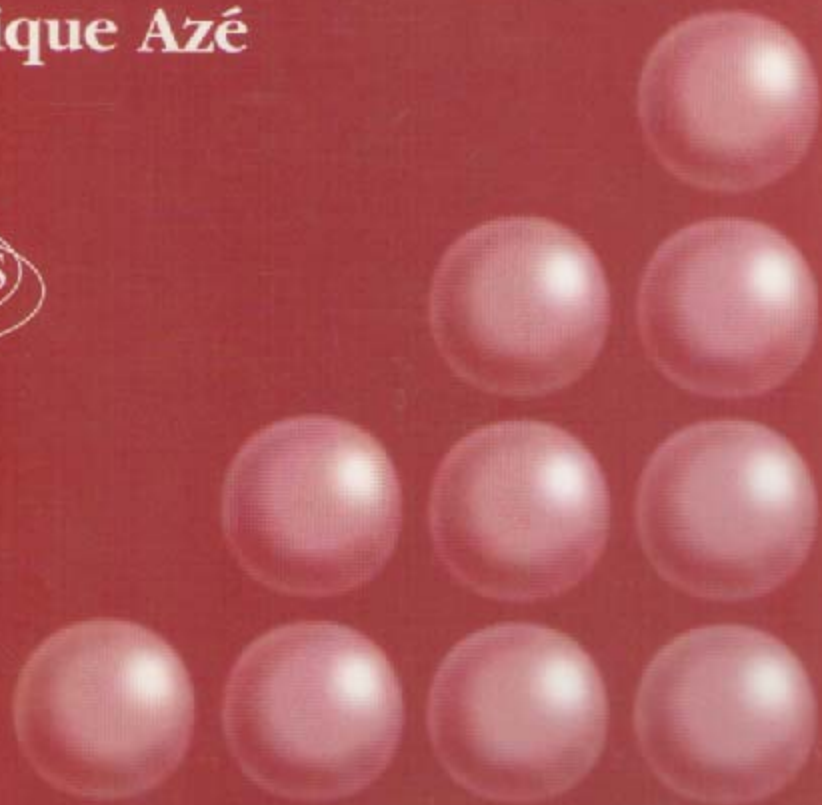


**MATHÉMATIQUES**  
**2<sup>e</sup> cycle**

Collection dirigée par  
Charles-Michel Marle  
Philippe Pilibossian

**Éléments  
d'analyse convexe  
et variationnelle**

**Dominique Azé**



# Table des matières

Notations et abréviations . . . . .	viii
Chapitre I. ANALYSE FONCTIONNELLE . . . . .	1
1 Convergence faible . . . . .	1
2 Théorèmes de séparation . . . . .	5
3 Espaces réflexifs . . . . .	12
4 Semi-continuité . . . . .	14
5 Principe variationnel d'EKELAND . . . . .	20
6 Exercices et problèmes . . . . .	22
7 Correction des exercices et problèmes . . . . .	27
Chapitre II. INTRODUCTION AUX ESPACES DE SOBOLEV . . . . .	35
1 Espaces de SOBOLEV en dimension $N$ . . . . .	35
2 Formule de GREEN . . . . .	45
3 Trace des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	49
4 Théorèmes d'injection . . . . .	51
5 Cas particulier de la dimension un . . . . .	55
6 Exercices et problèmes . . . . .	60
7 Correction des exercices et problèmes . . . . .	62
Chapitre III. FONCTIONS CONVEXES . . . . .	67
1 Fonctions convexes d'une variable réelle . . . . .	67
2 Fonctions convexes sur un espace normé . . . . .	70
3 Fonctions convexes et différentiabilité . . . . .	75
4 Exercices et problèmes . . . . .	77
5 Correction des exercices et problèmes . . . . .	80
Chapitre IV. CONJUGAISON ET SOUS-DIFFÉRENTIEL . . . . .	85
1 Transformation de LEGENDRE-FENCHEL . . . . .	85
2 Sous-différentiel . . . . .	91
3 Compléments . . . . .	94
4 Exercices et problèmes . . . . .	107
5 Correction des exercices et problèmes . . . . .	115
Chapitre V. INTRODUCTION À L'OPTIMISATION CONVEXE . . . . .	137
1 Conditions d'optimalité . . . . .	137
2 Dualité en optimisation convexe . . . . .	143
3 Compléments . . . . .	149
4 Problème de contrôle linéaire-quadratique . . . . .	154

---

5 Exercices et problèmes . . . . .	156
6 Correction des exercices et problèmes . . . . .	159
Chapitre VI. INTRODUCTION AUX PROBLÈMES AUX LIMITES . . . . .	163
1 Formulation abstraite . . . . .	163
2 Approximation . . . . .	166
3 Exemples de problèmes aux limites en dimension un . . . . .	172
4 Exemples de problèmes aux limites en dimension $N$ . . . . .	179
5 Exercices et problèmes . . . . .	185
6 Correction des exercices et problèmes . . . . .	199
ANNEXE : FONCTIONS LIPSCHITZIENNES . . . . .	221
1 Théorème de RADEMACHER . . . . .	221
2 Formule du changement de variables lipschitzien . . . . .	224
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	227
INDEX . . . . .	229

La collection *Mathématiques 2<sup>e</sup> cycle* se propose de mettre à la disposition des étudiants de licence et de maîtrise de mathématiques des ouvrages couvrant l'essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages pourront être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l'agrégation, ainsi qu'aux élèves des grandes écoles.

Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels, et de nombreux exercices. Les auteurs de ces ouvrages ont tous une grande expérience de l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur.

Les méthodes variationnelles et l'analyse convexe ont connu un très rapide développement au cours des dix ou quinze dernières années, et sont d'une grande utilité aussi bien en mathématiques pures que dans les applications. Ce livre en donne un exposé moderne, accessible aux étudiants de second cycle.



ISBN 2-7298-9751-8