critiques sont atteintes, l'écoulement est dit « étranglé au col ».

1.5.2.2 Grandeurs critiques

On s'intéresse maintenant au comportement du fluide lorsque le régime de l'écoulement devient sonique $M = 1$. La section de la tuyère supersonique dans laquelle ce régime est atteint est appelée section critique (col) et on dit que l'écoulement se trouve dans les conditions critiques.

De même que la définition d'une grandeur totale, on définit une grandeur critique comme la grandeur qu'aurait une particule fluide si elle était accélérée de façon adiabatique jusqu'à des conditions soniques $M = 1$. Cet état est désigné par le signe « * ». Ainsi la conservation de l'énergie, en écoulement isentropique, entre deux états 1 et 2 peut s'écrire [1]:

$$\frac{a_1^2}{\gamma-1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma-1} + \frac{V_2^2}{2} \quad (1.17)$$

Si l'on considère pour l'état 2 que $V_2 = 0$, on obtient la grandeur totale :

$$\frac{a_0^2}{\gamma-1} = \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} \quad (1.18)$$

De même, la vitesse du son critique est définie par [1]:

$$\begin{cases} \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_*^2}{\gamma-1} + \frac{a_*^2}{2} \\ \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a_*^2 \end{cases} \quad (1.19)$$

Si l'on prend $M = 1$ dans les équations précédentes des rapports des grandeurs totales (1.13), (1.14) et (1.15), on obtient les rapports des grandeurs critiques [1]:

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1} \quad (1.20)$$

$$\frac{P_*}{P_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.21)$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.22)$$

1.5.3 Paramètres thermodynamiques à travers le choc normal

Nous considérons une onde de choc normale qui se déplace avec une vitesse dans une tuyère [22, 25] représentée sur la figure (1.24). L'épaisseur de l'onde de choc normale est très petite [4] de sorte que l'on y voit une discontinuité perpendiculaire à l'écoulement, séparant une région amont (indice 1) d'une région aval (indice 2). Cette onde de choc est stationnaire (c'est-à-dire est immobile par rapport au référentiel), non visqueuse et unidirectionnelle. Le flux dans les deux côtés du choc est isentropique.

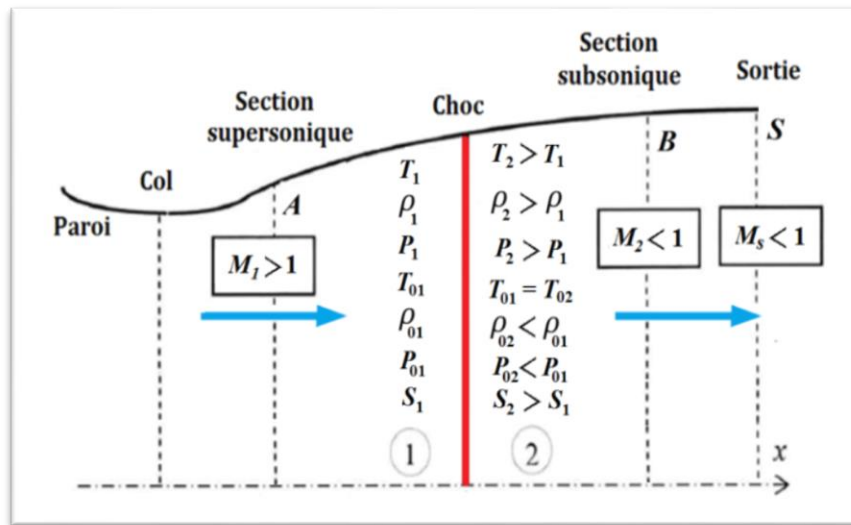


Figure (1.24) : Représentation d'une onde de choc normale dans une tuyère supersonique.

Dans un système de coordonnées lié au choc, on écrit les différentes équations de conservation, permettant de relier l'état (1) à l'état (2) [1] :

- Conservation de la masse :

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (1.23)$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (1.24)$$

- Conservation de l'énergie :

$$h_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_2^2 \quad (1.25)$$

1.5.3.1 Grandeurs soniques

Les variables soniques peuvent être calculées en fonction des variables réelles que l'on qualifie de statiques. Ce calcul s'effectue en appliquant les équations de la conservation entre l'état réel du fluide et l'état sonique. On va s'intéresser ici uniquement au calcul de la vitesse du son à l'état sonique afin d'en déduire une expression pour le nombre de Mach (appelé également nombre de Mach caractéristique M_*).

Nous remplaçons $C_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$ dans de l'énergie (1.25) entre deux états donnés du fluide, on obtient [1]:

$$\frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (1.26)$$

Et comme : $a^2 = \gamma r T$

$$\text{On trouve :} \quad \frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{V_2^2}{2} \quad (1.27)$$

En choisissant l'état sonique comme état de référence. On a alors :

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_*^2}{\gamma - 1} + \frac{V_*^2}{2} \quad (1.28)$$

Et comme $V_* = a_*$ par définition de l'état sonique on a finalement [1]:

$$\begin{cases} a^2 = \frac{\gamma + 1}{2} a_*^2 - \frac{\gamma - 1}{2} V^2 \\ \text{Ou} \\ a_*^2 = \frac{\gamma + 1}{2} a^2 - \frac{\gamma - 1}{2} V^2 \end{cases} \quad (1.29)$$

Remarque :

La valeur de « a_* » est calculable par (1.29) en tout point d'un écoulement même si celui-ci n'est pas réellement adiabatique : l'état sonique, même virtuel, peut toujours servir d'état de référence. En divisant (1.29) sur V^2 on obtient [1]:

$$M^2 = \frac{2}{\left[\frac{\gamma + 1}{M_*^2}\right] - (\gamma - 1)} \quad \text{Ou bien} \quad M_*^2 = \frac{2}{\left[\frac{\gamma + 1}{M^2}\right] - (\gamma - 1)} \quad (1.30)$$

On remarque que si [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_* = 1 \Rightarrow M = 1 \\ M_* < 1 \Rightarrow M < 1 \\ M_* > 1 \Rightarrow M > 1 \end{array} \right.$$

1.5.3.2 Relation de Prandtl

La relation de Prandtl établit la relation entre les vitesses en amont et en aval du choc. En partant de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.24). On exprime la pression à l'aide de la définition de la vitesse du son : $a^2 = \gamma P / \rho$. On tire donc [1]:

$$\rho_1 V_1 \left(V_1 + \frac{a_1^2}{\gamma V_1} \right) = \rho_2 V_2 \left(V_2 + \frac{a_2^2}{\gamma V_2} \right) \quad (1.31)$$

Qui peut naturellement se simplifier en tenant compte de la conservation de la masse $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$. Donc :

$$\frac{a_1^2}{\gamma V_1} - \frac{a_2^2}{\gamma V_2} = V_2 - V_1 \quad (1.32)$$

On introduit alors la vitesse du son à l'état sonique associé aux états statiques 1 et 2 ; elle vérifie :

$$a^2 = \frac{\gamma+1}{2} a_*^2 - \frac{\gamma-1}{2} V^2 \quad (1.33)$$

Où ($a ; V$) peuvent être pris dans l'état 1 ou 2 :

$$a_1^2 = \frac{\gamma+1}{2} a_*^2 - \frac{\gamma-1}{2} V_1^2 \quad (1.34)$$

$$a_2^2 = \frac{\gamma+1}{2} a_*^2 - \frac{\gamma-1}{2} V_2^2 \quad (1.35)$$

Remplaçant (1.34) et (1.35) dans (1.32) et en divise par $(V_2 - V_1)$ on trouve :

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma V_1 V_2} a_*^2 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} = 1 \quad (1.36)$$

D'où:

$$a_*^2 = V_1 V_2 \quad (1.37)$$

L'équation (1.37) est appelée La relation de Prandtl, utilisé comme relation intermédiaire d'un choc normale [1].

A partir de l'équation (1.37) on obtient :

$$a_*^2 = V_1 V_2 = a_* a_* \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{V_1 V_2}{a_* a_*} \quad (1.38)$$

D'où:

$$M_2^* = \frac{1}{M_1^*} \quad (1.39)$$

On remplace l'équation (1.29) dans (1.39) on obtient [1] :

$$M_2^2 = \frac{1 + (\gamma - 1)/2 M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)/2} \quad (1.40)$$

La relation (1.40) est la seule pour les ondes de choc droites faisant intervenir le nombre de Mach après le choc. Toutes les autres sont définies en fonction du Mach en amont du choc.

1.5.3.3 Paramètres statiques à travers le choc

La relation (1.40), combinée aux formules trouvées précédemment donnant les rapports de pression, température, densité, permet de donner désormais directement la valeur de ces rapports en fonction du nombre de Mach amont, avec l'utilisation de l'équation de continuité, on peut en déduire [1]:

1.5.3.3.1 Rapport des masses volumiques statiques

D'après l'équation de conservation de la masse (1.23), qui peut se réécrire :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1^2}{V_1 V_2} = \frac{V_1^2}{a_*^2} = (M_*)_1^2 \quad (1.41)$$

En utilisant alors (1.30) on a :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \quad (1.42)$$

1.5.3.3.2 Rapport des pressions statiques

Le rapport des pressions de part et d'autre du choc est obtenu à partir de l'équation de la quantité de mouvement (1.24), on peut écrire [1]:

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{1}{P_1} (\rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2) \quad (1.43)$$

Donc :

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{\rho_1 U_1^2}{P_1} \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) \quad (1.44)$$

On utilise alors d'une part la relation (1.41) qui donne V_2/V_1 en fonction de M_1^2 :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \quad (1.45)$$

Et d'autre part :

$$\frac{\rho_1 V_1^2}{P_1} = \gamma \frac{V_1^2}{a_1^2} = \gamma M_1^2 \quad (1.46)$$

On tire :

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \gamma M_1^2 \left(\frac{(\gamma+1)M_1^2 - 2 - (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \right) \quad (1.47)$$

D'où, après simplification:

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \quad (1.48)$$

Cette quantité est plus grande que 1 donc la pression augmente à la traversée d'un choc : le choc comprime l'écoulement

1.5.3.3 Rapport des températures statiques

Enfin, le rapport des températures est obtenu grâce à la loi d'état thermique $P = \rho RT$:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad (1.49)$$

On remplace par (1.42) et (1.48) dans (1.49) on obtient [1]:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \right] \quad (1.50)$$

1.5.3.4 Paramètres totales à travers le choc

1.5.3.4.1 Rapport des températures totales

Pour déterminer le rapport des températures totales son utilise l'équation de la conservation de l'énergie (1.25) entre ces deux états.

La particularité de l'enthalpie d'arrêt est que, par définition de l'état d'arrêt en lequel la vitesse de l'écoulement est nulle, elle ne dépend en fait que de la température à l'état d'arrêt T_0 . Par conséquent dire que l'enthalpie d'arrêt est une constante de l'écoulement adiabatique d'un fluide parfait est équivalent à dire que la température d'arrêt est une

constante de cet écoulement. En utilisant la définition de l'enthalpie, on déduit de la relation ci-dessus l'égalité suivante [1]:

$$H = H_0 \quad \Rightarrow \quad C_p T + \frac{v^2}{2} = C_p T_0 \quad (1.51)$$

Qui peut aussi se mettre sous la forme d'une relation entre température statique en un point de l'écoulement et nombre de Mach en ce même point, faisant également intervenir la température d'arrêt ou température totale constante dans cet écoulement dans l'équation (1.13).

Insistons sur le fait que cette importante relation est valable dans tout écoulement adiabatique, donc y compris dans un écoulement avec génération d'entropie du moment qu'il n'y a pas échange de chaleur. Ainsi, dans le cas qui nous intéresse ici d'un écoulement présentant une onde de choc à travers laquelle l'entropie augmente, la température totale T_0 reste constante à travers cette onde de choc, soit [1]:

$$T_{01} = T_{02} \quad (1.52)$$

1.5.3.4.2 Rapport des pressions totales

Pour définir le rapport des pressions on écrit [1]:

$$\frac{(P_0)_2}{(P_0)_1} = \frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{(P_0)_2 P_2 P_1}{P_2 P_1 (P_0)_1} \quad (1.53)$$

Où le deuxième rapport du membre de droite est donné par (1.48), et les premiers et troisième correspondent simplement à la relation isentropique (1.14). On a donc finalement [1]:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left[\left(\frac{\gamma+1}{2} M_1^2 \right) / \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \right]^{-1/(\gamma-1)} \quad (1.54)$$

La figure (1.32) montre la variation de ces rapports à travers un choc droit :

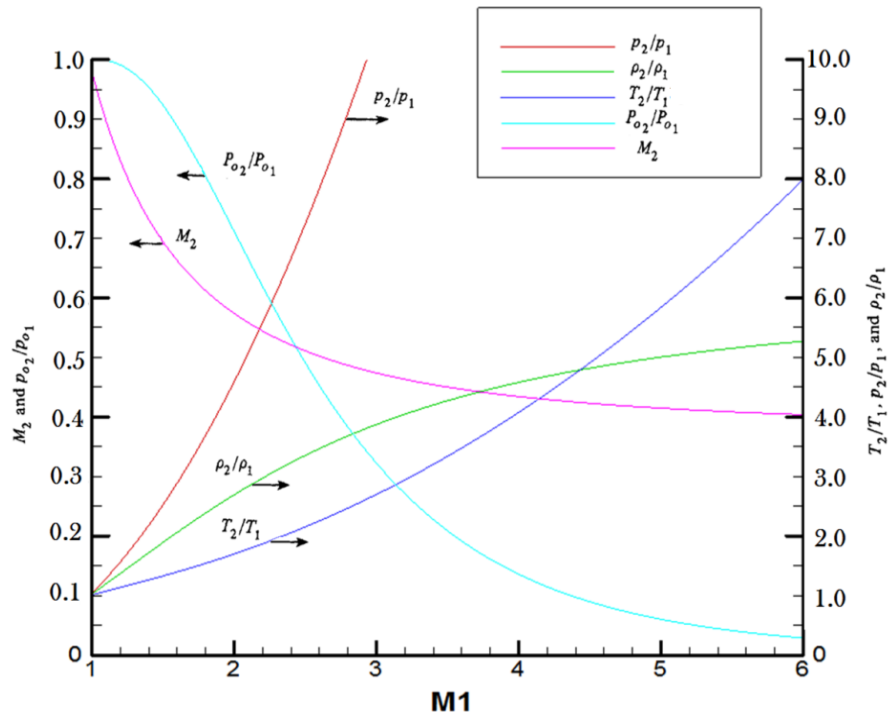


Figure (1.25) : Evolution des rapports thermodynamiques à travers un choc normal [2].

1.5.3.5 Variation d'entropie à travers le choc

On revient maintenant à la variation de pression totale à la traversée d'une onde de choc. On peut montrer plus précisément, en utilisant le second principe de la thermodynamique, que l'on doit nécessairement avoir $P_{02} < P_{01}$, soit une perte de pression totale à la traversée d'un choc. Si nous revenons en effet à la relation de Gibbs classique [1] :

$$de = TdS + \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad (1.55)$$

Celle-ci peut aussi s'écrire pour un gaz caloriquement parfait tel que [1] : $\begin{cases} de = C_v dT \\ P = \rho r T \end{cases}$

$$dS = C_v \frac{dT}{T} - r \frac{d\rho}{\rho} \quad (1.56)$$

Cette relation peut être intégrée entre l'état 1 et 2 de part et d'autre d'un choc pour donner :

$$S_2 - S_1 = C_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - r \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \quad (1.57)$$

Ou encore, en utilisant à nouveau la loi d'état des gaz parfaits et la relation de Mayer $C_p - C_v = r$, valable pour un gaz caloriquement parfait [1] :

$$S_2 - S_1 = C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - r \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad (1.58)$$

Puisque l'état d'arrêt associé à l'état local en amont du choc a, par définition, la même entropie S_1 que cet état statique, et que, similairement, l'état d'arrêt associé à l'état local en aval du choc a la même entropie S_2 , on peut aussi écrire la relation ci-dessus en faisant apparaître les températures et pressions totales de part et d'autre de la discontinuité [1] :

$$S_2 - S_1 = C_p \ln\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right) - r \ln\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right) \quad (1.59)$$

Puisque la température totale se conserve à travers le choc, cette relation se simplifie en [1]:

$$S_2 - S_1 = -r \ln\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right) \quad (1.60)$$

Et :

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = e^{-(S_2 - S_1)r} \quad (1.61)$$

1.5.4 Effet des variations de section sur l'écoulement

Pour étudier l'effet d'un changement de section, nous reprenons les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement écrites sous forme différentielle :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (1.62)$$

$$\frac{dP}{\rho} + VdV = 0 \quad (1.63)$$

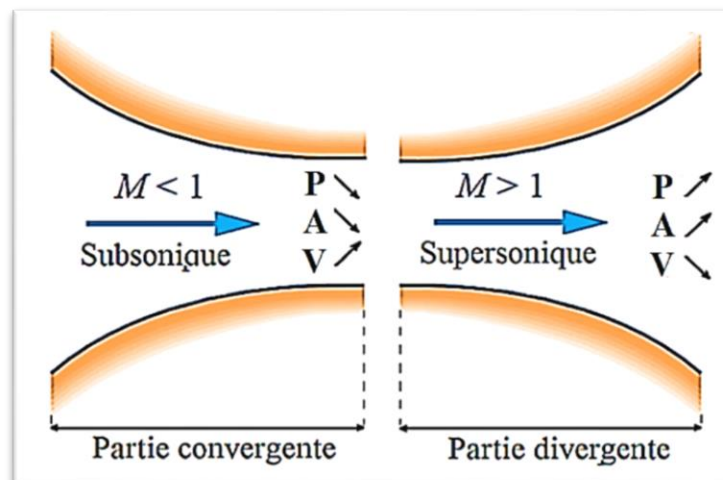


Figure (1.26) : Effet des variations de section sur l'écoulement [17].

On peut noter d'autre part que :

$$\frac{dP}{\rho} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \frac{d\rho}{\rho} \quad (1.64)$$

Puisque l'écoulement est isentropique.

On sait d'autre part que la célérité sonore locale est définie par :

$$a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \quad (1.65)$$

On peut donc écrire :

$$\frac{dP}{\rho} = a^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad (1.66)$$

Introduisant cette relation dans l'équation de bilan de quantité de mouvement, on a finalement :

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} + V^2 \frac{dV}{V} = 0 \quad (1.67)$$

Ou encore :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (1.68)$$

En introduisant le nombre de Mach local $M = V/a$, cette dernière relation montre le lien entre nombre de Mach et variation relative de la densité. Pour de faibles nombres de Mach ($M < 0.1 - 0.2$), les variations de densité peuvent être pratiquement négligées (en l'absence bien sûr d'effet extérieur, par exemple une réaction chimique). Par contre, pour des nombres de Mach élevés comme ceux que nous rencontrons en pratique dans ce cours, les variations de densité deviennent considérables et ne peuvent plus être négligées.

Substituant la dernière relation obtenue dans le bilan de masse, on obtient une relation entre la vitesse et la section :

$$\frac{dA}{A} + (1 - M^2) \frac{dV}{V} = 0 \quad (1.69)$$

Cette relation fondamentale est appelée équation d'*Hugoniot*. Elle relie les variations de section et de vitesse à la valeur du nombre de Mach. On peut alors distinguer les cas suivants [18]:

- Cas subsonique : $M < 1$

$$M < 1 : \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dx} < 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} > 0, \left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dx} < 0, \\ \frac{dV}{dx} > 0 \end{array} \right. \\ \\ \frac{dA}{dx} > 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} < 0, \left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dx} > 0, \\ \frac{dV}{dx} < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Cas supersonique : $M > 1$

$$M > 1 : \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dx} < 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} < 0, \left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dx} > 0, \\ \frac{dV}{dx} < 0 \end{array} \right. \\ \\ \frac{dA}{dx} > 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} > 0, \left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dx} < 0, \\ \frac{dV}{dx} > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Cas sonique : $M = 1$

$$\text{Quand } \frac{dA}{dx} = 0$$

1.6 Fonctionnement des tuyères supersoniques

L'approche de la théorie monodimensionnelle des gaz calorifiquement parfaits permet de décrire les régimes de fonctionnement d'une tuyère convergente-divergente et de comprendre la formation d'une onde de choc à l'intérieur de celle-ci. Nous proposons d'étudier une tuyère alimentée par un réservoir de gaz compressible ayant une pression et une température données. La section du col de la tuyère est A_c et celle de la sortie est A_e . On va décrire l'écoulement au sein de la tuyère en fonction de la pression ambiante P_a . La différence entre la pression génératrice en amont P_i et la pression en aval P_a de la tuyère permet de créer un écoulement ; celui-ci est supposé isentropique tout au long de la tuyère.

1.6.1 Régime subsonique et régime sonique

Le premier régime d'écoulement est subsonique dans toute la tuyère (Figure 1.27). Nous abaissons progressivement la pression en aval de la tuyère, en partant d'une pression égale à celle du réservoir. Dès que la pression en sortie de la tuyère est inférieure à celle du réservoir, le gaz commence à parcourir la tuyère du réservoir vers la sortie. Le débit massique augmente progressivement jusqu'à atteindre une valeur limite quand l'écoulement au col est sonique. Cette valeur limite correspond à un nombre de Mach égal à 1 (vitesse du son au col). Le débit est alors bloqué et la pression en aval tend vers $P_{a_{sup}}$.

1.6.2 Régime supersonique

Les différents régimes de fonctionnement d'une tuyère convergente-divergente peuvent être décrits par la théorie monodimensionnelle des gaz calorifiquement parfaits et non visqueux. Cette approche permet de comprendre la formation d'une onde de choc dans une tuyère. La différence entre la pression génératrice amont P_1 et la pression aval P_a dans la tuyère, présentée sur la figure (1.27), permet de créer un écoulement. Le premier régime d'écoulement est subsonique dans toute la tuyère. Si on diminue P_a , le débit massique augmente progressivement jusqu'à atteindre une valeur limite quand l'écoulement au col est sonique. Le débit est alors bloqué et la pression en aval tend vers $P_{a_{sup}}$. Si la pression aval est en dessous de $P_{a_{sup}}$, le col reste bloqué, l'écoulement dans le divergent de la tuyère passant en supersonique. L'écoulement est supersonique dans toute la tuyère si $P_a = P_{a_{inf}}$ (tuyère entièrement amorcée). Si la pression aval est comprise entre $P_{a_{sup}}$ et $P_{a_{inf}}$, l'adaptation se fait au travers d'une onde de choc droite, positionnée en X_{Choc} , ce qui se traduit par un saut dans l'évolution de P / P_1 [4].

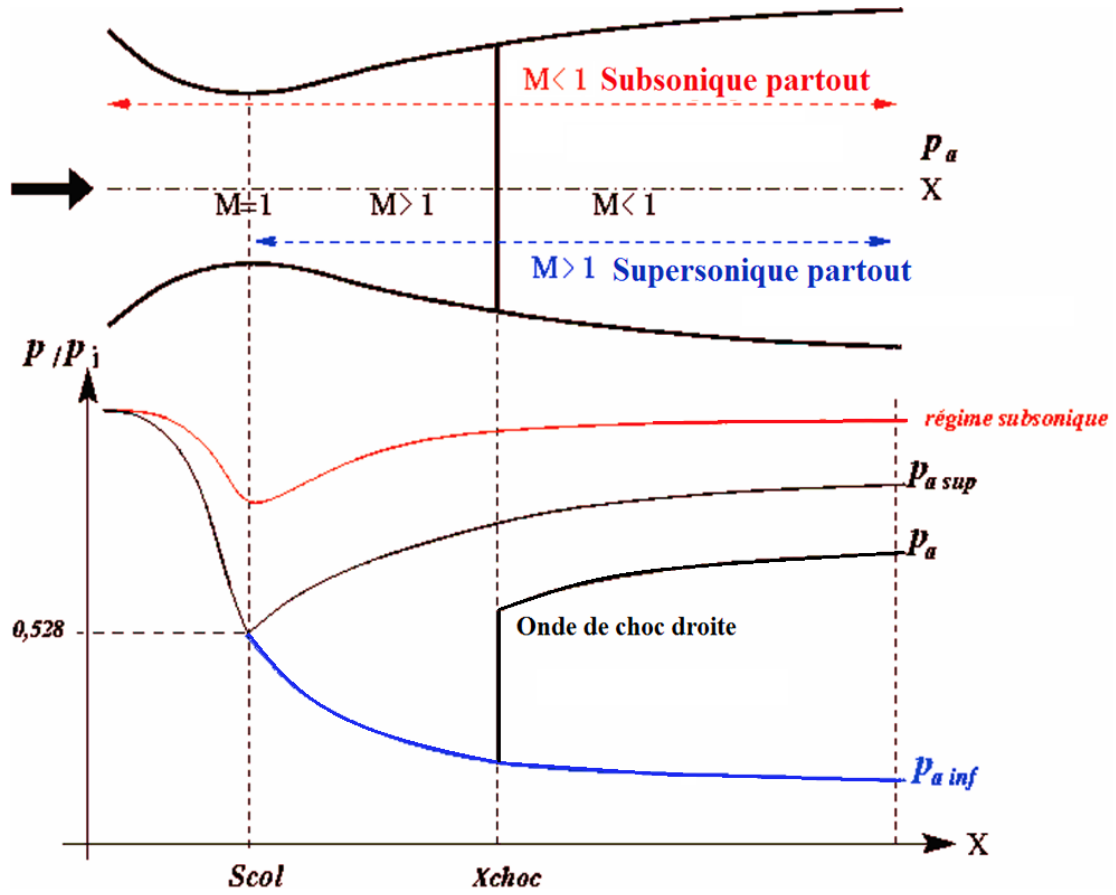


Figure (1.27) : Principe de fonctionnement d'une tuyère convergente-divergente [4].

Les effets visqueux rendent plus complexes les caractéristiques des régimes d'écoulement qui viennent d'être décrits. On note P_E la pression à la lèvre de la tuyère et P_A la pression ambiante. Suivant la valeur de la pression ambiante, plusieurs régimes de fonctionnement en supersonique sont possibles :

1.6.2.1 Régime adapté

Une tuyère est dite adaptée, si à la sortie de celle-ci, la pression de sortie P_E est égale à la pression ambiante P_A . La poussée totale de propulsion née par la projection horizontale de la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère est dans ce cas maximale. Cette situation est présentée dans la figure (1.28) [4].

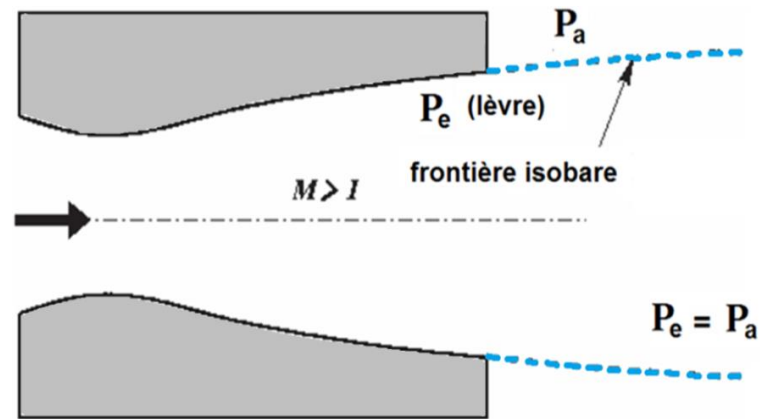


Figure (1.28) : Présentation du régime adapté d'une tuyère [4].

1.6.2.2 Régime sous adapté

Le régime est sous adapté si le fluide se décharge à une pression P_E supérieure à celle de la pression ambiante P_A . La tuyère entre dans un régime appelé régime sous détendue. Un faisceau d'ondes de détente centrées à la lèvre se forme permettant d'ajuster la pression de P_A à P_E . Dans ce cas la détente est incomplète dans la tuyère et elle continuera à l'extérieur, c'est un régime en dehors des conditions d'adaptation comme le montre la figure (1.29) [4].

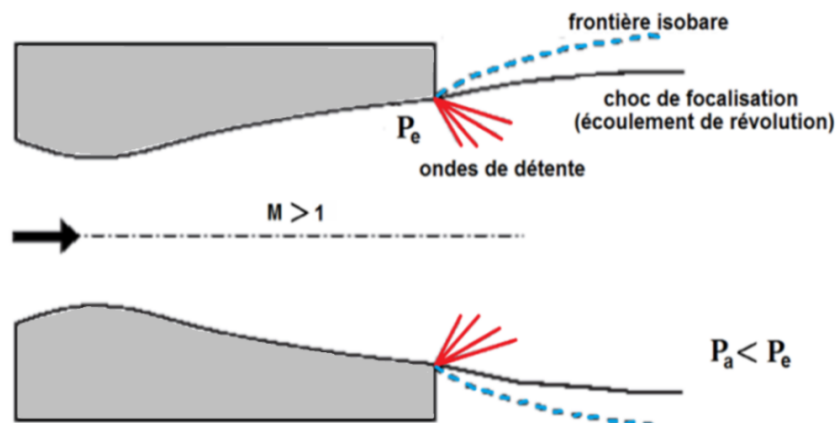


Figure (1.29) : Présentation du régime sous adapté d'une tuyère [4].

1.6.2.3 Régime sur adapté

C'est un régime en dehors de l'adaptation des conditions de la tuyère appelée régime sur adapté ou régime sur détendu. Si le fluide se détend à une pression inférieure à la pression extérieure P_A , Le fluide se détend en plus dans la tuyère et devra être comprimé à

l'extérieur pour rendre la pression compatible avec la pression extérieure. Cette compression prend place à travers une onde de choc attaché (choc de recompression ou de décollement) à la section de sortie et la tuyère dans ce cas appelée tuyère longue. Cette situation est présentée dans la figure (1.30) [4].

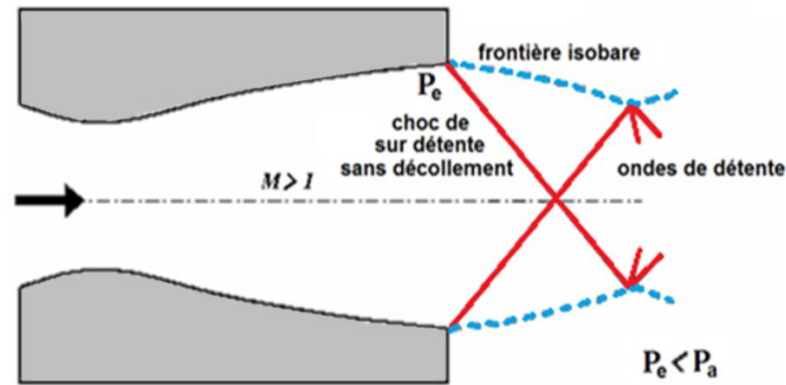


Figure (1.30) : Présentation du régime sur adapté sans décollement d'une tuyère [4].

L'inclinaison du choc augmente avec l'augmentation de P_a , il arrive un moment où la couche limite ne peut plus contrer le gradient de pression adverse devenu trop important et décolle, voir Figure (1.31). L'effort axial s'exerçant sur la paroi de la tuyère sera une trainée, donc la poussée totale va chuter. L'écoulement dans la tuyère est entièrement isentropique.

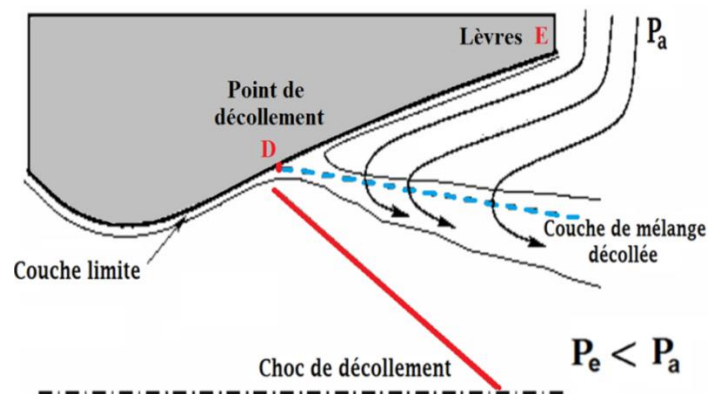


Figure (1.31) : Schéma d'un décollement induit par un choc dans une tuyère [4].

CHAPITRE 2

RELATIONS THERMODYNAMIQUES POUR UN ECOULEMENT A HAUTE TEMPERATURE

2.1 Introduction

Pour un écoulement supersonique d'un gaz parfait les chaleurs spécifiques C_p et C_v sont constantes et ne dépendent pas de la température quelque soit sa valeur, ce qui n'est pas le cas réellement lorsque la température accroît [29]. Donc les résultats obtenus présentés dans les références [1, 2, 18] ne sont valables que sous la base de quelques hypothèses connues. Parmi ces hypothèses, citons le cas où le gaz doit être considéré comme calorifiquement parfait.

Le but de ce chapitre est la détermination des relations thermodynamiques d'un écoulement supersonique pour un gaz à haute température, en ajoutant l'effet de variation de $C_p(T)$ avec la température.

2.2 Classification des gaz

Pour reformer ces différents types de gaz, pour l'air on a [13] :

- A la température ambiante l'air est essentiellement calorifiquement parfait.
- Lorsque la température augmente aux environs de 1000° K, l'excitation de l'énergie de vibration est très importante, et l'air est considéré calorifiquement imparfait.

- Si la température augmente de plus en plus, au-dessus de 2500° K, les réactions chimiques auront lieu, et l'air devient un mélange d'un gaz parfait chimiquement réactif.
- Lorsque la température baisse, si elle est en dessous de la température ambiante et si la pression dépasse les 1000 atm, les forces intermoléculaires vont se manifester, et l'air est considéré comme un gaz réel.

2.2.1 Gaz caloriquement et thermiquement parfait

Tout d'abord, on note que :

- Caloriquement parfait signifie que ; les chaleurs spécifiques à pression et à volume constant C_p et C_v sont constantes.
- Thermiquement parfait signifie que ; l'équation d'état est valable.

Par définition [13]; un gaz caloriquement parfait est un gaz où les chaleurs spécifique à volume constant C_v et à pression constante C_p sont constantes ainsi que leur rapport $\gamma = C_p/C_v$. Un gaz thermiquement parfait indique que l'équation d'état $Pv = RT$ est valable. En général, on émet l'hypothèse d'un gaz caloriquement et thermiquement parfait. Beaucoup de formules détaillées et de résultats ont été obtenus sous l'hypothèse de $\gamma = Cte$.

Pour ce gaz, l'enthalpie et l'énergie sont en fonction de la température, définie explicitement par :

$$\begin{cases} H = C_p T \\ E = C_v T. \end{cases} \quad (2.1)$$

2.2.2 Gaz thermiquement parfait caloriquement imparfait

Pour un gaz à haute température que l'on dit thermiquement parfait et caloriquement imparfait [13] ; les chaleurs spécifique à volume C_v et à pression C_p ne sont plus constantes ainsi les formules d'un gaz parfait ne sont plus utilisables où : les chaleurs spécifique, et les différents paramètres thermodynamique sont devenu variable en fonction de la température.

$$\begin{cases} C_p = C_p[T] \\ C_v = C_v[T] \end{cases} \quad (2.2)$$

Par conséquent le rapport des chaleurs spécifique n'est plus constant et devient $\gamma = \gamma[T]$. Donc l'enthalpie et l'énergie, eux aussi deviennent variables en fonction de la température.

$$\begin{cases} dH = C_p dT \\ dE = C_v dT \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = H[T] \\ E = E[T] \end{cases} \quad (2.3)$$

L'équation d'état reste valable $Pv = RT$ (l'équation d'état thermique).

La nature d'un gaz thermiquement parfait caloriquement imparfait est due à l'excitation de l'énergie de vibration dans les molécules du gaz [1], lorsque la température augmente.

2.2.3 Mélange chimiquement réactif d'un gaz parfait

A une température élevée, la dissociation aura lieu et le gaz devient un mélange gazeux où chaque espèce se comporte comme un gaz thermiquement parfait ayant sa propre équation d'état $P_i v = M_i R_i T$, et les forces intermoléculaire deviennent négligeables [13].

Admettant qu'à la température $5000K^\circ$ et à la pression $1 atm$, les différentes espèces deviennent stables et la dissociation terminée, on peut ainsi parler de l'équilibre d'un gaz chimiquement réactif où les différents paramètres dépendent uniquement de la température T et de la pression P . Cependant à une température moindre, les espèces ne se sont pas encore stabilisé, on parlera dans ce cas de l'hors équilibre d'un gaz chimiquement réactif où les différents paramètres dépendent de la température T , de la pression P et du temps également [13].

2.2.4 Gaz réel

Pour les gaz réels [13], l'équation d'état des gaz parfaits n'est plus valable. Elle sera remplacée par l'équation, de *Van der Waals*, donnée par :

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (2.4)$$

Avec : a et b deux constants dépendant du type de gaz. Il est à signaler que l'équation de *Van der Waals* se réduit à l'équation d'état des gaz parfaits lorsque ($a = b = 0$).

Un gaz se comporte comme un gaz réel dans des conditions de très haute pression et basse température, les forces intermoléculaires sont prises en considération.

L'enthalpie H et l'énergie interne E dépendent de la pression P (ou du volume v) comme suit :

$$\begin{cases} H = H(T, P) \\ E = H(T, v) \end{cases} \quad \text{Et} \quad \begin{cases} C_p = C_p(T, P) \\ C_v = C_v(T, v) \end{cases} \quad (2.5)$$

2.3 Paramètres thermodynamiques à haute température

Pour déduire les différents paramètres thermodynamiques dans le cas d'un gaz à haute température, on utilise les équations de conservation sous forme différentielle et en ajoutant l'équation d'états du gaz parfait, présenté au chapitre précédent. Ils sont donnée par [1, 24, 32, 33] :

- Conservation de la masse :

$$\rho v A = \text{constante} \quad (2.6)$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$dP + \rho v dv = 0 \quad (2.7)$$

- Conservation de l'énergie :

$$C_p dT + v dv = 0 \quad (2.8)$$

D'autre part, le premier principe de la thermodynamique pour un gaz parfait :

$$W + Q = \Delta U \quad (2.9)$$

Avec :

- ΔU : L'énergie interne
- W : Le travail
- Q : La chaleur

Pour écoulement adiabatique ($Q = 0$), La relation (2.9) s'écrit :

$$dQ = C_v dT + l dv = 0 \quad (2.10)$$

Où :

$$l = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{rT}{v} \quad (2.11)$$

Avec :

- l : coefficient calorimétrique (pour un gaz parfait $l = P$).

D'après les deux formes de l'équation d'état du gaz parfait $Pv = rT$ et $P = \rho rT$, on obtient :

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (2.12)$$

D'où :

$$dv = d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{d\rho}{\rho^2} \quad (2.13)$$

Le rapport des chaleurs spécifiques donne la relation suivante:

$$C_v = \frac{C_p}{\gamma} \quad (2.14)$$

Remplaçons les relations (2.11), (2.13) et (2.14) dans l'expression (2.10), on obtient:

$$\frac{C_p}{\gamma} dT - \frac{rT}{\rho} d\rho = 0 \quad (2.15)$$

Nous pouvons vérifier à partir des résultats de la table que C_p , C_v et γ vérifient entre elles la relation (2.14) et celle de *Meyer* :

$$C_p - C_v = r \quad (2.16)$$

Et :

$$\gamma(T) = \frac{C_p(T)}{C_p(T) - r} \quad (2.17)$$

Pour un gaz parfait. Cette relation devient:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T[\gamma(T) - 1]} \quad (2.18)$$

Alors, l'intégration de la relation (2.18) donne la relation adiabatique pour le gaz parfait à Haute Température.

2.3.2 La vitesse du son

Comme la vitesse du son est défini par [1, 5, 18]:

$$a^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{\text{Entropie=constante}} \quad (2.19)$$

Prenons la différentielle de l'équation d'état du gaz parfait (1.10), on obtient :

$$\frac{dP}{d\rho} = \rho r \frac{dT}{d\rho} + rT \quad (2.20)$$

Si on remplace la relation (2.18) dans (2.20) et après réarrangement, on aura :

$$a^2(T) = \gamma(T)rT \quad (2.21)$$

La relation (2.21) prouve que la relation de la vitesse du son reste toujours valable pour le modèle à Haute Température, sauf, qu'il faut tenir compte de la variation du rapport $\gamma(T)$.

Prenons le Logarithme de l'équation (2.21) et après réarrangement, on trouve :

$$2 \log(a^2) = \log[\gamma(T)] + \log(r) + \log(T) \quad (2.22)$$

Prenons la différentielle de l'équation (2.22), nous obtenons:

$$\frac{da}{a} = \frac{1}{2} \left[\frac{d[\gamma(T)]}{\gamma(T)} + \frac{dT}{T} \right] \quad (2.23)$$

L'équation (2.23) présente la différentielle de la vitesse du son en termes de température pour le gaz à haute température.

La détermination du rapport des vitesses du son se fait par l'utilisation de la relation (2.21). On obtient :

$$\frac{a}{a_0} = \frac{a(T)}{a(T_0)} = \sqrt{\frac{[\gamma(T)]}{[\gamma(T_0)]} \left[\frac{T}{T_0} \right]} \quad (2.24)$$

La relation (2.24) montre qu'il faut tenir compte de la variation du rapport $\gamma(T)$ pour la détermination du rapport des vitesses du son.

2.3.3 Relation entre la température et la vitesse

Nous prenons l'équation de conservation de l'énergie (2.8). D'où :

$$VdV = -C_p dT \quad (2.25)$$

Nous intégrons la relation (2.25) entre l'état générateur donné par ($V_0 \approx 0$, T_0) et un état quelconque donné par (V , T). On obtient:

$$\int_{V_0}^V V dV = \int_{T_0}^T C_p(T) dV \quad (2.26)$$

A la sortie de la chambre de combustion on a $V_0 \approx 0$ et T_0 donnée. Donc la relation (2.26) donne :

$$V^2 = 2 \int_{T_0}^T C_p(T) dV \quad (2.27)$$

On pose :

$$H(T) = \int_{T_0}^T C_p(T) dV \quad (2.28)$$

Donc :

$$V^2 = 2 H(T) \quad (2.29)$$

Divisons la relation (2.8) par V^2 et remplaçons (2.29) dans le résultat obtenu, on aura:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{C_p(T)}{2H(T)} dT \quad (2.30)$$

La relation (2.30) présente la forme différentielle de la vitesse de l'écoulement en fonction de la température.

2.3.4 Relation entre la température et le nombre de Mach

Pour déterminer la relation de la température et le nombre de Mach, Nous remplaçons la relation (2.21) dans (1.2) et élevons la relation au carré, ensuite substituons l'équation (2.30), on obtient:

$$M(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{a(T)} \quad (2.31)$$

La relation (2.31) montre la variation du nombre de Mach en fonction de la température pour un gaz à haute température.

2.3.5 Relation entre la température et la masse volumique

L'équation (2.7) connue par l'équation de Bernoulli, sous forme différentielle s'écrit :

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.32)$$

Multiplions et divisons le deuxième terme du premier membre de la relation (2.32) par $d\rho$, nous pouvons écrire :

$$VdV + \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.33)$$

Remplaçons la relation (1.65) dans la relation (2.33), on aura :

$$VdV + a^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.34)$$

Figurant le nombre de Mach, en remplaçant la relation (1.2) dans la relation (2.34), on aura l'expression suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (2.35)$$

Remplaçant les relations (2.29), (2.30), (1.2) et (2.31) dans la relation (2.35), on aura :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{c_p(T)}{\gamma(T) \cdot r \cdot T} dT \quad (2.36)$$

On préfère l'écriture de la relation (2.36) sous la forme suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = F_\rho(T) dT \quad (2.37)$$

Avec :

$$F_\rho(T) = \frac{c_p(T)}{a^2(T)} \quad (2.38)$$

Le rapport des masses volumiques correspondant à la température T_0 peut être obtenu en intégrant l'équation (2.39) entre l'état générateur (ρ_0, T_0) et l'état concerné donné par (ρ, T) , on obtient :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \text{Exp} \left(- \int_{T_0}^T F_\rho(T) dT \right) \quad (2.39)$$

2.3.6 Relation entre la température et la pression

Le rapport des pressions est donné, en utilisant la relation (1.10) par :

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \left(\frac{T}{T_0} \right) \quad (2.40)$$

Prenons la différentielle de l'équation d'état des gaz parfait (1.10), ensuite remplaçons la relation (2.38) dans le résultat obtenu, on aura :

$$\frac{dP}{P} = \left(F_\rho(T) + \frac{1}{T} \right) dT \quad (2.41)$$

L'équation (2.41) présente la différentielle de la pression en fonction de la température pour le gaz à Haute Température.

2.3.7 Relation entre la température et la section

Prenons la différentielle de l'équation de conservation de la masse (2.6) on obtient [26] :

$$\frac{dA}{A} = - \left\{ \frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} \right\} \quad (2.42)$$

En remplaçant dV/V et $d\rho/\rho$ par leurs expressions (2.30) et (2.37) respectivement, On obtient la forme suivante:

$$\frac{dA}{A} = F_A(T) dT \quad (2.43)$$

Avec :

$$F_A(T) = C_p(T) \left[\frac{1}{a^2(T)} - \frac{1}{2H(T)} \right] \quad (2.44)$$

L'intégration de l'équation (2.43), entre l'état du col (A_*, T_*) et un état quelconque (A, T) du divergent, détermine le rapport des sections supersonique par :

$$\frac{A}{A_*} = \text{Exp} \left(\int_{T_*}^T F_A(T) dT \right) \quad (2.45)$$

Nous remarquons que pour calculer les paramètres ρ et A , nous avons besoin de calculer l'intégrale d'une certaine fonction où la procédure analytique est impossible, vu la complexité des fonctions à intégrer. Donc, notre intérêt s'oriente vers le calcul numérique. Tous les paramètres M , ρ et A sont fonctions de la température.

2.4 Paramètre thermodynamique pour un gaz parfait

Pour faire une comparaison entre le cas à Haute Température et le cas d'un gaz parfait, on rappelle les relations thermodynamiques isentropiques d'un gaz parfait [1, 2, 18, 24, 26, 32, 33] :

$$\frac{T}{T_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-1} \quad (2.46)$$

$$\frac{P}{p_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.47)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{-1}{\gamma-1}} \quad (2.48)$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (2.49)$$

Les relations (2.46), (2.47), (2.48), (2.49) donnant les paramètres T , P , ρ , A et le débit sont reliées explicitement avec le nombre de Mach qui est la variable principale pour un gaz parfait. Pour notre modèle, la variable principale est la température à cause de l'équation (2.31), reliant M et T , où la détermination de l'expression analytique de son inverse est impossible.

CHAPITRE 3

ONDE DE CHOC NORMALE POUR UN GAZ CALORIQUEMENT IMPARFAIT

3.1 Introduction

Pour un gaz à caloriquement imparfait les chaleurs spécifique à pression constante et le rapport des chaleurs spécifique ne sont plus constantes ainsi les formules d'un gaz parfait ne sont plus utilisables. Où : les chaleurs spécifique, leur rapport et les différents paramètres thermodynamique sont devenus variables en fonction de la température.

L'objectif principal de cette étude est l'élaboration d'un modèle mathématique qui sert à calculer les paramètres thermodynamique à travers l'onde de choc normale, en ajoutant l'effet de variation de C_p et de γ avec la température plus basse que le seuil de dissociation des molécules, et la détermination des résultats nécessaires pour ce gaz qui sera nommé gaz caloriquement imparfait et thermiquement parfait. Notre application sera pour l'écoulement d'air dans une tuyère.

Pour le cas d'un écoulement d'air soumis à une pression élevée, on trouve dans la référence [20] une table contenant quelques valeurs de C_p et γ en fonction de la température dans un intervalle compris entre 55 K° et 3550 K° afin de trouver une forme polynomiale [23] aux valeurs de la table. Les relations mathématiques présentées sont valables, dans le cas général, indépendamment de la forme de l'interpolation et de la substance, mais nos résultats seront présentés par le choix des interpolations sous forme d'un polynôme de 9^{ème} degré pour la fonction $C_p(T)$.

Les relations mathématiques développées au chapitre précédent sont sous la forme des équations algébriques non linéaires et l'intégrale des fonctions analytiques complexes, où la procédure analytique est impossible. Alors, notre intérêt s'oriente vers la détermination des solutions numériques approchées.

- La méthode de *dichotomie* est utilisée pour la résolution des équations algébriques non linéaires [6, 22, 23, 29].
- l'algorithme de *Simpson* est utilisé pour l'intégration numérique des fonctions présentées [7, 19, 20, 29].

Les fonctions à intégrer possèdent des gradients élevés aux extrémités de l'intervalle d'intégration. La quadrature de *Simpson* à pas constant demande une discrétisation très élevée pour avoir une précision convenable. La solution de ce problème est faite par introduction d'une procédure de condensation afin de raffiner les points à l'endroit où il y a un gradient élevé [9, 29]. Les fonctions possèdent un gradient élevé au point supersonique. La formule de condensation choisie est celle de Robert, présentée dans la référence [9].

L'application sera pour l'air dans le domaine supersonique inférieur au seuil de dissociation des molécules, qui sera applicable si le nombre de Mach reste inférieur à 5.00 environ. La comparaison est faite avec le modèle d'un gaz calorifiquement parfait à γ constant. Dans le but de déterminer la limite d'application du modèle du gaz parfait, une étude sur l'erreur donnée par ce modèle par rapport à notre modèle à haute température sera présentée.

3.2 Hypothèses fondamentales

Lorsque la température génératrice de la chambre de combustion augmente et commence à dépasser les 1000 K° en général, les hypothèses fondamentales introduites pour présenter le modèle mathématique de calcul sont les suivantes :

- Le gaz est considéré comme un gaz calorifiquement imparfait. Les valeurs de la chaleur spécifique à pression constante C_p et le rapport thermodynamique des chaleurs spécifiques γ ne restent plus constants et commencent à varier explicitement avec la température génératrice.

- Le gaz est thermiquement parfait ou gaz à haute température inférieur au seuil de dissociation des molécules, c'est-à-dire nous travaillons toujours avec des molécules et non pas avec des atomes.
- Les équations de conservation restent inchangées par rapport aux hypothèses d'un gaz parfait excepté l'équation d'énergie. Il faut tenir compte de l'effet de variation des chaleurs spécifiques.
- L'écoulement est permanent, c'est-à-dire la variation des paramètres avec le temps est nulle.
- L'écoulement est irrotationnel, c'est-à-dire qu'il y a absence de dissipations causées par le choc.
- L'écoulement est monodimensionnel.

3.3 Formulation mathématique

3.3.1 Modèle du gaz à haute température

Le développement mathématique à travers le choc à haute température est basé sur l'utilisation des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et en ajoutant l'équation d'états du gaz parfait présenté dans le premier chapitre [2].

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (3.1)$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (3.2)$$

$$h_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_2^2 \quad (3.3)$$

$$P = \rho r T \quad (3.4)$$

Avec :

$$a^2 = \gamma(T) r T \quad (3.5)$$

Et :

$$\gamma(T) = \frac{c_p(T)}{c_p(T) - r} \quad (3.6)$$

L'intégration de l'ensemble d'équations (3.1) (3.2) et (3.3) entre l'état amont et aval fournit les relations suivantes :

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = q \quad (3.7)$$

$$P_2 - P_1 + q(V_2 - V_1) = 0 \quad (3.8)$$

$$2H(T_1) - 2H(T_2) - (V_1^2 - V_2^2) = 0 \quad (3.9)$$

Où :

$$H(T) = \int_T^{T_0} C_p(T) dt \quad (3.10)$$

D'après l'équation d'énergie :

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = V_2^2 - V_1^2 = (V_2 - V_1)(V_2 + V_1) \quad (3.11)$$

Et d'après l'équation de conservation de quantité de mouvement, on a :

$$V_2 - V_1 = \frac{P_1 - P_2}{q} = \frac{P_1 - P_2}{\rho_1 V_1} \quad (3.12)$$

On remplace (3.12) dans l'équation (3.11) pour obtenir :

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = \frac{P_1 - P_2}{\rho_1 V_1} (V_2 + V_1)$$

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = \frac{P_1 V_2}{\rho_1 V_1} + \frac{P_1 V_1}{\rho_1 V_1} - \frac{P_2 V_2}{\rho_1 V_1} - \frac{P_2 V_1}{\rho_1 V_1} \quad (3.13)$$

On simplifie l'équation (3.13) pour trouver :

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = \frac{P_1 V_2}{\rho_1 V_1} + \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2 V_2}{\rho_1 V_1} - \frac{P_2}{\rho_1} \quad (3.14)$$

Et à partir de l'équation (3.7), nous pouvons écrire que :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (3.15)$$

On remplace (3.15) dans (3.14), on obtient :

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = \left(\frac{P_1}{\rho_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) + \frac{P_1}{\rho_1} - \left(\frac{P_2}{\rho_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) - \frac{P_2}{\rho_1} \quad (3.16)$$

Alors:

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = \frac{P_1}{\rho_2} + \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_2}{\rho_1} \quad (3.17)$$

A partir de l'équation (3.4) et en introduisant $\frac{P}{\rho} = rT$ dans (3.17), on trouve :

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = rT_1 \left(\frac{1}{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \right) + rT_1 - rT_2 - rT_2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (3.18)$$

Pour simplifier l'équation, on note x_ρ qui représente le rapport des masses volumiques $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, Donc :

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = rT_1 + rT_1 \left(\frac{1}{x_\rho} \right) - rT_2 - rT_2 x_\rho \quad (3.19)$$

On multiplie l'équation (3.19) par (x_ρ/rT_1) , on aura :

$$\left[\frac{2H(T_1) - 2H(T_2)}{rT_1} \right] x_\rho = x_\rho + 1 - x_\rho \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} x_\rho^2 \quad (3.20)$$

On note x_T qui représente le rapport des masses volumiques $\frac{T_2}{T_1}$, on obtient donc :

$$x_T x_\rho^2 - \left(\frac{2H(T_1) - 2H(T_2)}{rT_1} - x_T + 1 \right) x_\rho - 1 = 0 \quad (3.21)$$

L'équation (3.21) est une équation non linéaire où la température et la masse volumique sont couplées.

D'après la conservation de la quantité de mouvement (3.2) :

$$P_2 - P_1 = \rho_1 V_1 (V_1 - V_2) \quad (3.22)$$

En multipliant et divisant dans la relation (3.22) par le terme $\gamma(T_1)$.

$$P_2 - P_1 = \frac{\gamma(T_1)}{\gamma(T_1)} \frac{P_1}{RT_1} V_1^2 \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (3.23)$$

Maintenant en introduisant $M^2 = \frac{V^2}{\gamma r T}$ dans la relation (3.23), on trouve à la fin :

$$x_T x_\rho^2 - [1 + M_1^2 \gamma(T_1)] x_\rho + M_1^2 \gamma(T_1) = 0 \quad (3.24)$$

L'équation (3.24) est aussi une équation non linéaire où la température et la masse volumique sont couplées.

3.3.2 Modèle du gaz parfait

La résolution du problème d'une onde de choc normale à haute température nécessite l'utilisation des équations du modèle gaz parfait, nous rappelons les relations thermodynamiques données par la théorie d'un gaz parfait présentée dans le premier chapitre [1,2]:

$$M_2^2 = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2]M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)/2} \quad (3.25)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right] \quad (3.26)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \quad (3.27)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \quad (3.28)$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left[\left(\frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \right) / \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) \right]^{\gamma/(\gamma - 1)} \left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \right]^{-1/(\gamma - 1)} \quad (3.29)$$

$$T_{01} = T_{02} \quad (3.30)$$

$$S_2 - S_1 = -r \ln \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right) \quad (3.31)$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = e^{-(S_2 - S_1)r} \quad (3.32)$$

Ces relations donnant les paramètres T, P, ρ , A et le débit sont reliées explicitement avec le nombre de Mach qui est la variable principale pour un gaz parfait.

3.4 Procédure de calcul

3.4.1 La chaleur spécifique à pression constante $C_p(T)$

D'après la table de *Peterson* présenté dans l'appendice A qui représente des valeurs expérimentales pour l'air à une pression élevée [20], on a constaté qu'à partir d'une

certaine température limite $\bar{T} = 240^\circ\text{K}$, la chaleur spécifique $C_p(T)$ et le rapport des chaleurs spécifiques $\gamma(T)$ sont devenus variables en fonction de la température.

Les valeurs de γ et de C_p sont données en fonction de la température. Par contre, pour un gaz parfait, les valeurs de γ et C_p sont données à 298.15 K° par [1, 5, 20]:

$$C_p = 1001.29832 \text{ (J/ Kg K}^\circ\text{)} \quad \text{et} \quad \gamma = 1.402$$

3.4.1.1 L'interpolation polynomiale de la chaleur spécifique $C_p(T)$

L'interpolation polynomiale des valeurs de C_p en fonction de la température est réalisée par un polynôme de 9^{ème} degré. Ce choix est justifié par la petite valeur de l'erreur obtenue entre les valeurs tabulées et les valeurs interpolées [22, 23], et aussi pour minimiser les opérations mathématiques de calcul. Nous avons opté, pour l'écriture de la fonction $C_p(T)$ le schéma de *Horner* utilisé dans la référence [28]. Alors :

$$C_p(T) = a_1 + T(a_2 + T(a_3 + T(a_4 + T(a_5 + T(a_6 + T(a_7 + T(a_8 + T(a_9 + T(a_{10})))))))))) \quad (3.33)$$

Les coefficients a_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) sont présentés dans le tableau (3.1) suivant [28] :

i	a_i
1	1001.1058
2	0.040661289
3	- 0.00063376997
4	$2.7474759 \cdot 10^{-6}$
5	$-4.0338459 \cdot 10^{-9}$
6	$3.0697736 \cdot 10^{-12}$
7	$-1.3509355 \cdot 10^{-15}$
8	$3.472262 \cdot 10^{-19}$
9	$-4.8467531 \cdot 10^{-23}$
10	$2.8411878 \cdot 10^{-27}$

Tableau (3.1) : Coefficient du polynôme $C_p(T)$ [28].

Après la présentation graphique du polynôme de $C_p(T)$ et la comparaison avec les valeurs données par le tableau de *Peterson* présenté dans l'appendice A nous remarquons qu'il y a un petit problème qui se pose durant l'interpolation de la formule (3.33) ; une

variation ondulée à basse température jusqu'à environ 240°K, au lieu d'avoir une fonction constante dans cette portion conformément aux valeurs de la table. A cet effet, une correction est introduite pour rapprocher les valeurs interpolées des valeurs du tableau de *Peterson*. Donc, si $T = \bar{T} = 240^\circ\text{K}$. La relation (3.33) donne la valeur suivante :

$$\bar{C}_p = C_p(\bar{T}) = 1001.15868 \frac{J}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{K}}$$

Pour la correction de la fonction $C_p(T)$, nous aurons donc deux cas de figures :

$$\text{Si : } \begin{cases} T \leq \bar{T}, \text{ on utilise la correction suivante : } C_p(T) = \bar{C}_p \\ T > \bar{T}, \text{ on utilise la relation (3.33).} \end{cases}$$

Concernant la détermination de la forme analytique de la fonction $C_p(T)$, nous pouvons avoir plusieurs formes de polynômes par plusieurs procédures et méthodes [22] et [23]. Pour prendre une décision sur le choix de la bonne forme d'interpolation, il faut faire une étude sur les erreurs entre les valeurs de la table de *Peterson* illustrée dans l'appendice A et les valeurs données par la substitution dans l'équation analytique du polynôme d'interpolation. L'interpolation choisie donne une erreur meilleure à $\varepsilon = 10^{-3}$.

II.4.1.2 Intégration de la chaleur spécifique $C_p(T)$

Après l'interpolation de la chaleur spécifique, on détermine la fonction d'enthalpie de la relation (3.10), par intégration de la fonction $C_p(T)$ dans l'intervalle $[T, T_0]$, ainsi la fonction $H(T)$ sera en fonction de la température total T_0 . Et elle est définie lorsque $T \leq T_0$.

Nous remplaçons la relation (3.33) dans (3.10) et nous obtenons le résultat sous la forme du schéma de *Horner* utilisé dans la référence [28] :

$$H(T) = H_0 - [c_1 + T(c_2 + T(c_3 + T(c_4 + T(c_5 + T(c_6 + T(c_7 + T(c_8 + T(c_9 + T(c_{10})))))))))] \quad (3.34)$$

Avec :

$$H_0 = c_1 + T_0 (c_2 + T_0 (c_3 + T_0 (c_4 + T_0 (c_5 + T_0 (c_6 + T_0 (c_7 + T_0 (c_8 + T_0 (c_9 + T_0 (c_{10})))))))))) \quad (3.35)$$

Et :

$$c_i = \frac{a_i}{i} \quad , \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 10)$$

Comme la fonction $H(T)$ est obtenue en intégrant la fonction $C_p(T)$ et comme cette dernière présente un problème lorsque $T \leq T_0$, il est nécessaire de corriger ce problème pour la fonction $H(T)$:

- Si $T_0 < \bar{T}$, Donc : $H(T) = \bar{C}_p(T_0 - T)$
- Si $T_0 > \bar{T}$, on a deux cas :

$$\text{Si : } \begin{cases} T > \bar{T}, \text{ on utilise la formule (3.34) pour calculer } H(T). \\ T \leq \bar{T}, \text{ on utilise la formule suivante : } H(T) = \bar{C}_p(\bar{T} - T) + H(\bar{T}). \end{cases}$$

3.4.2 Détermination des paramètres thermodynamiques

3.4.2.1 Rapports des grandeurs statiques à travers le choc correspondant à T_0

3.4.2.1.1 Détermination des températures T_* et T_1 avant le choc

Pour déterminer les températures T_* et T_1 correspondantes à T_0 , on intègre la relation (3.3) entre l'état d'arrêt et respectivement entre l'état critique donné par $(M = 1, T_*)$ et un état amont (avant le choc) donné par (M_1, T_1) , en introduisant le nombre de Mach M_1 nous obtenons l'équation :

$$M_i^2 = \frac{2H(T_i)}{\gamma(T_i)RT_i} \quad i = *, 1 \quad (3.36)$$

Nous remplaçons l'équation (3.5) dans la relation (3.36), et nous appelons cette dernière : $F(T_i)$. Donc :

$$F(T_i) = 2H(T_i) - M_i^2 a^2(T_i) = 0 \quad i = *, 1 \quad (3.37)$$

La détermination de la racine T_* et T_1 de l'équation (3.37) se fait en utilisant l'algorithme de *Dichotomie* présenté dans le tableau (3.2) [7] :

1	$\begin{cases} a_1 = a \\ b_1 = b \end{cases}$
2	Pour $i = 1, \varepsilon$
3	$x_i = (a_i + b_i)/2$
4	Si $x_i < \varepsilon \Rightarrow$ Aller à (10) Sinon à (5)
5	Si $\begin{cases} f(a_i)f(b_i) > 0 \text{ aller à (6)} \\ f(a_i)f(b_i) < 0 \text{ aller à (8)} \end{cases}$
6	$\begin{cases} a_{i+1} = x_i \\ b_{i+1} = c_i \end{cases}$
7	$i = i + 1$ aller à (3)
8	$\begin{cases} a_{i+1} = a_i \\ b_{i+1} = x_i \end{cases}$
9	$i = i + 1$ aller à (3)
10	Procédure complétée

Tableau (3.2) : Algorithme de Dichotomie [6].

Dans notre cas, on sait que $T_* < T_0$ et $T_1 < T_0$, nous pouvons choisir facilement un intervalle $[T_a, T_b]$ contenant la température T_* et T_1 qui doit vérifier la condition $F(T_a).F(T_b) \leq 0$. Nous pouvons prendre $T_a = 0^\circ K$ et $T_b = T_0$.

Une fois cet intervalle déterminé, nous pouvons calculer T_a , avec une précision « ε » et par la suite calculer les rapports $\frac{T_*}{T_0}$ et $\frac{T_1}{T_0}$ correspondant à la température T_0 et M_1 , la précision « ε » nécessaire pour déterminer la température, est donnée par [6] :

$$\varepsilon = \frac{|T_a - T_b|}{2^k} \quad (3.38)$$

D'où [6] :

$$K = 1.4426 \log\left(\frac{T_a - T_b}{\varepsilon}\right) + 1 \quad (3.39)$$

Avec :

- K : Nombre de d'itération.
- ε : Précision voulue pour résoudre une équation algébrique par l'algorithme de *Dichotomie*. Si : $\varepsilon = 10^{-16}$, le nombre de d'itération K ne peut excéder 66 [6].

3.4.2.1.2 Rapport des vitesses du son $\frac{a_*}{a_0}$ et $\frac{a_1}{a_0}$

Le rapport des vitesses du son avant le choc peut être obtenu en remplaçant T respectivement par T_* et T_1 dans la relation (2.24), nous obtenons :

$$\frac{a_i}{a_0} = \frac{a(T_i)}{a(T_0)} = \sqrt{\frac{\gamma(T_i) \cdot T_i}{\gamma(T_0) \cdot T_0}} \quad i = *, 1 \quad (3.40)$$

3.4.2.1.3 Rapport des masses volumiques $\frac{\rho_*}{\rho_0}$ et $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ avant le choc

Nous commençons la détermination du rapport des masses volumiques donnée par la relation (2.39), par l'intégration numérique de la fonction $F_\rho(T)$ dans l'intervalle $[T, T_0]$, nous remplaçons T par T_* ou T_1 et si nous intégrons la fonction, respectivement dans l'intervalle $[T_*, T_0]$, et $[T_1, T_0]$, nous obtenons le rapport des masses volumiques avant le choc:

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} = e^{-\int_{T_i}^{T_0} F_\rho(T) dT} \quad i = *, 1 \quad (3.41)$$

Avant de prendre une décision sur le choix de la quadrature d'intégration, et pour avoir une idée sur la variation de la fonction $F_\rho(T)$ nous avons tracé la courbe de variation illustrée par la figure (3.1). Pour une bonne présentation à l'extrémité, le traçage de la fonction est choisi pour la température $T_0 = 500^\circ K$ (basse température) et $M_s = 5.0$ (extrême supersonique).

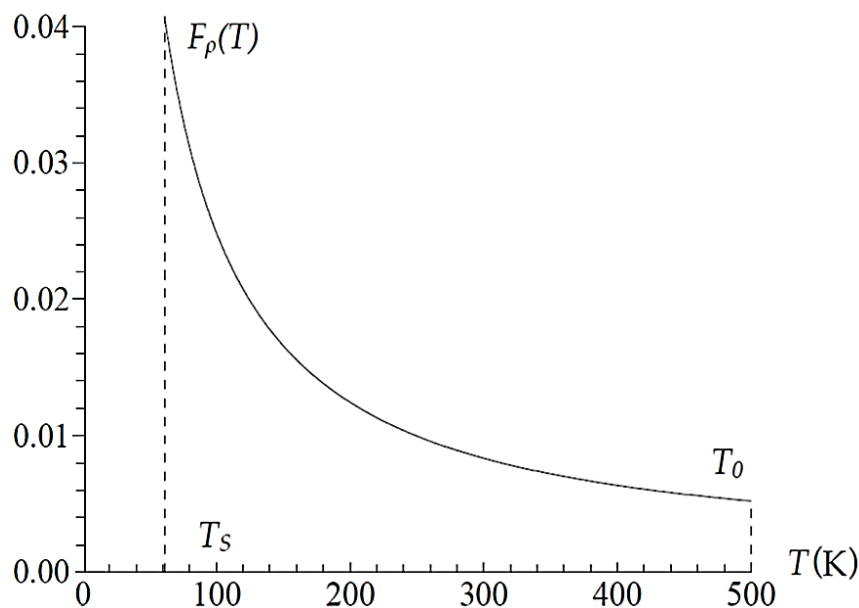


Figure (3.1) : Variation de la fonction $F_\rho(T)$ dans $[T_s, T_0]$.

D'après la figure (3.1) nous concluons que la quadrature d'intégration à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision vue la variation très rapide aux extrémités gauches de l'intervalle.

Nous remarquons que la fonction présente une dérivée très grande au voisinage de la température T_s . Cette variation devient très importante lorsque T_s est très petite. Une condensation des nœuds est alors nécessaire au voisinage de la température T_s [29]. L'objectif de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision très élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature.

La quadrature d'intégration choisie est celle de *Simpson*, on utilise la formule simple *Simpson* pour deux panneaux $n = 2$ [6,23]:

$$I = \int_{x_2}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_1) + f(x_2) + 4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \right] \quad (3.42)$$

Où :

$$\Delta x = \frac{x_2 - x_1}{n} \quad (3.43)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x : \text{Le pas.} \\ n : \text{Nombre de panneau.} \\ x_1, x_2 : \text{Les bornes d'intégrale.} \\ I : \text{L'intégrale.} \end{array} \right.$$

Et pour le calcul numérique de l'intégrale donnée par la formule (2.39). La fonction de condensation utilisée pour nos calculs est celle de *Robert* [9]. Cette fonction est donnée par :

$$s_i = b_1 z_i + (1 - b_1) \cdot \left[1 - \frac{\tanh[b_2(1-z_i)]}{\tanh(b_2)} \right] \quad (3.44)$$

Et :

$$Z_i = \frac{i-1}{N_p-1}, \quad 1 \leq i \leq N_p \quad (3.45)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_p : \text{Nombre de points pour la quadrature de Simpson [6].} \\ b_1, b_2 : \text{Paramètres de contrôle de la distribution des nœuds.} \end{array} \right.$$

Après la détermination de la fonction de condensation « s », nous pouvons déterminer la distribution des abscisses « T » par :

$$\frac{T - T_{\text{Gauche}}}{T_{\text{droite}} - T_{\text{Gauche}}} = f(s) \quad (3.46)$$

Avec :

$$\blacksquare T_{\text{Droite}} = T_0 \quad (3.47)$$

$$\blacksquare T_{\text{Gauche}} = \begin{cases} T_* \text{ pour le paramètre critique} \\ T_s \text{ pour les paramètres à une section donnée.} \end{cases} \quad (3.48)$$

La fonction $f(s)$ de la relation (3.46) est arbitraire. Pour les calculs, nous optons pour la forme suivante : $f(s) = s$

Et la distribution des nœuds se fait de la manière suivante :

$$T_i = s_i (T_{\text{Droite}} - T_{\text{Gauche}}) + T_{\text{Gauche}} \quad (3.49)$$

- Si nous prenons pour b_1 des valeurs proches de zéro (par exemple $b_1 = 0.1$ et $b_2 = 2.0$), nous pouvons condenser les nœuds vers l'extrémité gauche T_s de l'intervalle.
- Si nous prenons des valeurs de b_1 proche de b_2 (par exemple $b_1 = 1,9$). Nous pouvons condenser les nœuds vers l'extrémité droite.
- Si nous voulons des sous intervalles de même longueur. Nous pouvons prendre $b_1 = 1.0$.

La figure (3.2) suivante présente la distribution des nœuds suivant la valeur de b_1 . Il faut noter que notre intérêt est de condenser les nœuds vers l'extrémité gauche T_s vu la variation de la fonction $F_\rho(T)$.

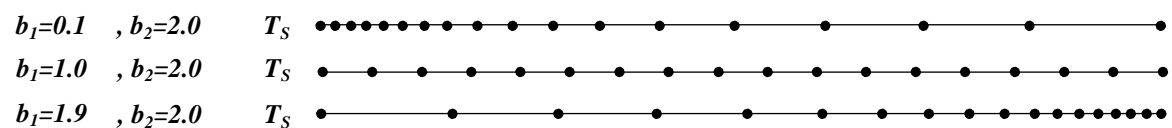


Figure (3.2) : Présentation de la condensation des nœuds.

3.4.2.1.4 Rapport des pressions $\frac{P_*}{P_0}$ et $\frac{P_1}{P_0}$ avant le choc

Le rapport des pressions en amont du choc peut être déterminé en remplaçant les rapports des températures et des masses volumiques dans la relation (2.40), nous aurons :

$$\frac{P_i}{P_0} = \left(\frac{\rho_i}{\rho_0}\right) \cdot \left(\frac{T_i}{T_0}\right) \quad i = *, 1 \quad (3.50)$$

3.4.2.1.5 Détermination de la température T_2 et le rapport des températures x_T à travers le choc

Étant donné que $x_T > 0$ et à partir de l'équation (3.21) montrons que l'une des solutions de x_ρ est négative et l'autre positive, alors que dans l'équation (3.24) les deux solutions de x_ρ sont positives. Pour trouver la solution, on déduit l'équation (3.24) de l'équation (3.21) :

$$x_T x_\rho^2 - \left(\frac{2H(T_1) - 2H(T_2)}{rT_1} + x_T - 1\right) x_\rho - 1 - x_T x_\rho^2 + [1 + M_1^2 \gamma(T_1)] x_\rho - M_1^2 \gamma(T_1) = 0 \quad (3.51)$$

À partir de cette dernière, on peut obtenir le rapport de la masse volumique en fonction de T_1 et T_2 (cette dernière n'a pas encore été déterminée).

$$x_\rho = \frac{rT_1 [1 + M_1^2 \gamma(T_1)]}{2H(T_2) - 2H(T_1) + rT_1 [x_T + M_1^2 \gamma(T_1)]} \quad (3.52)$$

Afin de résoudre ce problème couplé entre la température et la masse volumique on remplace l'expression du rapport de la masse volumique dans l'équation (3.24), pour obtenir une fonction algébrique non linéaire en fonction de la température T_2 .

$$F(T_2) = 0 \quad (3.53)$$

A ce stade, nous connaissons seulement que $T_2 > T_1$ pour donner une augmentation de température T_2 , considérons le discriminateur de l'équation (3.24) :

$$\Delta = [1 + M_1^2 \gamma(T_1)]^2 - 4x_T M_1^2 \gamma(T_1) \quad (3.54)$$

Pour avoir une solution, il faut que $\Delta > 0$ donc la solution réside à ce que : $T_2 < T_{max}$.

Avec :

$$T_{max} = \frac{[1+M_1^2\gamma(T_1)]^2}{4M_1^2\gamma(T_1)} T_1 \quad (3.55)$$

Cette formule montre que : $T_1 < T_{max}$ donc $T_1 < T_2 < T_{max}$.

Pour obtenir les racines de la fonction $F(T_2) = 0$ on utilise la méthode de *Dichotomie* dans l'intervalle $[T_1, T_{max}]$ [23], et posant T_M comme milieu de l'intervalle $T_M = \frac{T_1+T_{max}}{2}$ soulignant que $F(T_1) = 0$ signifie d'une part qu'il n'existe pas de choc et que $F(T_{max}) > 0$. Alors :

$$\text{Si : } \begin{cases} F(T_M) > 0, \text{ La solution est dans } [T_1, T_M] \\ F(T_M) < 0, \text{ La solution est dans } [T_M, T_{max}] \end{cases}$$

Cette procédure sera répétée jusqu'à ce que « K » satisfait à la fois la précision souhaitée « ε », il peut monter [28, 29] que si : $\varepsilon = 10^{-3}$ quelque soit M_1 et T_0 , le nombre d'itérations « K » ne peut pas dépasser 66.

Une fois que la valeur de T_2 est trouvée avec une précision souhaité « ε » on peut facilement déduire le rapport de la température x_T à travers le choc, nous représentons le domaine d'existence de la solution T_2 dans l'intervalle $]T_1, T_{max}[$ en fonction de la température génératrice pour des différentes valeurs du nombre de Mach présenté dans la figure (3.3), dont le but est de localiser T_2 dans l'intervalle $[T_1, T_{max}]$. La solution physique existe toujours.

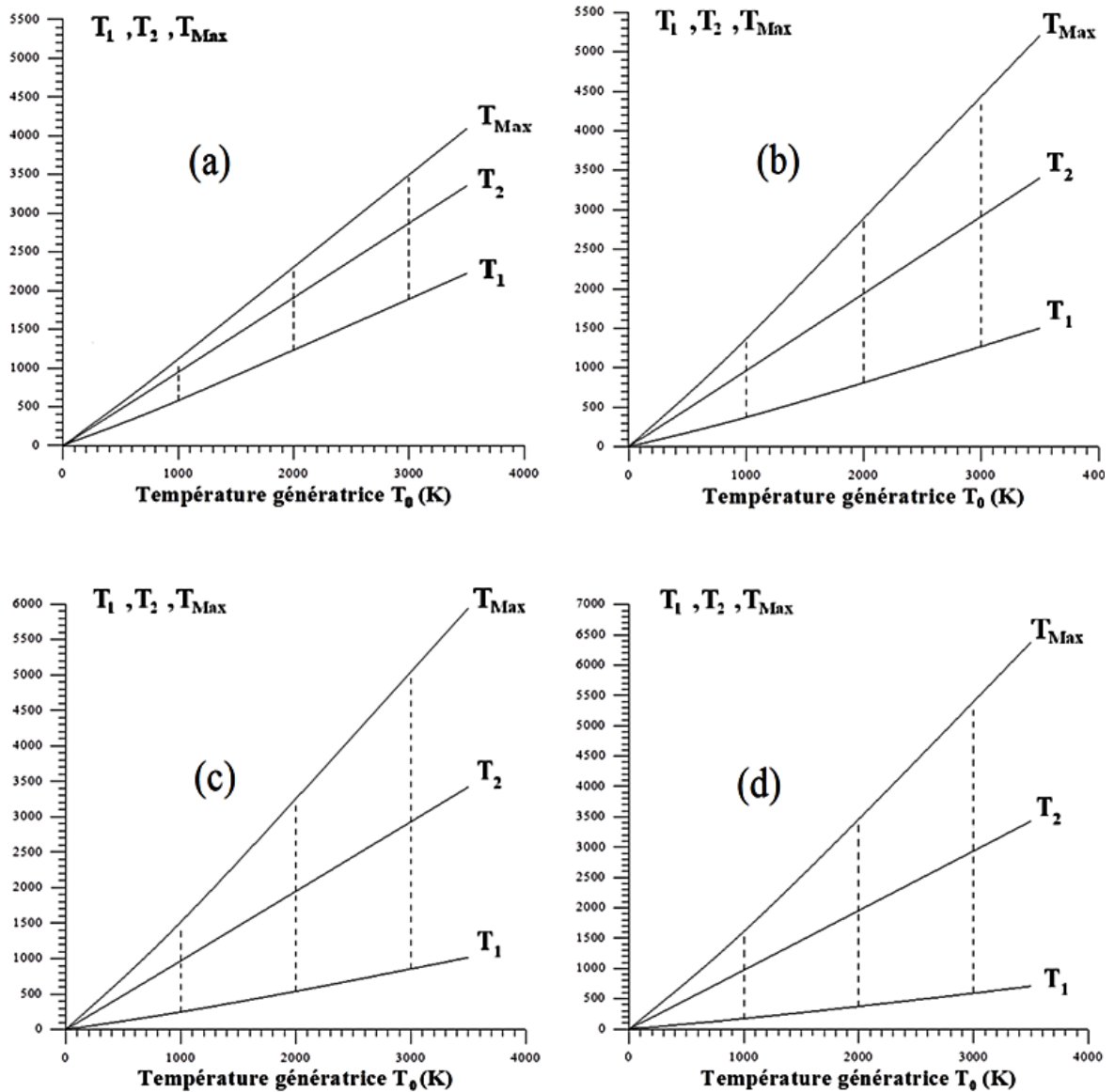


Figure (3.3) : L'intervalle d'existence de la solution T_2 par rapport à T_0 lorsque :

(a) $M_1 = 2,00$, (b) $M_1 = 3,00$, (c) $M_1 = 4,00$, (d) $M_1 = 5,00$.

3.4.2.1.6 Rapport des vitesses du son $\frac{a_2}{a_0}$

Le rapport des vitesses du son peut être obtenu en remplaçant T par T_2 dans la relation (2.24), nous obtenons :

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{a(T_2)}{a(T_0)} = \sqrt{\frac{\gamma(T_2) \cdot T_2}{\gamma(T_0) \cdot T_0}} \quad (3.56)$$

3.4.2.1.7 Rapport des masses volumiques $\frac{\rho_2}{\rho_0}$ après le choc

Pour déterminer le rapport des masses volumiques $\frac{\rho_2}{\rho_0}$, nous remplaçons dans la fonction (2.40) T par T_2 et si nous intégrons la fonction, dans l'intervalle $[T_2, T_0]$, nous obtenons le rapport des masses volumiques après le choc correspondant à T_0 :

$$\frac{\rho_2}{\rho_0} = e^{-\int_{T_2}^{T_0} F_\rho(T) dT} \quad (3.57)$$

Et pour calculer la valeur de l'intégrale on utilise la même quadrature d'intégration et la même fonction de condensation que le rapport des masses volumique $\frac{\rho_1}{\rho_0}$.

3.4.2.1.8 Rapport des masses volumiques x_ρ à travers le choc

Le rapport des masses volumiques à travers le choc peut être déterminé par l'équation (3.52).

3.4.2.1.9 Rapport des pressions x_P à travers le choc

Le rapport des pressions peut être déterminé en remplaçant les rapports des températures et des masses volumiques dans la relation (2.40), nous aurons :

$$x_P = x_\rho x_T \quad (3.58)$$

3.4.2.2 Rapports des grandeurs totales à travers le choc

À l'état d'arrêt le nombre de Mach et la vitesse du son sont toujours égaux au zéro, alors :

$$M_{0_1} = M_{0_2} = M_0 = 0 \quad (3.59)$$

$$a_{0_1} = a_{0_2} = a_0 = 0 \quad (3.60)$$

Les paramètres d'arrêt correspondant à des conditions supersonique après le choc peuvent être déterminés :

3.4.2.2.1 Température totale

Considérons maintenant la variation de la température totale correspondant aux régions avant et après le choc lorsque la chaleur spécifique $C_p(T)$ varie avec la

température. Sachant que pour le modèle *GP*, la température totale à travers le choc reste constante [1]. À partir de l'équation (2.27) nous pouvons écrire :

- Dans l'intervalle $[T_1, T_{01}]$, entre l'état d'arrêt et l'état juste avant le choc :

$$V_1^2(T) = 2 \int_{T_1}^{T_{01}} C_P(T) dT \quad (3.61)$$

- Dans l'intervalle $[T_2, T_{02}]$, entre l'état d'arrêt et l'état juste après le choc :

$$V_2^2(T) = 2 \int_{T_2}^{T_{02}} C_P(T) dT \quad (3.62)$$

- Dans l'intervalle $[T_1, T_2]$, entre l'état juste avant et après le choc :

$$(V_2^2 - V_1^2) = 2 \int_{T_2}^{T_1} C_P(T) dT \quad (3.63)$$

On met la différence entre les relations (3.61) et (3.60), nous obtenons :

$$2 \int_{T_2}^{T_{02}} C_P(T) dT - 2 \int_{T_1}^{T_{01}} C_P(T) dT = 2 \int_{T_2}^{T_1} C_P(T) dT \quad (3.64)$$

D'une autre part on remarque que le résultat de la soustraction est le même que l'équation (3.63), et d'autre part on peut écrire ce résultat comme :

$$2 \int_{T_2}^{T_1} C_P(T) dT = 2 \int_{T_2}^{T_{02}} C_P(T) dT + 2 \int_{T_{02}}^{T_{01}} C_P(T) dT + 2 \int_{T_{01}}^{T_1} C_P(T) dT \quad (3.65)$$

Après simplification, on trouve :

$$\int_{T_{02}}^{T_{01}} C_P(T) dT = 0 \quad (3.66)$$

On obtient :

$$T_{02} = T_{01} = T_0 \quad (3.67)$$

Ce qui nous amène à dire que la température totale pour un gaz à haute température reste constante à travers le choc.

3.4.2.2.2 La vitesse du son totale

La vitesse du son totale reste constante sur les deux côtés du choc. En utilisant les relations (3.5), (3.6) et (3.67) nous obtenons :

$$a_{02} = a_{01} = a_0 = \sqrt{\gamma(T_0)RT_0} \quad (3.68)$$

3.4.2.2.3 Rapport des masses volumiques et des pressions totales

Le rapport des pressions totales et des masses volumiques totales peut être déterminé par la relation (2.40) avec $T_{0_2} = T_{0_1}$.

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} \quad (3.69)$$

Nous multiplions et nous divisons la relation (3.69) par x_ρ , on obtient :

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{(\rho_1/\rho_{01})}{(\rho_2/\rho_{02})} x_\rho \quad (3.70)$$

3.4.2.3 Variation d'entropie à travers le choc

La variation de l'entropie à travers le choc pour le gaz parfait et donnée par [1, 7]:

$$dS = (C_p - r) \frac{dT}{T} - r \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.71)$$

Remplaçons le polynôme $C_p(T)$ celle obtenue après l'intégration entre l'état 1 et 2 dans la relation (3.71), sous la forme suivante:

$$S_{12} = (b_1 - r) \text{Log}(x_T) - r \text{Log}(x_\rho) + \sum_{j=2}^{j=10} \frac{b_j}{j-1} (T_2^{j-1} - T_1^{j-1}) \quad (3.72)$$

Considérant la fonction $C_p(T)$ est constant lorsque $T \leq \bar{T} \Rightarrow \begin{cases} \bar{T} = 240 \text{ K} \\ \bar{C}_p = 1001.289 \text{ J/(kg K)} \end{cases}$

Alors la fonction d'entropie à travers le choc $S_{12}(T_1, T_2)$ devient, Si :

- $T_2 \leq \bar{T}$:

$$S_{12} = (\bar{C}_p - r) \text{Log}(x_T) - r \text{Log}(x_\rho) \quad (3.73)$$

- $T_1 \geq \bar{T}$:

$$S_{12} = (b_1 - r) \text{Log}(x_T) - r \text{Log}(x_\rho) + \sum_{j=2}^{j=10} \frac{b_j}{j-1} (T_2^{j-1} - T_1^{j-1}) \quad (3.74)$$

- $T_1 < \bar{T} < T_2$:

$$S_{12} = (\bar{C}_p - r) \text{Log}\left(\frac{\bar{T}}{T_1}\right) - r \text{Log}(x_\rho) + (b_1 - r) \text{Log}\left(\frac{T_2}{\bar{T}}\right) + \sum_{j=2}^{j=10} \frac{b_j}{j-1} (T_2^{j-1} - \bar{T}^{j-1}) \quad (3.75)$$

La relation (3.72) est donnée en fonction des conditions à travers le choc, nous pouvons démontrer à partir (3.71) que l'intégration entre les conditions totales avant et après le choc donne :

$$S_{12} = -r \text{Log} \left(\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} \right) = -r \text{Log} \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right) \quad (3.76)$$

3.4.3 L'erreur relative de modèle gaz parfait

Par définition l'erreur relative est le quotient de l'erreur absolue à la valeur réel [23], l'erreur relative n'a pas d'unité ; elle nous indique la qualité (l'exactitude) du résultat obtenu. Elle s'exprime généralement en % (pour cent) :

$$\text{L'erreur relative} = \left(\frac{\text{L'erreur absolue}}{\text{Valeur réel}} \right) \times 100 \quad (3.77)$$

Où :

$$\text{L'erreur absolue} = \text{Valeur approchée} - \text{Valeur réel} \quad (3.78)$$

On remplace (3.78) dans la relation (3.77) on trouve :

$$\text{L'erreur relative} = \left| 1 - \frac{\text{Valeur approchée}}{\text{Valeur réel}} \right| \times 100 \quad (3.79)$$

A basse température le modèle mathématique de gaz parfait qui est développé sur la base qui considère la chaleur spécifique C_p et le rapport γ comme constantes, donne des résultats acceptables. Selon cette étude à haute température, nous pouvons noter une différence dans les résultats donnés entre le modèle du gaz parfait et notre modèle développé.

Pour calculer l'erreur donnée par le modèle GP par rapport à notre modèle HT à chaque paramètre thermodynamique et pour chaque valeur (T_0, M) , l'erreur relative ε peut être évaluée par la relation suivante :

$$\varepsilon_X(T_0, M) = \left| 1 - \frac{X_{GP}(T_0, M)}{X_{HT}(T_0, M)} \right| \times 100 \quad (3.80)$$

Où le terme (X) peut représenter tous les paramètres thermodynamique $\frac{T_2}{T_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{P_2}{P_1}, \frac{P_{02}}{P_{01}}, \frac{S_{12}}{r}$ et M_2 mentionnés dans ce chapitre.

Dans les applications aérodynamiques, généralement les auteurs acceptent une erreur inférieure à 5 %. [2]. L'erreur maximale commise entre les erreurs données par les paramètres peut être évaluée pour donner une erreur globale des résultats du phénomène physique.

3.4.4 Application dans une tuyère supersonique

Lors de la conception des tuyères supersoniques de propulsion, par exemple on peut rencontrer le problème étudié. L'utilisation de la forme de la tuyère dimensionnée, obtenue sur la base du modèle d'un gaz parfait donnant un nombre de Mach M_s supersonique uniforme à la section de sortie pour les applications des moteurs fusées ou des souffleries, dégrade les performances souhaitées ; particulièrement si la température de la chambre de combustion T_0 est élevée [29].

On rappelle que la forme de la structure de la tuyère ne change pas, mais le comportement thermodynamique de l'air change avec la température T_0 . En augmentant la valeur de T_0 , on peut avoir des résultats autres que ceux obtenus pour le modèle du gaz parfait. Si on veut conserver la même variation du nombre de Mach à travers la tuyère et par conséquent, le même nombre de Mach de sortie M_s du modèle d'un gaz parfait, il faut déterminer pour notre modèle à haute température, le rayon de chaque section et en particulier le rayon de la section de sortie qui va donner la même variation du nombre de Mach et par conséquent une autre forme de la tuyère sera obtenue. La relation (3.81) indique que le nombre de Mach du modèle GP est conservé.

$$M_s (HT) = M_s (GP) \quad (3.81)$$

En premier lieu, on détermine la température à cette section qui présente la solution de l'équation (3.82).

$$M_s (HT) = \frac{\sqrt{2H[T_s(HT)]}}{a[T_s(HT)]} \quad (3.82)$$

Pour déterminer le rapport des sections et par conséquent le rayon de la section, on utilise la relation (3.83).

$$\left[\frac{A_s}{A_*} (HT) = \text{Exp} \left(\int_{T_s(HT)}^{T_*} F_A(T) dT \right) \right] > \frac{A_s}{A_*} (GP) \quad (3.83)$$

La détermination du rapport géométrique des sections $\frac{A_S}{A_*}$ à haute température pour une section quelconque du divergent de la tuyère, se fait par la substitution de T par T_S , dans la relation (2.45), nous obtenons :

$$\frac{A_S}{A_*} = e^{-\int_{T_S}^{T_*} F_A(T) dT} \quad (3.84)$$

Ensuite l'intégration numérique de la fonction $F_A(T)$ dans l'intervalle $[T_S, T_*]$. Notons que la fonction $F_A(T)$ dépend du paramètre T_0 . Pour prendre une décision sur le choix de la quadrature d'intégration, nous traçons la courbe de variation de la fonction $F_A(T)$. Elle est illustrée sur la figure (3.4).

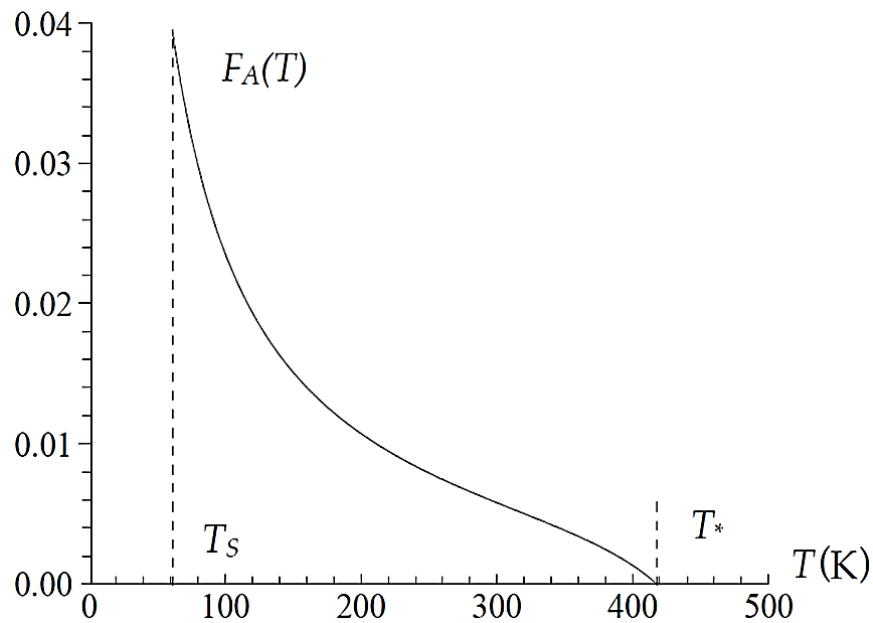


Figure (3.4) : Variation de la fonction $F_A(T)$ dans $[T_S, T_*]$.

Nous pouvons conclure que les quadratures d'intégration à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision vue la variation très rapide aux extrémités gauches de chaque intervalle. Pour une bonne présentation à ces extrémités, le traçage de la fonction est choisi pour la température $T_0 = 500^\circ K$ et $M_S = 5.0$.

A partir de la figure (3.4) nous remarquons que la fonction $F_A(T)$ présente une dérivée très grande au voisinage de la température T_S . Lorsque T_S est très petite cette variation devient très importante. Une condensation des nœuds est alors nécessaire au voisinage de la température T_S . Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision très élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature. La quadrature d'intégration choisie est celle de *Simpson* [6] et [23], pour le

calcul numérique des intégrales données par la formule (2.45). La fonction de condensation utilisée pour nos calculs est celle de *Robert* [9]. Cette fonction est donnée par (3.44).

Après la détermination de la fonction de condensation (s), nous pouvons déterminer la distribution des abscisses « T » par la relation (3.46). Avec :

$$\blacksquare T_{\text{Droite}} = T^* \quad (3.85)$$

$$\blacksquare T_{\text{Gauche}} = \begin{cases} T^* & \text{pour le paramètre critique} \\ T_s & \text{pour les paramètre à une section donnée.} \end{cases} \quad (3.86)$$

La fonction $f(s)$ de la relation (3.46) est arbitraire. Pour les calculs, nous optons pour la forme suivante : $f(s) = s$.

Et la distribution des nœuds se fait par l'utilisation de la relation (3.49).

Il faut noter que notre intérêt est de condenser les nœuds vers l'extrémité gauche T_s vu la variation des fonctions $F_A(T)$.

Si nous prenons le même exemple que dans la détermination du rapport des masses volumiques. La figure (3.3) présente aussi la distribution des nœuds suivant la valeur de b_1 .

Le rapport des sections obtenu par notre modèle *HT* est supérieur au rapport des sections du modèle *GP*. La forme de la tuyère obtenue par le modèle à γ constant est alors incluse dans la tuyère obtenue par notre modèle.

La deuxième situation consiste à conserver la forme de la tuyère dimensionnée sur la base du modèle du gaz parfait pour les applications aéronautiques (voir la relation (3.87)).

$$\frac{A_s}{A^*} (HT) = \frac{A_s}{A^*} (GP) \quad (3.87)$$

Dans ce cas, cette tuyère va délivrer un nombre de Mach inférieur à celui souhaité (voir la relation (3.88)).

$$M_s (HT) < M_s (GP) \quad (3.88)$$

La correction du nombre de Mach pour le modèle à haute température se fait en premier lieu par la détermination de la température T_s comme solution de l'équation (3.83). Ensuite on détermine le nombre de Mach de sortie par la relation (3.40). Dans ce cas, les rapports thermodynamiques changent et vont influencer sur les autres paramètres de conception comme la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère.

CHAPITRE 4

RESULTATS ET COMMENTAIRES

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente les divers résultats obtenus par le programme de calcul numérique. Il est divisé en trois parties.

- La première partie comporte les résultats obtenus pour les paramètres de l'écoulement supersonique à haute température à travers l'onde de choc normale.
 - ✓ Ces résultats sont déterminés en fonction de deux paramètres influents : la température totale T_0 et le nombre de Mach amont M_1 . On a démontré pour chacun de ces paramètres son influence sur la variation de la température, la masse volumique, la pression, la pression totale, l'entropie à travers le choc normale à haute température ainsi que sur le nombre de Mach aval.
 - ✓ D'une autre part, les résultats sont élaborés pour le cas d'un gaz parfait et le cas d'un gaz à haute température pour mieux voir la différence entre eux. On a préféré la présentation des figures par quatre courbes, trois courbes pour le cas à haute température correspondant à la température génératrice $T_0 = 1000 K^\circ$, $2000 K^\circ$ et $3000 K^\circ$ y compris la quatrième courbe du cas du gaz parfait pour $\gamma = 1.402$. Les résultats numériques présentés sont déterminés avec une précision de 10^{-6} .
- La deuxième partie comporte les résultats obtenus pour l'erreur entre le modèle du gaz parfait (caloriquement parfait et thermiquement parfait) et le modèle à Haute Température (caloriquement imparfait et thermiquement parfait).

- Enfin, dans la troisième partie, on présente les résultats sur l'application des tuyères supersoniques.

Les résultats obtenus, sont présentés sous formes de courbe où l'échelle est prise orthonormée.

Concernant la validité des résultats, on a comparé les résultats de notre modèle à haute température avec le modèle gaz parfait. Notre but c'est la généralisation du modèle gaz parfait, on ajoutant l'effet de variation de la température sur les paramètres de l'écoulement. Plus la température génératrice est petite plus qu'on approche du modèle gaz parfait.

4.2 Résultats de l'écoulement supersonique à travers l'onde de choc normale à haute température

Dans ce qui suit, nous présentons les divers résultats concernant l'écoulement supersonique à haute température dans une tuyère supersonique en utilisant la formulation mathématique développée dans le chapitre 3.

- **Les figures (4.1) et (4.2) :** représentent respectivement, la variation de la chaleur spécifique $C_p(T)$ et le rapport $\gamma(T)$ de l'air en fonction de la température jusqu'à 3550 K pour les modèles *HT* et *GP*. Les courbes relatives au modèle *HT* sont présentées en utilisant le polynôme d'interpolation (3.28). on remarque que :
 - ✓ A basse température aux environ 240 K, le gaz peut être considéré comme calorifiquement parfait, car la chaleur spécifique $C_p(T)$ et du rapport $\gamma(T)$. Sont pratiquement constantes. Mais si la température T_0 augmente, on remarque la différence entre ces valeurs, qui influent sur le comportement thermodynamique de l'écoulement.

Ces résultats corroborent que la chaleur spécifique à pression constante ainsi que le rapport thermodynamique des chaleurs spécifiques ne restent plus constants et commence à varier avec cette température (température génératrice). Le gaz reste parfait. Son équation d'état reste toujours valable. Les équations de conservation restent inchangées par rapport aux hypothèses d'un gaz parfait sauf l'équation d'énergie où il faut tenir compte de l'effet de variation des chaleurs spécifiques.

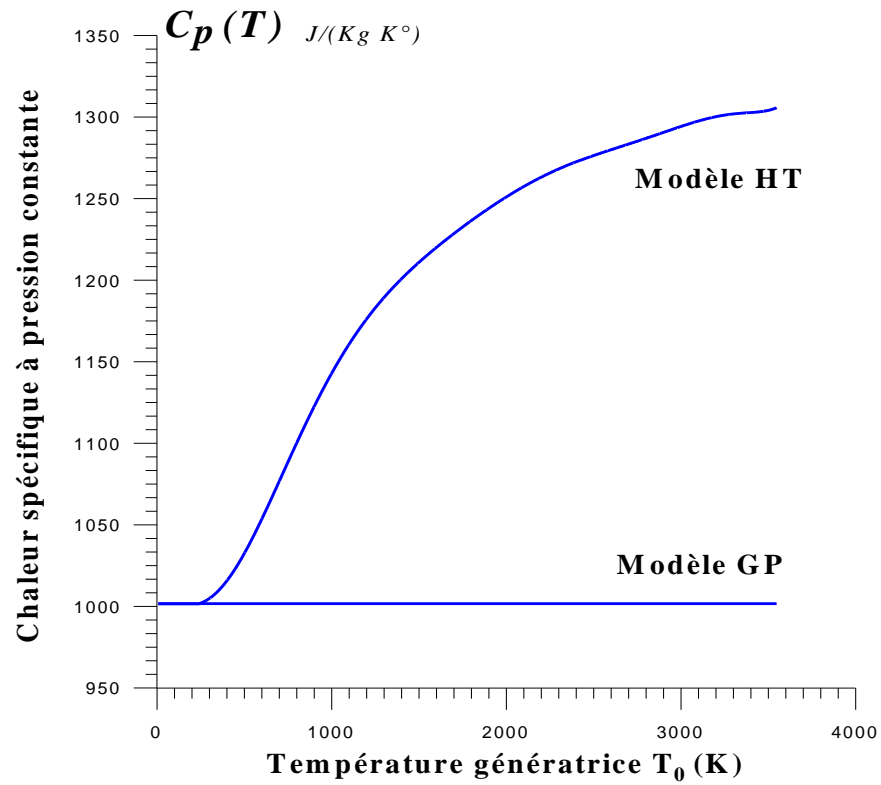


Figure (4.1) : Variation de $C_p(T)$ en fonction de la température génératrice T_0 .

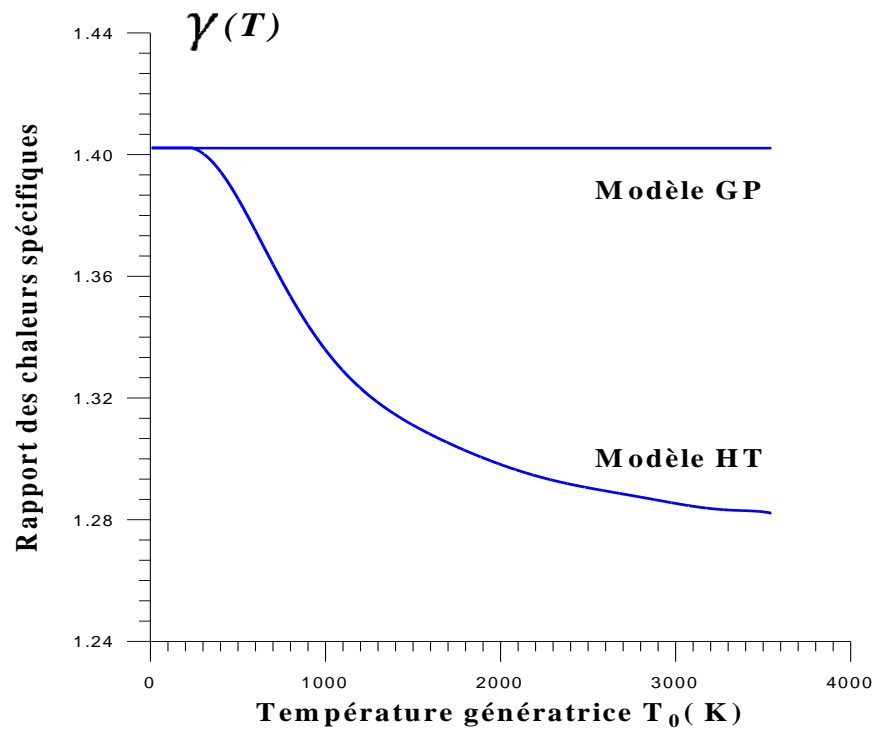


Figure (4.2) : Variation de $\gamma(T)$ en fonction de la température génératrice T_0 .

4.2.2.1 Résultats des paramètres thermodynamiques en fonction de la température génératrice T_0

Pour mieux voir l'effet de la croissance de la température totale sur la variation des paramètres thermodynamique à travers le choc normal, les figures de (4.3) à (4.8) présentent la variation de ces paramètres thermodynamiques (la température, la masse volumique, la pression, le nombre de Mach amont, l'entropie et la pression totale) en fonction de la température génératrice T_0 qui varie jusqu'à 3000 K, pour le cas du modèle à haute température, en précisant que le modèle du gaz parfait ne dépend pas de la variation de la température, pour un nombre de Mach M_1 donnée .

- **La figure (4.3)** : représente la variation du rapport de température T_2/T_1 en fonction la température génératrice T_0 où on remarque que :
 - ✓ Les deux modèles *GP* et *HT* gardent les mêmes valeurs jusqu'à une température génératrice de 240 K° où ils commencent à se séparer l'un de l'autre. Pour un nombre de Mach M_1 donné, le gaz à haute température possède une température T_2 après le choc moins faible de celle du gaz parfait, et plus la température génératrice augmente plus la température T_2 diminue.

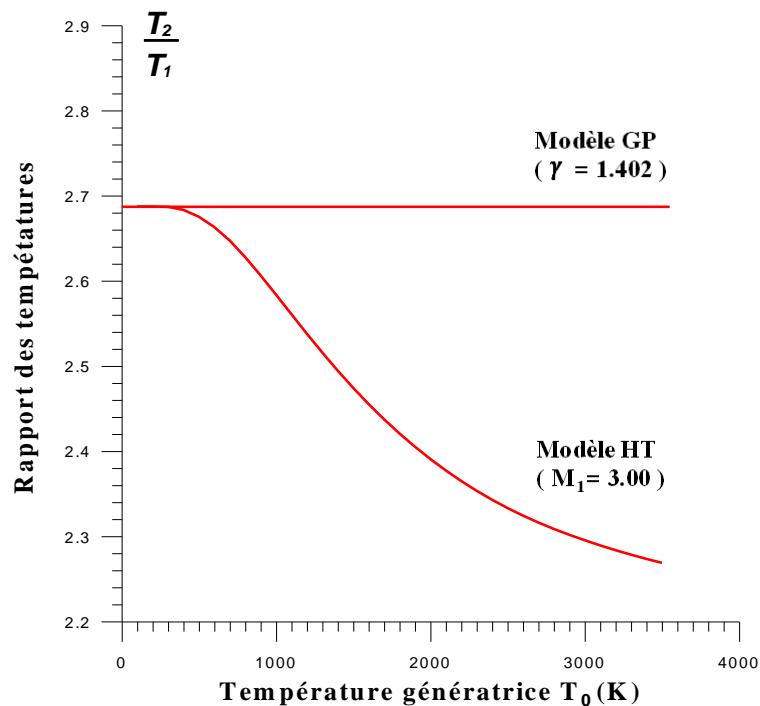


Figure (4.3) : Variation du rapport de température T_2/T_1 en fonction la température génératrice T_0 .

La régression du rapport de température statique à travers le choc normal dans le modèle à haute température, en raison de la transformation de l'énergie thermique en énergie de vibration qui va s'exciter de plus en plus avec l'augmentation de la température génératrice T_0 .

- **La figure (4.4) :** représente la variation du rapport de la masse volumique ρ_2/ρ_1 en fonction la température génératrice T_0 où on peut constater que :
 - ✓ Pour une faible température aux environ 240 K°, le modèle à haute température est constant et confondu avec celui du gaz parfait, et le gaz peut être considéré comme calorifiquement parfait.
 - ✓ Le gaz à haute température possède de grandes valeurs de masse volumique par rapport au gaz parfait de manière à ce que la masse volumique s'élève de plus en plus avec l'augmentation de la température génératrice T_0 .

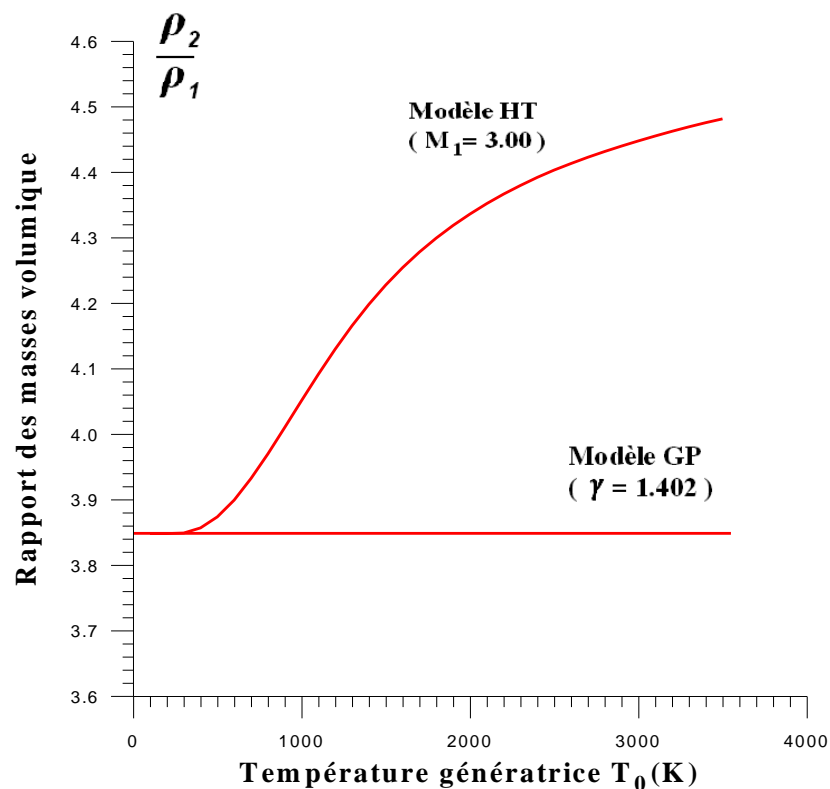


Figure (4.4) : Variation du rapport de la masse volumique ρ_2/ρ_1 en fonction la température génératrice T_0 .

- **La figure (4.5) :** représente la variation du rapport de pression P_2/P_1 en fonction la température génératrice T_0 où on peut voir que :
 - ✓ Le rapport de pression à travers le choc normal pour le modèle à haute température croît avec l'augmentation de la température génératrice qui atteint $T_0 = 1300 K^\circ$ et à partir de là, il commence à devenir moins fort, et une fois que la température génératrice atteint $2100 K^\circ$, il devient moins fort par rapport au choc produit dans le gaz parfait.

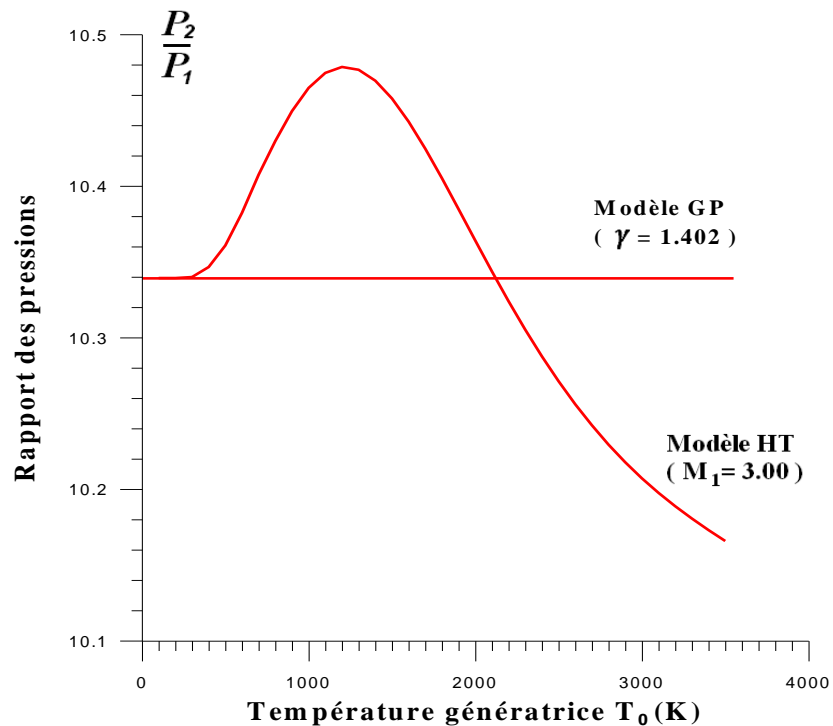


Figure (4.5) : Variation du rapport de pression P_2/P_1 en fonction la température génératrice T_0 .

- **La figure (4.6) :** représente la variation du nombre de Mach M_2 en fonction la température génératrice T_0 . Ici on voit que :
 - ✓ L'évolution du nombre de Mach M_2 suit la même progression que l'évolution du rapport de la température T_2/T_1 . Où le gaz à haute température possède de faibles valeurs du nombre de Mach M_2 par rapport au gaz parfait.

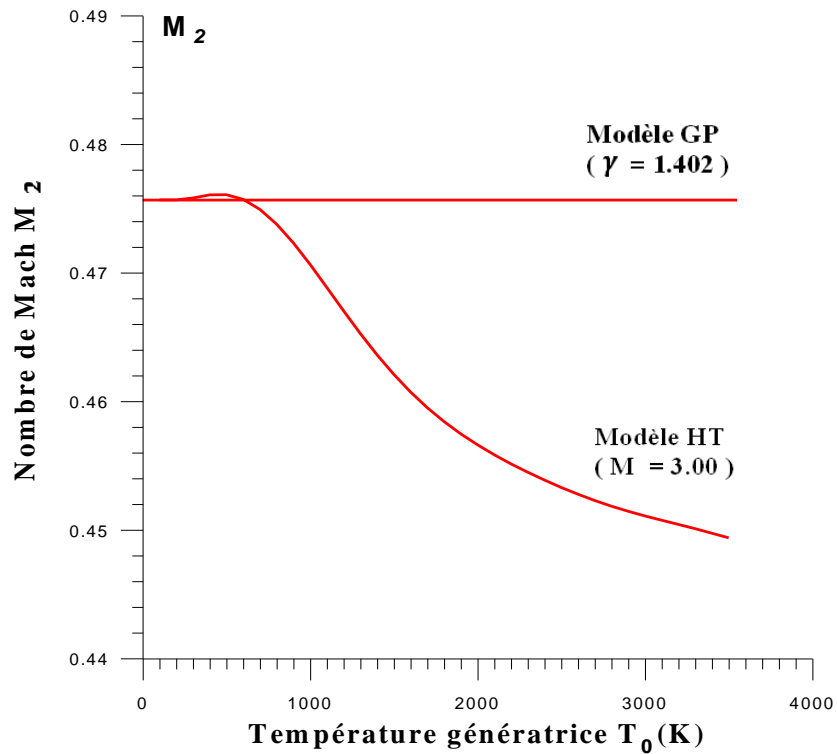


Figure (4.6) : Variation du nombre de Mach M_2 en fonction de la température génératrice T_0 .

- ✓ Le gaz à haute température possède de faibles valeurs du nombre de Mach M_2 par rapport au gaz parfait, ce qui implique que le choc normal produit dans le gaz à haute température entraîne une décélération de l'écoulement plus importante que celle produite dans le gaz parfait.

La régression du rapport de nombre de Mach M_2 à travers le choc normal pour le modèle à haute température, implique que le choc produit dans le gaz à haute température entraîne une décélération de l'écoulement plus importante que celle produite dans le gaz parfait.

- **La figure (4.7)** : représente la variation de l'entropie S_{12}/r en fonction la température génératrice T_0 où on remarque que :
 - ✓ L'évolution de l'entropie suit la même progression que l'évolution du rapport de la masse volumique.
 - ✓ Où le modèle à haute température s'élève de plus en plus avec l'augmentation de la température génératrice T_0 . Et possède de grandes valeurs de l'entropie par rapport au modèle de gaz parfait.

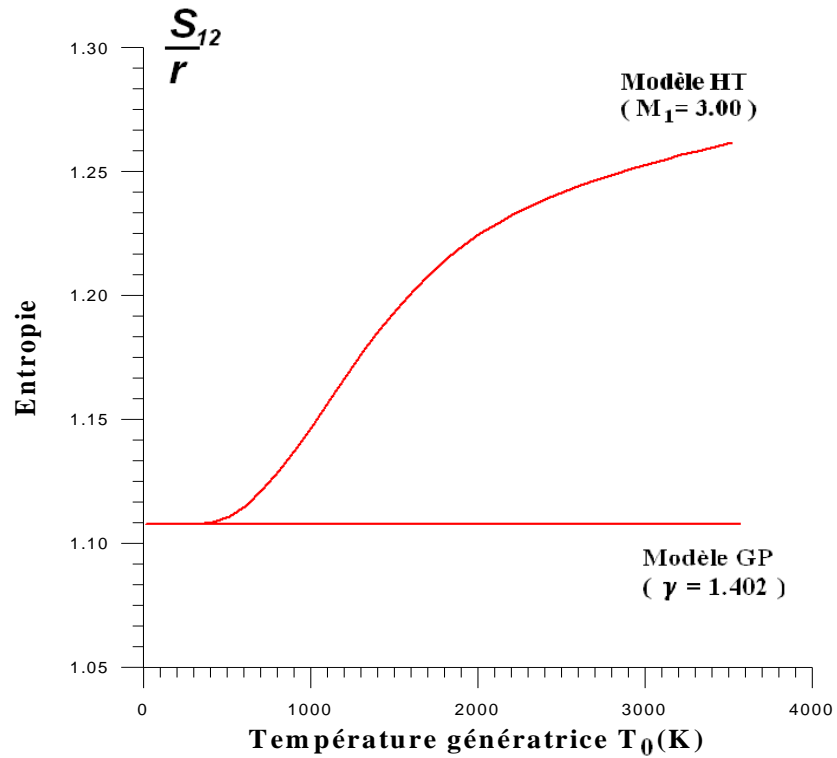


Figure (4.7) : Variation de l'entropie S_{12}/r en fonction de la température génératrice T_0 .

- **La figure (4.8)** : représente la variation du rapport des pressions totales P_{02}/P_{01} en fonction de la température génératrice T_0 où on peut constater que :
 - ✓ L'évolution de la pression totale suit la même progression que l'évolution du nombre de Mach M_2 .
 - ✓ Le rapport de pressions totales est directement relié au rendement d'un moteur, plus ce rapport est élevé, plus le rendement est fort. Cette constatation est l'origine des structures des entrées d'air des moteurs d'avions.

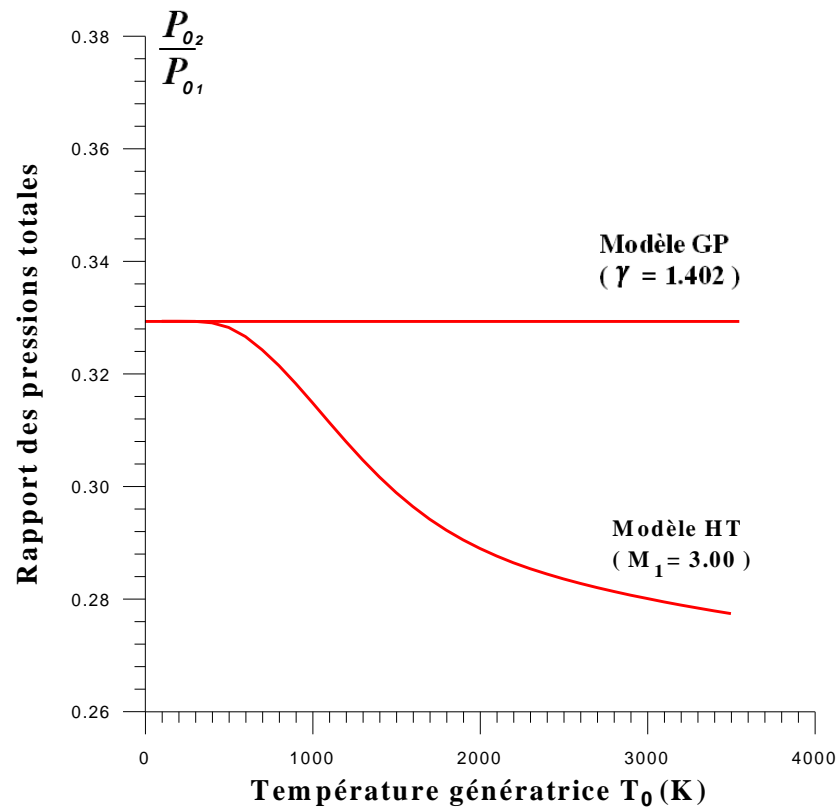


Figure (4.8) : Variation du rapport de pression totale P_{02}/P_{01} en fonction de la température génératrice T_0 .

D'après ces résultats on constate que, à basse température, l'allure des courbes des deux modèles GP et HT ont les mêmes valeurs, là le modèle à haute température peut être considéré comme modèle à gaz parfait (c.à.d. le gaz thermiquement parfait caloriquement imparfait peut être considéré comme un gaz thermiquement parfait caloriquement parfait). Mais à partir d'une certaine valeur de la température génératrice T_0 le modèle à haute température commence à se séparer du modèle gaz parfait, bien que ce point de séparation dépend du choix de nombre de Mach aval M_1 .

Les valeurs numériques des paramètres thermodynamiques à travers l'onde de choc normale, trouvées pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 de 500 K jusqu'à 3550 K y compris le cas d'un gaz parfait pour $\gamma = 1.402$, sont présentées dans le tableau (4.1).

$T_0 (K^\circ)$	M_2	T_2/T_1	P_2/P_1	ρ_2/ρ_1	P_{02}/P_{01}	S_{12}/r
500	0.4760	2.6750	10.3606	3.8731	0.3281	1.1143
550	0.4759	2.6695	10.3705	3.8849	0.3274	1.1164
600	0.4757	2.6629	10.3821	3.8988	0.3265	1.1192
650	0.4753	2.6555	10.3952	3.9146	0.3254	1.1226
700	0.4749	2.6470	10.4073	3.9318	0.3242	1.1265
750	0.4744	2.6376	10.4186	3.9501	0.3228	1.1306
800	0.4738	2.6276	10.4296	3.9693	0.3214	1.1352
850	0.4731	2.6170	10.4399	3.9892	0.3198	1.1400
900	0.4723	2.6061	10.4493	4.0096	0.3182	1.1451
950	0.4715	2.5949	10.4576	4.0301	0.3165	1.1504
1000	0.4706	2.5835	10.4646	4.0506	0.3148	1.1559
1050	0.4697	2.5720	10.4703	4.0710	0.3130	1.1614
1100	0.4688	2.5604	10.4745	4.0909	0.3113	1.1670
1150	0.4679	2.5490	10.4772	4.1104	0.3096	1.1725
1200	0.4670	2.5376	10.4785	4.1292	0.3079	1.1780
1250	0.4661	2.5264	10.4782	4.1474	0.3062	1.1834
1300	0.4652	2.5154	10.4766	4.1649	0.3046	1.1887
1350	0.4644	2.5047	10.4736	4.1816	0.3031	1.1938
1400	0.4636	2.4942	10.4694	4.1975	0.3016	1.1987
1450	0.4628	2.4839	10.4640	4.2127	0.3002	1.2034
1500	0.4621	2.4740	10.4577	4.2270	0.2988	1.2079
1550	0.4614	2.4643	10.4504	4.2407	0.2975	1.2122
1600	0.4607	2.4550	10.4424	4.2536	0.2963	1.2163
1650	0.4601	2.4459	10.4337	4.2658	0.2952	1.2202
1700	0.4595	2.4371	10.4245	4.2774	0.2941	1.2238
1750	0.4589	2.4287	10.4149	4.2883	0.2931	1.2273
1800	0.4584	2.4205	10.4050	4.2987	0.2921	1.2305
1850	0.4579	2.4126	10.3948	4.3086	0.2912	1.2336
1900	0.4574	2.4049	10.3845	4.3180	0.2904	1.2365
1950	0.4570	2.3976	10.3741	4.3270	0.2896	1.2392
2000	0.4566	2.3905	10.3638	4.3355	0.2889	1.2417
2050	0.4562	2.3836	10.3536	4.3436	0.2882	1.2441
2100	0.4558	2.3771	10.3434	4.3514	0.2875	1.2464
2150	0.4555	2.3707	10.3335	4.3588	0.2869	1.2485
2200	0.4551	2.3646	10.3237	4.3659	0.2864	1.2505
2250	0.4548	2.3588	10.3142	4.3727	0.2858	1.2524
2300	0.4545	2.3532	10.3050	4.3792	0.2853	1.2542
2350	0.4542	2.3478	10.2961	4.3854	0.2848	1.2559
2400	0.4539	2.3427	10.2874	4.3913	0.2843	1.2576
2450	0.4536	2.3377	10.2791	4.3971	0.2839	1.2591
2500	0.4533	2.3330	10.2710	4.4025	0.2835	1.2606
2550	0.4530	2.3284	10.2633	4.4078	0.2831	1.2621
2600	0.4528	2.3241	10.2559	4.4128	0.2827	1.2634
2650	0.4525	2.3199	10.2488	4.4177	0.2823	1.2648
2700	0.4523	2.3160	10.2419	4.4223	0.2819	1.2661
2750	0.4520	2.3121	10.2354	4.4268	0.2816	1.2673
2800	0.4518	2.3085	10.2292	4.4312	0.2812	1.2685
2850	0.4516	2.3049	10.2232	4.4354	0.2809	1.2697
2900	0.4514	2.3015	10.2176	4.4395	0.2806	1.2708
2950	0.4512	2.2983	10.2122	4.4434	0.2803	1.2719
3000	0.4511	2.2951	10.2070	4.4473	0.2800	1.2730
3050	0.4509	2.2920	10.2021	4.4511	0.2797	1.2741
3100	0.4507	2.2891	10.1974	4.4548	0.2794	1.2751
3150	0.4506	2.2862	10.1929	4.4584	0.2791	1.2761
3200	0.4504	2.2835	10.1886	4.4619	0.2788	1.2771
3250	0.4502	2.2808	10.1844	4.4653	0.2786	1.2781
3300	0.4501	2.2782	10.1805	4.4687	0.2783	1.2790
3350	0.4499	2.2757	10.1766	4.4719	0.2780	1.2800
3400	0.4497	2.2733	10.1729	4.4750	0.2778	1.2809
3450	0.4495	2.2709	10.1692	4.4780	0.2775	1.2818
3500	0.4494	2.2687	10.1657	4.4809	0.2773	1.2826
3550	0.4492	2.2665	10.1621	4.4836	0.2771	1.2835
$GP(\gamma = 1.402)$	0.4756	2.2665	10.1621	4.4836	0.9961	1.1111

Tableau (4.1) : Valeurs numériques des paramètres thermodynamiques à travers l'onde de choc normale.

4.2.2.2 Résultats des paramètres thermodynamiques en fonction du nombre de Mach amont M_1

On présente les résultats de la variation des paramètres thermodynamiques à travers le choc normal en fonction du nombre de Mach amont M_1 pour le gaz parfait et le cas du gaz à haute température lorsque ($T_0 = 1000\text{ K}$, $T_0 = 2000\text{ K}$ et $T_0 = 3000\text{ K}$).

Nous remarquons qu'à basse température et à un faible nombre de Mach, l'écart en résultats entre les deux modèles est petit. Donc, à basse température nous pouvons étudier un écoulement à haute température en utilisant les relations du modèle d'un gaz parfait.

- **La figure (4.9)** : représente la variation du rapport de température T_2/T_1 en fonction du nombre de Mach amont M_1 où on remarque que :
 - ✓ La température T_2 après le choc croît avec l'augmentation du nombre de Mach M_1 .

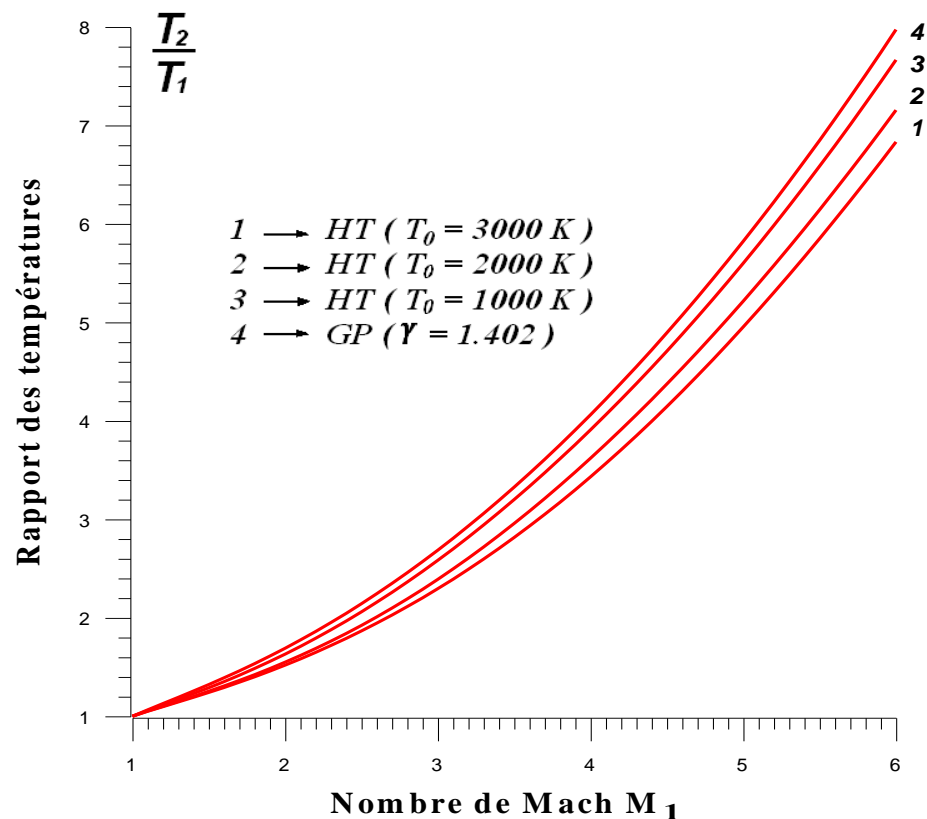


Figure (4.9) : Variation du rapport de température T_2/T_1 en fonction du nombre de Mach amont M_1 .

- **La figure (4.10)** : représente la variation du rapport de la masse volumique ρ_2/ρ_1 en fonction du nombre de Mach amont M_1 où on peut constater que :
 - ✓ La masse volumique après le choc s'élève avec l'augmentation du nombre de Mach M_1 .

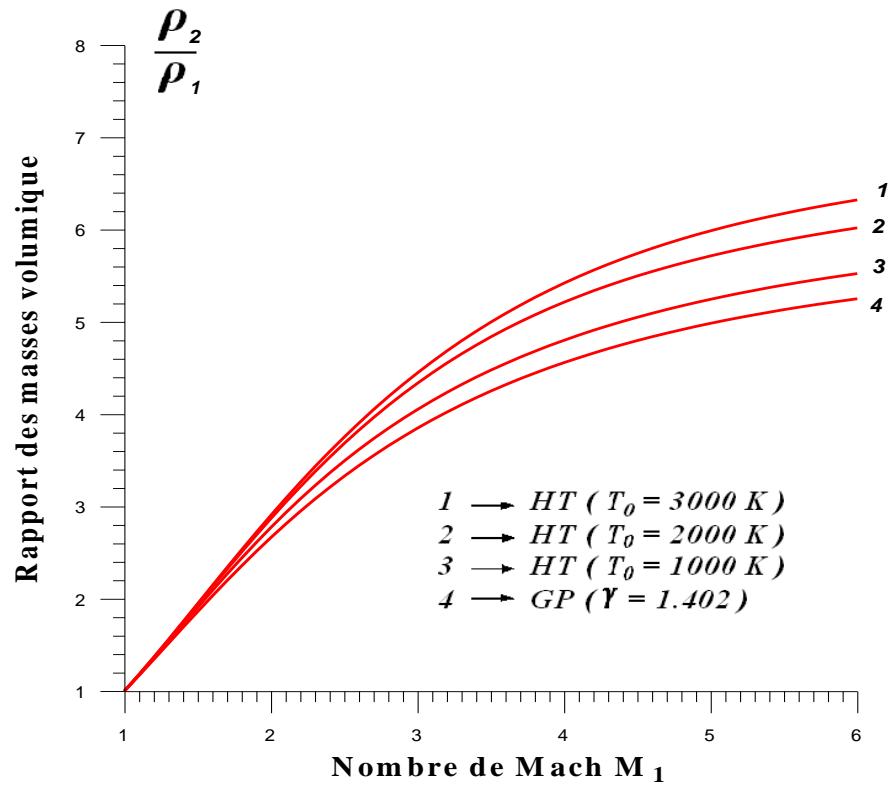


Figure (4.10) : Variation du rapport de la masse volumique ρ_2/ρ_1 en fonction du nombre de Mach amont M_1 .

- **La figure (4.11)** : représente la variation du rapport de pression P_2/P_1 en fonction du nombre de Mach amont M_1 où on peut voir que :
 - ✓ La pression après le choc croît avec l'augmentation du nombre de Mach M_1 ainsi le choc normal devient de plus en plus fort.
- **La figure (4.12)** : représente la variation du nombre de Mach M_2 en fonction du nombre de Mach amont M_1 ici on voit que:
 - ✓ Le nombre de Mach M_2 après le choc normal diminue de plus en plus avec l'augmentation du nombre de Mach M_1 .

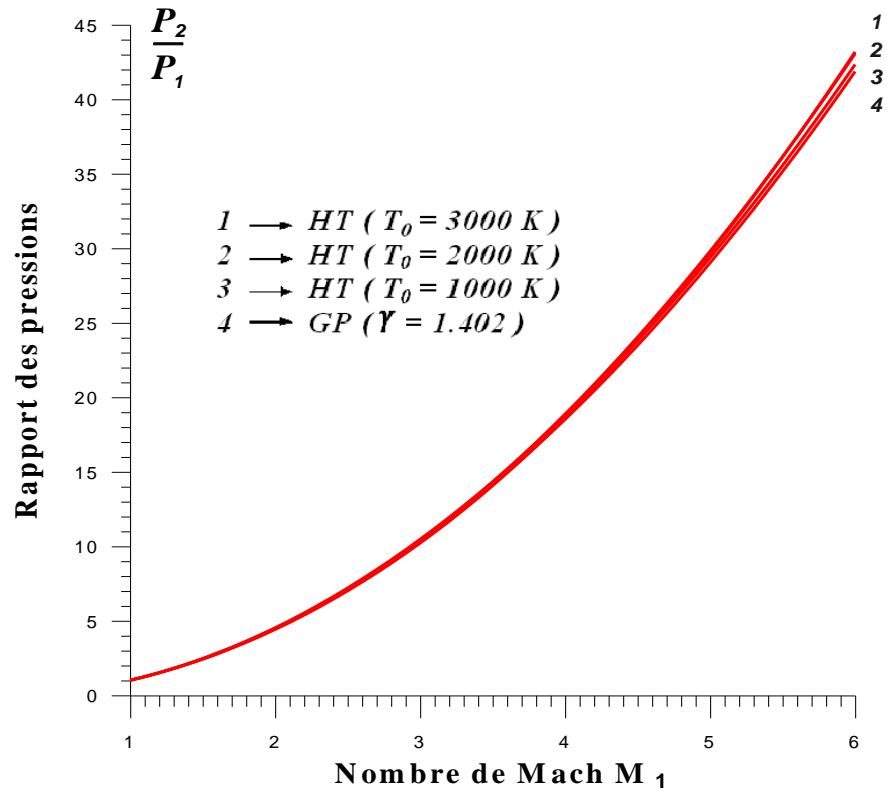


Figure (4.11) : Variation du rapport de pression P_2/P_1 en fonction du nombre de Mach amont M_1 .

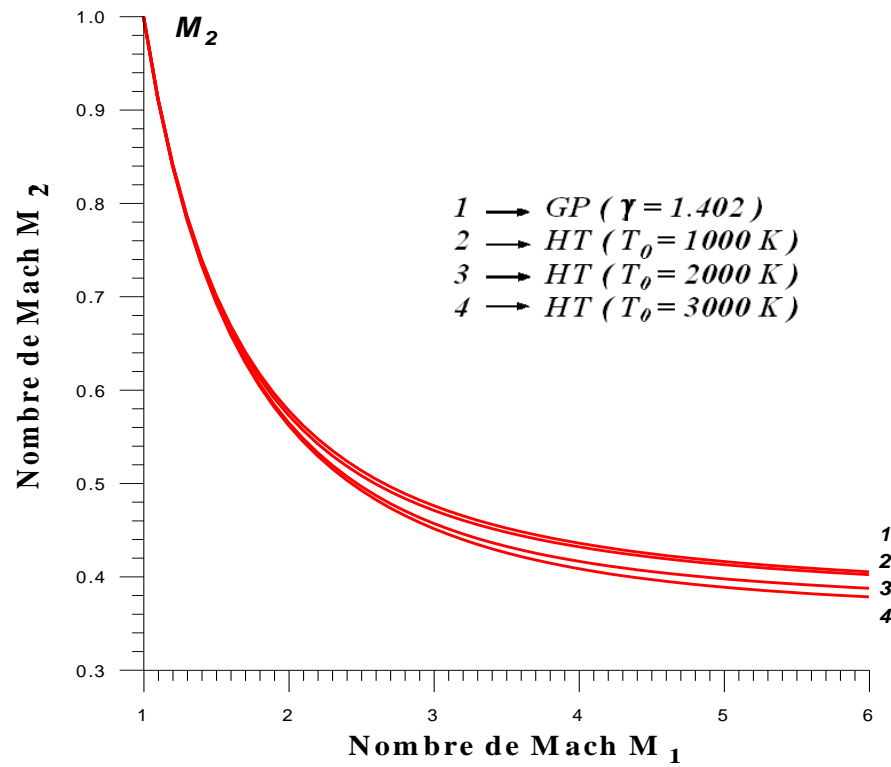


Figure (4.12) : Variation du nombre de Mach M_2 en fonction du nombre de Mach amont M_1 .

- **La figure (4.13) :** représente la variation de l'entropie S_{12}/r en fonction du nombre de Mach amont M_1 où on remarque que :
 - ✓ L'évolution de l'entropie suit la même progression que l'évolution du rapport de la masse volumique. L'entropie après le choc s'élève avec l'augmentation du nombre de Mach M_1 pour les deux modèles GP et HT. Plus la température génératrice T_0 augmente plus la valeur de l'entropie est grande.

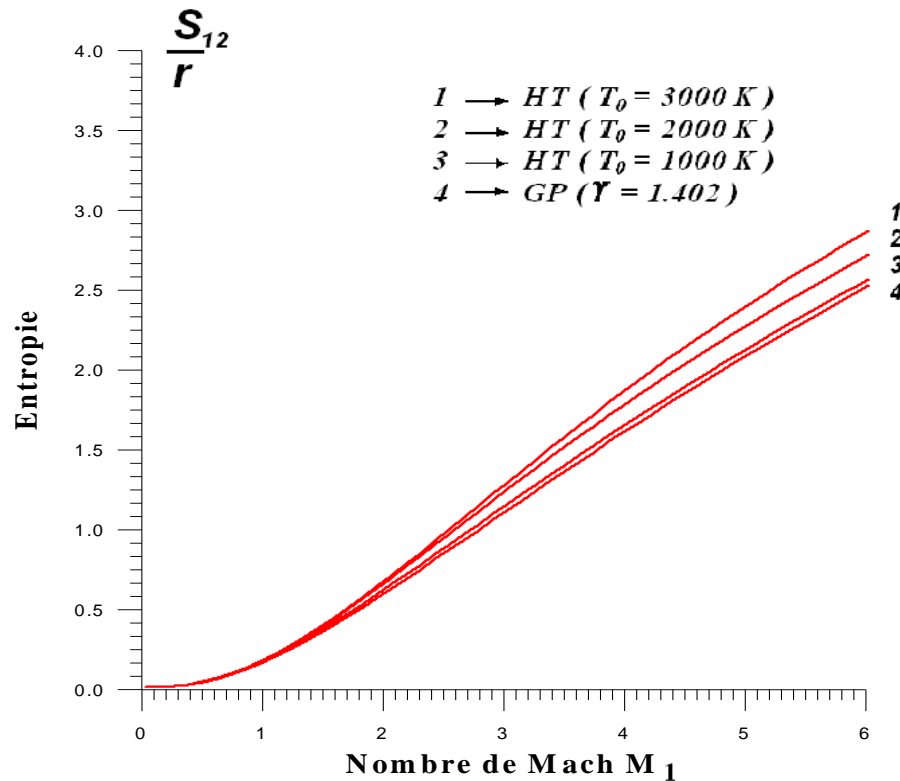


Figure (4.13) : Variation de l'entropie S_{12}/r en fonction du nombre de Mach amont M_1 .

- **La figure (4.14) :** représente la variation du rapport de pression totale P_{02}/P_{01} en fonction du nombre de Mach amont M_1 où on peut constater que :
 - ✓ L'évolution du rapport de pression totale suit la même progression que l'évolution du nombre de Mach M_2 . Il diminue avec l'augmentation du nombre de Mach aval M_1 .
 - ✓ Le rapport de pression totale est relié au rendement d'un moteur, plus ce rapport est élevé, plus le rendement est fort.

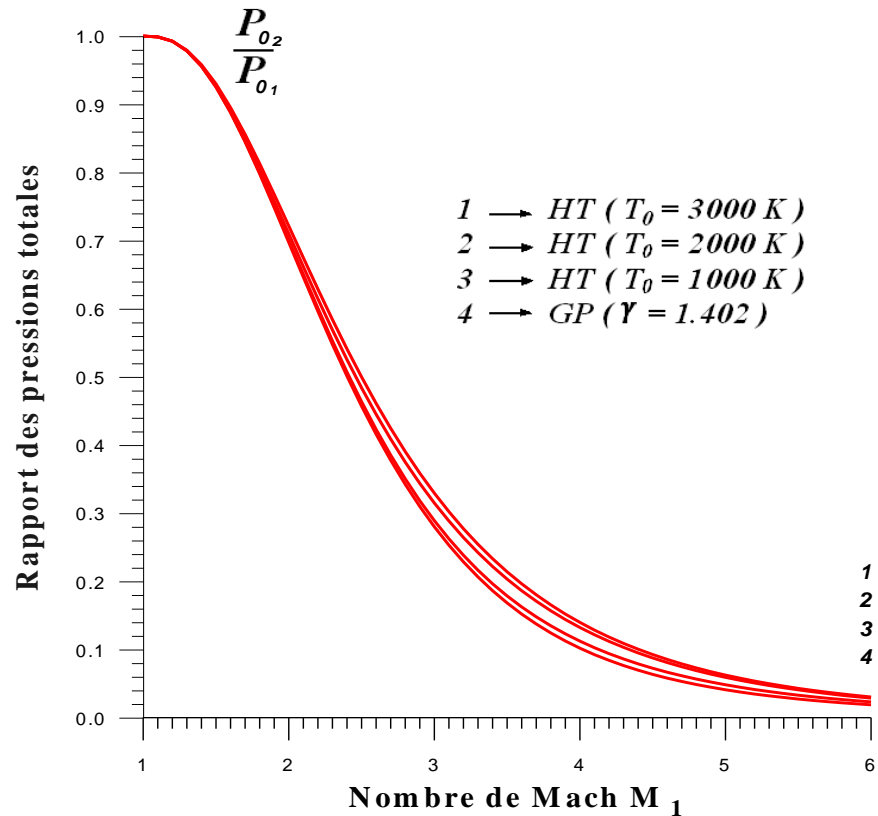


Figure (4.14) : Variation du rapport de pression totale P_{02}/P_{01} en fonction de nombre du Mach amont M_1 .

La détermination des paramètres thermodynamiques d'un écoulement supersonique est très simple et rapide si on utilise les relations du modèle *GP*, par contre l'utilisation des relations du modèle *HT* mais avec certain écart entre eux. Cet écart varie avec T_0 et M_1 .

Par conséquent, lorsque la température T_0 augmente, la théorie d'un gaz parfait commence à donner des résultats qui s'éloignent du cas réel, d'où la nécessité d'utiliser le modèle *HT*.

Sachant que, les valeurs numériques trouvées de chaque paramètre thermodynamique pour quelques valeurs du nombre de Mach M_1 de 1 à 5 et de la température génératrice T_0 de 298.15 K jusqu'à 3550 K, y compris le cas d'un gaz parfait, sont présentées dans les tableaux (4.2) (4.3) (4.4) (4.5) (4.6) et (4.7).

Rapport de température T_2/T_1									
M_1	GP ($\gamma=1.402$)	$T_0=298.15$ K	$T_0=500$ K	$T_0=1000$ K	$T_0=1500$ K	$T_0=2000$ K	$T_0=2500$ K	$T_0=3000$ K	$T_0=3500$ K
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.10	1.0652	1.0652	1.0642	1.0582	1.0537	1.0515	1.0501	1.0492	1.0485
1.20	1.1285	1.1286	1.1267	1.1148	1.1058	1.1014	1.0984	1.0966	1.0953
1.30	1.1917	1.1917	1.1890	1.1715	1.1578	1.1510	1.1466	1.1438	1.1419
1.40	1.2558	1.2558	1.2523	1.2293	1.2108	1.2015	1.1955	1.1916	1.1890
1.50	1.3216	1.3216	1.3174	1.2890	1.2654	1.2534	1.2458	1.2408	1.2374
1.60	1.3897	1.3897	1.3849	1.3511	1.3223	1.3072	1.2979	1.2917	1.2874
1.70	1.4604	1.4604	1.4550	1.4162	1.3817	1.3634	1.3522	1.3446	1.3395
1.80	1.5340	1.5339	1.5281	1.4843	1.4441	1.4222	1.4090	1.4000	1.3938
1.90	1.6107	1.6106	1.6044	1.5558	1.5097	1.4839	1.4684	1.4579	1.4505
2.00	1.6906	1.6906	1.6839	1.6308	1.5786	1.5486	1.5306	1.5185	1.5099
2.10	1.7740	1.7739	1.7669	1.7093	1.6510	1.6164	1.5958	1.5820	1.5720
2.20	1.8608	1.8607	1.8533	1.7915	1.7271	1.6877	1.6640	1.6484	1.6370
2.30	1.9511	1.9511	1.9433	1.8774	1.8069	1.7624	1.7355	1.7179	1.7050
2.40	2.0451	2.0451	2.0368	1.9670	1.8906	1.8407	1.8102	1.7905	1.7760
2.50	2.1427	2.1427	2.1339	2.0604	1.9781	1.9227	1.8883	1.8662	1.8501
2.60	2.2441	2.2440	2.2346	2.1575	2.0694	2.0085	1.9699	1.9452	1.9274
2.70	2.3491	2.3490	2.3391	2.2584	2.1647	2.0981	2.0551	2.0275	2.0078
2.80	2.4579	2.4578	2.4473	2.3630	2.2639	2.1916	2.1440	2.1132	2.0915
2.90	2.5705	2.5704	2.5593	2.4714	2.3670	2.2891	2.2366	2.2024	2.1784
3.00	2.6868	2.6868	2.6750	2.5835	2.4740	2.3905	2.3330	2.2951	2.2687
3.10	2.8070	2.8069	2.7946	2.6993	2.5848	2.4958	2.4332	2.3914	2.3624
3.20	2.9310	2.9309	2.9179	2.8188	2.6994	2.6052	2.5374	2.4915	2.4595
3.30	3.0588	3.0587	3.0451	2.9420	2.8178	2.7185	2.6455	2.5953	2.5601
3.40	3.1904	3.1903	3.1760	3.0689	2.9400	2.8357	2.7576	2.7029	2.6644
3.50	3.3259	3.3258	3.3108	3.1995	3.0658	2.9567	2.8736	2.8144	2.7722
3.60	3.4652	3.4651	3.4495	3.3338	3.1954	3.0817	2.9936	2.9297	2.8838
3.70	3.6084	3.6083	3.5920	3.4718	3.3286	3.2105	3.1176	3.0490	2.9992
3.80	3.7555	3.7554	3.7383	3.6135	3.4655	3.3430	3.2455	3.1723	3.1184
3.90	3.9064	3.9063	3.8884	3.7589	3.6060	3.4793	3.3773	3.2995	3.2414
4.00	4.0612	4.0611	4.0425	3.9079	3.7501	3.6192	3.5129	3.4306	3.3683
4.10	4.2199	4.2198	4.2003	4.0607	3.8978	3.7628	3.6524	3.5657	3.4992
4.20	4.3824	4.3823	4.3621	4.2168	4.0490	3.9101	3.7956	3.7047	3.6340
4.30	4.5488	4.5487	4.5277	4.3766	4.2039	4.0609	3.9426	3.8476	3.7727
4.40	4.7191	4.7191	4.6972	4.5402	4.3623	4.2152	4.0933	3.9943	3.9153
4.50	4.8933	4.8933	4.8705	4.7075	4.5242	4.3731	4.2476	4.1449	4.0619
4.60	5.0714	5.0713	5.0477	4.8785	4.6897	4.5346	4.4055	4.2992	4.2123
4.70	5.2534	5.2533	5.2288	5.0533	4.8587	4.6995	4.5670	4.4572	4.3666
4.80	5.4393	5.4392	5.4137	5.2318	5.0313	4.8678	4.7320	4.6189	4.5247
4.90	5.6290	5.6289	5.6025	5.4141	5.2074	5.0397	4.9005	4.7843	4.6866
5.00	5.8227	5.8226	5.7952	5.6001	5.3871	5.2150	5.0725	4.9532	4.8523

Tableau (4.2): Résultats numériques des variations du rapport de température T_2/T_1 à haute température en fonction de nombre de Mach amont M_1 .

Rapport de la masse volumique ρ_2/ρ_1									
M_1	GP ($\gamma=1.402$)	$T_0=298.15$ K	$T_0=500$ K	$T_0=1000$ K	$T_0=1500$ K	$T_0=2000$ K	$T_0=2500$ K	$T_0=3000$ K	$T_0=3500$ K
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.10	1.1689	1.1690	1.1704	1.1751	1.1772	1.1782	1.1789	1.1792	1.1797
1.20	1.3412	1.3414	1.3443	1.3552	1.3603	1.3628	1.3645	1.3653	1.3663
1.30	1.5150	1.5152	1.5200	1.5384	1.5474	1.5518	1.5548	1.5562	1.5580
1.40	1.6887	1.6889	1.6956	1.7226	1.7367	1.7434	1.7482	1.7504	1.7530
1.50	1.8607	1.8609	1.8696	1.9064	1.9266	1.9360	1.9428	1.9462	1.9496
1.60	2.0300	2.0302	2.0407	2.0881	2.1155	2.1282	2.1374	2.1422	2.1464
1.70	2.1955	2.1958	2.2081	2.2665	2.3022	2.3187	2.3305	2.3371	2.3423
1.80	2.3566	2.3568	2.3708	2.4407	2.4856	2.5064	2.5211	2.5298	2.5361
1.90	2.5125	2.5128	2.5284	2.6097	2.6647	2.6904	2.7082	2.7193	2.7268
2.00	2.6630	2.6633	2.6803	2.7729	2.8387	2.8699	2.8911	2.9047	2.9139
2.10	2.8077	2.8080	2.8263	2.9300	3.0071	3.0443	3.0690	3.0854	3.0964
2.20	2.9464	2.9468	2.9662	3.0805	3.1693	3.2131	3.2416	3.2609	3.2740
2.30	3.0792	3.0796	3.0999	3.2244	3.3250	3.3759	3.4083	3.4306	3.4461
2.40	3.2060	3.2064	3.2275	3.3615	3.4740	3.5325	3.5691	3.5944	3.6124
2.50	3.3269	3.3273	3.3490	3.4920	3.6162	3.6826	3.7237	3.7521	3.7727
2.60	3.4420	3.4424	3.4648	3.6160	3.7516	3.8262	3.8720	3.9035	3.9268
2.70	3.5514	3.5518	3.5748	3.7336	3.8802	3.9633	4.0140	4.0487	4.0746
2.80	3.6554	3.6559	3.6794	3.8451	4.0022	4.0937	4.1497	4.1877	4.2161
2.90	3.7542	3.7546	3.7788	3.9507	4.1177	4.2178	4.2792	4.3205	4.3515
3.00	3.8480	3.8484	3.8731	4.0506	4.2270	4.3355	4.4025	4.4473	4.4809
3.10	3.9370	3.9374	3.9625	4.1453	4.3304	4.4470	4.5198	4.5682	4.6043
3.20	4.0213	4.0218	4.0474	4.2348	4.4280	4.5526	4.6313	4.6833	4.7220
3.30	4.1014	4.1018	4.1279	4.3196	4.5202	4.6525	4.7370	4.7929	4.8341
3.40	4.1773	4.1778	4.2042	4.3998	4.6073	4.7469	4.8372	4.8970	4.9409
3.50	4.2493	4.2498	4.2767	4.4758	4.6896	4.8360	4.9322	4.9959	5.0425
3.60	4.3177	4.3181	4.3454	4.5477	4.7673	4.9202	5.0220	5.0898	5.1391
3.70	4.3825	4.3829	4.4105	4.6158	4.8407	4.9997	5.1070	5.1789	5.2309
3.80	4.4440	4.4444	4.4724	4.6804	4.9101	5.0747	5.1873	5.2633	5.3182
3.90	4.5024	4.5029	4.5312	4.7417	4.9758	5.1456	5.2632	5.3433	5.4011
4.00	4.5579	4.5583	4.5869	4.7998	5.0379	5.2126	5.3350	5.4190	5.4797
4.10	4.6106	4.6110	4.6399	4.8550	5.0967	5.2758	5.4028	5.4907	5.5543
4.20	4.6607	4.6611	4.6903	4.9072	5.1525	5.3356	5.4669	5.5585	5.6251
4.30	4.7083	4.7087	4.7382	4.9569	5.2053	5.3922	5.5275	5.6227	5.6922
4.40	4.7536	4.7540	4.7837	5.0042	5.2554	5.4458	5.5847	5.6835	5.7559
4.50	4.7967	4.7971	4.8271	5.0492	5.3030	5.4965	5.6389	5.7410	5.8162
4.60	4.8377	4.8381	4.8683	5.0920	5.3482	5.5446	5.6902	5.7954	5.8733
4.70	4.8768	4.8772	4.9076	5.1329	5.3912	5.5902	5.7388	5.8470	5.9275
4.80	4.9140	4.9145	4.9451	5.1717	5.4321	5.6335	5.7848	5.8958	5.9789
4.90	4.9495	4.9500	4.9808	5.2088	5.4710	5.6746	5.8285	5.9420	6.0276
5.00	4.9834	4.9838	5.0149	5.2442	5.5081	5.7137	5.8699	5.9859	6.0737

Tableau (4.3): Résultats numériques des variations du rapport de la masse volumique ρ_2/ρ_1 à haute température en fonction de nombre de Mach amont M_1 .

Rapport de pression P_2/P_1									
M_1	$GP(\gamma=1.402)$	$T_0=298.15\text{ K}$	$T_0=500\text{ K}$	$T_0=1000\text{ K}$	$T_0=1500\text{ K}$	$T_0=2000\text{ K}$	$T_0=2500\text{ K}$	$T_0=3000\text{ K}$	$T_0=3500\text{ K}$
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.10	1.2451	1.2453	1.2455	1.2435	1.2405	1.2389	1.2379	1.2372	1.2369
1.20	1.5136	1.5138	1.5146	1.5109	1.5043	1.5009	1.4988	1.4972	1.4966
1.30	1.8055	1.8057	1.8072	1.8022	1.7917	1.7861	1.7828	1.7800	1.7790
1.40	2.1207	2.1209	2.1234	2.1176	2.1028	2.0946	2.0899	2.0858	2.0843
1.50	2.4592	2.4595	2.4630	2.4572	2.4379	2.4265	2.4203	2.4148	2.4124
1.60	2.8211	2.8214	2.8262	2.8213	2.7973	2.7821	2.7741	2.7670	2.7634
1.70	3.2063	3.2067	3.2129	3.2098	3.1810	3.1614	3.1514	3.1426	3.1375
1.80	3.6149	3.6153	3.6230	3.6227	3.5894	3.5647	3.5522	3.5417	3.5347
1.90	4.0468	4.0472	4.0565	4.0601	4.0227	3.9922	3.9767	3.9645	3.9554
2.00	4.5021	4.5025	4.5134	4.5220	4.4811	4.4442	4.4251	4.4109	4.3997
2.10	4.9807	4.9812	4.9936	5.0082	4.9647	4.9209	4.8975	4.8812	4.8677
2.20	5.4827	5.4832	5.4972	5.5187	5.4736	5.4227	5.3940	5.3753	5.3597
2.30	6.0080	6.0085	6.0241	6.0534	6.0080	5.9497	5.9151	5.8935	5.8757
2.40	6.5566	6.5572	6.5737	6.6122	6.5678	6.5023	6.4608	6.4357	6.4157
2.50	7.1286	7.1293	7.1464	7.1950	7.1531	7.0806	7.0316	7.0022	6.9799
2.60	7.7240	7.7247	7.7425	7.8016	7.7638	7.6849	7.6277	7.5931	7.5683
2.70	8.3427	8.3434	8.3619	8.4320	8.3997	8.3153	8.2494	8.2088	8.1809
2.80	8.9848	8.9855	9.0048	9.0860	9.0608	8.9719	8.8970	8.8494	8.8179
2.90	9.6501	9.6510	9.6710	9.7636	9.7468	9.6547	9.5708	9.5154	9.4794
3.00	10.3389	10.3397	10.3606	10.4647	10.4577	10.3638	10.2710	10.2070	10.1657
3.10	11.0510	11.0519	11.0736	11.1891	11.1931	11.0991	10.9979	10.9246	10.8770
3.20	11.7864	11.7874	11.8099	11.9369	11.9530	11.8604	11.7514	11.6684	11.6136
3.30	12.5452	12.5462	12.5697	12.7081	12.7372	12.6476	12.5318	12.4388	12.3759
3.40	13.3273	13.3284	13.3528	13.5025	13.5454	13.4605	13.3391	13.2361	13.1643
3.50	14.1328	14.1339	14.1593	14.3202	14.3775	14.2989	14.1732	14.0603	13.9789
3.60	14.9616	14.9628	14.9892	15.1611	15.2334	15.1626	15.0340	14.9118	14.8203
3.70	15.8138	15.8150	15.8425	16.0253	16.1130	16.0513	15.9214	15.7905	15.6886
3.80	16.6893	16.6906	16.7191	16.9128	17.0161	16.9648	16.8352	16.6966	16.5841
3.90	17.5882	17.5895	17.6191	17.8234	17.9427	17.9029	17.7753	17.6300	17.5070
4.00	18.5104	18.5118	18.5425	18.7574	18.8927	18.8654	18.7413	18.5905	18.4575
4.10	19.4560	19.4574	19.4893	19.7143	19.8660	19.8520	19.7330	19.5782	19.4357
4.20	20.4249	20.4264	20.4594	20.6926	20.8626	20.8627	20.7501	20.5928	20.4415
4.30	21.4171	21.4187	21.4530	21.6944	21.8825	21.8971	21.7925	21.6341	21.4750
4.40	22.4327	22.4344	22.4699	22.7199	22.9256	22.9553	22.8598	22.7019	22.5361
4.50	23.4717	23.4734	23.5102	23.7689	23.9920	24.0371	23.9518	23.7959	23.6246
4.60	24.5340	24.5358	24.5738	24.8416	25.0816	25.1424	25.0683	24.9158	24.7403
4.70	25.6196	25.6215	25.6609	25.9378	26.1944	26.2711	26.2090	26.0614	25.8831
4.80	26.7286	26.7306	26.7713	27.0576	27.3305	27.4231	27.3738	27.2323	27.0528
4.90	27.8610	27.8630	27.9051	28.2009	28.4899	28.5984	28.5625	28.4284	28.2490
5.00	29.0167	29.0188	29.0623	29.3679	29.6725	29.7970	29.7750	29.6494	29.4714

Tableau (4.4): Résultats numériques des variations du rapport de pression P_2/P_1 à haute température en fonction de nombre de Mach amont M_1 .

Nombre de Mach M_2									
M_1	$GP (\gamma=1.402)$	$T_0=298.15 \text{ K}$	$T_0=500 \text{ K}$	$T_0=1000 \text{ K}$	$T_0=1500 \text{ K}$	$T_0=2000 \text{ K}$	$T_0=2500 \text{ K}$	$T_0=3000 \text{ K}$	$T_0=3500 \text{ K}$
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.10	0.9118	0.9118	0.9118	0.9115	0.9113	0.9112	0.9112	0.9111	0.9111
1.20	0.8422	0.8423	0.8422	0.8413	0.8407	0.8405	0.8402	0.8401	0.8400
1.30	0.7860	0.7861	0.7859	0.7844	0.7833	0.7828	0.7824	0.7822	0.7820
1.40	0.7398	0.7399	0.7397	0.7375	0.7357	0.7350	0.7344	0.7341	0.7338
1.50	0.7012	0.7013	0.7011	0.6983	0.6958	0.6948	0.6940	0.6936	0.6932
1.60	0.6686	0.6687	0.6685	0.6651	0.6620	0.6607	0.6597	0.6591	0.6587
1.70	0.6407	0.6409	0.6406	0.6367	0.6330	0.6314	0.6302	0.6295	0.6290
1.80	0.6167	0.6169	0.6166	0.6123	0.6080	0.6061	0.6047	0.6038	0.6032
1.90	0.5959	0.5960	0.5958	0.5911	0.5862	0.5840	0.5824	0.5814	0.5808
2.00	0.5776	0.5778	0.5776	0.5726	0.5672	0.5646	0.5629	0.5618	0.5610
2.10	0.5616	0.5617	0.5616	0.5564	0.5504	0.5476	0.5457	0.5444	0.5435
2.20	0.5474	0.5475	0.5475	0.5420	0.5356	0.5325	0.5305	0.5290	0.5281
2.30	0.5347	0.5349	0.5349	0.5294	0.5225	0.5190	0.5169	0.5153	0.5142
2.40	0.5235	0.5236	0.5237	0.5181	0.5109	0.5071	0.5047	0.5031	0.5019
2.50	0.5134	0.5135	0.5136	0.5080	0.5004	0.4963	0.4938	0.4921	0.4908
2.60	0.5043	0.5044	0.5046	0.4989	0.4911	0.4867	0.4840	0.4822	0.4808
2.70	0.4960	0.4962	0.4964	0.4907	0.4827	0.4780	0.4752	0.4732	0.4718
2.80	0.4886	0.4887	0.4889	0.4834	0.4751	0.4701	0.4672	0.4651	0.4636
2.90	0.4818	0.4820	0.4822	0.4767	0.4683	0.4630	0.4599	0.4578	0.4561
3.00	0.4756	0.4758	0.4760	0.4706	0.4621	0.4566	0.4533	0.4511	0.4494
3.10	0.4700	0.4701	0.4704	0.4651	0.4564	0.4507	0.4473	0.4449	0.4432
3.20	0.4648	0.4650	0.4653	0.4600	0.4513	0.4454	0.4418	0.4393	0.4375
3.30	0.4601	0.4602	0.4605	0.4554	0.4466	0.4405	0.4367	0.4342	0.4323
3.40	0.4557	0.4558	0.4562	0.4511	0.4423	0.4361	0.4321	0.4295	0.4275
3.50	0.4516	0.4518	0.4521	0.4472	0.4383	0.4320	0.4279	0.4252	0.4231
3.60	0.4479	0.4481	0.4484	0.4435	0.4347	0.4283	0.4240	0.4212	0.4191
3.70	0.4445	0.4446	0.4450	0.4402	0.4314	0.4248	0.4204	0.4175	0.4153
3.80	0.4412	0.4414	0.4418	0.4371	0.4283	0.4216	0.4171	0.4141	0.4119
3.90	0.4383	0.4384	0.4388	0.4342	0.4254	0.4187	0.4141	0.4110	0.4087
4.00	0.4355	0.4356	0.4360	0.4315	0.4228	0.4160	0.4113	0.4081	0.4057
4.10	0.4329	0.4331	0.4334	0.4290	0.4203	0.4135	0.4087	0.4054	0.4029
4.20	0.4305	0.4306	0.4310	0.4266	0.4180	0.4111	0.4063	0.4029	0.4004
4.30	0.4282	0.4284	0.4288	0.4245	0.4158	0.4090	0.4040	0.4006	0.3980
4.40	0.4261	0.4263	0.4267	0.4224	0.4138	0.4069	0.4019	0.3984	0.3958
4.50	0.4241	0.4243	0.4247	0.4205	0.4120	0.4051	0.4000	0.3964	0.3937
4.60	0.4222	0.4224	0.4228	0.4187	0.4102	0.4033	0.3982	0.3945	0.3918
4.70	0.4205	0.4206	0.4211	0.4170	0.4086	0.4016	0.3965	0.3928	0.3900
4.80	0.4188	0.4190	0.4194	0.4154	0.4070	0.4001	0.3949	0.3912	0.3883
4.90	0.4173	0.4174	0.4179	0.4139	0.4055	0.3986	0.3935	0.3897	0.3868
5.00	0.4158	0.4160	0.4164	0.4124	0.4042	0.3973	0.3921	0.3882	0.3853

Tableau (4.5) : Résultats numériques des variations du nombre de Mach M_2 à haute température en fonction de nombre de Mach amont M_1 .

Entropie S_{12}/r									
M_1	$GP (\gamma=1.402)$	$T_0=298.15 \text{ K}$	$T_0=500$	$T_0=1000 \text{ K}$	$T_0=1500 \text{ K}$	$T_0=2000 \text{ K}$	$T_0=2500 \text{ K}$	$T_0=3000 \text{ K}$	$T_0=3500 \text{ K}$
1.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.10	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011
1.20	0.0072	0.0072	0.0073	0.0075	0.0075	0.0075	0.0075	0.0075	0.0075
1.30	0.0208	0.0208	0.0210	0.0216	0.0218	0.0218	0.0219	0.0219	0.0219
1.40	0.0427	0.0427	0.0431	0.0444	0.0448	0.0450	0.0451	0.0452	0.0453
1.50	0.0727	0.0727	0.0734	0.0759	0.0769	0.0772	0.0775	0.0776	0.0778
1.60	0.1106	0.1106	0.1116	0.1156	0.1175	0.1181	0.1187	0.1189	0.1191
1.70	0.1556	0.1556	0.1569	0.1629	0.1660	0.1672	0.1681	0.1685	0.1689
1.80	0.2071	0.2071	0.2088	0.2171	0.2219	0.2237	0.2251	0.2258	0.2263
1.90	0.2644	0.2644	0.2664	0.2774	0.2843	0.2869	0.2889	0.2901	0.2907
2.00	0.3268	0.3268	0.3291	0.3429	0.3524	0.3562	0.3588	0.3606	0.3615
2.10	0.3936	0.3936	0.3962	0.4130	0.4256	0.4308	0.4341	0.4366	0.4380
2.20	0.4642	0.4642	0.4670	0.4870	0.5031	0.5100	0.5142	0.5175	0.5194
2.30	0.5381	0.5380	0.5411	0.5642	0.5841	0.5932	0.5985	0.6026	0.6052
2.40	0.6147	0.6147	0.6179	0.6441	0.6682	0.6798	0.6863	0.6913	0.6947
2.50	0.6937	0.6937	0.6969	0.7262	0.7548	0.7692	0.7771	0.7831	0.7874
2.60	0.7746	0.7746	0.7778	0.8100	0.8432	0.8609	0.8705	0.8775	0.8828
2.70	0.8571	0.8571	0.8603	0.8952	0.9331	0.9544	0.9659	0.9741	0.9804
2.80	0.9409	0.9408	0.9441	0.9814	1.0241	1.0493	1.0630	1.0725	1.0798
2.90	1.0256	1.0255	1.0288	1.0684	1.1158	1.1452	1.1613	1.1722	1.1807
3.00	1.1111	1.1110	1.1143	1.1559	1.2079	1.2417	1.2606	1.2730	1.2826
3.10	1.1970	1.1970	1.2003	1.2436	1.3002	1.3386	1.3605	1.3746	1.3854
3.20	1.2833	1.2832	1.2866	1.3315	1.3923	1.4354	1.4607	1.4767	1.4887
3.30	1.3698	1.3697	1.3731	1.4193	1.4842	1.5321	1.5609	1.5791	1.5924
3.40	1.4563	1.4562	1.4595	1.5070	1.5757	1.6283	1.6609	1.6814	1.6962
3.50	1.5426	1.5425	1.5459	1.5943	1.6666	1.7239	1.7605	1.7836	1.8000
3.60	1.6288	1.6286	1.6320	1.6813	1.7569	1.8188	1.8594	1.8853	1.9034
3.70	1.7146	1.7145	1.7179	1.7678	1.8465	1.9128	1.9576	1.9865	2.0065
3.80	1.8000	1.7999	1.8033	1.8538	1.9353	2.0058	2.0549	2.0869	2.1090
3.90	1.8850	1.8848	1.8882	1.9393	2.0233	2.0979	2.1511	2.1865	2.2108
4.00	1.9694	1.9692	1.9727	2.0240	2.1104	2.1888	2.2463	2.2851	2.3118
4.10	2.0532	2.0531	2.0565	2.1081	2.1966	2.2787	2.3402	2.3826	2.4119
4.20	2.1365	2.1363	2.1397	2.1914	2.2819	2.3674	2.4329	2.4789	2.5109
4.30	2.2190	2.2188	2.2223	2.2740	2.3663	2.4549	2.5243	2.5739	2.6088
4.40	2.3009	2.3007	2.3041	2.3559	2.4497	2.5413	2.6144	2.6676	2.7054
4.50	2.3820	2.3818	2.3853	2.4371	2.5322	2.6265	2.7032	2.7600	2.8008
4.60	2.4624	2.4622	2.4656	2.5175	2.6138	2.7106	2.7907	2.8510	2.8949
4.70	2.5421	2.5418	2.5453	2.5972	2.6944	2.7935	2.8768	2.9406	2.9876
4.80	2.6210	2.6207	2.6242	2.6761	2.7742	2.8753	2.9616	3.0288	3.0789
4.90	2.6991	2.6988	2.7023	2.7542	2.8530	2.9561	3.0452	3.1156	3.1687
5.00	2.7764	2.7761	2.7796	2.8316	2.9309	3.0357	3.1275	3.2010	3.2572

Tableau (4.6) : Résultats numériques des variations de l'entropie S_{12}/r à haute température en fonction de nombre de Mach amont M_1 .

Rapport de pression totale P_{02}/P_{01}									
M_1	$GP (\gamma=1.40)$	$T_0=298.15 \text{ K}$	$T_0=500 \text{ K}$	$T_0=1000 \text{ K}$	$T_0=1500 \text{ K}$	$T_0=2000 \text{ K}$	$T_0=2500 \text{ K}$	$T_0=3000 \text{ K}$	$T_0=3500 \text{ K}$
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.10	0.9989	0.9989	0.9989	0.9989	0.9989	0.9989	0.9989	0.9989	0.9989
1.20	0.9928	0.9928	0.9927	0.9926	0.9925	0.9925	0.9925	0.9925	0.9925
1.30	0.9794	0.9794	0.9792	0.9786	0.9785	0.9784	0.9784	0.9784	0.9783
1.40	0.9582	0.9582	0.9578	0.9566	0.9561	0.9560	0.9559	0.9558	0.9557
1.50	0.9299	0.9298	0.9292	0.9269	0.9260	0.9257	0.9254	0.9253	0.9252
1.60	0.8953	0.8953	0.8944	0.8908	0.8892	0.8886	0.8881	0.8879	0.8877
1.70	0.8559	0.8559	0.8548	0.8496	0.8470	0.8461	0.8453	0.8449	0.8446
1.80	0.8129	0.8129	0.8116	0.8048	0.8010	0.7996	0.7985	0.7978	0.7975
1.90	0.7677	0.7677	0.7661	0.7578	0.7525	0.7506	0.7491	0.7482	0.7477
2.00	0.7212	0.7212	0.7196	0.7097	0.7030	0.7003	0.6985	0.6973	0.6966
2.10	0.6747	0.6747	0.6729	0.6616	0.6534	0.6500	0.6478	0.6462	0.6453
2.20	0.6287	0.6287	0.6269	0.6145	0.6047	0.6005	0.5980	0.5960	0.5949
2.30	0.5839	0.5839	0.5821	0.5688	0.5576	0.5526	0.5496	0.5474	0.5460
2.40	0.5408	0.5408	0.5391	0.5251	0.5126	0.5067	0.5034	0.5009	0.4992
2.50	0.4997	0.4997	0.4981	0.4838	0.4701	0.4634	0.4597	0.4570	0.4550
2.60	0.4609	0.4609	0.4594	0.4449	0.4303	0.4228	0.4188	0.4158	0.4136
2.70	0.4244	0.4244	0.4230	0.4085	0.3933	0.3850	0.3806	0.3775	0.3752
2.80	0.3903	0.3903	0.3890	0.3748	0.3591	0.3502	0.3454	0.3422	0.3397
2.90	0.3586	0.3586	0.3574	0.3436	0.3276	0.3182	0.3131	0.3097	0.3071
3.00	0.3292	0.3292	0.3281	0.3148	0.2988	0.2889	0.2835	0.2800	0.2773
3.10	0.3021	0.3021	0.3011	0.2883	0.2725	0.2622	0.2565	0.2529	0.2502
3.20	0.2771	0.2771	0.2762	0.2641	0.2485	0.2380	0.2321	0.2284	0.2257
3.30	0.2542	0.2542	0.2533	0.2419	0.2267	0.2161	0.2099	0.2062	0.2034
3.40	0.2331	0.2331	0.2323	0.2216	0.2069	0.1963	0.1900	0.1861	0.1834
3.50	0.2138	0.2138	0.2131	0.2030	0.1889	0.1784	0.1720	0.1680	0.1653
3.60	0.1962	0.1962	0.1955	0.1861	0.1726	0.1622	0.1558	0.1518	0.1491
3.70	0.1800	0.1801	0.1794	0.1707	0.1578	0.1477	0.1412	0.1372	0.1345
3.80	0.1653	0.1653	0.1648	0.1566	0.1444	0.1345	0.1281	0.1241	0.1214
3.90	0.1518	0.1519	0.1513	0.1438	0.1322	0.1227	0.1164	0.1123	0.1096
4.00	0.1395	0.1396	0.1391	0.1321	0.1212	0.1120	0.1058	0.1018	0.0991
4.10	0.1283	0.1283	0.1279	0.1215	0.1112	0.1024	0.0963	0.0923	0.0896
4.20	0.1181	0.1181	0.1177	0.1118	0.1021	0.0937	0.0878	0.0838	0.0812
4.30	0.1087	0.1087	0.1084	0.1029	0.0938	0.0859	0.0801	0.0762	0.0736
4.40	0.1002	0.1002	0.0998	0.0948	0.0863	0.0788	0.0732	0.0694	0.0668
4.50	0.0924	0.0924	0.0921	0.0874	0.0795	0.0723	0.0670	0.0633	0.0608
4.60	0.0852	0.0852	0.0850	0.0807	0.0733	0.0665	0.0614	0.0578	0.0553
4.70	0.0787	0.0787	0.0785	0.0745	0.0676	0.0612	0.0563	0.0528	0.0504
4.80	0.0727	0.0728	0.0725	0.0688	0.0624	0.0564	0.0517	0.0484	0.0460
4.90	0.0673	0.0673	0.0671	0.0637	0.0577	0.0520	0.0476	0.0444	0.0421
5.00	0.0623	0.0623	0.0621	0.0589	0.0533	0.0480	0.0438	0.0407	0.0385

Tableau (4.7) : Résultats numériques des variations du rapport de pression totale P_{02}/P_{01} à haute température en fonction de nombre de Mach amont M_1 .

4.3 Résultats sur l'erreur du modèle du gaz parfait

Dans cette partie, on s'intéresse au calcul de l'erreur relative donnée par le modèle du gaz parfait par rapport au modèle du gaz à haute température, dans le cas d'une onde de choc normal, dont le but est de comparer les deux modèles et constater la différence entre eux.

L'erreur relative est présentée pour chaque paramètre thermodynamique (la température, la masse volumique, la pression, le nombre de Mach M_2 , la pression totale et l'entropie) en fonction du nombre de Mach M_1 , Pour différentes valeurs de température génératrice ($T_0 = 1000 K^\circ, T_0 = 2000 K^\circ$ et $T_0 = 3000 K^\circ$).

Les figures (4.15), (4.16), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20) représentent la variation de l'erreur relative en pourcentage donnée respectivement par les rapports T_2/T_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , M_2 , S_{12}/r et P_{02}/P_{01} et le nombre de Mach M_2 du modèle *GP* comparé au modèle *HT* pour quelques valeurs de T_0 .

Il est clair que si on opte pour une erreur par exemple inférieur à 5 %, le modèle *GP* peut être utilisé, si T_0 soit inférieure à 1000 K° pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach, ou jusqu'au $M = 2.00$ pour n'importe quelle valeur de T_0 . Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle *GP* dans un intervalle de M et T_0 modéré.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de T_0 et M_2 et elle augmente si T_0 augmente. Par exemple si $T_0 = 2000 K^\circ$ et $M = 3.00$, l'utilisation du modèle *GP* va nous donner une erreur relative égale à :

- $\varepsilon = 11.12 \%$ \Rightarrow pour le rapport T_2/T_1 ,
- $\varepsilon = 12.58 \%$ \Rightarrow pour le rapport ρ_2/ρ_1 ,
- $\varepsilon = 2.46 \%$ \Rightarrow pour le rapport P_2/P_1 ,
- $\varepsilon = 4.27 \%$ \Rightarrow pour le nombre de Mach M_2 ,
- $\varepsilon = 11.95 \%$ \Rightarrow pour l'entropie S_{12}/r ,
- $\varepsilon = 12.95 \%$ \Rightarrow pour le rapport P_{02}/P_{01} .

On peut remarquer qu'à faible valeur de M_1 et T_0 , l'erreur « ε » est faible. Sur ces figures, la courbe 3 se trouve au-dessous de l'erreur 5%. Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation du modèle *GP* jusqu'à $T_0 = 1000 K^\circ$ pour les applications

aéronautiques, si on accepte une erreur inférieure à 5%. Mais si la température T_0 est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle *GP* indépendamment de la température T_0 , si le nombre de Mach n'excède pas $M = 2.00$ avec une erreur de 10% environ. Les erreurs données par les rapports thermodynamiques et des sections, lorsque $M_1 = 1$ peuvent être déterminées par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(x_T)}(T_0, M_1 = 1) &= \left| 1 - \frac{(x_T)_{PG}}{(x_T)_{HT}} \right| \times 100 \\ &= \left| 1 - \frac{1}{1} \right| \times 100 = 0\% , \text{ Quelque soit } T_0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(x_\rho)}(T_0, M_1 = 1) &= \left| 1 - \frac{(x_\rho)_{PG}}{(x_\rho)_{HT}} \right| \times 100 \\ &= \left| 1 - \frac{1}{1} \right| \times 100 = 0\% , \text{ Quelque soit } T_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(x_P)}(T_0, M_1 = 1) &= \left| 1 - \frac{(x_P)_{PG}}{(x_P)_{HT}} \right| \times 100 \\ &= \left| 1 - \frac{1}{1} \right| \times 100 = 0\% , \text{ Quelque soit } T_0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(M_2)}(T_0, M_1 = 1) &= \left| 1 - \frac{(M_2)_{PG}}{(M_2)_{HT}} \right| \times 100 \\ &= \left| 1 - \frac{1}{1} \right| \times 100 = 0\% , \text{ Quelque soit } T_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)}(T_0, M_1 = 1) &= \left| 1 - \frac{\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)_{PG}}{\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)_{HT}} \right| \times 100 \\ &= \left| 1 - \frac{1}{1} \right| \times 100 = 0\% , \text{ Quelque soit } T_0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour l'entropie nous avons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\left(\frac{S_{12}}{R}\right)}(T_0, M_1 = 1) &= \left| 1 - \frac{\left(\frac{S_{12}}{R}\right)_{PG}}{\left(\frac{S_{12}}{R}\right)_{HT}} \right| \times 100 = \left| 1 - \frac{0}{0} \right| \times 100 \\ &= \begin{cases} 1.965\% \text{ Pour } T_0 = 1000\text{K}^\circ \\ 2.061\% \text{ Pour } T_0 = 2000\text{K}^\circ \\ 2.421\% \text{ Pour } T_0 = 3000\text{K}^\circ \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

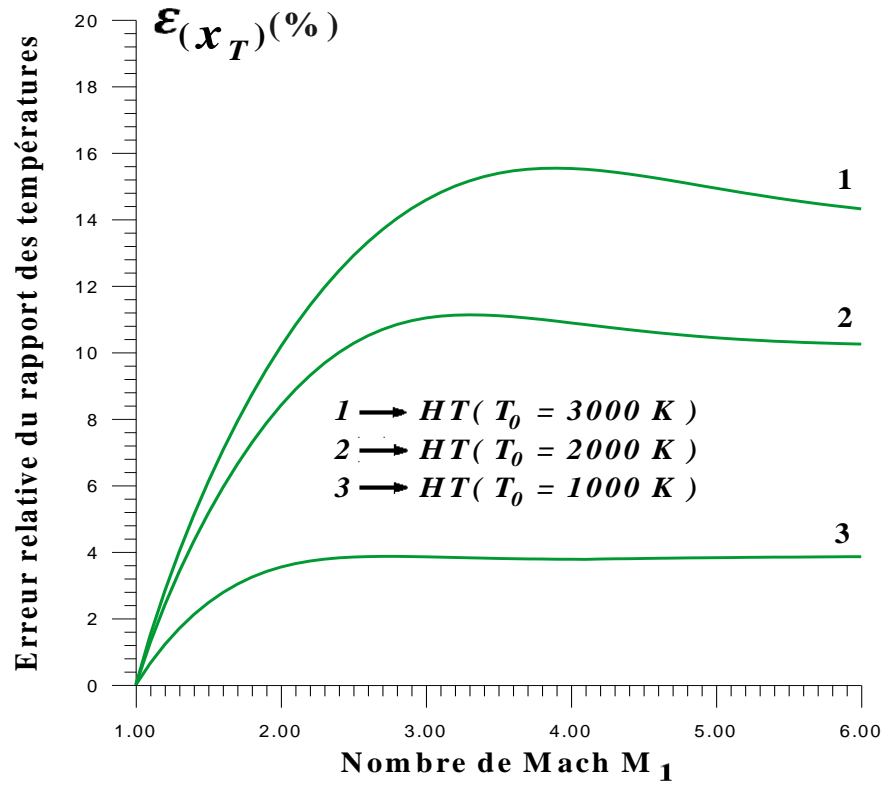


Figure (4.15) : L'évolution de l'erreur relative du rapport de température T_2/T_1 en fonction du nombre du Mach amont M_1 .

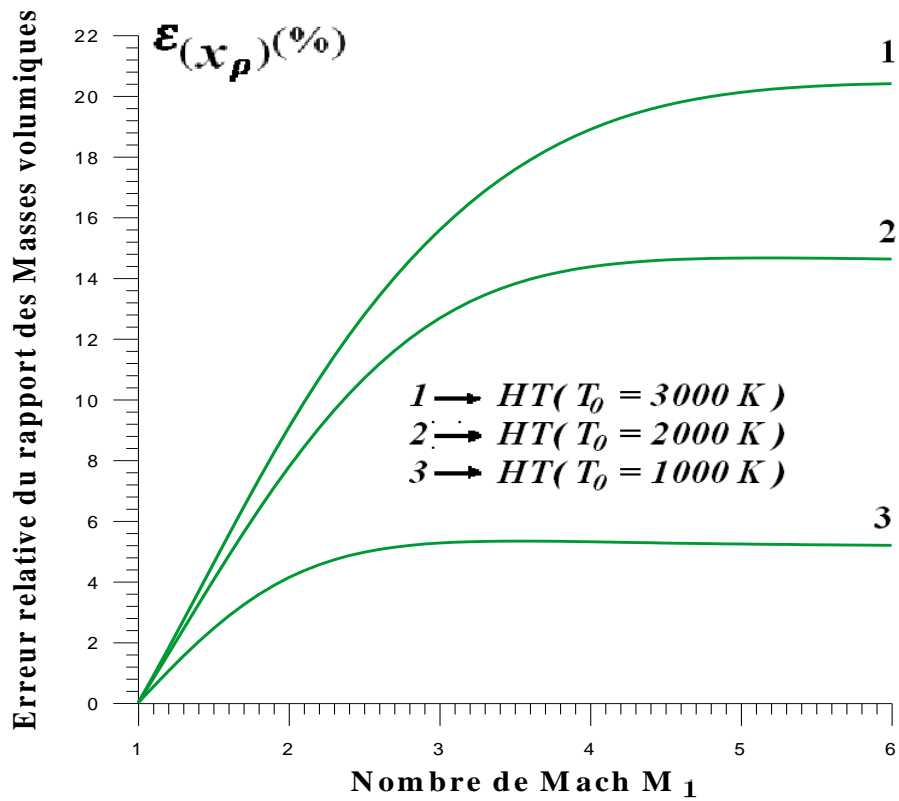


Figure (4.16) : L'évolution de l'erreur relative du rapport de la masse volumique ρ_2/ρ_1 en fonction du nombre du Mach amont M_1 .

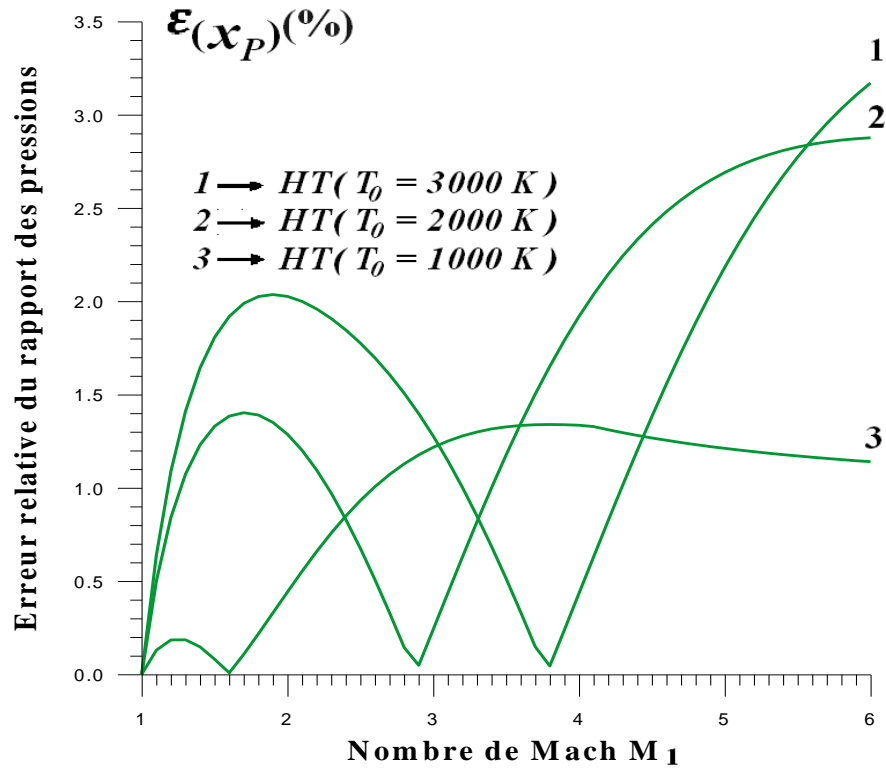


Figure (4.17) : L'évolution de l'erreur relative du rapport de pression P_2/P_1 en fonction du nombre du Mach amont M_1 .

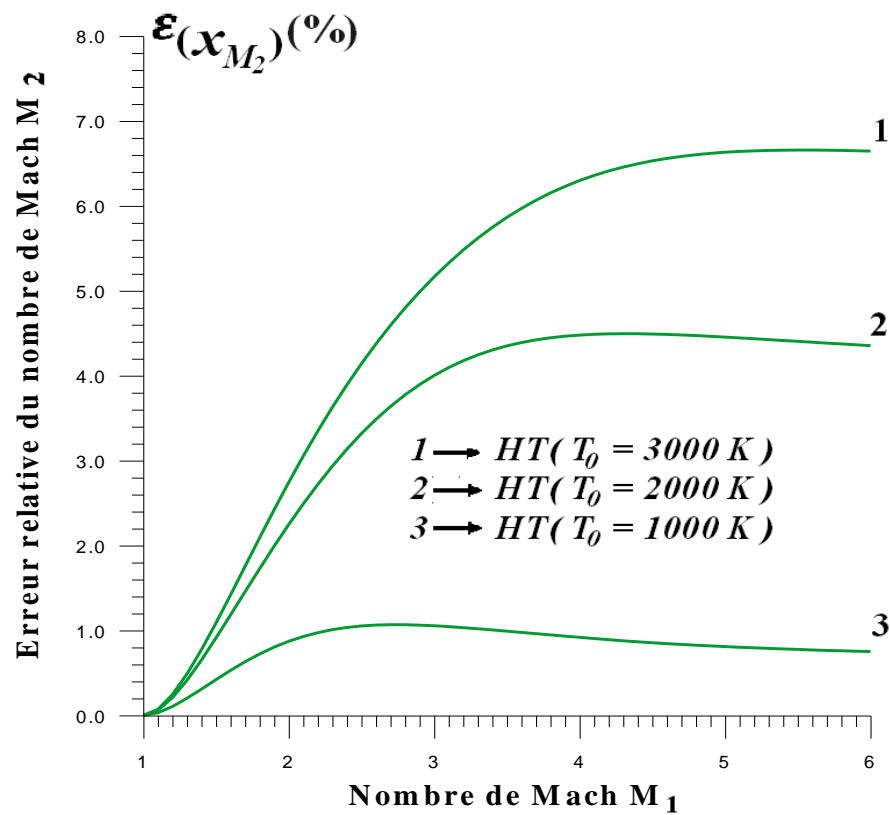


Figure (4.18) : L'évolution de l'erreur relative du nombre de Mach M_2 en fonction du nombre du Mach amont M_1 .

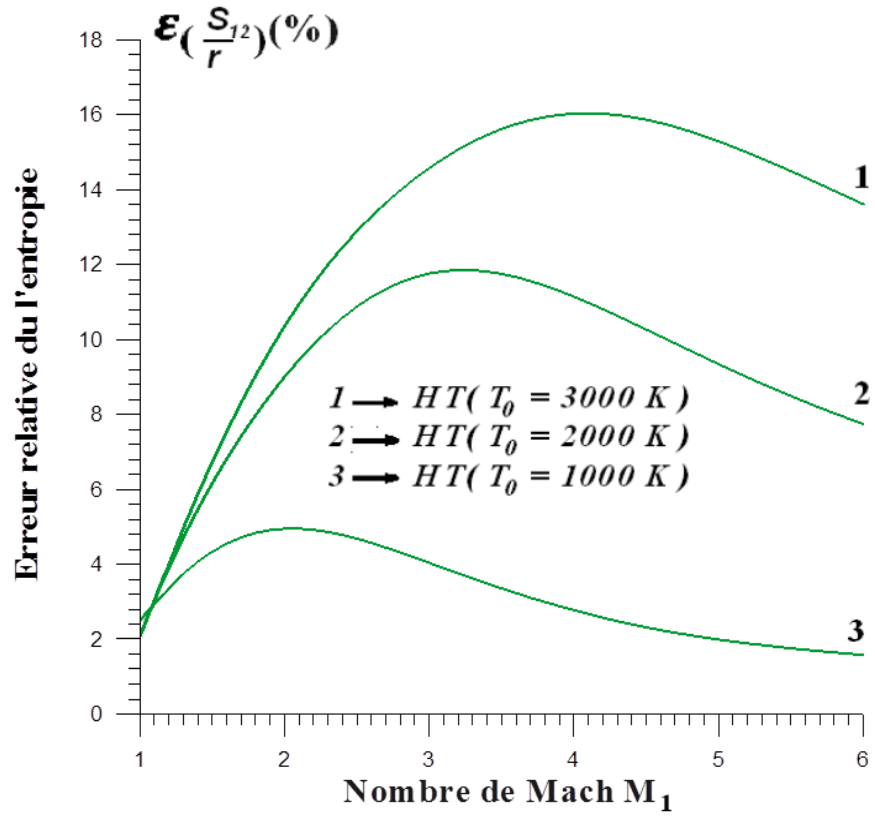


Figure (4.19) : L'évolution de l'erreur relative de l'entropie S_{12}/R en fonction du nombre du Mach amont M_1 .

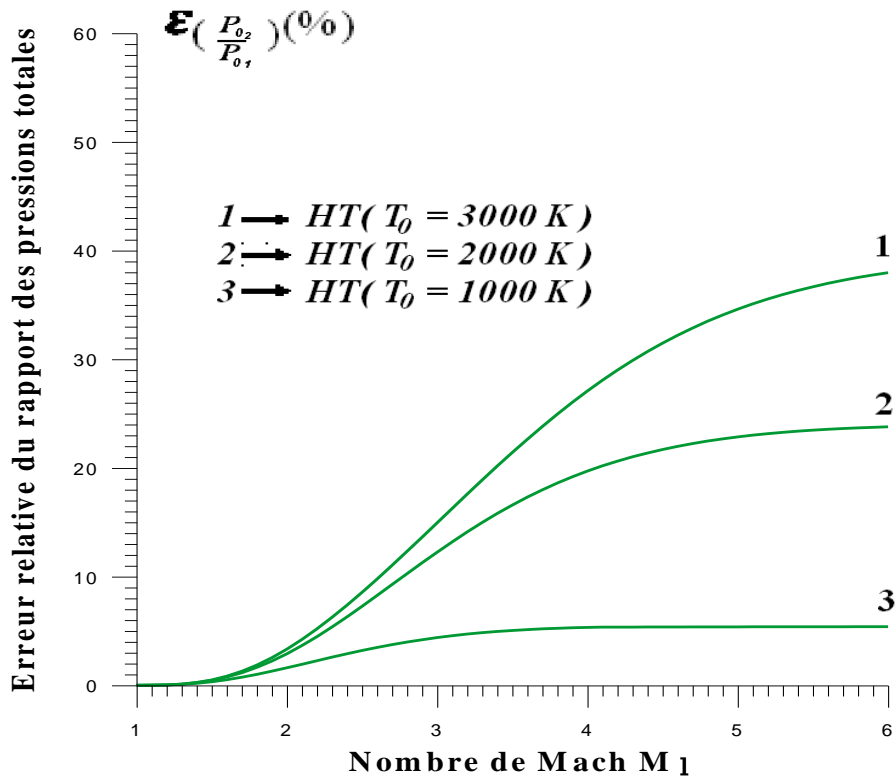


Figure (4.20) : L'évolution de l'erreur relative du rapport de pression totale P_{02}/P_{01} en fonction du nombre de Mach amont M_1 .

4.4 Résultats sur l'application des tuyères supersoniques

- **La figure (4.21b) :** représente la variation du nombre de Mach à travers la tuyère du cas (a). L'exemple est choisi pour $M_s = 3.00$ pour le modèle du gaz parfait. On remarque clairement que :
 - ✓ Si la température T_0 est prise en considération, on va voir une chute en grandeur du nombre de Mach de la tuyère dimensionnée sur la base de ce modèle.
 - ✓ On remarque que la différence devient considérable si la valeur de T_0 commence à dépasser les 1000 K° .

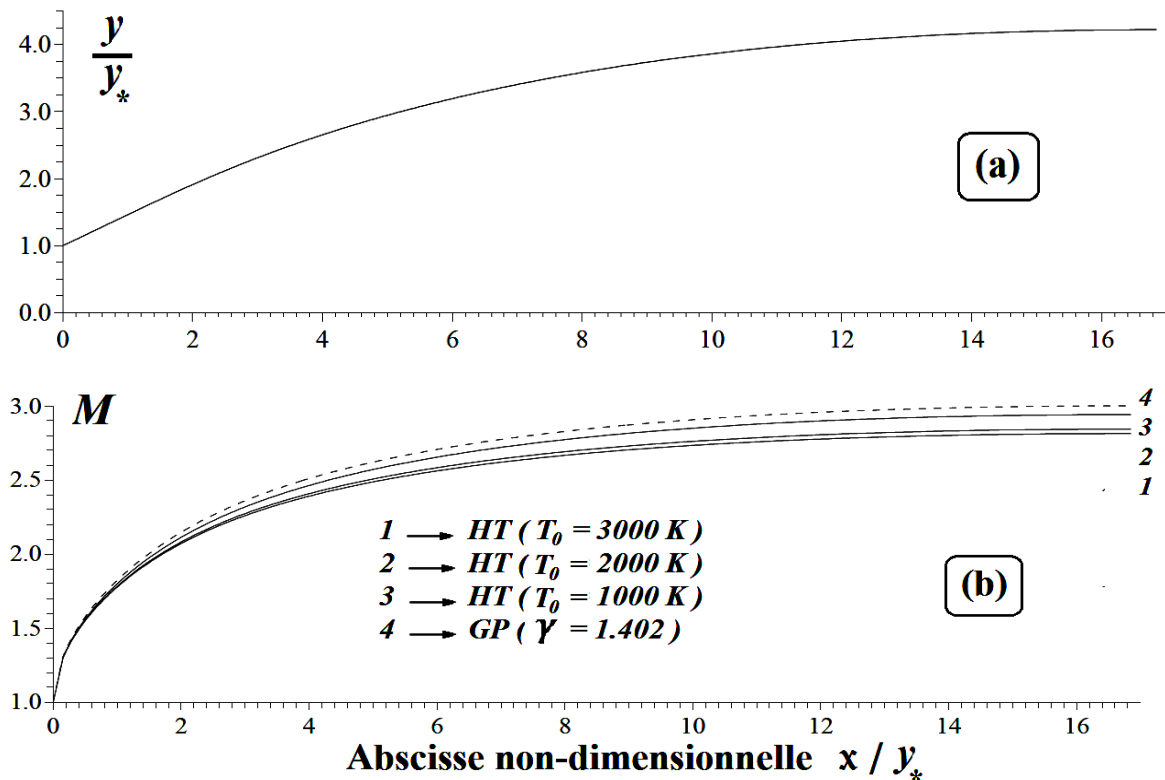


Figure (IV.21) : Effet de T_0 sur la variation du nombre de Mach à travers la tuyère.
 (a) : Forme de la tuyère dimensionnée sur la base du modèle *GP* donnant $M_s = 3.00$.
 (b) : Variation à Haute Température du nombre de Mach à travers la tuyère du cas (a).

- **La figure (4.22) :** présente la variation de la correction du nombre de Mach d'une tuyère donnant un nombre de Mach de sortie M_s , dimensionnée sur la base du modèle *GP* pour différentes valeurs de T_0 . On remarque que :

- ✓ Les courbes se confondent jusqu'au nombre de Mach $M_s = 2.00$, indépendamment à la température T_0 . A partir de cette valeur, la différence entre les trois courbes 1, 2 et 3, commencent à grandir.
- ✓ On remarque encore que les courbes 3 et 4 sont presque confondues quelque soit le nombre de Mach, qui s'interprète par la possibilité d'utilisation du modèle *GP* pour les applications, si la température génératrice T_0 soit inférieure à 1000 K environ.

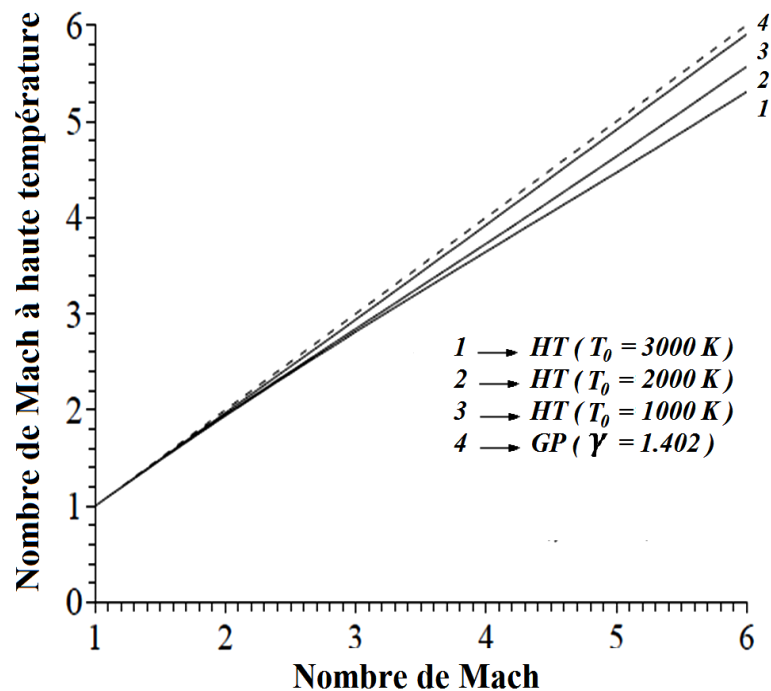


Figure (4.22) : Correction du nombre de Mach d'une tuyère dimensionnée par le modèle GP.

Le tableau (4.8) présente quelques valeurs numériques de M_s qui sera délivré par une tuyère supersonique à haute température, dimensionnée en considérant le modèle *GP*, donnant un nombre de Mach M_s . Par exemple, si la tuyère délivre $M_s = 3.00$ sur l'hypothèse *GP*, elle va délivrer, sur la considération du modèle *HT* :

$$M_s(HT) = 2.94, \text{ si } T_0 = 1000\text{ K},$$

$$M_s(HT) = 2.84, \text{ si } T_0 = 2000\text{ K},$$

$$M_s(HT) = 2.81, \text{ si } T_0 = 3000\text{ K}.$$

$M_s(GP \gamma = 1.402)$	1.5000	2.0000	3.0000	4.0000	5.0000
$M_s(T_0 = 500K^\circ)$	1.49773	1.99595	2.99568	3.99552	4.99516
$M_s(T_0 = 1000K^\circ)$	1.48799	1.97074	2.94037	3.92458	4.91548
$M_s(T_0 = 1500K^\circ)$	1.48300	1.95349	2.87771	3.81475	4.77270
$M_s(T_0 = 2000K^\circ)$	1.48090	1.94647	2.84273	3.72918	4.63778
$M_s(T_0 = 2500K^\circ)$	1.47929	1.94173	2.82457	3.67656	4.53600
$M_s(T_0 = 3000K^\circ)$	1.47857	1.93859	2.81252	3.64504	4.46704
$M_s(T_0 = 3500K^\circ)$	1.47784	1.93689	3.62419	3.62419	4.42160

Tableau (4.8) : Correction du nombre de Mach de sortie de la tuyère.

- La figure (4.23)** : représente la forme des tuyères supersoniques délivrant le même nombre de Mach de sortie M_s . On a pris un exemple de $M_s = 3.00$. La variation du nombre de Mach à travers ces 4 tuyères est illustrée sur la courbe 4 de la figure (4.21). Les trois autres courbes 1, 2, et 3 de la figure (4.23) sont déterminées par l'utilisation du modèle *HT* pour $T_0 = 3000 K$, $2000 K$ et $1000 K$ respectivement. La courbe 4 de la figure (4.23) est représentée encore dans la figure (4.21a), déterminée par l'hypothèse d'un gaz parfait. On remarque que la tuyère du modèle *GP* est moins volumineuse par rapport au cas *HT*.

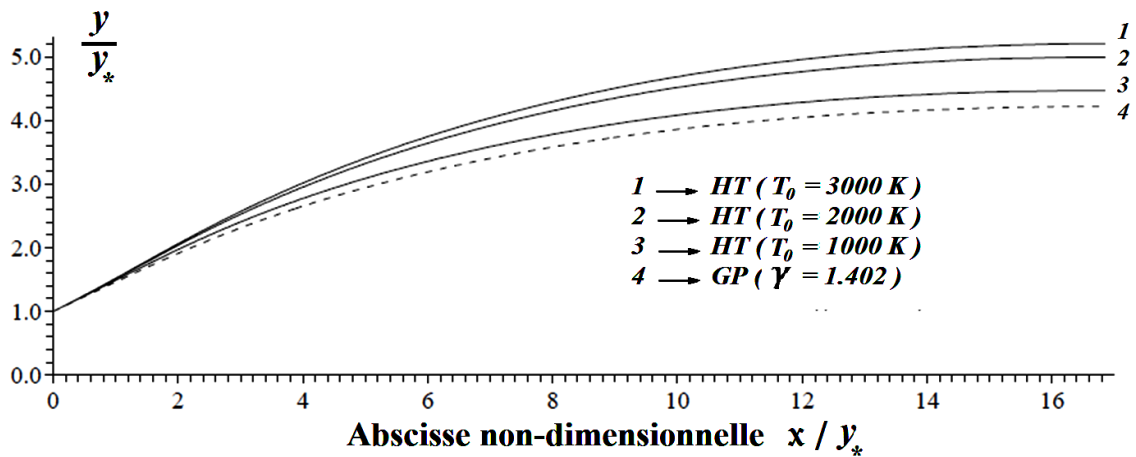


Figure (4.23) : Formes des tuyères donnant la même variation du nombre de Mach.

CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons établi un programme qui permet de déterminer les paramètres thermodynamique à travers une onde de choc normale sur l'hypothèse d'un gaz thermiquement parfait et caloriquement imparfait.

On a obtenu et démontré par le programme les résultats suivants :

1. Le modèle *GP* est représenté par des relations explicites et simples et ne demande pas beaucoup de temps calcul élevé, contrairement au modèle proposé, où il est présenté par la résolution d'équations non linéaires algébriques, et l'intégration de deux fonctions analytiques complexes. Il nécessite plus de temps de calcul élevé et de traitement des données.
2. Les variable principale pour notre modèle est la température et pour le modèle *GP* est le nombre de Mach à cause d'une équation implicite non linéaire reliant T et M .
3. Les relations présentées dans cette étude sont valables pour 'importe quel type interpolation choisie pour la fonction $C_p(T)$. L'essentiel est que l'interpolation choisie donne une erreur petite acceptable.
4. Nous pouvons choisir une autre substance au lieu de l'air. Les relations restent valables. Sauf qu'il est nécessaire d'avoir le tableau de variation de C_p ou γ en fonction de la température et faire une bonne interpolation.
5. On peut obtenir les relations d'un gaz parfait à partir des relations du modèle *HT* en annulant toutes les constantes d'interpolations de la fonction $C_p(T)$ sauf le premier. Dans ce cas, le modèle *GP* devient un cas particulier de notre modèle *HT*.

6. A faible température et nombre de Mach, l'écart en résultats entre les deux modèles est petit, ce qui donne la possibilité d'étudier un écoulement *HT* en utilisant les relations *GP*. Par contre, lorsque T_0 augmente, la théorie *GP* commence à donner des résultats qui s'éloignent au fur et à mesure du cas réel, d'où la nécessité d'utilisation du modèle *HT*.
7. Si on admet une erreur inférieure à 5 %, ce qui est le cas généralement pour les applications aérodynamiques, nous pouvons étudier le phénomène de l'onde de choc normale à *HT* en utilisant les relations d'un gaz parfait, si la température génératrice T_0 ne dépasse pas les 1000 K° et le nombre de Mach soit inférieure à 2.00. Par conséquent, il faut tenir compte de T_0 et utiliser le modèle mathématique présenté.

A la fin de ce modeste travail et pour compléter l'étude dans cet axe de recherche, on peut citer quelques travaux intéressants comme une continuation à notre travail :

- L'application du modèle à haute température sur un gaz réel.
- Développer un modèle à haute température pour une onde de choc oblique et déterminer les conditions après le choc .
- Etude d'un écoulement à haute température pour le cas de la détente de Prandtl Meyer dans une tuyère supersonique.
- Calculs de l'écoulement supersonique à haute température autour d'un cône (choc conique) à incidence nulle.

APPENDICE A

TABLE DE PETERSON

✚ Table de Peterson pour la variation de $C_p(T)$ et $\gamma(T)$ avec la température pour l'air [20] :

$T(K^\circ)$	$C_p(T) \left(\frac{J}{KgK^\circ} \right)$	$\gamma(T)$
55.538	1001.104	1.402
-	-	-
222.205	1001.101	1.402
277.761	1002.885	1.401
305.538	1004.675	1.400
333.316	1006.473	1.399
361.094	1008.281	1.398
388.872	1011.923	1.396
416.650	1015.603	1.394
444.427	1019.320	1.392
499.983	1028.781	1.387
555.538	1054.563	1.374
611.094	1054.563	1.370
666.650	1067.077	1.368
722.205	1080.005	1.362
777.761	1093.370	1.356

$T(K^\circ)$	$C_p(T) \left(\frac{J}{KgK^\circ} \right)$	$\gamma(T)$
833.316	1107.192	1.350
888.872	1119.078	1.345
944.427	1131.314	1.340
999.983	1141.365	1.336
1055.538	1151.658	1.332
1111.094	1162.202	1.328
1166.50	1170.280	1.325
1222.205	1178.509	1.322
1277.761	1186.893	1.319
1333.316	1192.570	1.317
1444.427	1204.142	1.313
1555.538	1216.014	1.309
1666.650	1225.121	1.306
1777.761	1234.409	1.303
1888.872	1243.883	1.300
1999.983	1250.305	1.298

$T(K^\circ)$	$C_p(T) \left(\frac{J}{KgK^\circ} \right)$	$\gamma(T)$
2111.094	1256.813	1.296
2222.205	1263.410	1.294
2333.316	1270.097	1.292
2444.427	1273.476	1.291
2555.538	1276.877	1.290
2666.650	1283.751	1.288
2777.761	1287.224	1.287
2888.872	1290.721	1.286
2999.983	1294.242	1.285
3111.094	1297.789	1.284
3222.205	1301.360	1.283
3333.316	1304.957	1.282
3444.427	1304.957	1.282
3555.538	1308.580	1.281
-	-	-
-	-	-

APPENDICE B

LISTING DU PROGRAMME

Le programme présenté dans cette appendice consiste à déterminer les paramètres thermodynamiques de l'écoulement supersonique à travers l'onde de choc normale pour un gaz caloriquement imparfait et les mêmes paramètres pour un gaz caloriquement parfait $\gamma=1.402$. La détermination des résultats des figures 4.1, 4.2, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22 et 4.23 ainsi que des tableaux 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8 nécessite quelques modifications dans ce programme principal.

```
C *****
C Détermination des paramètres de l'écoulement supersonique à travers l'onde de
C
C          choc normale à haute température
C *****
C GAMA ..... RAPPORT DES CHALEURS SPECIFIQUES DE L'AIR (GAMA=1.402)
C TOL ..... LA PRECISION VOULUE POUR RESOUDRE UNE EQUATION ALGEBRIQUE
C NITER ..... LE NOMBRE D' ITERATION
C r ..... CONSTANTE DES GAS PARFAIT
C GP ..... GAZ PARFAIT
C HT ..... GAZ A HAUTE TEMPERATURE
C SG, SD ..... LA FONCTION DE CONDENSATION DE ROBERT A GAUCHE ET A DROITE
C NP ..... NOMBRE DE POINT POUR LA QUADRATURE DE SIMPSON
C b1, b2 ..... PARAMETRE DE CONTROLE DE DISTRIBUTION DES NOEUDS
C VAL1, VAL2 .. LA QUADRATURE DE SIMPSON
C PAS ..... LE PAS D' INTEGRATION
C TERM ..... LA VITESSE DU SON
```

C GAMA_C_HT ... LE RAPPORT DES CHALEURS SPECIFIQUES AU COL DE LA TUYERE
 C GAMA_1_HT ... LE RAPPORT DES CHALEURS SPECIFIQUES JUSTE AVANT LE CHOC
 C GAMA_2_HT ... LE RAPPORT DES CHALEURS SPECIFIQUES JUSTE APRES LE CHOC
 C CP_C_HT LA CHALEUR SPECIFIQUE A PRESSION CONSTANT AU COL DE LA TUYERE
 C CP_1_HT LA CHALEUR SPECIFIQUE A PRESSION CONSTANT JUSTE AVANT LE CHOC
 C CP_2_HT LA CHALEUR SPECIFIQUE A PRESSION CONSTANT JUSTE APRES LE CHOC
 C CS_C_HT LA CELERITE DU SON AU COL DE LA TUYERE
 C CS_1_HT LA CELERITE DU SON JUSTE AVANT LE CHOC
 C CS_2_HT LA CELERITE DU SON JUSTE APRES LE CHOC
 C AM_1 NOMBRE DE MACH AVANT LE CHOC
 C AM_2_HT NOMBRE DE MACH APRES LE CHOC
 C T_0 TEMPERATURE GENERATRICE
 C R_T_C_HT RAPPORT DES TEMPERATURES CRITIQUES T*/T_0 AU COL DE LA TUYERE
 C R_T_1_HT..... RAPPORT DES TEMPERATURES T_1/T_0 JUSTE AVANT LE CHOC
 C R_T_2_HT RAPPORT DES TEMPERATURES T_2/T_0 JUSTE APRES LE CHOC
 C R_T_C_HT RAPPORT DES PRESSIONS P*/P0 AU COL DE LA TUYERE
 C R_T_1_HT RAPPORT DES PRESSIONS P1/P0 JUSTE AVANT LE CHOC
 C R_T_2_HT RAPPORT DES PRESSIONS P2/P0 JUSTE APRES LE CHOC
 C R_T_C_HT RAPPORT DES MASSES VOLUMIQUES RO*/RO0 AU COL DE LA TUYERE
 C R_T_1_HT RAPPORT DES MASSES VOLUMIQUES RO1/RO0 JUSTE AVANT LE CHOC
 C R_T_2_HT RAPPORT DES MASSES VOLUMIQUES RO2/RO0 JUSTE APRES LE CHOC
 C R_A_1_HT RAPPORT DES SECTIONS A1/A*
 C X_RO RAPPORT DES MASSES VOLUMIQUES A TRAVERS LE CHOC
 C X_T RAPPORT DES TEMPERATURES A TRAVERS LE CHOC
 C X_P RAPPORT DES PRESSIONS A TRAVERS LE CHOC
 C X_P_0 RAPPORT DES PRESSIONS TOTALES A TRAVERS LE CHOC
 C DELTA_S_12 .. L'ENTROPIE A TRAVERS LE CHOC
 C

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

COMMON /BK1/ T0

COMMON /BK2/ r

COMMON /BK5/ H_T0

COMMON /BK30/ NP1_1,b1_1,b2_1,b1_1M1,VAL_b2_1

COMMON /BK31/ NP2_1,b1_2,b2_2,b1_2M1,VAL_b2_2

COMMON /BK4/ T_C_HT

COMMON /BK6/ A_CP(10)

```

COMMON /BK8/ A_H(10)
COMMON /BK1000/ T_BAR,CP_BAR
COMMON /BK11/ AMS,T_S_HT
EXTERNAL CP,F_RO,F_A
DATA A_CP/1001.1058,0.040661289,-0.00063376997,2.7474759D-06,
    +-4.0338459D-09,3.0697736D-12,-1.3509355D-15,3.472262D-19,
+-4.8467531D-23,2.8411878D-27/
C
DO 1 I=1,10
    A_H(I)=A_CP(I)/I
1 CONTINUE
C
OPEN(UNIT=1,FILE='RAPHER.DAT',STATUS='UNKNOWN')
C
PI=3.1415926535897932384626433832D-00
NP1=100000 ; NP2=100000 ; NP1_1=NP1-1 ; NP2_1=NP2-1 ; NP=NP1+NP2-1
b1_1=0.08 ; b2_1=2.0 ; b1_1M1=1-b1_1 ; VAL_b2_1=DTANH(b2_1)
b1_2=1.92 ; b2_2=2.0 ; b1_2M1=1-b1_2 ; VAL_b2_2=DTANH(b2_2)
CCC
T0=1000.0 ; AMS=3.00 ; GAMA=1.402
CCC
TOL=0.000000001 ; T_BAR=240.0 ; CP_BAR=F_CP(T_BAR) ; H_T0=HH(T0)
r=8.3145/28.96*1000 ; NITER=5*INT(DLOG(T0/TOL)/0.6931)+1
CP_GP=GAMA*r/(GAMA-1)
C
CP_0_HT=CP(T0) ; GAMA_0_HT=CP_0_HT/(CP_0_HT-r)
CS_0_HT=DSQRT(GAMA_0_HT*r*T0)
WRITE(*,80) T0,AM_1 ; WRITE(1,80) T0,AM_1
C
C DETERMINATION LA TEMPERATURE T* AU COL ET LE RAPPORT T*/T0 CORRESPONDANT à T0
C
T1=0.0 ; CP1=CP(T1) ; GM1=CP1/(CP1-r)
    TERM=DSQRT(GM1*r*T1) ; VAL1=2*H(T1)-TERM*TERM
10 T2=T1+10.0 ; CP2=CP(T2) ; GM2=CP2/(CP2-r)
    TERM=DSQRT(GM2*r*T2) ; VAL2=2*H(T2)-TERM*TERM
PROD=VAL1*VAL2

```



```

        IF (PROD.LE.0.0) GOTO 20
        T1=T2 ; VAL1=VAL2 ; GOTO 10
20     DO 30 ITER=1,NITER
        T3=(T1+T2)/2 ; CP3=CP(T3) ; GM3=CP3/(CP3-r)
        TERM=DSQRT(GM3*r*T3) ; VAL3=2*H(T3)-TERM*TERM
        PROD=VAL1*VAL3
        IF (PROD.LE.0.0) THEN
            T2=T3 ; VAL2=VAL3
        ELSE
            T1=T3 ; VAL1=VAL3
        ENDIF
30     CONTINUE
        T_C_HT=T3 ; R_T_C_HT=T_C_HT/T0
C
C     DETERMINATION DE LA CHALEUR SPECIFIQUE A PRESSION CONSTANT ET LE RAPPORT DES
C     CHALEURS SPECIFIQUES AU COL CORRESPONDANT à T0
C
C     CP_C_HT=CP(T_C_HT) ; GAMA_C_HT=CP_C_HT/(CP_C_HT-r)
C
C     DETERMINATION DE LA CELERITE DU SON AU COL
C
C     CS_C_HT=DSQRT(GAMA_C_HT*r*T_C_HT)
C
C     DETERMINATION DU RAPPORT RO*/RO0 CORRESPONDANT à T0. ON UTILISE
C     LA FORMULE DE SIMPSON POUR CALCULER L'INTEGRALE DE LA FONCTION F_RO(T)
C
C     TG=T_C_HT ; TM=(T_C_HT+T0)/2 ; TD=T0
        CALL SIMPSON1(F_RO,TG,TM,VAL1) ; CALL SIMPSON2(F_RO,TM,TD,VAL2)
        R_R_C_HT=DEXP(-(VAL1+VAL2))
C
C     DETERMINATION DE LA PRESSION P* AINSI QUE LE RAPPORT P*/P0 CORRESPONDANT à T0
C     AINSI QUE LE RAPPORT DES VITESSES DU SON a*/a0
C
C     R_P_C_HT=R_T_C_HT*R_R_C_HT
        R_CS_C_HT=CS_C_HT/CS_0_HT
C
C     DETERMINATION LA TEMPERATURE T_1 CORRESPONDANT AU NOMBRE DE MACH AM_1 JUSTE

```

```

C AVANT LE CHOC DE MACH AMS AINSI QUE LE RAPPORT T1/T0 CORRESPONDANT à T0
C
T1=T_C_HT ; CP1=CP(T1) ; GM1=CP1/(CP1-r)
TERM=AMS*DSQRT(GM1*r*T1) ; VAL1=2*H(T1)-TERM*TERM
50 T2=T1-10.0 ; CP2=CP(T2) ; GM2=CP2/(CP2-r)
TERM=AMS*DSQRT(GM2*r*T2) ; VAL2=2*H(T2)-TERM*TERM
PROD=VAL1*VAL2
IF(PROD.LE.0.0) GOTO 60
T1=T2 ; VAL1=VAL2 ; GOTO 50
60 DO 70 ITER=1,NITER
T3=(T1+T2)/2 ; CP3=CP(T3) ; GM3=CP3/(CP3-r)
TERM=AMS*DSQRT(GM3*r*T3) ; VAL3=2*H(T3)-TERM*TERM
PROD=VAL1*VAL3
IF(PROD.LE.0.0) THEN
T2=T3 ; VAL2=VAL3
ELSE
T1=T3 ; VAL1=VAL3
ENDIF
70 CONTINUE
T_1_HT=T3 ; R_T_1_HT=T_1_HT/T0
C
C DETERMINATION DE LA CHALEUR SPECIFIQUE A PRESSION CONSTANT ET LE RAPPORT DES
C CHALEURS SPECIFIQUES JUSTE AVANT LE CHOC CORRESPONDANT à T0
C
CP_1_HT=CP(T_1_HT) ; GAMA_1_HT=CP_1_HT/(CP_1_HT-r)
C
C DETERMINATION DE LA CELERITE DU SON JUSTE AVANT LE CHOC
C
CS_1_HT=DSQRT(GAMA_1_HT*r*T_1_HT)
C
C DETERMINATION DU RAPPORT RO1/RO0 CORRESPONDANT à T0. ON UTILISE
C LA FORMULE DE SIMPSON POUR CALCULER L'INTEGRALE DE LA FONCTION F_RO(T)
C
TG=T_1_HT ; TM=(T_1_HT+T0)/2 ; TD=T0
CALL SIMPSON1(F_RO,TG,TM,VAL1) ; CALL SIMPSON2(F_RO,TM,TD,VAL2)
R_R_1_HT=DEXP(-(VAL1+VAL2))

```

```

C
C DETERMINATION DU RAPPORT P1/P0 CORRESPONDANT à T0
C AINSI QUE LE RAPPORT DES VITESSES DU SON a1/a0
C
      R_P_1_HT=R_T_1_HT*R_R_1_HT ; R_CS_1_HT=CS_1_HT/CS_0_HT
C
C DETERMINATION DU RAPPORT DES SECTIONS A1/A* CORRESPONDANT à T0. ON UTILISE
C LA FORMULE DE SIMPSON POUR CALCULER L'INTEGRALE DE LA FONCTION F_A(T)
C
      TG=T_1_HT ; TM=(T_1_HT+T_C_HT)/2 ; TD=T_C_HT
      CALL SIMPSON1(F_A,TG,TM,VAL1) ; CALL SIMPSON2(F_A, TM,TD,VAL2)
      R_A_1_HT=EXP(VAL1+VAL2)
C
C RESULTATS POUR LE MODELE DU GAZ PARFAIT (GAMA CONSTANT)
C
      GAMA_0_GP=GAMA
      CP_0_GP=GAMA_0_GP*r/(GAMA_0_GP-1) ; CS_0_GP=DSQRT(GAMA*r*T0)
C
      PS1=-1.0 ; PS2=-1/(GAMA-1) ; PS3=(GAMA+1)/(2*(GAMA-1))
      FACT1=(GAMA-1)/2 ; FACT2=2/(GAMA+1)
      FACT3=DSQRT((GAMA+1)/(GAMA-1))
C
      GAMA_C_GP=GAMA ; CP_C_GP=GAMA_C_GP*r/(GAMA_C_GP-1)
C
      V_C=1+FACT1
      R_T_C_GP=V_C**PS1 ; T_C_GP=R_T_C_GP*T0
      R_R_C_GP=V_C**PS2 ; R_P_C_GP=R_T_C_GP*R_R_C_GP
      CS_C_GP=DSQRT(GAMA*r*T_C_GP) ; R_CS_C_GP=CS_C_GP/CS_0_GP
      DEBIT_C_GP=R_R_C_GP*(CS_C_GP/CS_0_GP)
C
      GAMA_1_GP=GAMA ; CP_1_GP=GAMA_1_GP*r/(GAMA_1_GP-1)
C
      V_1=1+FACT1*AM_1*AM_1
      R_T_1_GP=V_1**PS1 ; T_1_GP=R_T_1_GP*T0
      R_R_1_GP=V_1**PS2 ; R_P_1_GP=R_T_1_GP*R_R_1_GP
      CS_1_GP=DSQRT(GAMA*r*R_T_1_GP*T0) ; R_CS_1_GP=CS_1_GP/CS_0_GP

```

```

R_A_1_GP=(FACT2*V_1)**PS3/AM_1
C
C DETERMINATION DELA TEMPERATUR T_2_HT JUSTE APRES LE CHOC AINSI QUE LE RAPPORT T2/T0
C A HAUTE TEMPERATURE
C
TG=T_1_HT
C
CP_1=CP(T_1_HT) ; GAMA_1=CP_1/(CP_1-r)
TERM=AM_1* AM_1*GAMA_1
T_MAX=(1+TERM) * (1+TERM) /4/TERM*T_1_HT
TD=T_MAX
C
T_2_HT=TG
X_T=T_2_HT/T_1_HT
AMONI=r*T_1_HT*(1+TERM)
DENO=-2*H(T_1_HT)+2*H(T_2_HT)+r*T_1_HT*(X_T+TERM)
X_RO=ANOMI/DENO
F_G=X_T*X_RO*X_RO-(1+TERM)*X_RO+TERM
C
T_2_HT=TD
X_T=T_2_HT/T_1_HT
AMONI=r*T_1_HT*(1+TERM)
DENO=-2*H(T_1_HT)+2*H(T_2_HT)+r*T_1_HT*(X_T+TERM)
X_RO=ANOMI/DENO
F_D=X_T*X_RO*X_RO-(1+TERM)*X_RO+TERM
PROD=F_G*F_D
C
DO 901 I=1,100
TM=(TG+TD)/2
X_T=TM/T_1_HT
AMONI=r*T_1_HT*(1+TERM)
DENO=-2*H(T_1_HT)+2*H(TM)+r*T_1_HT*(X_T+TERM)
X_RO=ANOMI/DENO
F_M=X_T*X_RO*X_RO-(1+TERM)*X_RO+TERM
IF (F_M.GT.0.0) THEN
TD=TM

```

```

        F_D=F_M
    ELSE
        TG=TM
        F_G=F_M
    ENDIF
901    CONTINUE
        T_2_HT=TM
        R_T_2_HT=T_2_HT/T0
C
C DETERMINATION DE LA CHALEUR SPECIFIQUE A PRESSION CONSTANT ET LE RAPPORT DES
C CHALEURS SPECIFIQUES JUSTE APRES LE CHOC CORRESPONDANT à T0
C
        CP_2_HT=CP(T_2_HT) ; GAMA_2_HT=CP_2_HT/(CP_2_HT-r)
C
C DETERMINATION DE LA CELERITE DU SON JUSTE APRES LE CHOC
C
        CS_2_HT=DSQRT(GAMA_2_HT*r*T_2_HT)
C
C DETERMINATION DU RAPPORT RO2/RO0 CORRESPONDANT à T0. ON UTILISE
C LA FORMULE DE SIMPSON POUR CALCULER L'INTEGRALE DE LA FONCTION F_RO(T)
C
        TG=T_2_HT ; TM=(T_2_HT+T0)/2 ; TD=T0
        CALL SIMPSON1(F_RO,TG,TM,VAL1) ; CALL SIMPSON2(F_RO,TM,TD,VAL2)
        R_R_2_HT=DEXP(-(VAL1+VAL2))
C
C DETERMINATION DU RAPPORT P2/P0 CORRESPONDANT à T0
C AINSI QUE LE RAPPORT DES VITESSES DU SON a2/a0
C
        R_P_2_HT=R_T_2_HT*R_R_2_HT ; R_CS_2_HT=CS_2_HT/CS_0_HT
C
C DETERMINATION DU NOMBRE DE MACH APRES LE CHOC M2 POURLE CAS D'UN GAZ HAUTE
C TEMPERATURE
C
        AM_2_HT=DSQRT(2*H(T_2_HT)/(GAMA_2_HT*r*T_2_HT))
C
C DETERMINATION DU RAPPORT DE PRESSION A TRAVER LE CHOC POUR LE CAS D'UN GAZ HAUTE

```

```

C TEMPERATURE
C
X_P=X_T*X_RO
C
C DETERMINATION DU LA PRESSION TOTALE A TRAVER LE CHOC POUR LE CAS D'UN GAZ HAUTE
C TEMPERATURE
C
X_P_0=R_R_1_HT/R_R_2_HT*X_RO
C
C DETERMINATION DU L'ENTROPIE A HAUTE TEMPERATURE
C
DELTA_S_12=-r*DLOG(X_P_O)
C
C RESULTATS POUR UN GAZ PARFAIT
C
AMONI=1+(GAMA-1)/2*AM_1*AM_1
DENO= GAMA*AM_1*AM_1-(GAMA-1)/2
AM_2_GP=DSQRT(ANOMI/DENO)
C
AMONI=(GAMA+1)*AM_1*AM_1
DENO=2+(GAMA-1)*AM_1*AM_1
X_RO_GP=ANOMI/DENO
C
X_P_GP=1+2*GAMA/(GAMA+1)*(AM_1*AM_1-1)
C
X_T_GP=X_P_GP/X_RO_GP ; T_2_GP=X_T_GP*T_1_GP
C
CP_GP=GAMA*r/(GAMA-1)
DELTA_S_12_GP=CP_GP*DLOG(X_T_GP)-r*DLOG(X_P_GP)
C
X_P0_GP=DEXP(-DELTA_S_12_GP/r)
C
WRITE(*,90) T_C_HT,T_C_GP,T_1_HT,T_1_GP,GAMA_0_HT,GAMA_0_GP,
+GAMA_C_HT,GAMA_0_GP,GAMA_1_HT,GAMA_1_GP,CP_0_HT,CP_0_GP,CP_C_HT,
+CP_C_GP,CP_1_HT,CP_1_GP,R_T_C_HT,R_T_C_GP,R_P_C_HT,R_P_C_GP,
+R_R_C_HT,R_R_C_GP,R_CS_C_HT,R_CS_C_GP,R_T_1_HT,R_T_1_GP,R_P_1_HT,

```

```

+R_P_1_GP,R_R_1_HT,R_R_1_GP,R_CS_1_HT,R_CS_1_GP,R_A_1_HT,R_A_1_GP,
C
WRITE(1,90) T_C_HT,T_C_GP,T_1_HT,T_1_GP,GAMA_0_HT,GAMA_0_GP,
+GAMA_C_HT,GAMA_0_GP,GAMA_S_HT,GAMA_1_GP,CP_0_HT,CP_0_GP,CP_C_HT,
+CP_C_GP,CP_1_HT,CP_1_GP,R_T_C_HT,R_T_C_GP,R_P_C_HT,R_P_C_GP,
+R_R_C_HT,R_R_C_GP,R_CS_C_HT,R_CS_C_GP,R_T_1_HT,R_T_1_GP,R_P_1_HT,
+R_P_1_GP,R_R_S_HT,R_R_1_GP,R_CS_1_HT,R_CS_1_GP,R_A_1_HT,R_A_1_GP,
C
WRITE(*,91) T_0,AM_1,T_2_HT,T_2_GP,AM_2_HT,AM_2_GP,X_T,X_T_GP,X_RO,
+X_RO_GP,X_P,X_P_GP, X_P_0, X_P0_GP, DELTA_S_12/r,DELTA_S_12_GP/r
WRITE(1,91) T_0,AM_1,T_2_HT,T_2_GP,AM_2_HT,AM_2_GP,X_T,X_T_GP,X_RO,
+X_RO_GP,X_P,X_P_GP, X_P_0, X_P0_GP, DELTA_S_12/r,DELTA_S_12_GP/r
C
STOP
40 FORMAT(5X, ' T_C=', F20.15/)
80 FORMAT(18X, 'T0=', F7.2, 5X, 'AMS=', F6.3//12X,
+'Haute Température', 10X, 'Gaz Parfait (GAMA=1.402) '/')
90 FORMAT(5X, 'T*=', 5X, F13.8, 9X, F13.8/5X, 'T1=', 5X, F13.8, 9X, F13.8//
+5X, 'GAMA_0=', 2X, F12.8, 10X, F12.8/5X, 'GAMA_C=', 4X, F10.8, 12X, F10.8/
+5X, 'GAMA_1=', 4X, F10.8, 12X, F10.8//5X, 'CP_0=', 3X, F13.8, 9X, F13.8/
+5X, 'CP_C=', 3X, F13.8, 9X, F13.8/5X, 'CP_1=', 3X, F13.8, 9X, F13.8/
+5X, 'T*/T0=', 5X, F10.8, 12X, F10.8//5X, 'P*/P0=', 5X, F10.8, 12X, F10.8/
+5X, 'RO*/RO0=', 3X, F10.8, 12X, F10.8/5X, 'a*/a0=', 5X, F10.8, 12X, F10.8//
+5X, 'T1/T0=', 5X, F10.8, 12X, F10.8/5X, 'P1/P0=', 5X, F10.8, 12X, F10.8/
+5X, 'RO1/RO0=', 3X, F10.8, 12X, F10.8/5X, 'a1/a0=', 5X, F10.8, 12X, F10.8//
+5X, 'A1/A*=', 3X, F12.8, 10X, F12.8/)
91 FORMAT(5X, 'T0=', F7.2, 5X, 'AM_1=', 5X, F6.3//5X, 'T_2_HT=', F15.10, 5X,
+F15.10/5X,
+'AM_2_HT=', F15.10, 5X, F15.10/5X, 'T2/T1=', F15.10, 5X, F15.10/5X,
+'RO2/RO1=', F15.10, 5X, F15.10/5X, 'P2/P1=', F15.10, 5X, F15.10/5X,
+'P02/P01', F15.10, 5X, F15.10/5X, 'S12=', F15.10, 5X, F15.10/)
END
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION F_CP(T)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK6/ A_CP(10)

```

```

F_CP=A_CP(10)
DO 10 J=9,1,-1
    F_CP=F_CP*T+A_CP(J)
10 CONTINUE
END
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION CP(T)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
    COMMON /BK1000/ T_BAR,CP_BAR
    IF(T.LE.T_BAR) THEN
        CP=CP_BAR
    ELSE
        CP=F_CP(T)
    ENDIF
    RETURN
END
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION HH(T)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
    COMMON /BK8/ A_H(10)
    COMMON /BK1/ T0
    HH=A_H(10)
    DO 10 J=9,1,-1
        HH=HH*T+A_H(J)
10 CONTINUE
    HH=HH*T
    RETURN
END
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION H(T)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
    COMMON /BK1/ T0
    COMMON /BK5/ H_T0
    COMMON /BK1000/ T_BAR,CP_BAR
    IF(T0.LE.T_BAR) H=CP_BAR*(T0-T)
    IF(T0.GT.T_BAR) THEN

```



```

        IF (T.GE.T_BAR) H=H_T0-HH(T)

        IF (T.LT.T_BAR) H=CP_BAR*(T_BAR-T)+H_T0-HH(T_BAR)

    ENDIF

    RETURN

        IF (T_0.LE.T_BAR) THEN

            H=CP_BAR*(T_0-T)

        ENDIF

    RETURN

ENDIF

END

C
C  FUNCTION POUR LA DETERMINATION DE LA MASSE VOLUMIQUE
C
    DOUBLE PRECISION FUNCTION F_RO(T)

    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

    COMMON /BK2/ r

    CPT=CP(T) ; GMT=CPT/(CPT-r) ; F_RO=CPT/(GMT*r*T)

    RETURN

    END

C
C  FUNCTION POUR LA DETERMINATION DE L'AIRES D'UNE SECTION à NOMBRE
C  DE MACH DONNE DANS LE REGIME SUPERSONIQUE
C
    DOUBLE PRECISION FUNCTION F_A(T)

    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

    COMMON /BK2/ r

    CPT=CP(T) ; GMT=CPT/(CPT-r) ; F_A=-CPT/(2*H(T))+CPT/(GMT*r*T)

    RETURN

    END

C
C  CALCUL DE LA VALEUR D'UNE INTEGRALE DEFINIE D'UNE FONCTION
C  PAR LA METHODE DE SIMPSON A PAS VARIABLE
C
    SUBROUTINE SIMPSON1(F,A,B,VAL1)

    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

    COMMON /BK1/ T0

    COMMON /BK30/ NP1_1,b1_1,b2_1,b1_1M1,VAL_b2_1

```

```

EXTERNAL F
VAL1=0.0 ; DIS=B-A
DO 10 I=1,NP1_1
    ZG=(I-1.0)/NP1_1
    SG=b1_1*ZG+b1_1M1*(1-DTANH(b2_1*(1-ZG))/VAL_b2_1) ; XG=SG*DIS+A
C
    ZD=FLOAT(I)/NP1_1
    SD=b1_1*ZD+b1_1M1*(1-DTANH(b2_1*(1-ZD))/VAL_b2_1) ; XD=SD*DIS+A
C
    PAS=(XD-XG)/2 ; Y0=F(XG) ; Y1=F(XG+PAS) ; Y2=F(XD)
    VAL1=VAL1+PAS/3*(Y0+4*Y1+Y2)
10 CONTINUE
    RETURN
    END
C
C CALCUL DE LA VALEUR D'UNE INTEGRALE DEFINIE D'UNE FONCTION
C PAR LA METHODE DE SIMPSON A PAS VARIABLE
C
SUBROUTINE SIMPSON2(F,A,B,VAL2)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK1/ T_0
COMMON /BK31/ NP2_1,b1_2,b2_2,b1_2M1,VAL_b2_2
EXTERNAL F
VAL2=0.0 ; DIS=B-A
DO 10 I=1,NP2_1
    ZG=(I-1.0)/NP2_1
    SG=b1_2*ZG+b1_2M1*(1-DTANH(b2_2*(1-ZG))/VAL_b2_2) ; XG=SG*DIS+A
C
    ZD=FLOAT(I)/NP2_1
    SD=b1_2*ZD+b1_2M1*(1-DTANH(b2_2*(1-ZD))/VAL_b2_2) ; XD=SD*DIS+A
C
    PAS=(XD-XG)/2 ; Y0=F(XG) ; Y1=F(XG+PAS) ; Y2=F(XD)
    VAL2=VAL2+PAS/3*(Y0+4*Y1+Y2)
10 CONTINUE
    RETURN
    END

```

Exemple de Résultats

	T0=1000.00	AM_1= 3.000
	Haute Température	Gaz Parfait (GAMA=1.402)
T*=	853.45323908	832.63948430
T1=	373.13031969	355.99860429
GAMA_0=	1.33580774	1.40199995
GAMA_C=	1.34826746	1.40199995
GAMA_1=	1.39635142	1.40199995
CP_0=	1142.06506134	1001.28932490
CP_C=	1111.47765962	1001.28932490
CP_1=	1011.46742780	1001.28932490
T*/T0=	.85345324	.83263948
P*/P0=	.53691931	.52794517
RO*/RO0=	.62911392	.63406214
a*/a0=	.92812381	.91249081
T1/T0=	.37313032	.35599860
P1/P0=	.02600658	.02726766
RO1/RO0=	.06969840	.07659486
a1/a0=	.62453338	.59665619
A1/A*=	4.47131756	4.22002785
T_2_HT=	963.9666252332	355.9986042879
AM_2_HT=	.4706174746	.4756281158
T2/T1=	2.5834583103	2.6868279953
RO2/RO1=	4.0506346691	3.8479888343
P2/P1=	10.4646457979	10.3388841256
P02/P01=	.3147831869	.3292098447
S12=	1.1558711726	1.1110599058

REFERENCES

1. Anderson Jr, John D., "Fundamentals of Aerodynamics," McGraw-Hill Book Company, New York, 1988.
2. Anderson Jr, John D., "Modern Compressible Flow with Historical Perspective," McGraw-Hill Book Company, New York, 1982.
3. Argrow B.M. and Emanuel G., "Comparison of Minimum Length Nozzles," Journal of Fluids Engineering, Vol. 110, PP. 283-288, September 1988.
4. Bourgoing A. "Instationnaire et dissymétrie d'un écoulement supersonique décolle dans une tuyère plane". Thèse de doctorat de l'université de Paris 6, Juin 2002.
5. Comolet R., "Mécanique Expérimentale des Fluides. Statique et Dynamique des Non Visqueux," Tome 1, 3ème Edition, Masson, 1979.
6. Déridovitch B. and I. Maron., "Eléments de calcul numérique," Editions Mir, Moscow. 1987.
7. E. L. Houghton and P.W. Carpenter "Aerodynamics for Engineering students", Fifth Edition, Butterworth-Heinemann; Fifth edition, 2003.
8. Ethirajan Rathakrishnan., "Gas Dynamics," Prentice-Hall of India, New Delhi. 2004
9. Fletcher C. A. J. "Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories," Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
10. G. Sutton and O. Biblarz., "Rocket propulsion elements," Wiley and sons, 1992.
11. G. V. R. Rao., "Recent development in Rockets Nozzle Configuration," ARS Journal, pp. 1488-1494, 1961.

12. J. Mattingly, H. von Ohain., “Elements of Propulsion: Gas Turbines and Rockets,”
Published by the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. 2006.
13. John David. Anderson, Jr., “Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics”,
McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.
14. Kenneth E. Tatum, “Computation of thermally Perfect Properties of Oblique Shock
Waves”, NASA Contractor Report 4749, 1996.
15. Malina F. J., “Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect
gases,” J. Franklin Inst., Vol. 230, PP. 433-450, 1940.
16. Martin J. L. Turner. “Rocket and spacecraft propulsion,” 3ème Edition. Praxis Ltd,
Chichester, UK, 2009.
17. Michael J.M, Howard N.S, Daisie D.B, Margart B.B., “Fundamentals of
engineering thermodynamics,” John Wiley & Sons. New Jersey USA.2011.
18. Oosthuisen P. H. and Carscallen W. E., “Compressible Fluid Flow,” Mc Graw-
Hill, New York, 1997.
19. P. Carriere. “Aérodynamique interne Tuyère et Jets,” deuxième partie. Toulouse
Ecole nationale supérieure de l’aéronautique et de l’espace, 1971.
20. Peterson C.R. and Hill. P. G., “Mechanics and Thermodynamics of Propulsion,”
2nd edition. Addition-Wesley Publishing Company Inc., New York, 1992.
21. Philippe REIJASSE., “Aérodynamique des tuyères supersoniques,” ENSAM.2007
http://sin-web.paris.ensam.fr/IMG/pdf/Cours_ENSAM_Reijasse.pdf
22. Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A. and Vetterling W. T., “Numerical
Recipes. The Art of Scientific Computing,” Cambridge University Press,
Cambridge, 1986.
23. Ralston A. and Rabinowitz P., ‘A First Course in Numerical Analysis’, McGraw-
Hill Book Company, 1985.
24. Rhyming I. L., “Dynamique des Fluides,” Presses Polytechnique romandes,
Lausanne, Suisse, 1984.
25. Sébastien.Candel., “Mécanique des fluides : Cours,” Editions Dunod, Paris
France.1995.

26. Shapiro A. H., "The Dynamics and thermodynamics of compressible Fluid Flow," Vol. 1. The Ronald Press Company, New York, 1953.
27. Stark, R., Génin, Ch., Wagner, B. and Koschel, W. "The Altitude Adaptive Dual Bell Nozzle," German aerospace Center (DLR), 74239, Lampoldshausen, Germany 2012.
28. Zebbiche.T and Youbi .Z. "Effect of Stagnation Temperature on Supersonic Flow Parameters. Application for Air in Nozzles," The Aeronautical Journal, Vol. 111, N°1115, Jan. 2007, PP. 31- 40.
29. Zebbiche T. and Youbi Z. "Supersonic Flow Parameters at High Temperature. Application for Air in Nozzles," DGLR-2005-256, German Aerospace Congress 2005, 26-29 Sep. 2005, Friedrichshafen, Germany.
30. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Two-Dimensional Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," AIAA-2006-4699, 42SI AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Sacramento, California, July 09-12- 2006.
31. Van Wylen J. J. and Sonntag R. E., "Fundamentals of classical thermodynamics," 2ème edition, John Willey and sons, inc., 1976.
32. Zucker R. D. and Bilbarz O. "Fundamentals of Gas Dynamics," John Wiley & Sons. New Jersey. 2002.
33. Zucro M. J. and Hoffman J. D., "Gas Dynamics," Vol. 1 and Vol. 2, New York, Wiley, 1976.
34. <http://www.britannica.com/EBchecked/media/19418/De-Laval-turbine-showing-how-the-steam-is-formed-into?topicId=609552>.
35. <http://www.braeunig.us/space/propuls.htm>. Rocket and Space Technology.