

32

EXERCICES ET CAS

# 500 exercices corrigés de mathématiques

pour l'économie et la gestion

Alain Gastineau

 ECONOMICA

# Table des matières

Avant-propos.....	19
-------------------	----

## *Première partie :*

### *Les ensembles et les relations*

#### *Chapitre 1 : Les ensembles*

1. Les ensembles et les sous-ensembles.....	23
a. Les ensembles .....	23
b. Les sous-ensembles .....	24
c. L'ensemble des parties d'un ensemble .....	24
2. Opérations sur les ensembles.....	25
a. Intersection.....	25
b. Réunion .....	25
c. Complémentaire.....	27
d. Différence de deux ensembles.....	28
e. Différence symétrique .....	29

#### *Chapitre 2 : Les relations*

1. Définitions.....	31
2. Les relations d'équivalence .....	32
3. Les relations d'ordre .....	35
4. Les fonctions et les applications.....	41

#### *Chapitre 3 : Les applications*

1. Les injections .....	43
-------------------------	----

2. Les surjections .....	44
3. Les bijections .....	47

**Chapitre 4 : Le dénombrement et le raisonnement  
par récurrence**

1. Analyse combinatoire.....	51
a. Cardinal d'un ensemble .....	51
b. Le dénombrement des $p$ -listes.....	53
c. Le dénombrement des arrangements.....	54
d. Le dénombrement des combinaisons .....	55
2. Le triangle de Pascal et la formule du binôme de Newton.....	58
3. Le raisonnement par récurrence.....	59
4. Exercices supplémentaires.....	61

**Deuxième partie :**

**L'analyse**

**Chapitre 5 : La continuité**

1. Les limites.....	71
a. Les définitions.....	71
b. Les opérations sur les limites .....	73
c. Les théorèmes d'encadrement .....	74
d. Les équivalents.....	76
e. Les fonctions négligeables .....	80
2. La continuité.....	81
a. Définition.....	81
b. Propositions .....	81
c. Le prolongement par continuité.....	82
d. Les fonctions continues et monotones.....	83
3. Exercices supplémentaires.....	84

### **Chapitre 6 : Le calcul différentiel et les développements limités**

1. La dérivation .....	89
a. Définition .....	89
b. Interprétation géométrique de la dérivée .....	91
c. Techniques de dérivation .....	92
2. Le théorème des accroissements finis .....	94
a. Le théorème de Rolle .....	94
b. Les accroissements finis .....	95
3. Les dérivées successives .....	96
a. Les dérivées successives .....	96
b. Le théorème de Leibniz .....	96
c. Les fonctions de classe $C^n$ .....	97
d. La formule de Taylor .....	98
4. Les développements limités .....	99
a. Définitions et premières propriétés .....	99
b. Les opérations sur les développements limités .....	103
c. Les applications .....	109
5. Exercices supplémentaires .....	112

### **Chapitre 7 : Les études de fonctions**

1. Ensemble d'étude d'une fonction .....	119
a. Les fonctions paires .....	119
b. Les fonctions impaires .....	119
c. Axe et centre de symétrie .....	120
2. Le sens de variation .....	122
3. Etude des branches infinies .....	123
a. Les branches infinies .....	123
b. Les directions asymptotiques .....	123
c. Les courbes représentatives asymptotes .....	124

### **Chapitre 8 : Les suites**

1. Définition et comportement global d'une suite .....	131
--	-----

a.	Suites monotones.....	131
b.	Majorations et minorations.....	133
c.	Suites périodiques.....	134
2.	Le comportement asymptotique d'une suite.....	134
a.	Les théorèmes de comparaison.....	135
b.	Convergence des suites monotones.....	136
3.	Les suites récurrentes.....	138
a.	Les suites arithmétiques.....	138
b.	Les suites géométriques.....	138
c.	Les suites arithmético-géométriques.....	139
d.	Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.....	140
e.	Etudes de suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ .....	145
4.	Exercices supplémentaires.....	148

### *Chapitre 9 : Les séries*

1.	Les définitions.....	155
2.	Les séries usuelles.....	157
3.	Les séries à termes positifs.....	160
4.	Les séries absolument convergentes.....	163
5.	Exercices supplémentaires.....	163

### *Chapitre 10 : L'intégration*

1.	Intégration sur un segment.....	169
a.	Primitive d'une fonction continue.....	169
b.	Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné.....	170
c.	Le calcul intégral.....	173
d.	Les sommes de Riemann.....	175
e.	Fonctions définies par une intégrale.....	176
f.	Exercices supplémentaires.....	178
2.	Les intégrales généralisées.....	185
a.	Intégrale d'une fonction sur un intervalle dont une borne est infinie.....	185

b. Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, b[$ .....	193
c. Les propriétés .....	196
d. Exercices supplémentaires.....	197

### **Chapitre 11 : Les fonctions de plusieurs variables**

1. La topologie de $\mathbb{R}^n$ .....	203
a. Norme et distance sur $\mathbb{R}^n$ .....	203
b. Les boules de $\mathbb{R}^n$ .....	204
c. Les fermés, les ouverts et les compacts de $\mathbb{R}^n$ .....	206
2. La continuité des fonctions de plusieurs variables.....	209
a. Les généralités .....	209
b. Les limites.....	210
c. La continuité .....	212
d. Exercices supplémentaires.....	215
3. Les dérivées partielles .....	218
a. Les dérivées partielles premières.....	218
b. La différentielle de $f$ en $X_0$ .....	224
c. Les dérivées partielles d'ordre 2.....	231
d. La matrice hessienne.....	233
e. Les développements limités d'ordre 2 .....	234
4. L'optimisation sans contrainte.....	242
a. Les extremums.....	242
b. Les conditions nécessaires .....	243
c. Les conditions suffisantes.....	246
5. L'optimisation sous contraintes.....	260
a. Cas particulier .....	260
b. La matrice jacobienne des contraintes .....	261
c. Les conditions nécessaires.....	262
d. Les conditions suffisantes.....	265
6. Concavité et extremums globaux.....	274
a. Les parties convexes de $\mathbb{R}^n$ .....	274
b. Les fonctions concaves et les fonctions convexes.....	275
c. Extremum et concavité.....	278

b. Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, b[$ .....	193
c. Les propriétés .....	196
d. Exercices supplémentaires.....	197

### **Chapitre 11 : Les fonctions de plusieurs variables**

1. La topologie de $\mathbb{R}^n$ .....	203
a. Norme et distance sur $\mathbb{R}^n$ .....	203
b. Les boules de $\mathbb{R}^n$ .....	204
c. Les fermés, les ouverts et les compacts de $\mathbb{R}^n$ .....	206
2. La continuité des fonctions de plusieurs variables.....	209
a. Les généralités .....	209
b. Les limites.....	210
c. La continuité .....	212
d. Exercices supplémentaires.....	215
3. Les dérivées partielles .....	218
a. Les dérivées partielles premières.....	218
b. La différentielle de $f$ en $X_0$ .....	224
c. Les dérivées partielles d'ordre 2.....	231
d. La matrice hessienne.....	233
e. Les développements limités d'ordre 2 .....	234
4. L'optimisation sans contrainte.....	242
a. Les extremums.....	242
b. Les conditions nécessaires .....	243
c. Les conditions suffisantes.....	246
5. L'optimisation sous contraintes.....	260
a. Cas particulier .....	260
b. La matrice jacobienne des contraintes.....	261
c. Les conditions nécessaires.....	262
d. Les conditions suffisantes.....	265
6. Concavité et extremums globaux.....	274
a. Les parties convexes de $\mathbb{R}^n$ .....	274
b. Les fonctions concaves et les fonctions convexes.....	275
c. Extremum et concavité.....	278

**Troisième partie :**  
**L'algèbre linéaire et bilinéaire**

**Chapitre 12 : Les matrices**

1. Définition et opérations.....	283
a. Définition.....	283
b. Opérations sur les matrices.....	283
2. Les matrices inversibles.....	292
a. Définition.....	292
b. Calcul de l'inverse d'une matrice.....	294
3. Exercices supplémentaires.....	300

**Chapitre 13 : Les déterminants**

1. Définition et propositions.....	311
2. Utilisation du déterminant.....	319
a. Les matrices inversibles.....	319
b. Les systèmes de Cramer.....	321
3. Exercices supplémentaires.....	322

**Chapitre 14 : Les espaces vectoriels**

1. Définition.....	327
2. Les sous espaces vectoriels.....	329
3. Les familles libres, les familles génératrices et les bases.....	332
a. Les familles génératrices.....	332
b. Les familles libres.....	336
c. Les bases d'un espace vectoriel.....	340
d. La dimension.....	342
4. Exercices supplémentaires.....	348

**Chapitre 15 : Les applications linéaires**

1. Définitions et propriétés.....	357
a. Définitions.....	357

b. Propositions.....	362
2. Noyau et image d'une application linéaire.....	363
a. Définitions.....	363
b. Propositions.....	363
c. Le théorème du rang.....	366
3. Matrice d'une application linéaire.....	367
a. Définition.....	367
b. Propositions.....	369
4. Le rang d'une application linéaire, d'une matrice ou d'une famille de vecteurs.....	372
a. Le rang d'une application linéaire.....	372
b. Le rang d'une matrice.....	373
c. Le rang d'une famille de vecteurs.....	375
5. Exercices supplémentaires.....	377

### *Chapitre 16 : La réduction des endomorphismes*

1. Les changements de bases.....	383
a. Les matrices de passage.....	383
b. Les formules de changement de bases.....	383
c. Les matrices semblables.....	385
2. La réduction des endomorphismes.....	387
a. Les vecteurs propres, les valeurs propres et les sous espaces propres.....	388
b. Le polynôme caractéristique.....	388
c. Les endomorphismes diagonalisables.....	389
3. Exercices supplémentaires.....	402

### *Chapitre 17 : Les espaces euclidiens*

1. Les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques....	411
a. Les formes bilinéaires.....	411
b. Les formes quadratiques.....	411
c. Le noyau de $f$ et le cône isotrope.....	412
d. Les formes bilinéaires symétriques positives.....	413
2. Les espaces euclidiens.....	414

a.	Définitions .....	414
b.	Orthogonalité dans un espace euclidien .....	415
c.	Diagonalisation des matrices symétriques .....	416
<b>3.</b>	Les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ .....	420
a.	Définition et matrice associée à une forme quadratique .....	420
b.	Le signe d'une forme quadratique et le signe de la matrice symétrique associée .....	422

## *Quatrième partie :*

### *Les probabilités*

#### *Chapitre 18 : Les probabilités conditionnelles*

1.	Définitions et premières propriétés .....	437
2.	Les probabilités conditionnelles .....	439
a.	Événements indépendants .....	439
b.	Les probabilités conditionnelles .....	440

#### *Chapitre 19 : Les variables aléatoires discrètes*

1.	Les généralités .....	451
a.	La loi de probabilité .....	451
b.	La fonction de répartition .....	453
c.	L'espérance mathématique .....	454
d.	Les moments, la variance et l'écart-type .....	455
e.	Loi d'une variable définie par $f(X)$ .....	455
f.	Les variables aléatoires réelles centrées réduites .....	456
2.	Les lois discrètes classiques .....	456
a.	La loi uniforme .....	456
b.	La loi de Bernoulli .....	456
c.	La loi binomiale .....	457
d.	La loi géométrique .....	459
e.	La loi de Pascal .....	461

f. La loi hypergéométrique .....	462
g. La loi de Poisson .....	463
3. Exercices supplémentaires .....	444

### *Chapitre 20 : Les variables aléatoires continues*

1. Les généralités .....	471
a. La loi de probabilité d'une variable aléatoire continue .....	471
b. Le transfert .....	474
c. Les moments .....	476
2. Les lois continues classiques .....	478
a. La loi uniforme .....	478
b. La loi exponentielle .....	479
c. La loi normale .....	481
3. Exercices supplémentaires .....	486

### *Chapitre 21 : Les couples de variables aléatoires*

1. Variables aléatoires multidimensionnelles .....	489
a. La loi conjointe et les lois marginales .....	489
b. Les lois conditionnelles .....	492
2. Indépendance de variables aléatoires réelles .....	494
3. Somme de deux variables aléatoires réelles .....	495
a. Définition .....	495
b. Espérance d'une somme .....	497
c. Variance d'une somme .....	497
d. Indépendance de deux variables aléatoires .....	497
e. Coefficient de corrélation linéaire .....	498

### *Chapitre 22 : La convergence*

1. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev .....	503
2. La loi faible des grands nombres .....	505
3. La convergence en loi .....	506
4. Le théorème de la limite centrée .....	506
5. Les approximations des lois usuelles .....	508

## *Cinquième partie :*

### *Les statistiques*

#### *Chapitre 23 : Les séries à un caractère*

1.	Les fréquences .....	513
2.	Les caractéristiques de tendance centrale.....	514
a.	Le mode.....	514
b.	La médiane .....	515
c.	Les quantiles .....	517
d.	La moyenne arithmétique .....	518
3.	Les caractéristiques de dispersion .....	519
a.	La variance .....	519
b.	Les moments.....	521
4.	Les caractéristiques de concentration.....	522
a.	La médiale .....	522
b.	La courbe de concentration.....	523
c.	L'indice de Gini.....	525

#### *Chapitre 24 : Les séries à deux caractères*

1.	Les tableaux de contingence, effectifs et fréquences .....	529
a.	Les effectifs .....	529
b.	Les fréquences .....	530
2.	Les caractéristiques des séries à deux caractères.....	532
a.	Les caractéristiques des lois marginales .....	532
b.	Les caractéristiques des lois conditionnelles.....	533
c.	Les relations entre les caractéristiques marginales et conditionnelles.....	534
3.	Les moments et la covariance .....	537
a.	Les moments.....	537
b.	La covariance.....	537

4. La liaison entre deux variables.....	539
a. Ajustement affine.....	539
b. Les courbes de régression.....	548
c. Le rapport de corrélation.....	551
d. Les séries chronologiques.....	552
5. Exercices supplémentaires.....	560