

**MATHÉMATIQUES**  
*2<sup>e</sup> cycle*

**Cours et exercices corrigés**

Collection dirigée par  
**Charles-Michel Marle**  
**Philippe Pilibossian**

**Intégration et  
théorie de la mesure**

**Une approche géométrique**

**Paul Krée**

The logo for the publisher Ellipses, featuring the word "ellipses" in a serif font, enclosed within two overlapping white ellipses.



# Table des matières

|   |     |
|---|-----|
| <b>Chapitre I. PRÉLIMINAIRES</b> . . . . .                                    | 1   |
| 1 L'approche géométrique des mesures et de l'intégration . . . . .            | 1   |
| 2 Théorie des ensembles et théories axiomatiques . . . . .                    | 3   |
| 3 Comparaison des cardinaux et ensembles dénombrables . . . . .               | 6   |
| 4 La première théorie de l'intégration, la théorie de Riemann . . . . .       | 9   |
| 5 Une première approche ensembliste des mesures . . . . .                     | 13  |
| 6 Préliminaires algébriques à l'intégration . . . . .                         | 20  |
| 7 Relations entre mesures ensemblistes et pré-intégrales . . . . .            | 25  |
| 8 Énoncés d'exercices relatifs au chapitre I . . . . .                        | 29  |
| 9 Solutions des exercices . . . . .   | 33  |
| <b>Chapitre II. RÉSUMÉ DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE</b> . . . . .                    | 40  |
| 1 Topologies et espaces topologiques . . . . .                                | 40  |
| 2 Applications continues . . . . .  | 43  |
| 3 L'outil des suites convergentes . . . . .                                   | 48  |
| 4 L'outil des suites généralisées convergentes . . . . .                      | 48  |
| 5 Applications uniformément continues et espaces métriques complets . . . . . | 49  |
| 6 Espaces topologiques compacts . . . . .                                     | 52  |
| 7 Espaces topologiques localement compacts (LC) . . . . .                     | 54  |
| 8 Utilisation de fonctions réelles continues . . . . .                        | 56  |
| 9 Énoncés d'exercices relatifs au chapitre II . . . . .                       | 57  |
| 10 Solutions des exercices . . . . .  | 60  |
| <b>Chapitre III. TRIBUS ET APPLICATIONS MESURABLES</b> . . . . .              | 66  |
| 1 Application de la compacité aux mesures . . . . .                           | 66  |
| 2 Tribus et espaces mesurables . . . . .                                      | 68  |
| 3 La méthode des classes monotones. . . . .                                   | 70  |
| 4 Applications mesurables. . . . .  | 72  |
| 5 Tribu engendrée par une famille d'applications. Tribu produit. . . . .      | 74  |
| 6 Analogies, relations et différences avec la topologie générale . . . . .    | 77  |
| 7 Énoncés d'exercices relatifs au chapitre III . . . . .                      | 78  |
| 8 Solutions des exercices . . . . .   | 81  |
| <b>Chapitre IV. CONSTRUCTION DES MESURES ET DE L'INTÉGRALE</b> . . . . .      | 85  |
| 1 Prolongement des mesures définies sur des anneaux booléens . . . . .        | 85  |
| 2 Fonctionnelle d'intégration associée à toute mesure sur une tribu . . . . . | 88  |
| 3 Généralisation fonctionnelle du théorème de Caratheodory . . . . .          | 93  |
| 4 Construction et caractérisation des mesures en probabilités . . . . .       | 96  |
| 5 Preuve du théorème IV.18 . . . . .  | 102 |
| 6 Énoncés d'exercices relatifs au chapitre IV . . . . .                       | 106 |
| 7 Solutions des exercices . . . . .   | 110 |

|   |     |
|---|-----|
| Chapitre V. CALCUL INTÉGRAL RELATIF À UNE MESURE . . . . .  | 117 |
| 1 Prolongement canonique des mesures et des F.I. . . . .  | 117 |
| 2 Fonctions intégrables réelles . . . . .   | 121 |
| 3 Théorème de Fatou et théorème de la convergence dominée . . . . .                                 | 122 |
| 4 Intégration des fonctions vectorielles . . . . .  | 126 |
| 5 Continuité, dérivabilité et analyticité d'une fonction $\lambda \rightarrow I(\lambda)$ . . . . . | 129 |
| 6 Application à la fonction Gamma . . . . .   | 132 |
| 7 Énoncés d'exercices relatifs au chapitre V . . . . .  | 135 |
| 8 Solutions des exercices . . . . .   | 139 |
| Chapitre VI. CALCUL SUR LES MESURES . . . . .   | 145 |
| 1 Mesures admettant une densité . . . . .   | 145 |
| 2 Images directes de mesures . . . . .  | 146 |
| 3 Produit tensoriel de mesures . . . . .  | 148 |
| 4 Intégration par rapport à un produit tensoriel de mesures . . . . .                               | 150 |
| 5 Changement de variables dans les intégrales multiples . . . . .                                   | 154 |
| 6 Introduction à la convolution des mesures . . . . .   | 158 |
| 7 Mesures superficielles . . . . .  | 160 |
| 8 Mesures réelles et pré-intégrales réelles . . . . .   | 162 |
| 9 Énoncés d'exercices relatifs au chapitre VI . . . . .   | 165 |
| 10 Solutions des exercices . . . . .  | 168 |
| Chapitre VII. ESPACES $L^p$ . . . . .   | 176 |
| 1 Motivation et inégalités de convexité . . . . .   | 176 |
| 2 Espaces semi-normés $L^p$ de fonctions mesurables . . . . .                                       | 177 |
| 3 Espace vectoriel normé associé à tout espace semi-normé . . . . .                                 | 179 |
| 4 Espaces de Banach $L^p$ de classes de fonctions . . . . .   | 180 |
| 5 Divers types de convergence de classes de fonctions mesurables . . . . .                          | 182 |
| 6 Isomorphisme de Riesz explicitant le dual de $L^p$ si $p < \infty$ . . . . .                      | 183 |
| 7 Énoncés d'exercices relatifs au chapitre VII . . . . .  | 184 |
| 8 Solutions des exercices . . . . .   | 186 |
| Chapitre VIII. THÉORIES HILBERTIENNES . . . . .   | 190 |
| 1 Introduction . . . . .  | 190 |
| 2 Espaces hilbertiens réels . . . . .   | 190 |
| 3 Espaces hilbertiens complexes . . . . .   | 191 |
| 4 Résultats sur l'orthogonalité et le théorème de projection . . . . .                              | 194 |
| 5 Théorème de Radon-Nikodym . . . . .   | 195 |
| 6 Indications sur les probabilités en physique quantique . . . . .                                  | 197 |
| 7 Énoncés d'exercices relatifs au chapitre VIII . . . . .   | 201 |
| 8 Solutions des exercices . . . . .   | 203 |
| Quelques références bibliographiques . . . . .  | 207 |
| Index . . . . .   | 209 |

La collection *Mathématiques 2e cycle* se propose de mettre à la disposition des étudiants de licence et de maîtrise de mathématiques des ouvrages couvrant l'essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages pourront être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l'agrégation, ainsi qu'aux élèves des grandes écoles.

Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels, et de nombreux exercices. Les auteurs de ces ouvrages ont tous une grande expérience de l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur.

Les théories de la mesure et de l'intégration font partie des fondements de l'Analyse mathématique. Plusieurs présentations peuvent en être données : on peut prendre pour point de départ la notion de mesure ensembliste, ou celle de mesure de Radon, ou encore de celle de mesure de Daniell. L'ouvrage du professeur Paul Krée explicite les aspects géométriques de ces théories, et propose ainsi une approche unifiée et progressive. Il comporte de nombreux exercices corrigés, parfaitement adaptés à cette présentation.



ISBN 2-7298-6718-X