

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur**  
**et de la recherche Scientifique**



**Université de Blida**  
**Faculté de technologie**  
**Institut de l'Aéronautique et des études spatiales**

*En Vue de l'Obtention du Diplôme Master*  
*Option : Avionique*

*Thème :*

---

***SIMULATION ET COMMANDE DES***  
***SYSTEMES CHAOTIQUES***

---

*Réalisé par :*

**M. Mesdoua Mohamed salim**  
**M .Hammoum Hamza**

*Encadré par :*

**Dr. DILMI Ismail**

*Promotion 2013*

## Remerciements

*Nous tenons à remercier monsieur Dilmi Ismail, qui a encadré nos travaux dont l'aide efficace et précieuse ce qui nous a permis de mener à bien ce travail, ainsi que tous nos enseignants qui nous ont suivi tout au long de nos études.*

*Nous tenons aussi, à adresser l'expression de notre sincère reconnaissance aux membres du jury d'examen, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.*

*Nos vifs remerciements vont aussi à nos familles qui nous ont témoignés un soutien moral lors de la réalisation de ce travail.*

*Sans oublier tous nos camarades de l'université de Blida.*



## **DEDICACES**

*A ma mère : l'amour de ma vie.  
A mon cher père.*

*A ma grande mère*

*A mes chers frères : Ahmed & Younes.*

*A mes chères sœurs.*

*A mes neveux Raouf, Tamer, Anes et Abd el kader  
A ma niece Soundes.*

*A tous mes amis*

*A tous mes amis et collègues de ma promotion.*

*Je dédie ce travail*

*Hamza*





## **DEDICACES**

*A ma mère : l'amour de ma vie.*

*A mon cher père.*

*A mes chers frères : Abdou, Fouad et yacine*

*A mes chères sœurs*

*A tout ma famille Liela, Nawel, Omar Boukhatem, sidali,*

*A tous mes  
amis Fouad, Adel, Hichem, Miloud, Reda, Hamza, Chrife, Fazile ...*

*A tous mes amis et collègues de ma promotion.*

*Je dédie ce travail*

**SALIM**



# Table des matières

Remerciements

Dédicace

Table des matières

Table des figures

Résumé

## I. L'état de l'art

I.1 Introduction .....	1
I.2 Définitions et notions.....	4
I.2.1 Systèmes dynamiques.....	4
I.2.2 La théorie du chaos .....	4
I.3 Conclusion.....	7
I.4 La suite du mémoire est organisée comme suit.....	7

## II. Modélisation mathématiques du chaos

II.1 Introduction.....	8
II.2 Représentations mathématiques des systèmes dynamiques.....	8
II.3 Systèmes non linéaires et points d'équilibres.....	9
II.3.1 description mathématique du système non linéaire .....	9
II.3.2 Points d'équilibres .....	9
II.4. Le pendule simple.....	9
II.5. Pendule double.....	11
II.6 Système de Lorenz .....	14
II.7 Oscillateur de Duffing.....	15

### **III. La commande linéaire et non-linéaire**

<b>III .1 introduction.....</b>	<b>17</b>
<b>III.2 Systèmes linéaires.....</b>	<b>17</b>
<b>III.2.1Stabilité.....</b>	<b>18</b>
<b>III.2.2 Commande des systèmes linéaires MIMO.....</b>	<b>19</b>
<b>III.3 Le système non linéaire.....</b>	<b>19</b>
<b>III.4 La commande PID .....</b>	<b>21</b>
<b>III.4.1L'action proportionnelle.....</b>	<b>21</b>
<b>III.4.2 L'action intégrale.....</b>	<b>22</b>
<b>III.4.3L'action dérivée .....</b>	<b>22</b>
<b>III.4.4 Propriétés des actions PID .....</b>	<b>23</b>
<b>III.5 La commande par régime glissant .....</b>	<b>23</b>
<b>III.5.1 La surface de glissement .....</b>	<b>24</b>
<b>III.5.2La fonction signe .....</b>	<b>26</b>
<b>III.5.3 Phénomène de réticence .....</b>	<b>26</b>
<b>III.5.4 La fonction de saturation.....</b>	<b>27</b>
<b>III.5.5 Condition de stabilité .....</b>	<b>28</b>

### **IV. Résultat de simulation**

<b>IV.1 Introduction.....</b>	<b>29</b>
<b>IV.2 Description du programme utilisé pour résoudre ces équations.....</b>	<b>29</b>
<b>IV.3 Simulation en boucle ouverte.....</b>	<b>29</b>
<b>IV.3.1 Simulation en boucle ouvert du pendule simple.....</b>	<b>29</b>
<b>IV.3.2 Simulation en boucle ouvert du pendule double .....</b>	<b>31</b>
<b>IV.3.3 Simulation en boucle ouvert du système de LORENZ.....</b>	<b>34</b>
<b>IV.3.4 Simulation en boucle ouvert du l'oscillateur de DUFFING.....</b>	<b>35</b>
<b>IV.3.5 Simulation de la commande PID .....</b>	<b>36</b>

IV.3.5.1	La commande de pendule simple par la méthode de PID.....	36
IV.3.5.2	La commande de pendule double par la méthode PID.....	38
IV.3.6	La commande de système de LORENZ par la méthode PID.....	43
IV.3.7	La commande de l'oscillateur de DUFFING par la méthode PID.....	44
IV.4	Simulation de la commande vss par regime glissant.....	45
IV.4.1	La commande de pendule simple en régime glissant .....	45
IV.4.1.1	Synthèse de loi de commande .....	45
IV.4.1.2	Annulation du phénomène de réticence .....	47
IV.4.2	La commande de pendule double en régime glissant .....	49
IV.4.2.1	Synthèse de loi de commande .....	49
IV.4.2.2	Annulation du phénomène de réticence .....	52
IV.5	La commande de système de LORENZ en régime glissant .....	54
IV.5.1	Synthèse de loi de commande.....	54
IV.5.2	Test de stabilité au sens de Lyapunov.....	55
IV.5.3	Simulation en utilisant la fonction sign .....	56
IV.5.4	Simulation après l'utilisation de la fonction de saturation .....	57
IV.6	La commande de l'oscillateur de DUFFING en régime glissant .....	59
IV.6.1	Synthèse de loi de commande .....	59
IV.6.2	simulation en utilisant la fonction sign.....	60
IV.6.3	simulation en utilisant la fonction de saturation.....	61
IV.7	Conclusion.....	63

**Résumé :**

Le travail réalisé est basé principalement sur la simulation et la commande de stabilité des systèmes chaotiques. Ces modèles sont des systèmes non linéaires, multi variables, instable et très sensible aux conditions initiales. Pour traiter ce sujet, on a commencé par un état de l'art sur les systèmes chaotiques, puis on a présenté leur modélisation mathématique afin de simuler leur comportement en boucle ouvert (réponse temporelle et plan de phase), par la suite, une synthèse de loi de commandes linéaires PID et non linéaires VSS par régime glissant est présenté. En fin une simulation sous MATLAB/SIMULINK a été dégagé pour voir le comportement des systèmes chaotiques envisagés en boucle ouvert et en boucle fermée.

**Abstract:**

This work investigates the problem of simulation and control for the chaotic systems. This models are multivariable nonlinear systems, unstable and very sensitive to initial conditions. To address this issue, a Survey for the chaotic system was presented, then a mathematical modeling was presented to simulated behavior in open loop (time response and phase diagram). After that, linear control PID and nonlinear control VSS with sliding mode was synthesized. In the end, simulation with MATLAB/SIMULINK was used to simulate the response of the chaotic system in open and closed loop.



**I.1 INTRODUCTION :**

- **L'origine et le développement de la théorie du chaos :**

Le mot «Chaos» signifie turbulence ou un mouvement irrégulier ou désordonné.

Dans la terminologie scientifique moderne, chaos» se réfère à un phénomène pseudo-aléatoire généré dans un système déterminé.

Henri Poincaré est le premier connu à entrevoir la possibilité d'un « chaos »

À la fin du 19ème siècle, lors que Poincaré a étudié la stabilité du système solaire, il a trouvé que dans le cas de trois(3) masses en mouvement sous la loi de Newton, ces masses peuvent montrer un mouvement très compliqué, ce type de mouvement dépend principalement aux conditions initiales.

Birkhoff développait des méthodes géométriques créées par Poincaré, comme «  $\omega$  » limite set et «  $\alpha$  » limite set.

Au début du 20eme siècle, en électrique, le système oscillateur considéré comme un système chaotique a été largement étudié à cause de son rôle dans le développement de la technologie du radio, radar, et les lasers.

Le succès de la technologie de simulation à montrer de nouveaux outils en mathématique. Les pionniers dans ce domaine comprennent : van der Pol, Andronov, Littlewood, Cart Wright, Levinson, et Smale. Spécialement, année 1950, une complexité non connu au paravent a été révélé par Cartwright, Littlewood, et Levinson pour montrer qu'un oscillateur non linéaire forcé a un nombre infini de périodes différentes. Smale à fait une étendue de ces travaux pour généraliser ces phénomènes avec sa carte « horseshoe ».Mwhile à développer les méthodes géométriques de Poincaré pour mieux approfondir et comprendre la machine spéciale. Le gain mathématique obtenu c'est le théorème KAM(Kolmogorov, Arnold, and Moser) en 1963. Ce théorème nous indiquait que le système hamiltonien reste hamiltonien lorsqu'il fait objet d'une petite perturbation qui donne une réponse que le système solaire est stable à un degré près.

Lorenz (météo logiste américain), a fait une importante contribution en 1963 lorsqu'il a utilisé un ordinateur pour étudier un nombre d'équations différentielles ordinaires. Ces équations sont réduites à partir des équations aux dérivées partielles qui décrivent le mouvement turbulent de l'atmosphère. Il à trouver qu'un différent petit changement dans les conditions initiales conduit à des résultats très différents, pour une très petite période est appelé «sensitive dépendance on initial conditions » C'est grande découverte car les scientifiques traditionnels à l'époque croit que deux trajectoires démarrent de même point initial doivent être convergés dans le temps. A partir de principe d'incertitude en mécanique quantique . On sait que personne ne peut déterminer la position de la vitesse exacte d'une particule au même temps. Cela veut dire que si un système est sensible aux

conditions initiales, donc personne ne prédira son comportement dans le temps puis qu'on ne peut pas éviter les erreurs de mesure pour les conditions initiales.

Lorenz à utiliser le terme "effet papillon" pour référer aux phénomènes sensibles aux conditions initiales. Il a expliqué que ce phénomène signifie qu'un papillon qui vole en Australie à l'instant 't' peut affecter un changement de climat aux États Unis un moi plus tard.

En 1970, c'est l'année de boom pour le chaos. En 1971, Ruelle et Takens proposent une nouvelle théorie de chaos pour l'écoulement turbulent dans les fluides, basée sur les attracteurs étranges.

Le mot «Chaos» est introduit en première lieu par TY Li et J.York en 1975 pour distinguer les systèmes qui ont un mouvement aperiodique plus compliqué par rapport au système periodique équilibré, ou d'un motion quasi periodique. Mais, en fait, leur travail est un cas particulier du théorème obtenu par Sharkovskii en 1964, laquelle en raison politique a été non connu par les mathématiciens occidentaux pour une longue durée.

En 1976, May a montré comment le « chaos » se développe en itération mathématique dans la dynamique des populations, Il a écrit un article sur l'importance d'étudier des systèmes non linéaires simples pour contrebalances, les souvent trompeuses initiations encouragé par l'éducation traditionnelle. Ensuite, viens une grande surprise découverte, de la part du physicien Feigenbaum dite qu'il y a certaines lois universelles qui régissent la transition de régulière à un comportement chaotique ; grosso modo, plusieurs systèmes peuvent devenue chaotique par la même manière. Sa recherche établit un lieu entre le chaos et la phase transition et attire les physiciens d'étudie de la dynamique.

Mandelbrot, construit la théorie «géométrie fractale» à la fin des années 1970, et à désigner la première figure de Mandelbrot.

La théorie «géométrie fractale» généralise la notion de dimension des nombres entiers aux nombres réels, et devient un outil puissant pour caractériser la structure complexe de l'attracteur étrange.

Au début des années 1980, les ordinateurs deviennent un outil puissant, utilisé pour aider les chercheurs à visualiser les structures complexes des attracteurs étranges, calculent les indices caractérisant un système chaotique.

Au milieu des années 1980, beaucoup des chercheurs faises attention à comment contrôler le chaos, compris la suppression, la synchronisation et chosification

Voici le résumé de l'historique et les applications du chaos :

1890	Le roi Oscar II de Suède octroie un prix au premier chercheur qui pourrait déterminer et résoudre le problème des n-corps des orbites des corps célestes et ainsi prouver la stabilité du système solaire. jusqu'à ce jour, le problème n'a pas été résolu.
1890	Henri Poincaré gagne le premier prix du Roi Oscar II .Etant le plus proche à résoudre le problème de n-corps, il a découvert que l'orbite de trois corps célestes agissantes l'une sur l'autre peut engendrer un comportement instable et imprévisible. Ainsi, le chaos est né (mais pas encore mentionné !).
1963	Edward Lorenz découvre le premier système chaotique dans la météo ou encore appelé attracteur étrange.
1975	Tien-Yien Li et James A.Yorke ont présenté pour la première fois le terme «chaos » dans un article intitulé "Périodethreemplies chaos"
1978	Mitchell feigenbaum introduit un nombre universel associé au chaos.
1990	Edward Ott ,CelsoGrebogi et James A.York. Introduisent la notion de contrôle du chaos.
1990	Lou Pecora. Synchronisation des systèmes chaotique.

**Tableau I.1** :application du chaos

Contrôle	Première application du chaos est le contrôle du comportement irrégulier dans les circuits et les systèmes.liste des divers applications est incluse dans le tableau 3
Synchronisation	Communication sécurisé, cryptage, radio
Traitement d'information	Codage, décodage et stockage d'information dans des systèmes chaotiques,tel que les éléments de mémoires et les circuits. Reconnaissance de forme
Prédiction à court terme	Les maladies contagieuses, température, économie

**Tableau I.2** : Domaine d'application du chaos

Engineering	Contrôle de vibration, stabilisation des circuits, réactions chimiques, turbines, étages de puissance, lasers, combustion, et beaucoup plus
Ordinateurs	Commutation des paquets dans des réseaux informatiques. Cryptage. contrôle du chaos dans des systèmes robotiques.
Communications	Compression et stockage d'image .conception et management des réseaux d'ordinateurs.
Médecine et biologie	Cardiologie, analyse du rythme du cœur(EEG), prédiction et contrôle d'activité irrégulière du cœur
Management et finance	Prévision économiques, analyse financière, et prévision du marché

**Tableau I.3** : Historique du chaos

**I.2 Définitions et notions :****I.2.1 Systèmes dynamiques :**

D'une manière, générale, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme « système » fait référence à un ensemble de variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. L'ensemble des variables d'état d'un système permet de construire un espace mathématique appelé « espace des phases ».

En mathématiques, en physique en ingénierie un système dynamique et un système "classique" qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- Causale (c .à. d que son avenir ne dépend que des phénomènes du passé ou du présent).
- Déterministe (c .a. d qu'une "condition initiale" donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur a un et un seul futur possible).

Les systèmes "bruités" sont exclus car intrinsèquement stochastique et relevant de la théorie des probabilités.

On définit un système dynamique par un triplet  $(X, T, f)$  constitué de l'espace d'état  $X$ , du domaine temporel  $T$ , et d'une application de transition d'état

«  $F : X * T \rightarrow X$  » qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant. [10]

**I.2.2 La théorie du chaos :****A. Introduction au chaos :**

Newton, grâce à ses équations, disait qu'il était possible de connaître le passé, le présent et le futur. Ce qui n'est malheureusement pas vrai pour les systèmes très petits : comme la mécanique quantique ; et les systèmes complexes : c'est la théorie du chaos.

On attribue la première étude du chaos au météorologue Edward Lorenz (1960-1970). En fait c'est le mathématicien français Henri Poincaré qui, il y a un siècle, a lancé la notion de chaos.

Poincaré avait déjà prédit le côté imprévisible de certains systèmes : « Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard ? ».

**B. Définitions du chaos :**

Comme pour beaucoup de limites en science, il n'y a aucune définition standard du chaos. Néanmoins, les dispositifs typiques du chaos incluent :

- ❖ La non linéarité. Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.

- ❖ déterminisme. Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes).
- ❖ La sensibilité aux conditions initiales. De très petits changements sur l'état initial peuvent mener un comportement radicalement différent dans son état final.
- ❖ L'imprévisible. En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

Le tableau suivant donne une comparaison entre les mouvements réguliers et chaotique :

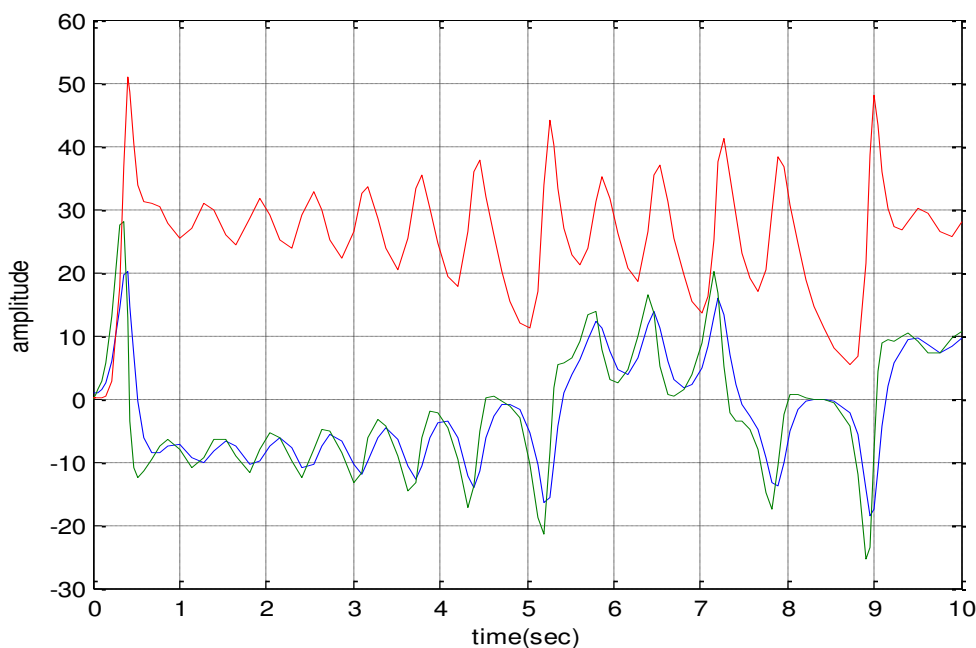
Mouvement régulier	Mouvement chaotique
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Périodique</li> <li>• Prédicible</li> <li>• De simple géométrie</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Irrégulier</li> <li>• Imprédictible</li> <li>• De géométries compliquées</li> </ul>

**Tableau I.4** comparaison entre mouvement régulier et mouvement chaotique

**C. Identification du chaos et ses différents aspects**

- ❖ Il y a deux façons d'identifier un comportement chaotique.
  - **La dépendance aux conditions initiales**

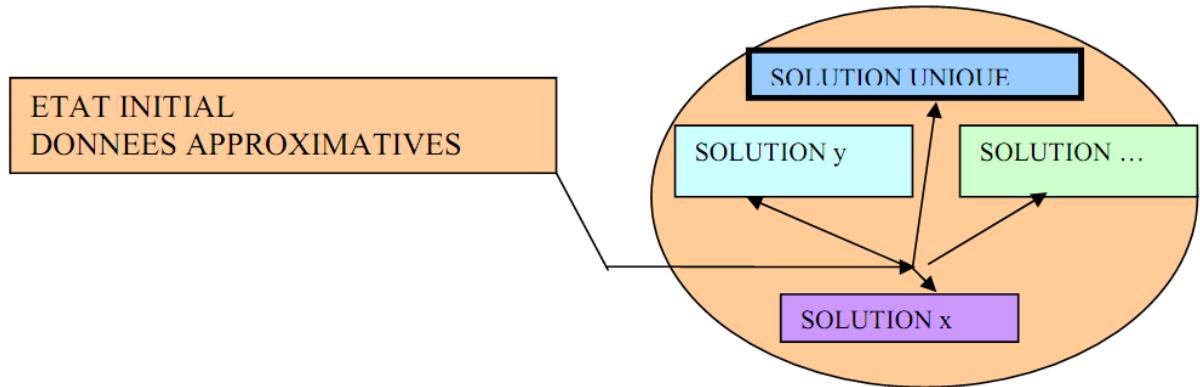
- Un système chaotique est caractérisé par sa dépendance aux conditions initiales. Edward Lorenz a prouvé qu'une infime variation ou imprécision dans les conditions initiales menait à des prévisions météorologiques complètement opposées au bout certain temps (de nos jours on arrive à faire des prévisions sur 8 jours mais au-delà de ce délai nous sommes incapables de certifier nos résultats).



**Figure.I.1** : représentation d'un mouvement chaotique

- La divergence des deux courbes calculées par Lorenz (présentées ci-dessus) est due à une différence sur la 4ème décimale des conditions initiales.
- Cette dernière variation est plus connue sous le nom commun d'effet papillon.

Pour un système quelconque il n'y a qu'une solution. Mais si on a des données initiales approximatives on obtiendra des solutions multiples (voir le schéma ci-dessous).



**Figure I.2** : Schéma représentant la dépendance aux conditions initiales

Il suffit souvent que l'écart soit de la taille d'un atome entre deux positions initiales pour que les mouvements soient au bout d'un certain temps complètement différents.

- **La non périodicité d'un mouvement chaotique**

Supposons que les conditions initiales soient strictement identiques. Ce qui n'est pas réalisable pour un système réel mais qui est possible pour une simulation. Les trajectoires de deux pendules seront alors parfaitement superposées. Le chaos intervient alors dans le non périodicité du mouvement.

#### **D. La différence entre chaos et phénomènes aléatoires :**

La différenciation entre chaotique et aléatoire nous a paru le point le plus important de la compréhension du chaos. En effet, on a toujours tendance à considérer qu'un phénomène tire son imprédictibilité du nombre trop importants de paramètres en jeu dans sa description, ce qui nous pousse à en donner une approche probabiliste qui, peut être parfaitement satisfaisante, garde par définition une marge d'aléatoire. Le mouvement brownien en est un exemple.

En ce qui concerne le chaos, il n'en est rien. En effet, un phénomène chaotique, comme nous l'avons vu, est décrit de manière déterministe, c'est à dire en particulier avec des outils mathématiques qui en permettent une approche précise et a priori "certaine". En réalité, il faut constater qu'aucun amalgame n'est possible entre chaos et aléatoire puisque même une approche probabiliste de l'évolution d'un système chaotique n'aboutirait à rien. En effet, même si l'on connaît parfaitement l'évolution d'un système dans des conditions initiales données, pour des conditions initiales excrémentes proches, toutes les évolutions sont encore "équivalentes" : l'approche probabiliste n'apporte rien.

De manière concrète, il existe une définition rigoureuse qui permet de déterminer mathématiquement qu'un système est chaotique, mais son expression est assez complexe.

On peut dire en toute rigueur que, de manière générale, la part d'imprévisible est en réalité assez faible pour un système probabiliste par rapport à un système chaotique, pour lequel, au contraire, bien que le déterminisme soit total, la prévisibilité est nulle.

### **I.3 Conclusion :**

Dans ce chapitre nous présentons les effets dynamiques de non linéarités, leurs représentations mathématiques, ainsi que quelques propriétés du chaos

### **I.4 La suite du mémoire est organisée comme suit :**

- Nous présentons dans le second chapitre quelques modèles les plus importants dans le chaos, comme Lorenz le circuit de Chua, et l'oscillateur de Duffing, puis la modélisation du pendule simple et double, prenant en considération l'amortissement et le forçage appliqué sur le pendule pour arriver sur un modèle généralisé.
- Dans le troisième chapitre nous présentons la synthèse des lois de commande PID et VSS
- Dans le quatrième chapitre, nous exposons la simulation des deux pendules simple et double et leurs résultats sous forme de plan de phase puis le programme du modèle de LORENZ et de DUFFING

## Chapitre II : modélisation mathématiques du chaos:

---

### II.1.introduction :

Pour bien comprendre le mouvement d'un système quelconque, il faut passer par une représentation mathématique et représenté l'aspect modélisation en utilisant des théorèmes de la physique (Newton, Lagrange, L'énergie). Ce chapitre est consacré à la modélisation mathématique de quelque modèles que nous avons choisi afin de représenté le comportement non linéaire et chaotique de ces modèles ci dessus.

### II.2Représentations mathématiques des systèmes dynamiques :

Un système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamique et statique, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques, encore appelés paramètres du système, sont fixes.

Dans le cas où le composant "temps" est continue le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, p) \text{ Ou } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r \quad (\text{II.1})$$

Dans le cas où le temps est discret le système dynamique est présenté par une application itérative.

$$x_{k+1} = f(x_k, p), x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, K= 1, 2, 3 \quad (\text{II.2})$$

OU  $p$  un paramètre, et  $t \in T$ , le domaine temporel.

Lorsque le temps  $t$  ou l'indice  $k$  apparaissent explicitement dans les relations (II,1) et (II.2) le système est dit non autonome. En général, c'est un inconvénient majeur pour la résolution numérique et il est préférable de s'en affranchir.

Par un changement de variables approprié, on peut transformer un système non autonome avec  $x \in \mathbb{R}^n$  en système autonome avec  $x_k \in \mathbb{R}^{n+1}$  ;

On appelle système dynamique un système dont l'évolution temporelle peut être décrite par l'équation générale

$$\dot{x} = f(x_e) \text{ ou } x(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad (\text{II.3})$$

Connaissent l'état initial du système ; on peut donc prédire son évolution future en tout instant. Un tel système est donc parfaitement déterministe : il n'y a point de hasard en lui.



## Chapitre II : modélisation mathématiques du chaos:

---

Parmi les exemples, citons la trajectoire d'une masse, l'évolution donnée, l'intensité d'un faisceau laser. [11]

### II.3 systèmes non linéaires et points d'équilibres :

#### II.3.1 description mathématique du système non linéaire :

Un système non linéaire peut toujours être décrit par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x, t), x(t) = x_0 \quad (\text{II.4})$$

Où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système, et  $f$  est la fonction non linéaire.

#### II.3.2 Points d'équilibres :

Il est possible pour une trajectoire d'un système de correspondre à un seul point singulier, tel que ce point représente un point d'équilibre.

$X_e$  est un point d'équilibre du système (II.4) si :

$$f(x, t) = 0, \forall t \quad (\text{II.5})$$

Pour la plus part des cas, on considère que l'origine de l'espace d'état est un point d'équilibre  $X_e=0$

### II.4. Le pendule simple

Soit un pendule compose d'une tige de masse négligeable et de longueur  $l > 0$  à l'extrémité de laquelle est placée une masse  $m$ . On note  $\theta$  l'angle de la tige avec la verticale. (voir figure II .1)

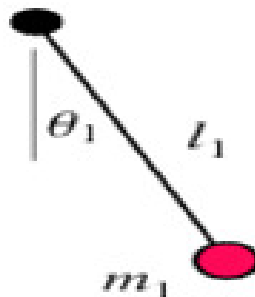


Figure (II.1):pendule simple à modélisé

## Chapitre II : modélisation mathématiques du chaos:

---

On calcule d'abord le lagrangien et les équations du mouvement à partir de la définition de l'équation de Lagrange du pendule illustrée à la figure (II,1)

Les coordonnées de la masse  $m$  dans le repère  $(x, y)$  sont données par :

$$\begin{cases} x = l \sin(\Theta) \\ y = -l \cos(\Theta) \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Puis Les dérivées temporelles sont :

$$\begin{cases} \dot{x} = l \dot{\Theta} \cos(\Theta) \\ \dot{y} = l \dot{\Theta} \sin(\Theta) \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

L'Energies cinétiques est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (\text{II.8})$$

Avec 
$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (\text{II.9})$$

Alors 
$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (\text{II.10})$$

Se qui donne en fonction de  $\Theta$  :

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\Theta}^2 \quad (\text{II.11})$$

Energie potentielle est donnée par :

$$U_g = m g y \quad (\text{II.12})$$

Avec  $y = -l \cos(\Theta)$

On aura donc 
$$U_g = -m g l \cos(\Theta) \quad (\text{II.13})$$

Utilisant le Lagrangien du système est écrit comme suit :

$$L = T - U$$

Soit :

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\Theta}^2 + m g l \cos(\Theta) \quad (\text{II.14})$$

L'équation de Lagrange du mouvement est donnée par :

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} \right)$$

## Chapitre II : modélisation mathématiques du chaos:

après avoir développé de l'équation du pendule est donnée par :

$$\ddot{\Theta} = -\frac{g}{l} \sin(\Theta) \quad (\text{II.15})$$

Se qui représente une équation d'un système non linéaire

Si nous introduisons un amortissement dans le système, l'équation devient alors comme suit :

$$\ddot{\Theta} = -\frac{g}{l} \sin(\Theta) + \lambda \dot{\Theta} \quad (\text{II.16})$$

Où  $\lambda$  est le coefficient d'amortissement.

### II.5. Pendule double

Le double pendule fournit un système idéal pour étudier le mouvement chaotique.

Le système est relativement simple, mais un changement infinitésimal petit des conditions initiales du pendule produit une trajectoire rigoureusement différente pour les énergies qui montrent le mouvement chaotique.

Soit un pendule double de masses  $m_1$ ,  $m_2$ , et de longueurs  $l_1, l_2$  comme le montre la figure(II,2) :

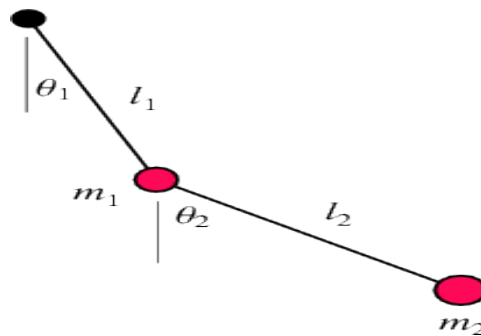


Figure (II.2) : pendule double

Le système possède deux degrés de liberté donc deux coordonnées :

$$q_1 = \Theta_1 \text{ et } q_2 = \Theta_2$$

Pour la masse  $m_1$ , les coordonnées  $(x_1, y_1)$  sont :

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin(\Theta_1) \\ y_1 = -l_1 \cos(\Theta_1) \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Calculons de suite les dérivées temporelles des coordonnées  $(x_1, y_1)$  sont:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = l_1 \dot{\Theta}_1 \cos(\Theta_1) \\ \dot{y}_1 = l_1 \dot{\Theta}_1 \sin(\Theta_1) \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

La masse  $m_2$  est représentée par les coordonnées  $(x_2, y_2)$  comme suit :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - l_1 \dot{\Theta}_1 \cos(-\Theta_1) \\ y_2 = y_1 + l_1 \dot{\Theta}_1 \sin(-\Theta_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = l_1 \sin(\Theta_1) + l_2 \sin(\Theta_2) \\ y_2 = l_1 \cos(\Theta_1) - l_2 \cos(\Theta_2) \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Les dérivées temporelles des coordonnées  $(x_2, y_2)$  sont:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = l_1 \dot{\Theta}_1 \cos(\Theta_1) + l_2 \dot{\Theta}_2 \cos(\Theta_2) \\ \dot{y}_2 = l_1 \dot{\Theta}_1 \sin(\Theta_1) + l_2 \dot{\Theta}_2 \sin(\Theta_2) \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

➤ Energies cinétiques:

Connaissant l'expression de vectrices positions en fonction des coordonnées de chaque masse, on peut déterminer l'expression des énergies cinétiques  $T_1, T_2$  des deux masses en fonction de leurs coordonnées.

L'énergie cinétique du système est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\text{Soit} \quad T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (\text{II.21})$$

En fonction des coordonnées générales l'équation (II.9) devient :

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\Theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1 \dot{\Theta}_1)^2 \cos^2(\Theta_1) + (l_2 \dot{\Theta}_2)^2 \cos^2(\Theta_2) \\ & + 2l_2 \dot{\Theta}_2 l_1 \dot{\Theta}_1 \cos(\dot{\Theta}_1) \cos(\dot{\Theta}_2) + (l_1 \dot{\Theta}_1)^2 \sin^2(\Theta_1) + l_2 \dot{\Theta}_2 l_1 \dot{\Theta}_1 \sin^2(\Theta_2) \\ & + 2l_2 \dot{\Theta}_2 l_1 \dot{\Theta}_1 \sin(\dot{\Theta}_1) \sin(\dot{\Theta}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\Theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 ((l_1 \dot{\Theta}_1)^2 + (l_2 \dot{\Theta}_2)^2 + m_2 l_2 \dot{\Theta}_2 l_1 \dot{\Theta}_1 (\cos(\dot{\Theta}_1) \cos(\dot{\Theta}_2) \\ & + (\sin(\dot{\Theta}_1) \sin(\dot{\Theta}_2))) \end{aligned}$$

Finalement :

## Chapitre II : modélisation mathématiques du chaos:

---

$$T = \frac{1}{2}m_1(l_1\dot{\Theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2((l_1\dot{\Theta}_1)^2 + (l_2\dot{\Theta}_2)^2 + m_2l_2\dot{\Theta}_2l_1\dot{\Theta}_1(\cos(\dot{\Theta}_1 - \dot{\Theta}_2)))(II.22)$$

➤ Energies potentielles :

En exprimons les énergies potentielles  $U_g$  des deux masses à l'aide de leurs coordonnées. On en déduit l'expression suivante :

$$U = U_g = -m_1gl_1 \cos(\Theta_1) - m_2g(l_1 \cos(\Theta_1) + l_2 \cos(\Theta_2))(II.23)$$

Les frottements:

Les frottements peuvent être introduits dans le formalisme lagrangien en introduisant un potentiel supplémentaire.

$$D = \frac{1}{2}(B_1 * \dot{\Theta}_1^2) + \frac{1}{2}(B_1 * (\dot{\Theta}_1 - \dot{\Theta}_1)^2)(II.24)$$

Lagrangien du système :

Vu tout ce qui a été calculé, il est facile de déterminer le lagrangien  $L$  du système :

$$L = T - U \quad (II.25)$$

Afin de connaître les deux équations du mouvement  $\Theta_1(t)$  et  $\Theta_2(t)$ , il est nécessaire de résoudre le système d'équation dit de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \Theta_i} + \frac{\partial U}{\partial \Theta_i} + \frac{\partial D}{\partial \Theta_i} = 0 \quad (II.26)$$

On développe cette équation en dérivant  $T$  et  $U$  par rapport à  $(t, \Theta_1, \Theta_2)$

$$\frac{\partial T}{\partial \Theta_1} = -m_2l_1l_2\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2 \sin(\Theta_1 - \Theta_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \Theta_2} = m_2l_1l_2\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2 \sin(\Theta_1 - \Theta_2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Theta_1} = m_1gl_1 \sin(\Theta_1) + m_2gl_1 \sin(\Theta_1) = (m_1 + m_2)gl_1 \sin(\Theta_1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Theta_2} = m_2gl_2 \sin(\Theta_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\Theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\Theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\Theta}_2 + \cos(\Theta_1 - \Theta_2)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \\
 &\quad - \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + [m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \ddot{\theta}_2 \\
 &\quad + [m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \dot{\theta}_2^2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\
 &\quad + m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
 \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1} &= \beta_1 \dot{\theta}_1 + \beta_2 \dot{\theta}_1 - 2\beta_2 \dot{\theta}_2 = \beta_1 \dot{\theta}_1 + \beta_2 \dot{\theta}_1 - \beta_2 \dot{\theta}_2 \\
 \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_2} &= \beta_2 \dot{\theta}_2 - \beta_2 \dot{\theta}_1 = \beta_2 \dot{\theta}_2 + \beta_2 \dot{\theta}_1 \tag{II.27}
 \end{aligned}$$

Finalement on trouve l'équation du mouvement qui est donnée par :

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \\
 &\begin{bmatrix} m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_1 + \beta_1 \dot{\theta}_1 + \beta_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_2 + \beta_1 \dot{\theta}_1 + \beta_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\tag{II.28}
 \end{aligned}$$

## II .6Le modèle de Lorenz :

En 1963, Edward Lorenz a développé un modèle mathématique simplifié de convection atmosphérique. Le modèle est un système de trois (3) équations différentielles ordinaires actuellement connus comme les équations de Lorenz donné par:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\
 \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \tag{II.29} \\
 \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z
 \end{aligned}$$

Avec  $x$  ,  $y$  , et  $z$  compenser l'état du système,  $t$  est le temps, et  $\sigma$  ,  $\rho$  ,  $\beta$  sont des paramètres du système.

## Chapitre II : modélisation mathématiques du chaos:

On suppose généralement que les paramètres  $\sigma$ ,  $\rho$ , et  $\beta$  sont positifs. Lorenz a utilisé les valeurs  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  et  $\rho = 28$ . Le système présente un comportement chaotique de ces valeurs. La "dépendance sensible aux conditions initiales" trouvée par Lorenz est maintenant connu affectueusement «l'effet papillon» de Lorenz.

Les travaux de Lorenz ont été largement ignoré pendant dix ans, mais peut désormais être considéré comme un début prémonitoire à l'étude du chaos.

### II.7 Oscillateur de Duffing :

L'oscillateur de duffing fait partie des systèmes modèles qui permettent d'étudier une dynamique non-linéaire. il correspond a une équation différentielle non-linéaire de la forme :

$$\ddot{x} = x - x^3 - \gamma\dot{x} + f\cos\omega t \quad (\text{II.30})$$

Le terme  $-\gamma\dot{x}$  est le terme de dissipation où la constante d'amortissement  $\gamma \geq 0$ , et il est également connu comme un modèle simple qui donne le chaos. Enfin, le terme de forçage est  $f\cos\omega t$ . Le premier point consiste à réaliser que cet oscillateur a un espace de phase à trois (3) dimensions, en récrivant l'équation de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= x - x^3 - \gamma v + f\cos\omega t \\ \dot{\phi} &= w \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

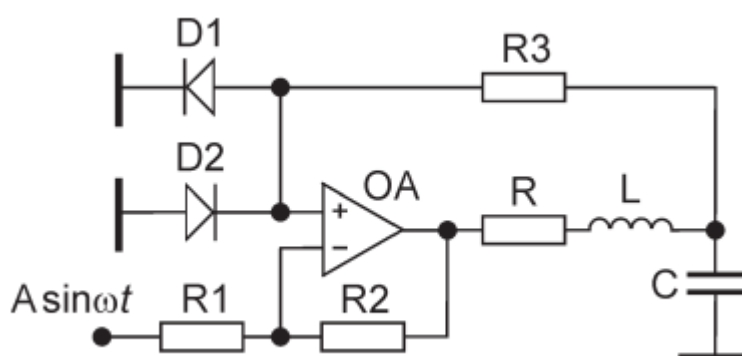
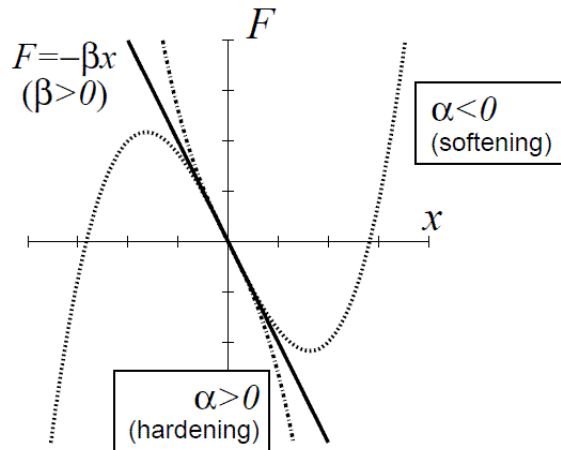


Figure (II.3) : le circuit de l'oscillateur de Duffing

- **Signification physique :**

L'oscillateur Duffing peut être interprété comme un oscillateur forcé avec un ressort non linéaire dont la force de rappel est écrit comme  $F = -\beta x - \alpha x^3$ .



**Figure (II.4)** le sens physique de l'oscillateur de DUFFING

Pour  $\beta > 0$ , l'oscillateur Duffing peut être interprété comme un oscillateur forcé avec un ressort dont la force de rappel est écrit comme  $F = -\beta x - \alpha x^3$  comme le montre la figure (II.4). Lors de  $\alpha > 0$ , ce ressort est un ressort appelé durcissement, et, lorsque  $\alpha < 0$ , il est appelé un ressort ramollissement bien que cette interprétation n'est valable que pour les petits  $x$  (Thompson et Stewart, 2002).

Pour  $\beta < 0$ , l'oscillateur de Duffing décrit la dynamique d'une masse ponctuelle dans un double puits de potentiel, et il peut être considéré comme un modèle d'une poutre d'acier forcé périodiquement qui est déviée vers les deux aimants comme le montre la figure 3 (Moon et Holmes, 1979; Guckenheimer et Holmes, 1983; Ott, 2002). On sait que les mouvements chaotiques peuvent être observés dans ce cas (voir ci-dessous).

### II.8 Système Aéroélastique :

#### Introduction

D'une façon générale, l'aéroélasticité est la discipline de la mécanique appliquée qui traite du mouvement d'un corps déformable dans un écoulement gazeux (lorsque l'écoulement envisagé est fluide, on parle alors plutôt d'hydro élasticité). Bien que l'aéroélasticité ait trouve son origine en aéronautique ou les problèmes d'aéroélasticité se sont avérés critiques dès les débuts du vol propulsé, les phénomènes aéroélastiques se sont également révélés très importants par la suite dans d'autres domaines des sciences appliquées. On observe en effet une tendance à construire en génie civil des ouvrages d'une conception toujours plus audacieuse, et donc toujours plus souples (immeubles, ponts, tours, lignes de transmission électrique, . . .). De même, dans la conception des turbomachines, des ouvrages hydroélectriques, des véhicules terrestres ou maritimes, etc..., les problèmes aéro- ou hydro-élastiques se révèlent de plus en plus comme des facteurs à prendre en compte. D'où le fait que le domaine de l'aéroélasticité soit toujours un thème de recherche scientifique et industrielle important.



## Chapitre II : modélisation mathématiques du chaos:

---

C'est cependant dans la construction aéronautique que les phénomènes aéroélastiques apparaissent de la façon la plus marquée. C'est pourquoi, depuis la seconde guerre mondiale, on accorde une grande importance aux problèmes aéroélastiques dans la conception des avions rapides (régime transsonique et supersonique) et dans celle des avions à grande envergure (planeurs, . . .). En particulier, pour les avions rapides, on notera la nécessité de modifier la géométrie de la voilure et l'introduction des servocommandes qui ont conduit à de nouveaux problèmes. On notera par ailleurs l'apparition de nouveaux matériaux (tels les composites), qui ont notamment permis l'accroissement de l'envergure (et de la flexibilité) des différents types d'avions, y renforçant ainsi les effets aéroélastiques. [17]

### **Classification des problèmes aéroélastiques :**

Les phénomènes aéroélastiques résultent de l'interaction entre différents types de force :

- les forces élastiques, d'origine structurale,
- les forces d'inertie, d'origine structurale également,
- les forces aérodynamiques, induites par les déformations (stationnaires ou oscillatoires) de la structure d'une part, et résultant de perturbations extérieures (manœuvres, turbulence atmosphérique, rafales, . . .) d'autre part.

Les problèmes aéroélastiques n'existeraient pas si la structure de l'avion restait parfaitement rigide lorsqu'elle est soumise à un écoulement d'air. Les structures d'avion sont toutefois toujours plus ou moins flexibles (comme illustré à la figure II.5), et cette flexibilité est la cause fondamentale des divers types de phénomènes aéroélastiques que l'on peut observer.

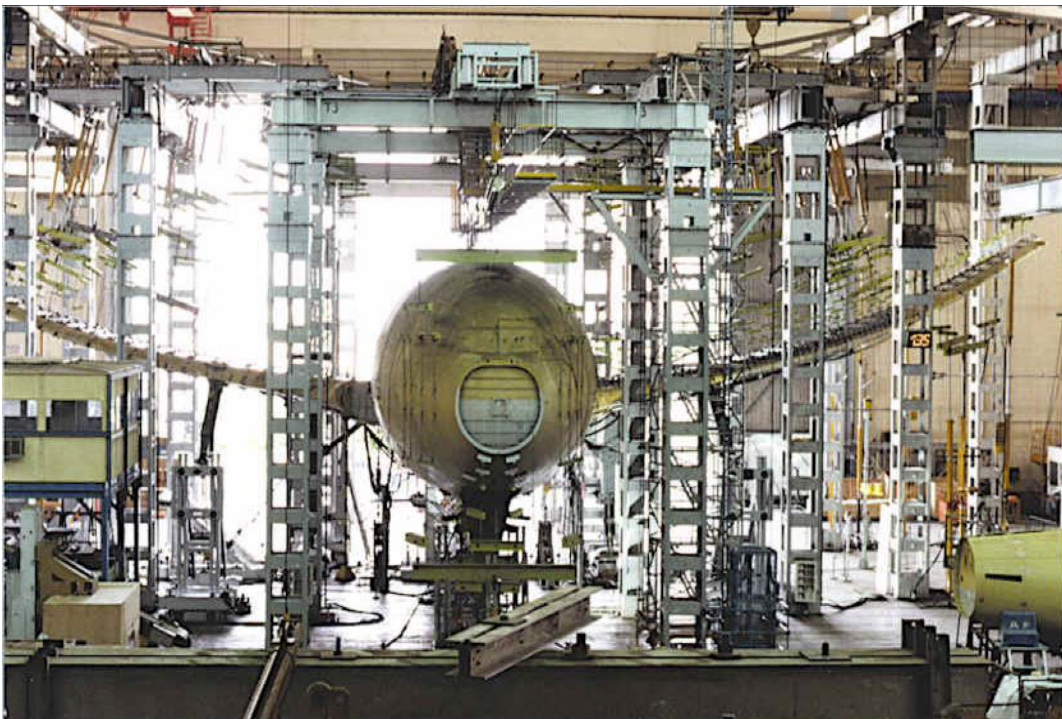


FIG. II.5 – Tests statiques sur un Airbus A340 (CEAT-Toulouse)

## Chapitre II : modélisation mathématiques du chaos:

---

Les phénomènes les plus importants en aéroélasticité statique sont :

**La divergence :** dans un avion flexible en vol stationnaire, un équilibre s'établit entre les forces, aérodynamiques et les forces de rappel élastique, mais au-delà d'une certaine vitesse cet équilibre devient instable, ce qui peut conduire à la ruine brutale de la structure ;

**La redistribution de portance :** même en-deçà de la vitesse de divergence, la déformation des ailes entraîne une modification de la portance sur celles-ci, dont il importe de tenir compte pour prévoir les performances réelles de l'avion ;

**L'inversion de commande :** l'efficacité des surfaces de contrôle (gouvernes de profondeur, ailerons, . . .) est également modifiée par les effets aéroélastiques, et il peut même exister une vitesse au-delà de laquelle leur effet s'inverse.

Dans le cadre de l'aéroélasticité dynamique, on s'intéressera plus particulièrement aux phénomènes suivants :

**Le flottement :** il s'agit d'une instabilité dynamique, couplant un écoulement in stationnaire aux modes de vibration de la structure, se traduisant par des oscillations d'amplitude non décroissante (on parle d'amortissement négatif), pouvant conduire à la ruine par fatigue cyclique ;

**la réponse dynamique :** la flexibilité de l'avion peut modifier de façon significative sa réponse à des perturbations atmosphériques (rafales, turbulence) ou à des manœuvres rapides.

Il est important de noter que les phénomènes aéroélastiques ne causent pas uniquement des effets négatifs, qu'il faut s'efforcer de contrer lors de la conception d'un avion. Par exemple, les recherches en cours sur le concept d'aile active visent à utiliser les effets aéroélastiques pour le contrôle d'attitude, permettant de supprimer certaines surfaces mobiles de contrôle.

Dans les cas où l'échauffement du fluide en écoulement devient significatif (supersonique, hypersonique de rentrée), on est amené à prendre en compte les effets thermiques tels que:

- l'apparition de contraintes/déformations d'origine thermique,
- la modification des propriétés des matériaux avec la température.

L'introduction de commandes asservies de systèmes de pilotage automatique et de contrôle actif a également donné lieu à l'apparition d'une nouvelle classe de problèmes, étudiés dans le cadre de l'*aéroservoélasticité*. La réduction progressive du poids structural a conduit à une interaction de plus en plus grande entre les systèmes automatiques de vol et l'élasticité de la structure, permettant d'améliorer :

- la stabilité globale de l'avion ;
- la vie de service de l'avion, en réduisant de manière systématique l'effet de sollicitations transitoires sur la structure, principalement dans la voilure (*gust alleviation systems*) ;
- le confort, en réduisant l'effet de sollicitations transitoires sur les vibrations du fuselage.

Les réalisations les plus spectaculaires de l'aéroservoélasticité sont entre autres :

- sur le plan de la mécanique du vol, la stabilisation de configurations naturellement instables par contrôle actif (*stability augmentation systems*) ;
- sur le plan de l'aéroélasticité de la voilure, la suppression du flottement par contrôle actif (*flutter suppression systems*).[17]

### II.8.1 Modélisation mathématique des systèmes aéroélectriques :

Prenons la section de l'aile aéroélastique prototypique de diriger et de contrôler les surfaces de fuite comme le montre la figure 1. Les équations qui régissent de mouvement sont donnés par :[13-14]

$$\begin{bmatrix} m_t & m_w x_\alpha b \\ m_w x_\alpha b & I_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ M \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Où  $m_t$  est la masse totale de l'aile principale et la structure de support,  $m_w$  est la masse de l'aile principale,  $b$  est semi corde,  $I_\alpha$  est le moment d'inertie autour de l'axe élastique,  $x_\alpha$  représente la distance unidimensionnels entre le centre de masse et axe élastique,  $c_h$  et  $c_\alpha$  sont respectivement les coefficients d'amortissement structural de déplacement de plongeon et angle de tangage ,  $k_h$  et  $k_\alpha(\alpha)$  sont respectivement les coefficients de raideur de ressort et le grand saut de hauteur, ,  $k_\alpha(\alpha)$  est un terme non linéaire et est donnée par [14]

$$k_\alpha(\alpha) = k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2 \quad (\text{II.33})$$

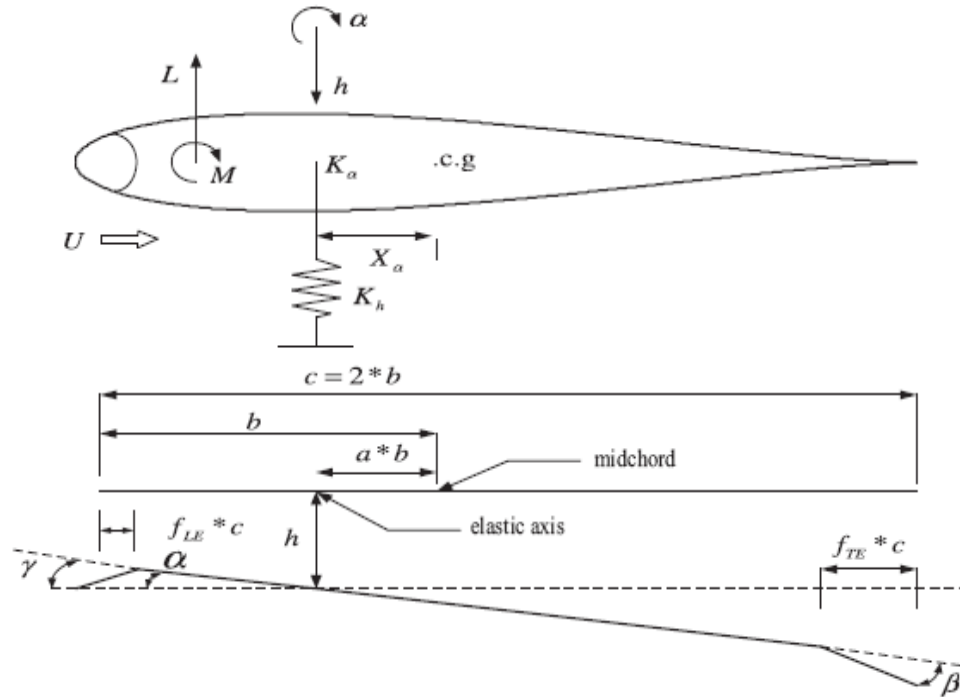


Figure (2.3) modèle aéroélastique

La portance aérodynamique  $L$  et le moment  $M$  sont exprimés sur la base de la théorie aérodynamique quasi-stationnaire du Theodorsen et de Fung [14,15,16]:

$$L = \rho U^2 b s_p c_{l_\alpha} \left[ \alpha + \left( \frac{\dot{h}}{U} \right) + \left( \frac{1}{2} - a \right) b \left( \frac{\dot{\alpha}}{U} \right) \right] + \rho U^2 b s_p c_{l_\beta} \beta + \rho U^2 b s_p c_{l_\gamma} \gamma \quad (\text{II.34})$$

$$M = \rho U^2 b^2 s_p c_{m_{\alpha\text{-eff}}} \left[ \alpha + \left( \frac{\dot{h}}{U} \right) + \left( \frac{1}{2} - a \right) b \left( \frac{\dot{\alpha}}{U} \right) \right] + \rho U^2 b^2 s_p c_{m_{\beta\text{-eff}}} \beta + \rho U^2 b^2 s_p c_{m_{\gamma\text{-eff}}} \gamma \quad (\text{II.35})$$

Où  $\rho$  est la masse volumique de l'air,  $U$  est la vitesse d'écoulement libre,  $s_p$  est l'envergure de l'aile,  $a$  est la distance sans dimension à partir de la mi-corde à l'axe élastique, et  $c_{l_\gamma}$  sont les dérivées de coefficients aérodynamique de portance par l'angle d'attaque, bord de fuite (TE) et surface principale (LE) le contrôle de la surface de fléchissements respectivement,  $c_{m_{\alpha\text{-eff}}}$ ,  $c_{m_{\beta\text{-eff}}}$  et  $c_{m_{\gamma\text{-eff}}}$  sont les dérivés des coefficients moment efficace par l'angle d'attaque, (TE) et (LE) contrôle de surface de déflexion définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 c_{m_{\alpha-eff}} &= \left(\frac{1}{2} + a\right) c_{l_{\alpha}} + 2c_{m_{\alpha}} \\
 c_{m_{\beta-eff}} &= \left(\frac{1}{2} + a\right) c_{l_{\beta}} + 2c_{m_{\beta}} \\
 c_{m_{\gamma-eff}} &= \left(\frac{1}{2} + a\right) c_{l_{\gamma}} + 2c_{m_{\gamma}}
 \end{aligned} \tag{II.36}$$

les variables d'état sont définir comme

$$[x_1 \quad x_2 x_3 \quad x_4]^T = [h \quad \dot{h}\alpha \quad \dot{\alpha}]^T \tag{II.37}$$

En remplaçant Eq(II.34)et Eq(II.35) dans l'équation. Eq(II.32)et en utilisant l'équation (II.37) donne la forme d'espace d'état:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= a_{h_1}x_1 + a_{\dot{h}_1}x_2 + a_{\alpha_{11}}x_3 + a_{\alpha_{12}}x_3^2 + a_{\alpha_{13}}x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_1}x_4 + b_{\beta_1}\beta + b_{\gamma_1}\gamma \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= a_{h_2}x_1 + a_{\dot{h}_2}x_2 + a_{\alpha_{21}}x_3 + a_{\alpha_{22}}x_3^2 + a_{\alpha_{23}}x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_2}x_4 + b_{\beta_2}\beta + b_{\gamma_2}\gamma
 \end{aligned} \tag{II.38}$$

Et les coefficients de l'équation sont définis ci-dessus

$$\begin{aligned}
 d &= (m_t I_{\alpha} - (m_w x_{\alpha} b)^2)^{-1}, a_{h_1} = -d I_{\alpha} k_h, \\
 a_{\dot{h}_1} &= d \left( -I_{\alpha} c_h - I_{\alpha} c_1 c_{l_{\alpha}} \left( \frac{1}{U} \right) - m_w x_{\alpha} b c_2 c_{m_{\alpha-eff}} \left( \frac{1}{U} \right) \right) \\
 a_{\alpha_{11}} &= d \left( m_w x_{\alpha} b k_1 - I_{\alpha} c_1 c_{l_{\alpha}} - m_w x_{\alpha} b c_2 c_{m_{\alpha-eff}} \right), \\
 a_{\alpha_{12}} &= m_w x_{\alpha} b k_2, a_{\alpha_{13}} = m_w x_{\alpha} b k_3 \\
 a_{\dot{\alpha}_1} &= d \left( m_w x_{\alpha} b c_{\alpha} - I_{\alpha} c_1 c_{l_{\alpha}} \left( \frac{1}{2} - a \right) \left( \frac{b}{U} \right) - m_w x_{\alpha} b c_2 c_{m_{\alpha-eff}} \left( \frac{1}{2} - a \right) \left( \frac{b}{U} \right) \right), \\
 b_{\beta_1} &= d \left( -I_{\alpha} c_1 c_{l_{\beta}} - m_w x_{\alpha} b c_2 c_{m_{\beta-eff}} \right) \\
 b_{\gamma_1} &= d \left( -I_{\alpha} c_1 c_{l_{\gamma}} - m_w x_{\alpha} b c_2 c_{m_{\gamma-eff}} \right), \\
 a_{h_2} &= d m_w x_{\alpha} b k_h, \\
 a_{\dot{h}_2} &= d \left( m_w x_{\alpha} b c_h + m_w x_{\alpha} b c_1 c_{l_{\alpha}} \left( \frac{1}{U} \right) + m_t c_2 c_{m_{\alpha-eff}} \left( \frac{1}{U} \right) \right),
 \end{aligned}$$

$$a_{\alpha_{21}} = d \left( -m_t k_1 + m_w x_\alpha b c_1 c_{l_\alpha} + m_t c_2 c_{m_{\alpha-eff}} \right)$$

$$a_{\alpha_{22}} = -d m_t k_2,$$

$$a_{\alpha_{23}} = -d m_t k_3,$$

$$a_{\alpha_{24}} = d \left( m_t c_\alpha + m_w x_\alpha b c_1 c_{l_\alpha} \left( \frac{1}{2} - a \right) \left( \frac{b}{U} \right) - m_t c_2 c_{m_{\alpha-eff}} \left( \frac{1}{2} - a \right) \left( \frac{b}{U} \right) \right)$$

$$b_{\beta_2} = d \left( m_w x_\alpha b c_1 c_{l_\beta} + m_t c_2 c_{m_{\beta-eff}} \right),$$

$$b_{\gamma_2} = d \left( m_w x_\alpha b c_1 c_{l_\gamma} + m_t c_2 c_{m_{\gamma-eff}} \right),$$

$$c_1 = \rho U^2 b s_p,$$

$$c_2 = \rho U^2 b^2 s_p$$

**III.1 introduction**

Nous nous intéresserons qu'à des installations automatiques c'est-à-dire par une machine qui assure la fonction régulation, soit pour remplacer un opérateur humain, ou soit parce qu'un opérateur humain est incapable d'atteindre le résultat souhaité. Cela exige de calculer et d'appliquer des commandes.

Les systèmes automatiques décrits ici assurent en effet deux types des fonctions :

- maintenir la grandeur commandée, ou grandeur réglée à une valeur de référence malgré les variations des conditions extérieures ; c'est la régulation au sens strict.
- Répondre à des changements d'objectif, ou à un objectif variable (poursuite de cible, suivi d'un gabarit) ; c'est le fonctionnement en asservissement.

Les deux notions sont souvent confondues car les méthodes d'étude et les matériels sont communs, d'où l'emploi indifférent des termes régulation et asservissement pour désigner la structure du système commandé. Il faut toute fois tenir compte de cette distinction pour le calcul des performances. Industriellement, l'aspect régulation, au sens restreint du terme, est souvent prépondérant, mais l'étude et les tests se font néanmoins en asservissement, car là seulement le concepteur est maître des conditions d'essai.[2]

**III.2 Systèmes linéaires**

Une très grande classe de systèmes physiques, biologiques, économiques, etc. qui nous entourent peuvent être décrits par une équation différentielle du type :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Sous l'hypothèse que le temps  $t$  dans lequel évolue le système est continu (c'est-à-dire appartient à  $R$ ). Le vecteur  $u(t)$  est l'entrée (ou la commande) du système. Sa valeur peut être choisie arbitrairement pour tout  $t$ . Le vecteur  $y(t)$  est la sortie du système et peut être mesuré avec une certaine précision. Le vecteur  $x(t)$  est appelé état du système, il représente la mémoire du système, c'est-à-dire, l'ensemble des informations dont le système a besoin pour prédire son propre avenir, pour une entrée  $u(t)$  connue. La première des deux équations de (III.1) s'appelle équation d'évolution. Il s'agit d'une équation différentielle qui permet de savoir vers où va se diriger l'état  $x(t)$  sachant sa valeur à l'instant présent  $t$  et la commande  $u(t)$  que nous sommes en train d'exercer. La deuxième équation s'appelle équation d'observation. Elle permet de calculer le vecteur de sortie  $y(t)$ , connaissant l'état et

la commande à l'instant  $t$ . Les équations (III.1) forment la représentation d'état du système.

Dans le cas d'un système physique linéaire les fonctions  $f$  et  $g$  sont des fonctions linéaires, et donc la représentation d'état devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Les matrices  $A, B, C, D$  sont appelées matrices d'évolution, de commande, d'observation et directe, respectivement[4].

### III.2.1 Stabilité

Le problème de la stabilité des systèmes dynamiques est un sujet de préoccupation majeure du travail des mathématiciens, des physiciens et des ingénieurs depuis le siècle dernier. Beaucoup de livres ont été écrits dans ce domaine [III4], [III5], [III6] à la fois sur le plan théorique et sur le plan pratique. Deux types d'études complémentaires peuvent être considérées : la conception de test pour savoir si un système est stable ou non, l'étude des lois de contre-réaction (retour d'état) qui permettent de rendre stable un système instable.

Les critères d'analyse de stabilité peuvent être classés en deux catégories : les critères fréquentiels (à partir des diagrammes de Bode ou de Nyquist, ...) et les critères temporels (cercles de Gerschgorin, deuxième méthode de Lyapunov, ...). Si un système est linéaire, invariant par rapport au temps, il est facile d'étudier la stabilité avec la plupart des critères existant dans la littérature (Nyquist, Hurwitz, ...). Mais le nombre de critères pouvant aisément être mis en œuvre se réduit fortement si le système linéaire est à paramètres incertains. Dans ce paragraphe, nous présentons quelques critères de stabilité qui peuvent être utilisés pour analyser les systèmes linéaires ou non linéaires. D'une façon générale, les systèmes non linéaires sont les plus difficiles à étudier parce qu'il est délicat d'en faire l'étude dans le domaine fréquentiel (fonction de transfert difficile à exploiter).

Il est alors préférable d'avoir un critère utilisant le modèle du système dans le domaine temporel. Pour étudier ce problème, nous avons retenu les méthodes de Lyapunov.

#### Définition.1 :

Un système est localement stable, si la stabilité peut être garantie autour d'une valeur particulière  $x_s$  d'état.



Bien sur, si l'équilibre  $x_s$  est stable, il existe un petit domaine autour de ce point où le système est stable ; mais la taille de ce domaine est inconnue et nous n'avons pas prouvé la stabilité du domaine autour de l'état  $x_s$ .

### Définition.2 :

Une valeur particulière  $x_e$  de l'état d'un système, appelée état d'équilibre, est asymptotiquement stable si :

il est stable,

il existe  $r > 0$  tel que

$$\text{si } \|x_0\| < r \text{ alors } \lim_{t \rightarrow \infty} \|x\| \rightarrow 0$$

Au contraire de la stabilité locale, la taille du sous-ensemble est connue et tout le sous-ensemble est stable.

### Définition.3 :

Si un système est asymptotiquement stable pour n'importe quelle condition initiale dans l'espace d'état, on dira que le point d'équilibre  $x_e$  est asymptotiquement stable au sens large. On dira aussi qu'il est globalement stable.

Maintenant, nous allons présenter quelques critères de stabilité. Comme la plupart des critères présentes sont bien connus, nous ne donnons pas les preuves et renvoyons le lecteur aux références bibliographiques.

## III.2.2 Commande des systèmes linéaires MIMO

Dans cette partie nous présentons la conception de régulateurs pour les systèmes donnés par des équations d'états linéaires. Tout d'abord, nous allons supposer que l'état  $x$  est accessible à la mesure, bien que cette hypothèse ne soit généralement pas vérifiée, elle nous permettra d'établir les principes de la commande par retour d'états.

Considérons donc le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

### Remarque

Nous avons ici supposé, dans un but de simplification que la matrice directe  $D$  intervenant dans l'équation d'observation (III.2) était nulle. C'est souvent le cas en pratique

### III.3 Le système non linéaire

En physique, lorsque l'on étudie un phénomène, on s'intéresse généralement d'abord aux effets prépondérants de celui-ci. Ceci revient souvent à linéariser les phénomènes caractéristiques du système étudié (on dit qu'il y a proportionnalité entre la cause et l'effet). Les effets non linéaires sont souvent considérés comme perturbatifs et de ce fait négligés, ils conduisent cependant quelquefois à des effets spectaculaires.

Un système non linéaire commandé est un ensemble d'équations (différentielles par exemple) non linéaires, décrivant l'évolution temporelle des variables constitutives du système sous l'action d'un nombre fini de variables indépendantes appelées entrées ou variables de commande, ou simplement commandes, que l'on peut choisir librement pour réaliser certains objectifs.

On en connaît de nombreux exemples parmi les systèmes mécaniques : satellites, Avions, automobiles, grues, machines-outils, régulateurs thermiques, réacteurs chimiques. Les entrées peuvent être choisies en boucle ouverte, c'est-à-dire ne dépendant que du temps, ou en boucle fermée, c'est-à-dire comme des fonctions des variables mesurées, appelées observations, qui rendent compte de l'état du système à chaque instant. .

Un système est non linéaire s'il n'est pas équivalent à un système linéaire dans un sens à préciser. Plusieurs relations d'équivalence peuvent être introduites, donnant des classifications très différentes si le système est commandé ou non. Dans le cas non commandé on classe les comportements par rapport à la stabilité et l'instabilité linéaires et on fait apparaître les dynamiques centres (ni linéairement stable ni linéairement instable) au voisinage d'un point d'équilibre ou d'une orbite périodique. Dans le cas commandé, beaucoup plus compliqué, l'équivalence à un système linéaire décrit une propriété de l'ensemble des trajectoires du système que l'on appellera platitude. Au-delà de l'analyse des types de comportement des systèmes, se pose le problème de leur utilisation. Un objectif de commande se traduit par la donnée d'une ou plusieurs trajectoires de référence à suivre (boucle ouverte) et, en boucle fermée, par certaines exigences sur la vitesse de poursuite, l'atténuation des perturbations, l'insensibilité aux erreurs et variations paramétriques, la précision du suivi. Bien sur, les réglages de la boucle ouverte et de la boucle fermée interagissent de façon complexe, surtout dans le contexte non linéaire, mais on peut, dans certains cas, arriver à rendre ces deux aspects aussi indépendants que possible pour en faciliter la mise au point. Dans de nombreux cas, en outre, le nombre, la technologie et

l'emplacement des capteurs devant permettre de fermer la boucle ne sont pas donnés a priori et entrent dans la conception de la boucle fermée.[1]

### III.4 La commande PID :

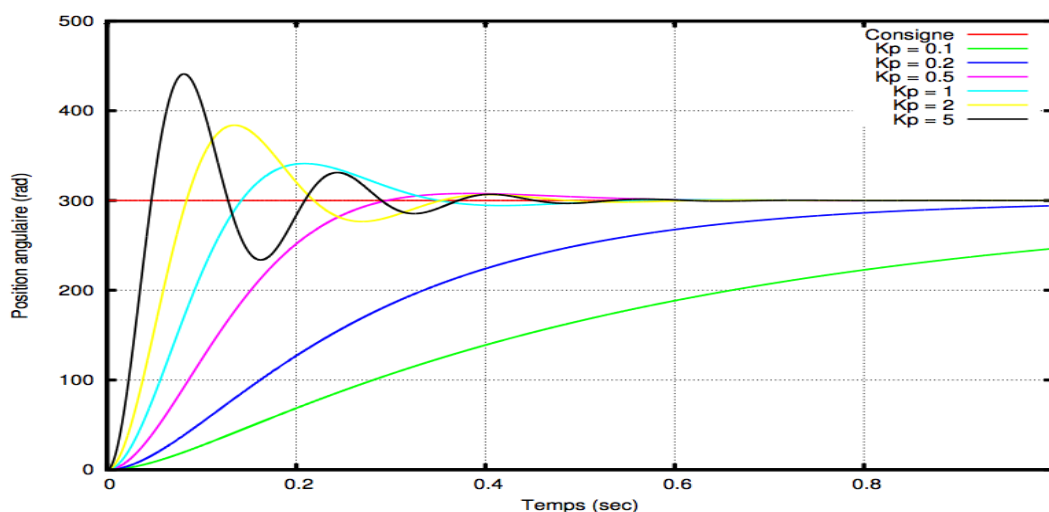
La commande PID n'est pas la plus performante des commandes mais c'est la plus répandue. Le technicien ou l'ingénieur, est confronté en pratique à une régulation, est bien souvent limité à la mise en œuvre d'un régulateur PID qui n'offre pas toutes les possibilités de réglage des méthodes modernes. De plus, il est en général impossible d'effectuer des essais en boucle ouverte pour identifier le système régulé. On doit alors savoir régler au mieux ce type de régulateur à partir d'essais en boucle fermée uniquement.

Les appareils à actions proportionnelle, intégrale, dérivée (régulateurs à 3 actions, PID) sont sans doute les plus répandus en régulation industrielle. Rappelons-en le principe.[3]

#### III.4.1 L'action proportionnelle :

L'action proportionnelle est à la base de la constitution de la boucle, où elle se trouve quasiment toujours présente. Elle se traduit par une variation du signal  $u$  du régulateur proportionnelle à l'écart mesure-consigne constaté, variation qui accompagne immédiatement l'apparition d'un écart. Face à une variation brutale de la consigne ou d'une grandeur perturbatrice, elle va, dans une boucle bien conçue, ramener le système dans un nouvel état d'équilibre. Mais Il reste une erreur permanente ou erreur statique. L'action proportionnelle P permet d'accélérer la réponse du procédé proportionnellement à l'écart Mesure Consigne. P donne la nervosité du régulateur PID [9].

$$P = k_p e(t) \quad (\text{III.4})$$



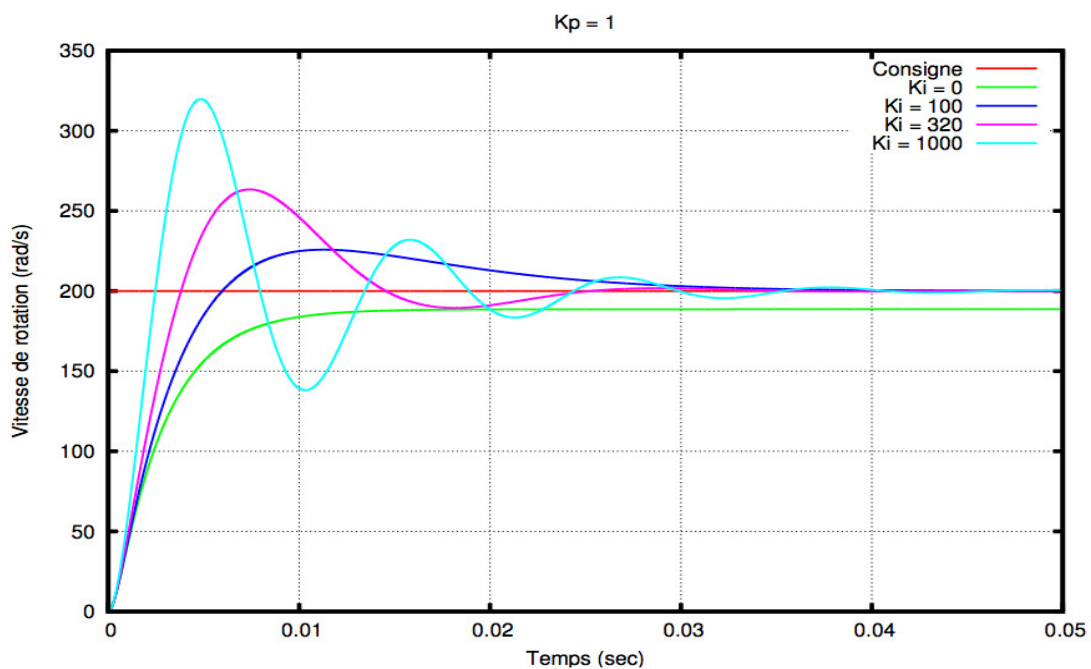
**Figure (III.1)** Modélisation de la réponse à un échelon dans un asservissement en position

### III.4.2 L'action intégrale :

Permet d'obtenir un signal régulateur constamment supérieur au signal initial, et ce à écart  $e$  nul. Elle le fait évoluer tant que cette nullité n'est pas atteinte. Il y a en quelque sorte effet d'accumulation. Le problème est que, lorsque redevient nul, le signal  $u$  peut avoir atteint une valeur trop élevée pour qu'il y ait équilibre.

L'action intégrale  $I$  complète l'action  $P$  en annulant l'erreur résiduelle sans modifier la réaction du régulateur PID [9].

$$PI = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (III.5)$$



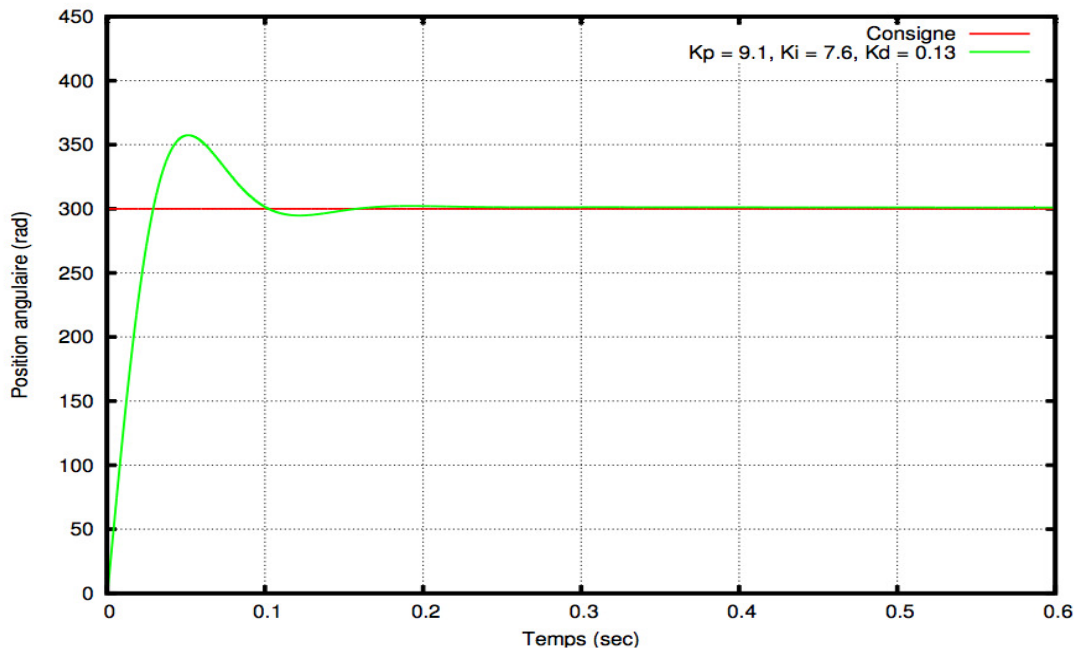
**Figure(III.2)** Modélisation de la réponse à un échelon dans un asservissement en vitesse

### III.4.3 L'action dérivée :

Toujours en complément des autres ( $P$  et  $I$ ), va en réagissant proportionnellement à la vitesse de variation de l'écart, soit mathématiquement à sa dérivée, accélérer la réponse. Elle joue aussi un rôle stabilisateur, contrairement à l'action intégrale.

L'action dérivée  $D$  permet de compenser les effets du temps mort du procédé et améliore la stabilité de la boucle en amortissant rapidement les oscillations provoquées par une perturbation ou un changement brusque de la consigne [9].

$$PID = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (III.6)$$



**Figure(III.3)** Modélisation de la réponse à un échelon dans un asservissement PID

### III.4.4 Propriétés des actions PID :

Action proportionnelle seule : il reste une erreur permanente.

Actions proportionnelle et intégrale : réglage pour une réponse rapide avec un dépassement momentané assez importante la consigne.

Actions proportionnelle, intégrale et dérivée, pour obtenir une réponse rapide mais sans dépassement de la consigne.

### III.5 La commande par régime glissant :

La commande en régime glissant est une commande de rétroaction de commutation à grande vitesse variable. C'est une démarche importante largement utilisé pour concevoir des contrôleurs robustes pour les systèmes linéaires et non-linéaires [5] .

Dans le contexte de la théorie des régimes glissants, on cherche à :

définir une loi de commutation de telle sorte que la trajectoire d'état rejoigne une surface S (dite de glissement ou de commutation) et reste sur cette surface ou au voisinage, surface d'efinie par une fonction S et d'équation  $S = 0$ .

définir le comportement dynamique du système sur la surface S ou au voisinage (cette dynamique n'est pas à priori définie lors de la donnée du système).[14]

Le principal avantage de le mode glissant contrôleur SMC sur les autres lois de commande non linéaires est sa robustesse aux perturbations externes comme rafale et le bruit, les incertitudes du modèle et des variations dans les paramètres système.

Les problèmes globaux de la conception d'un contrôleur de mode glissant sont comme suit : [6]

- la conception de la surface de glissement ‘S’ pour atteindre la performance requise et la dynamique stable pour le système en boucle fermée;
- concevoir une loi de commande pour faire en sorte que la surface de glissement est atteinte et maintenue par la suite.

Afin d'expliquer le concept SMC conventionnel, envisager un deuxième système non linéaire d'entrée de commande SISO [7].

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x, \dot{x}) + g(x, \dot{x})u + d \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Où  $x = x_1$  et  $\dot{x} = x_2$  sont les variables d'état du système,  $f$  et  $g$  sont des fonctions non linéaires,  $u$  est égal à l'entrée de commande, et  $d$  représente des incertitudes et des perturbations extérieures.

Compte tenu  $x_1^d$  que la trajectoire désirée et  $e$  l'erreur entre l'état  $x_1$  réelle et la trajectoire désirée  $x_1^d$ ,

$$e = x_1 - x_1^d \quad (\text{III.8})$$

La dérivée dans le temps de  $e$  est donnée par

$$\dot{e} = \dot{x}_1 - \dot{x}_1^d = x_2 - x_2^d \quad (\text{III.9})$$

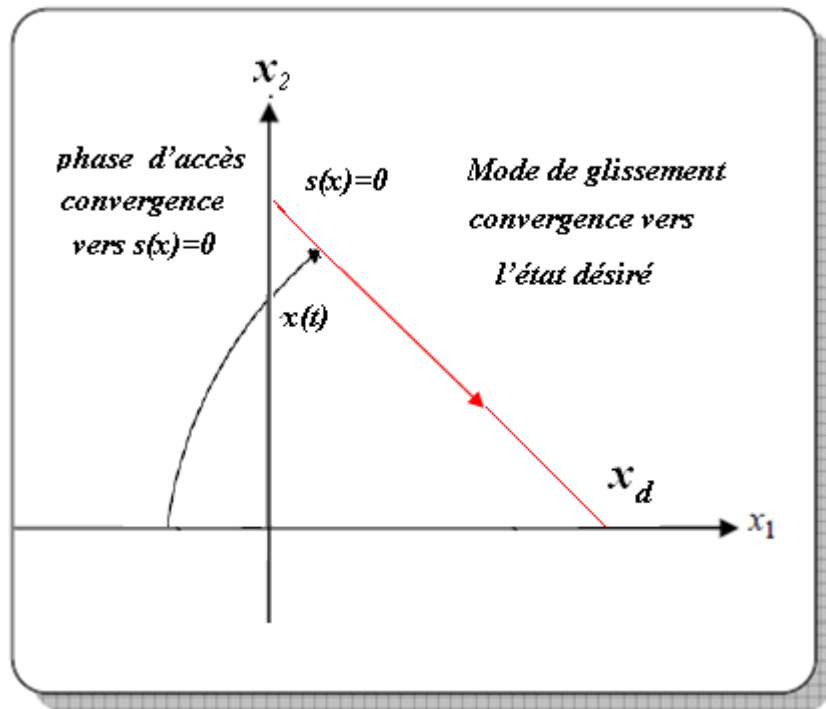
### III.5.1 La surface de glissement :

La surface de glissement  $S$  peut être définie pour les systèmes de second ordre comme:

$$s = c e + \dot{e} \quad \text{Ou } c > 0 \quad (\text{III.10})$$

Où ‘c’ définit la dynamique de la phase de glissement ( $s=0$ ). L'entrée de commande  $u$  doit être choisie de telle sorte que les trajectoires atteignent la surface de commutation et le séjour sur elle pour tous les temps à venir. L'entrée de commande est exprimée comme suit [8].

$$u = u_{eq} + \Delta u \quad (\text{III.11})$$



**Figure(III.4)** Trajectoire d'état dans le plan de phase.

Lorsque  $u_{eq}$  est appelé la commande équivalente, est choisie de façon à faire

$\dot{s} = 0$  lorsque  $s = 0$ .

Ainsi, la dérivée temporelle de  $s$  est donné par:

$$\dot{s} = c(\dot{x}_1 - \dot{x}_1^d) + f(x, \dot{x}) + g(x, \dot{x})u + d - \ddot{x}_1^d \quad (\text{III.12})$$

La loi de commande équivalente est choisi pour l'usage nominal ( $d = 0$ ) comme suit:

$$u_{eq} = g(x, \dot{x})^{-1}(-c(\dot{x}_1 - \dot{x}_1^d) - f(x, \dot{x}) + \ddot{x}_1^d) \quad (\text{III.13})$$

Avec la fonction  $g$  doit être inversible.

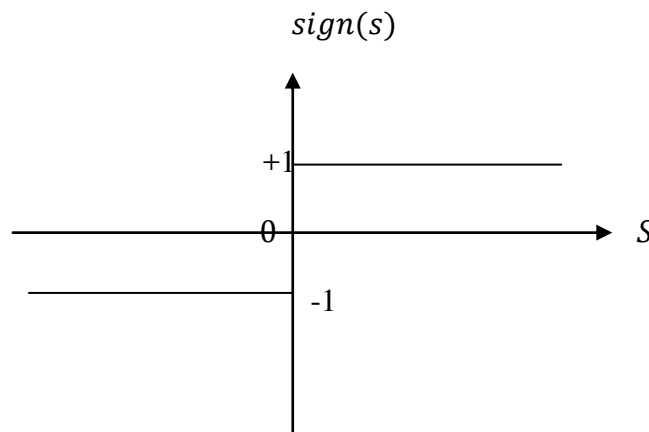
Le second terme  $\Delta u$  est choisi de manière à atteindre le mouvement de glissement dans une telle surface de commutation également appelé état d'accessibilité de l'existence de mouvement en mode de glissement. Celle ci peut être exprimé comme (Utkin 1978):

$$\Delta u = -M \cdot \text{sign}(s) \quad (\text{III.14})$$

Où  $M$  est un nombre positif. Si  $M$  très petit, le temps de réponse sera très long, et s'il est très grand nous aurons de fortes oscillations de l'organe de commande qui peuvent exciter les dynamiques dynamiques négligées. :

### III.5.2 La fonction signe :

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} -1 & \text{si } (s < 0) \\ 0 & \text{si } (s = 0) \\ 1 & \text{si } (s > 0) \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

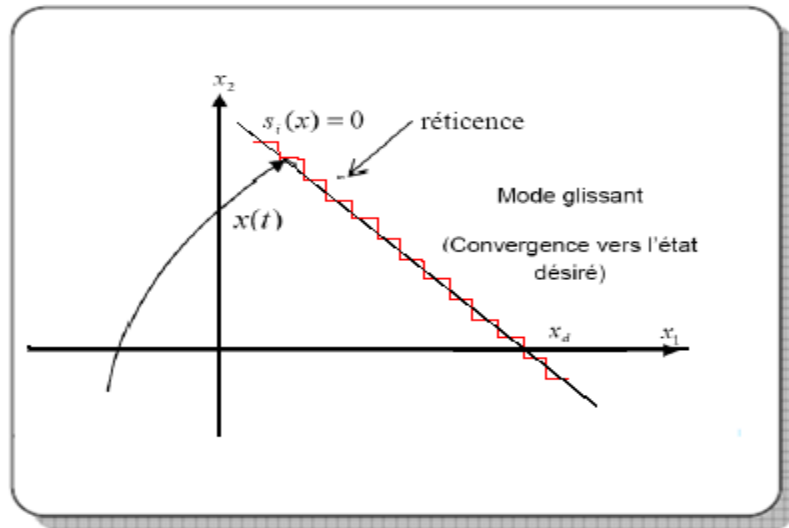


**Figure(III.5) :** la fonction signe

### III.5.3 Phénomène de réticence :

La commande des systèmes à structure variable peut être commutée d'une valeur à une autre suivant le signe d'une fonction de commutation, avec une fréquence infinie. Cependant, dans les systèmes réels, il est impossible de réaliser une telle commutation de la commande pour des raisons technologiques telles que : l'hystérésis, la présence de retard, limitation des actionneurs. La commande discontinue engendre des oscillations du vecteur d'état et de la commande à une fréquence finie. Ce phénomène est appelé « le phénomène de réticence ou chattering ».





**Figure(III.6)** Phénomène de réticence

Le chattering peut dégrader les performances du système et même conduire à l'instabilité. La réticence implique également d'importantes sollicitations mécaniques au niveau des actionneurs, augmentant la consommation énergétique qui peut endommager les circuits électriques de puissance.

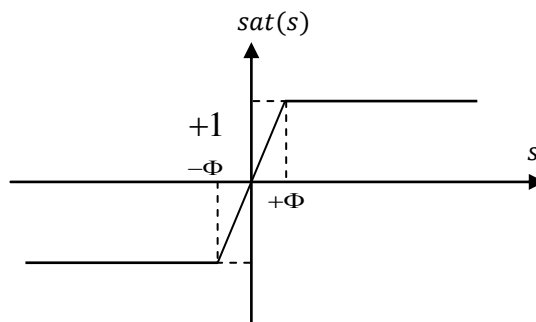
Pour résoudre ce problème, la première solution proposée est de remplacer la fonction « sign » par une fonction appelée « Sat ».

Le second terme  $\Delta u$  devient :

$$\Delta u = -M \cdot \text{sat}(s) \quad (\text{III.16})$$

### III.5.4 La fonction de saturation :

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} \frac{s}{\Phi} & \text{si } |s| \leq \Phi \\ \text{sign}(s) & \text{si } |s| > \Phi \end{cases} \quad (\text{III.17})$$



**Figure(III.7):**la fonction de saturation

**III.5.5 Condition de stabilité :**

Avec la fonction de contrainte:

$$s\dot{s} < 0 \quad (\text{III.18})$$

ou de manière plus stricte par (Slotine et Li 1991)

$$s\dot{s} < -\eta|s| \quad (\text{III.19})$$

Où  $\eta$  est un scalaire de conception positive. Cela signifie que le système doit être toujours en mouvement vers la surface de commutation avec vitesse non nulle. Cela peut être vérifié en prenant  $V = \frac{1}{2}s^2$  comme fonction de Lyapunov. le cas,  $\Delta u$  peut être sélectionné aussi par:

$$\Delta u = g(x, \dot{x})^{-1}(-\mu s - M \cdot \text{sign}(s)) \quad (\text{III.20})$$

Où  $\mu$  est un scalaire de conception positive.

Ensuite, l'entrée de commande devient:

$$u = g(x, \dot{x})^{-1}(-c(\dot{x}_1 - \dot{x}_1^d) - f(x, \dot{x}) + \ddot{x}_1^d - \mu s - M \cdot \text{sign}(s)) \quad (\text{III.21})$$

En remplaçant l'entrée de commande  $u$  de (III.21) dans (III.12) donne la dérivée temporelle  $\dot{s}$  de la surface de glissement en tant que

$$\dot{s} = -\mu s - M \cdot \text{sign}(s) + d \quad (\text{III.22})$$

Si la fonction de Lyapunov prend la forme  $V = \frac{1}{2}s^2$ , alors

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} = s(-\mu s - M \cdot \text{sign}(s) + d) \\ &= -\mu s^2 - s M \cdot \text{sign}(s) + d s = -\mu s^2 - M|s| + d s \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Avec un bon choix de  $\mu$  et  $M$  (III.18) et (III.19), seront satisfaites.

Un choix de  $M \geq \sup|d|$  assure  $\dot{V} < 0$  qui satisfait ce la stabilité du mouvement de glissement au sens de Lyapunov.

### IV.1 Introduction :

Pour commander un système il faut commençais par l'acquisition des principes et les lois de commande appliqué sur ce système après le développement théorique des algorithmes approprié ; tout ça pour convertie ces algorithmes au langage utiliser avec un modèle de simulation s'il existe.

Dans ce chapitre on va discuter les résultats de simulation du système pour les commandes indique dans les chapitres précédents.

### IV.2 Description du programme utilisé pour résoudre ces équations :

Nous avons utilisé le logiciel MATLAB/SIMULINK pour résoudre les équations non-linéaire ; ce logiciel nous permet de simuler les modèles choisie ; et en sortie nous donne le résultat de simulation sous forme des graphs ; donc on peut ajuster facilement les paramètres pour atteindre notre objectif. la méthode mathématique utilisée a cette effet, c'est la méthode de Range-kutta d'ordre 4

### IV.3 Simulation en boucle ouverte :

Dans cette partie on va faire une simulation en boucle ouverte sur quelque système chaotique en injectant directement aux entrées du système des conditions initial et en observe les réponses temporelles.

#### IV.3.1 Simulation en boucle ouvert du pendule simple :

- **Le modèle mathématique :**

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \lambda \dot{\theta} \quad (\text{II.16})$$

Pour illustrer le comportement dynamique du système et l'effet des conditions initiales et de coefficient d'amortissement sur les mouvements du pendule, on prend les cas suivants :

Condition de simulation	1 <sup>ier</sup> cas	2 <sup>ème</sup> cas
Force de gravité $g$	10m /s <sup>2</sup>	10m /s <sup>2</sup>
Coefficient d'amortissement $\lambda$	0	0.4
Condition initial $\theta_0$	80 <sup>0</sup>	80 <sup>0</sup>

# Résultat et simulation

1<sup>er</sup> cas :

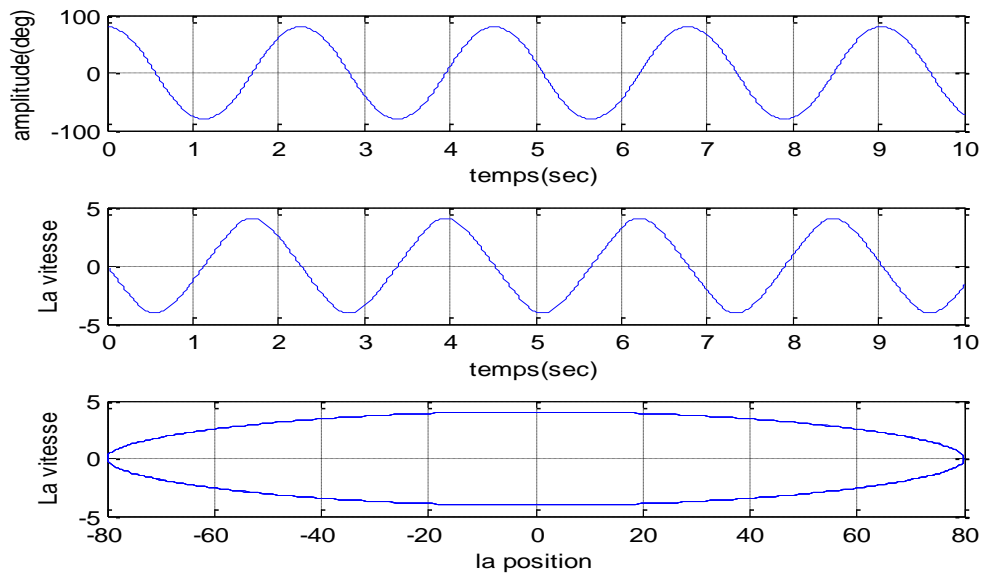


Figure IV.1 Représentation de la position  $\Theta$  et la vitesse  $\dot{\Theta}$  et le plan de phase

Pendule simple (1<sup>er</sup> cas)

2<sup>ème</sup> cas :

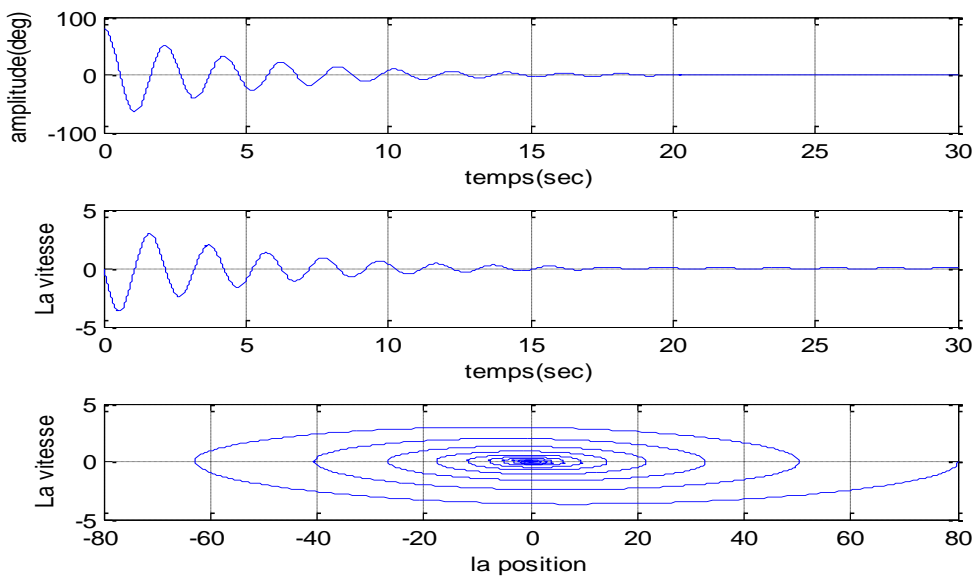


Figure IV.2 Représentation de la position  $\Theta$  et la vitesse  $\dot{\Theta}$  et le plan de phase

Pendule simple (2<sup>ème</sup> cas)

D'après ces figures en remarque que :

- Pour les cas de coefficient d'amortissement  $\lambda=0$  le système Oscille d'une façon libre (des oscillations a fréquence et période constante) même avec le changement de l'angle le système oscille de la même manière.
- Pour le plan de phase on remarque que dans ce cas on a des cercles fermés donc le système est conservatoire.
- Pour le cas de coefficient d'amortissement  $\lambda=0.4$  et par comparaison avec les premiers cas ; on voit que les oscillations sont amorties et le système tend vers l'arrêt
- Le plan de phase de ce cas a exprimé la perte d'énergie de système jusqu'à l'arrêt de la dernière oscillation.

### IV.3.2 Simulation en boucle ouvert du pendule double :

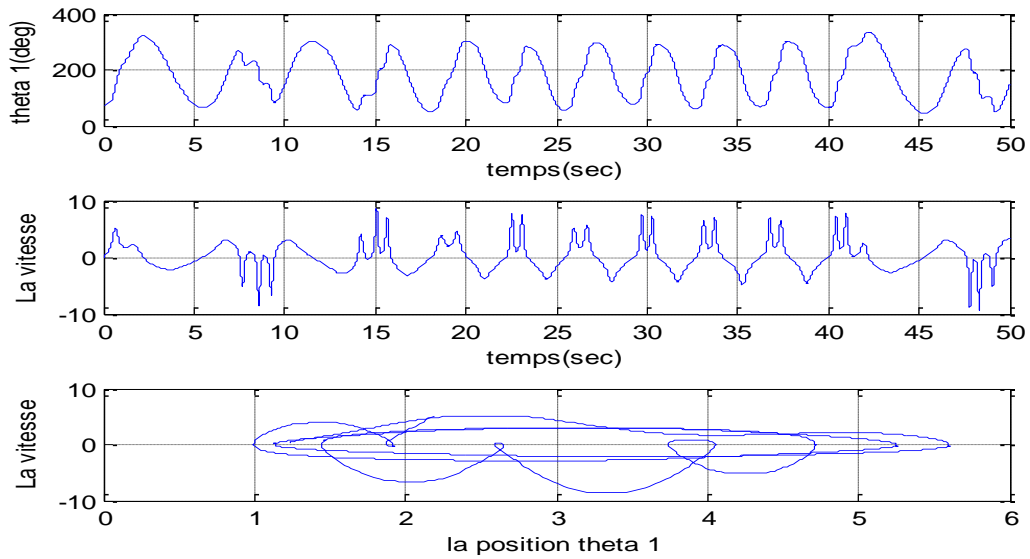
- **Le modèle mathématique :**

$$\begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_1 + \beta_1 \dot{\theta}_1 + \beta_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_2 + \beta_1 \dot{\theta}_1 + \beta_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

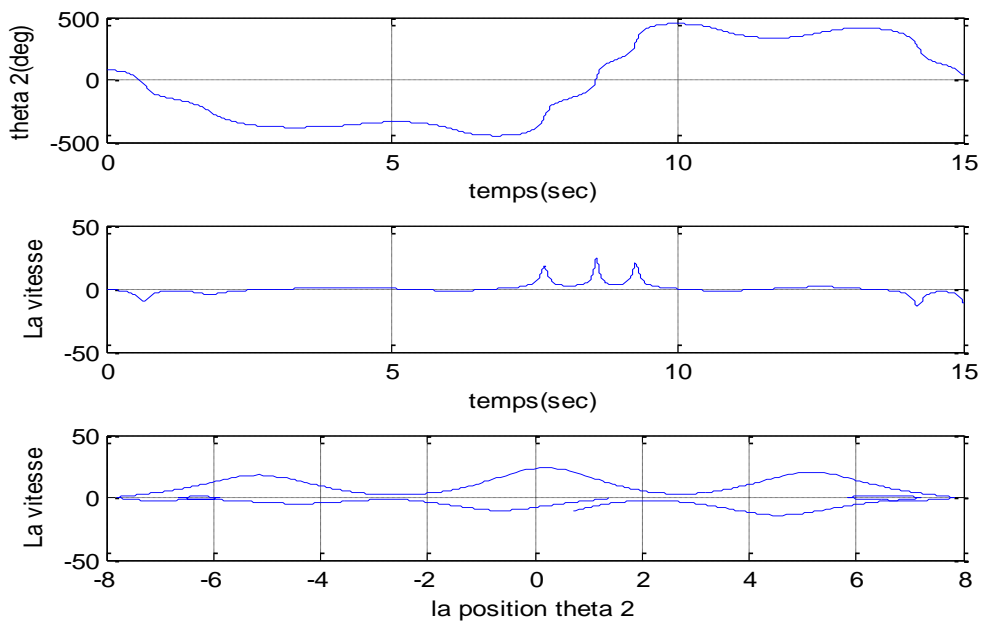
Condition de simulation	1 <sup>ier</sup> cas	2 <sup>ème</sup> cas
Force de gravité g	10m /s <sup>2</sup>	10m /s <sup>2</sup>
Coefficient d'amortissement ( $\beta_1, \beta_2$ )	0	0
Condition initial $\theta_1$	70 <sup>0</sup>	10 <sup>0</sup>
Condition initial $\theta_2$	80 <sup>0</sup>	4 <sup>0</sup>

## Résultat et simulation

1<sup>ier</sup> cas :



**Figure IV.3** Représentation de la position  $\Theta_1$  et la vitesse  $\dot{\Theta}_1$  et le plan de phase Pendule double (1<sup>ier</sup> cas)



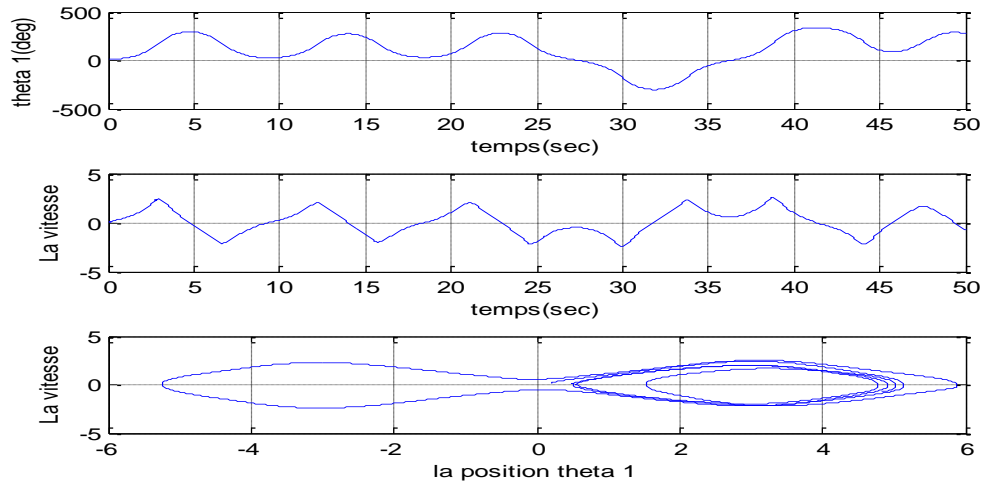
**Figure IV.4** Représentation de la position  $\Theta_2$  et la vitesse  $\dot{\Theta}_2$  et le plan de phase Pendule double (1<sup>ier</sup> cas )

Si le système était linéaire, les deux pendules devraient décrire le même mouvement. Mais si les mouvements diffèrent au bout d'un certain temps alors ceci

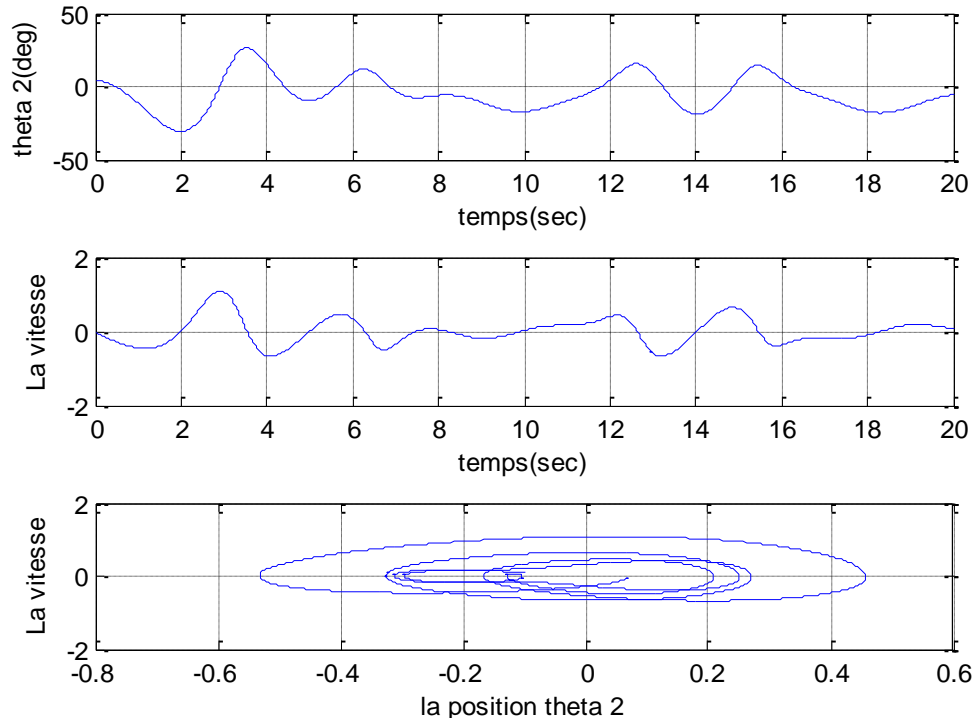
## Résultat et simulation

indiquerait que le système est non-linéaire. Or c'est ce que nous pouvons observer : ce graphique illustre donc la dépendance aux conditions initiales.

2<sup>ème</sup> cas :



**Figure IV.5** Représentation de la position  $\Theta_1$  et la vitesse  $\dot{\Theta}_1$  et le plan de phase Pendule double (2<sup>ème</sup> cas )



**Figure IV.6** Représentation de la position  $\Theta_2$  et la vitesse  $\dot{\Theta}_2$  et le plan de phase Pendule double (2<sup>ème</sup> cas )

## Résultat et simulation

Insistant sur le fait que le mouvement du pendule double dépend très fort des conditions initiales, si on modifie légèrement conditions initiales le mouvement du pendule change très fort

Concernant le premier cas et le second nous avons remarqué que on change les conditions initiales nous aurons des positions  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$  complètement différents et le mouvement est chaotique dont peuvent pas être estimés son comportement et sa voie dans le plan de phase qui est totalement encombrée est qui montre que nous ne pouvons pas prédire ni les positions des pendules ni sa vitesse à un instant 't'.

### IV.3.3 Simulation en boucle ouverte du système de LORENZ:

- Le modèle mathématique :

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \quad (\text{II.29})$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

En utilisant le modèle de Lorenz sur le matlab /simulink nous avons développé son modèle mathématique avec la méthode de rang-kutta est nous avons obtenu le résultat suivant :

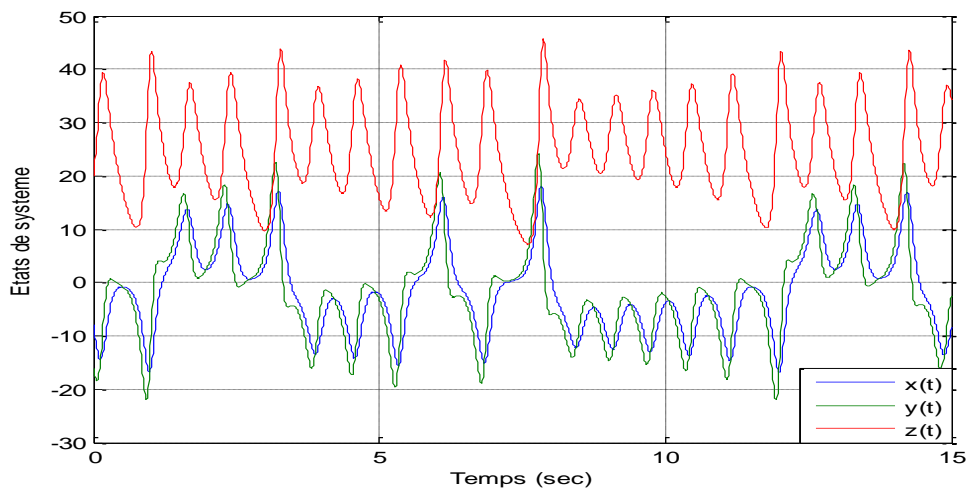
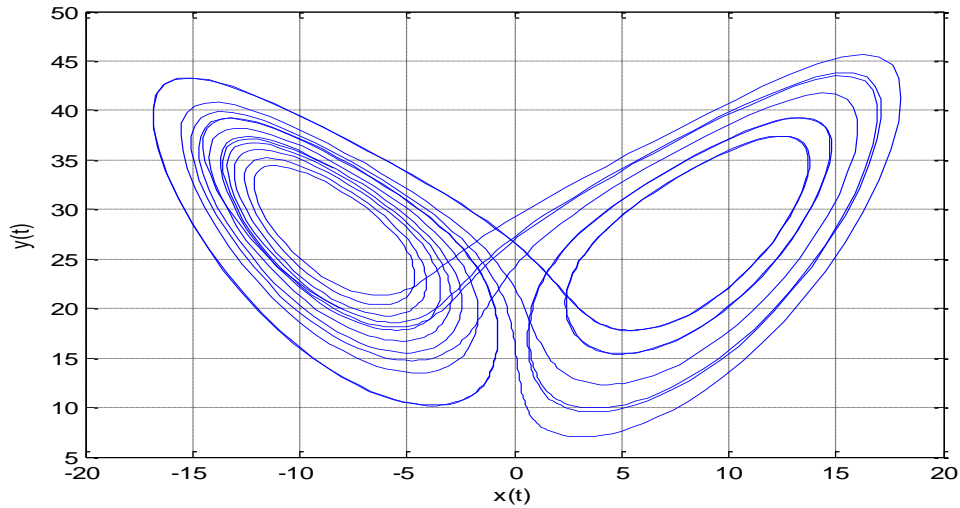


Figure IV.7 la représentation des états du système  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$





**Figure IV.8** représentationnel plane de phase( x(t) y(t)

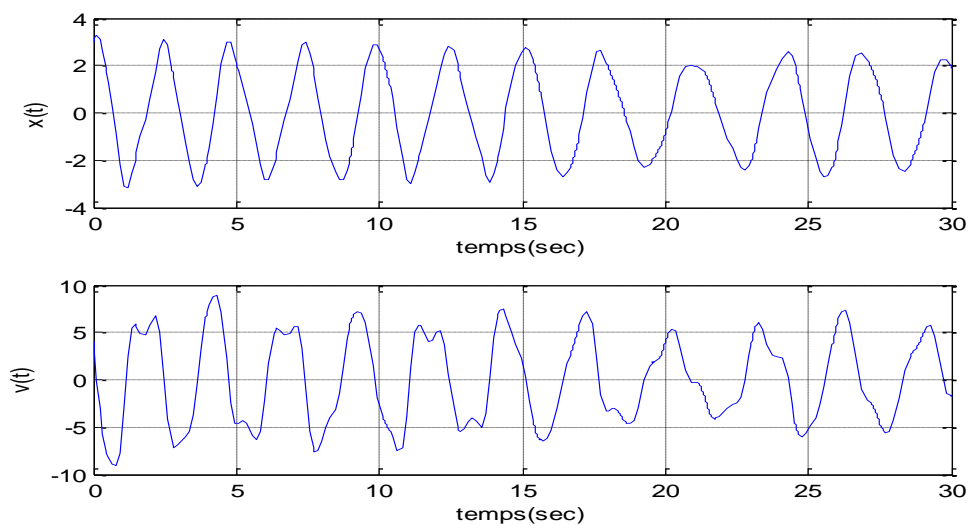
Le system de LORENZ sur son plan de phase représente un attracteur étrange en forme l'aile de papillon, pour presque tout les conditions initiales ; l'orbite du système se promène sur l'attracteur ; la trajectoire commençant par s'enrouler sur une aile puis déplace d'une aile a ne autre pour commencer à s'envoler sur l'autre aile de façon apparemment erratique

### IV.3.4 Simulation en boucle ouvert du l'oscillateur de DUFFING

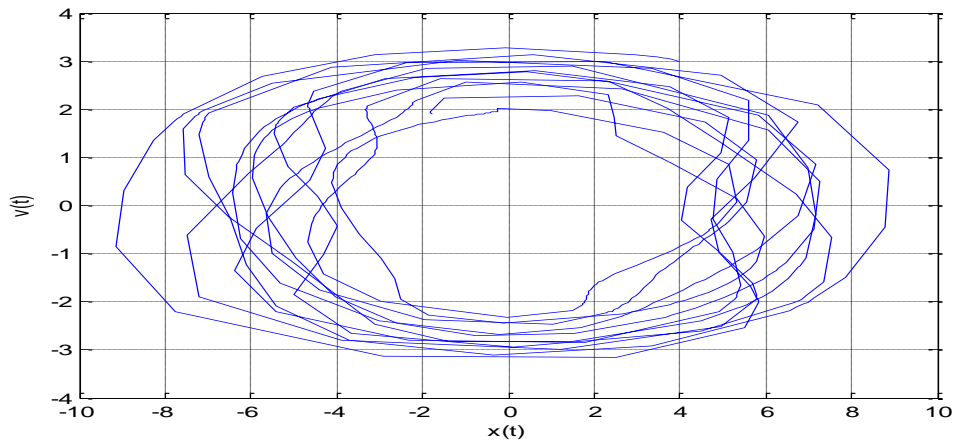
- **Le modèle mathématique :**

$$\ddot{x} = x - x^3 - \gamma\dot{x} + f\cos\omega t \quad (\text{II.31})$$

Les résultats :



**Figure IV.9** représentation des variables d'état d'oscillateur de DUFFING



**Figure IV.10** représentation de plan de phase d'oscillateur de DUFFING

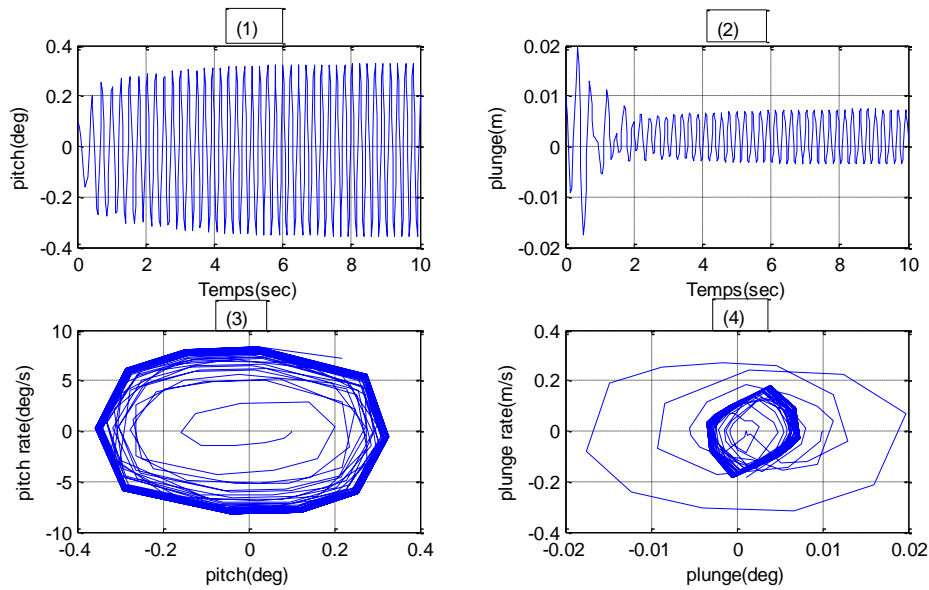
### IV.3.5 Simulation en boucle ouvert du modèle de l'aéroélasticité

- **Le modèle mathématique :**

$$\begin{bmatrix} m_t & m_w x_\alpha b \\ m_w x_\alpha b & I_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ M \end{bmatrix} \quad (1)$$

Paramètres	valeurs	Paramètres	valeurs
a	-0.6719	$m_w$	5.23kg
$x_a$	0.5721	$c_{l\alpha}$	6.757
b	0.1905m	$c_{l\beta}$	3.774
$S_p$	0.5945m	$c_{l\gamma}$	-0.6719
$I_a$	0.1419kg m <sup>2</sup>	$c_{m\alpha}$	0
$K_h$	2844.4N/m	$c_{m\beta}$	-0.6719
$c_h$	27.43N.s/m	$c_{m\gamma}$	-0.1005
$c_a$	0.036 kg m <sup>2</sup> /s	$\rho$	1.225kg/m <sup>3</sup>
$m_t$	15.57 kg		

**Tableau (IV.1)** :les paramètres de simulation pour le modèle d'aéroélasticité



**Figure IV.** réponse en boucle ouverte.(1)réponse d'angle de pitch ;(2)réponse de déplacement de plong ;(3)plan de phase de l'angle de pitch,(4)plan de phase de déplacement de plong

Les résultats de simulation ont prouvé que, dans le modèle de boucle ouverte, l'oscillation de cycle limite a été présentée au-delà de la fatigue critique a causes de vitesse de flottement dans la structure d'aile et peut mener à fente la structure

### IV.3.5 Simulation de la commande PID :

la commande PID appliquée sur les systèmes est donnée par :

$$PID = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (IV.1)$$

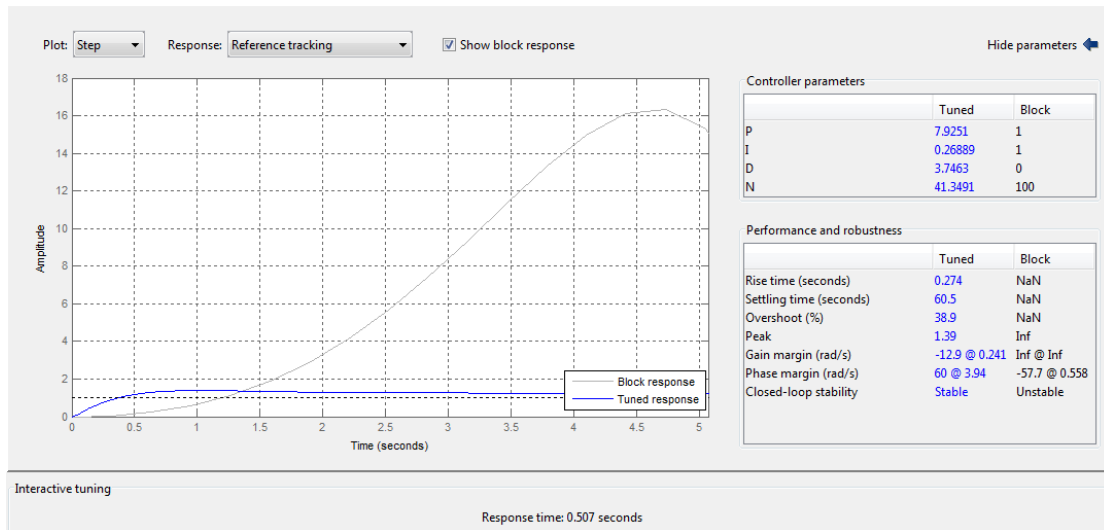
Avec  $k_p$ ,  $k_i$ ,  $k_d$  sont respectivement le gain proportionnel, le gain intégral et le gain dérivé.

#### IV.3.5.1 La commande de pendule simple par la méthode de PID:

Les gains et conditions	La valeur
Conditions initiales $\Theta_0$	$10^0$
Gain de proportion $k_p$	15
Gain d'intégrale $k_i$	1
Gain de dérivé $k_d$	5

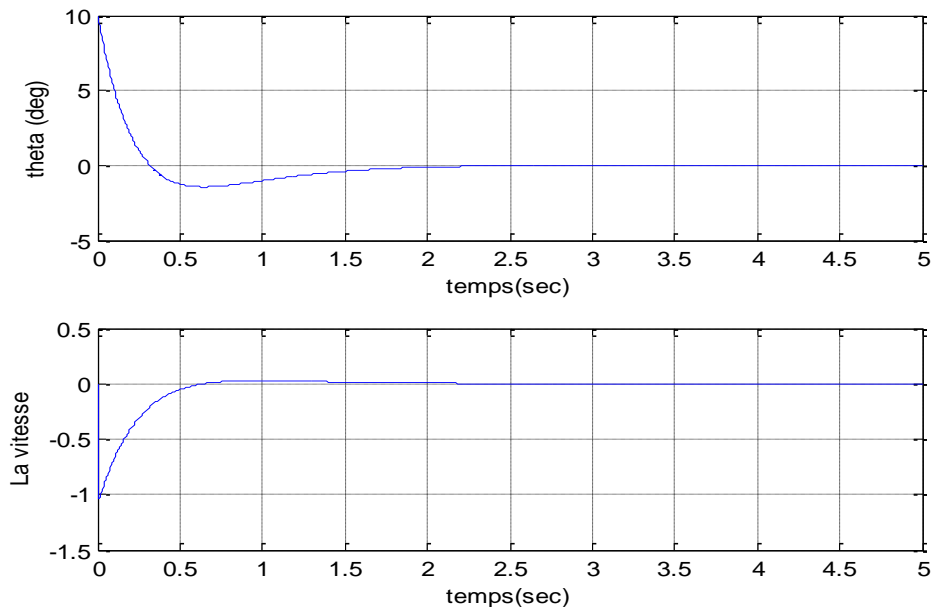
## Résultat et simulation

Pour le choix des gains de commande PID ( $k_p$ ,  $k_i$ ,  $k_d$ ) nous avons utilisé le Simulink avec Régulateur PID afin de déterminer les valeurs des gains qui forcent le système, cette méthode nous aide à optimiser le résultat et elle est plus rapide



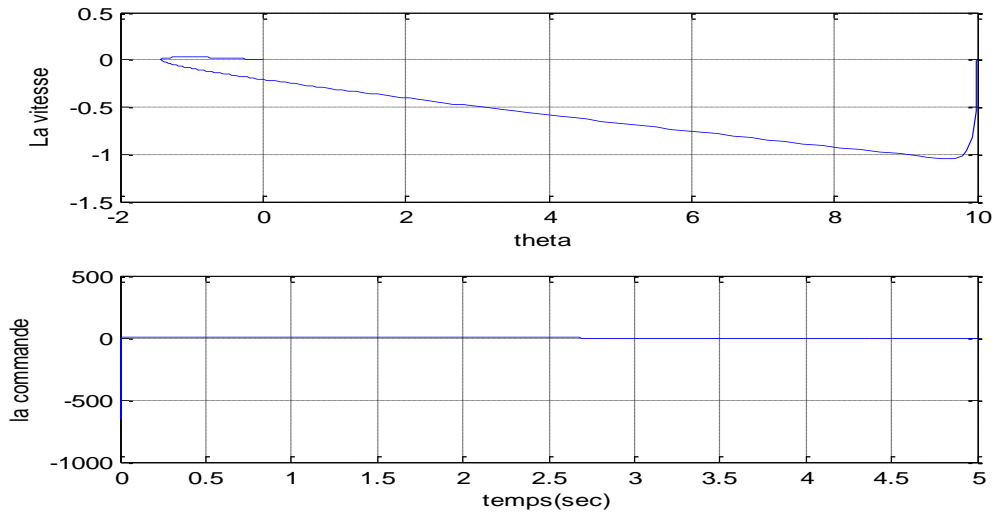
**Figure IV.11** montre le régulateur PID en excursions qui nous donne les différents gains

Les résultats :



**Figure IV.12** Représentation en boucle fermée de la position  $\Theta_1$  et la vitesse  $\dot{\Theta}_1$  (pendule simple)

## Résultat et simulation

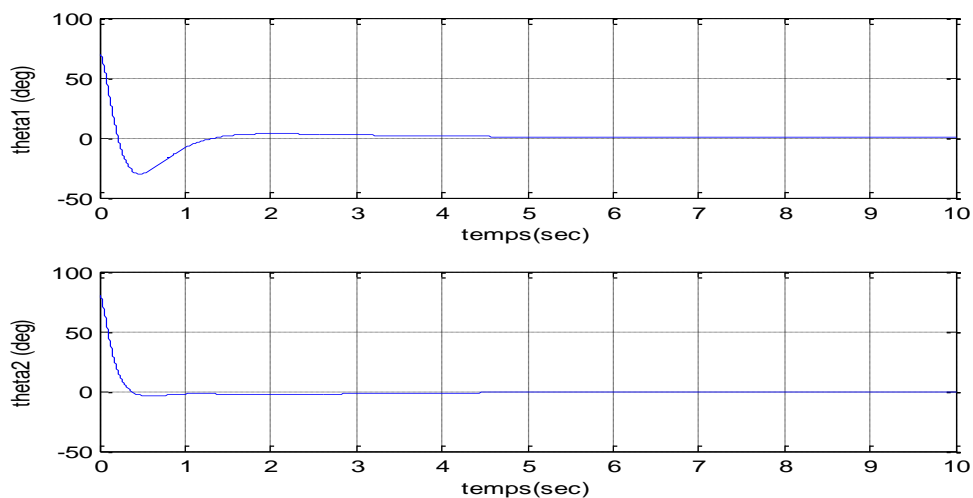


**Figure IV.13** Représentation de plan de phase et l'entrée de la commande (pendule simple)

D'après les résultats on conclue que la commande PID à stabiliser le système a un temps  $t=2s$  et que le plan de phase rejoint l'origine.

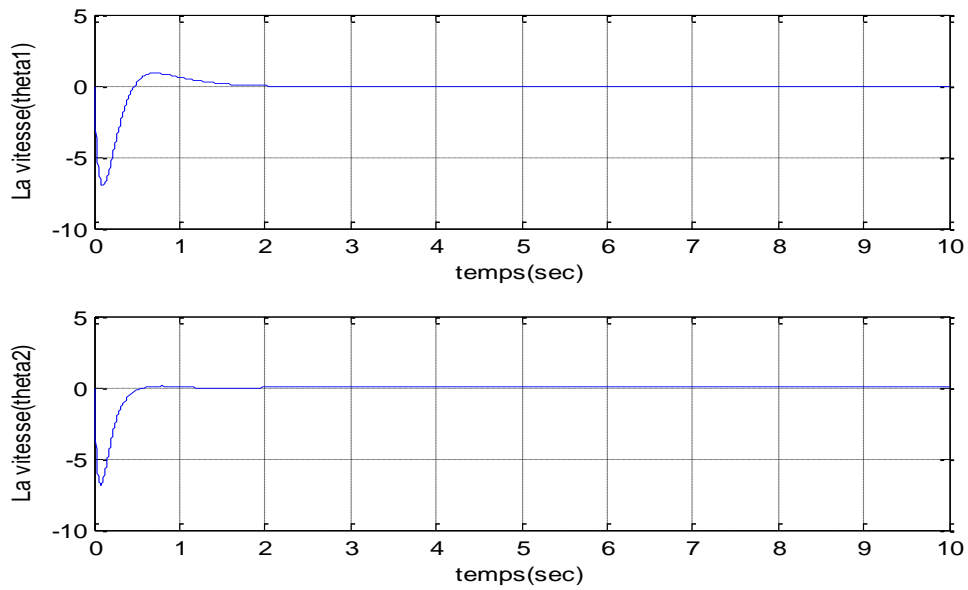
### IV.3.5.2 La commande de pendule double par la méthode PID :

Gaines et conditions	Les valeurs
conditions initiales $\Theta_1$	$70^0$
conditions initiales $\Theta_2$	$60^0$
Gaine de proportion $k_p$	14
Gaine d'intégrale $k_i$	6
Gaine de dérivé $k_d$	6

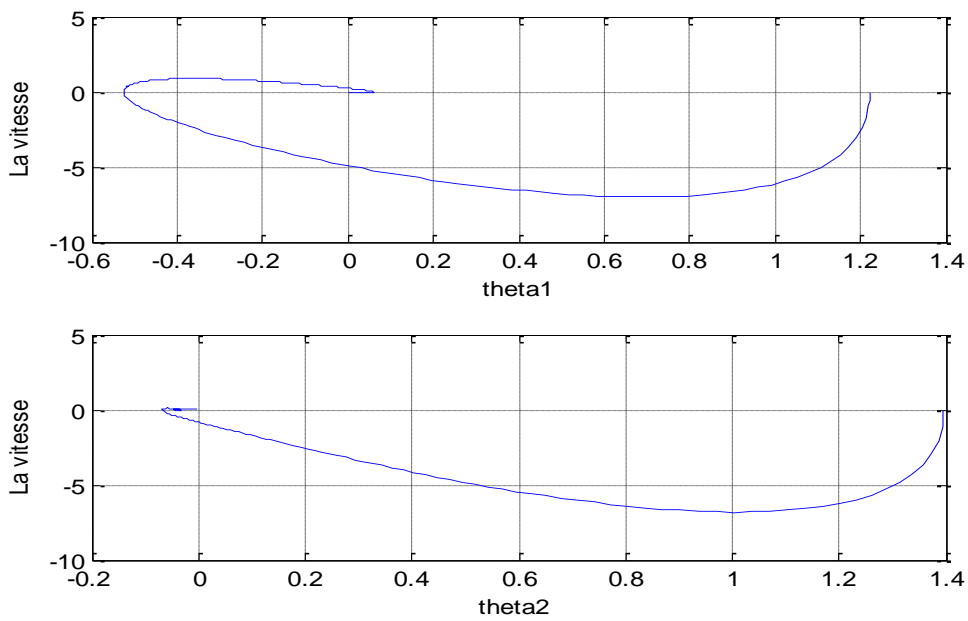


**Figure IV.14** Représentation en boucle fermée des positions  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$ (pendule double)

## Résultat et simulation

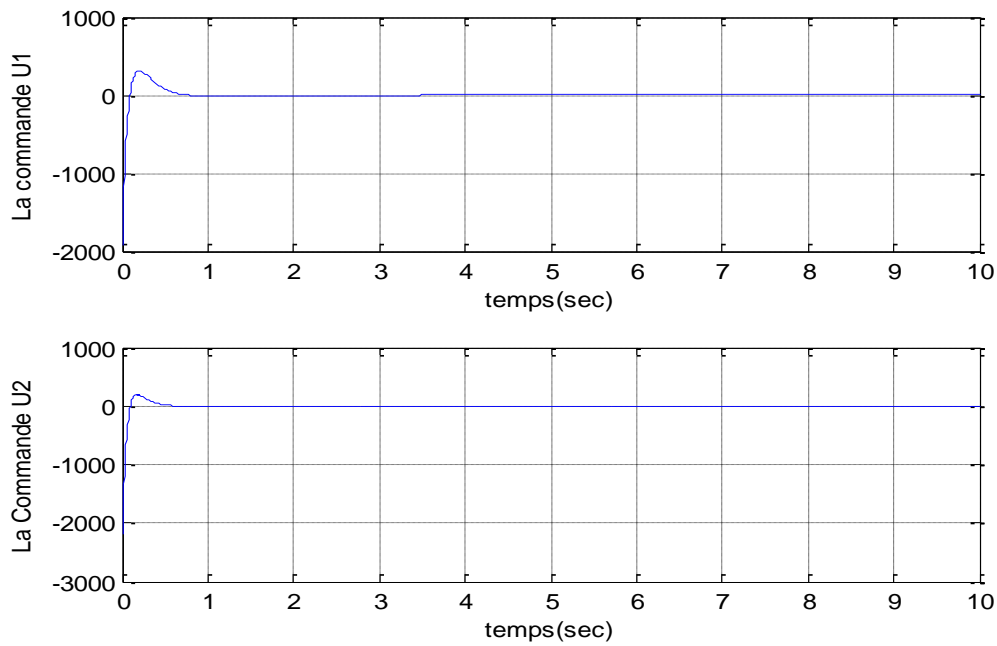


**Figure IV.15** Représentation des vitesses  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$  (pendule double)



**Figure IV.16** Représentation des plans de phase 1et 2(pendule double)

## Résultat et simulation

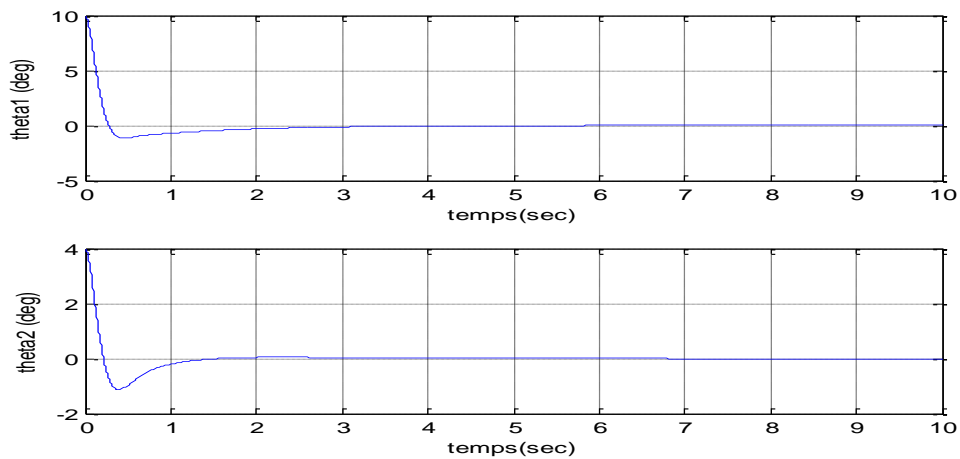


**Figure IV.17** Représentation des entrées de commandes 1 et 2

### Pendule double (2<sup>ème</sup> cas)

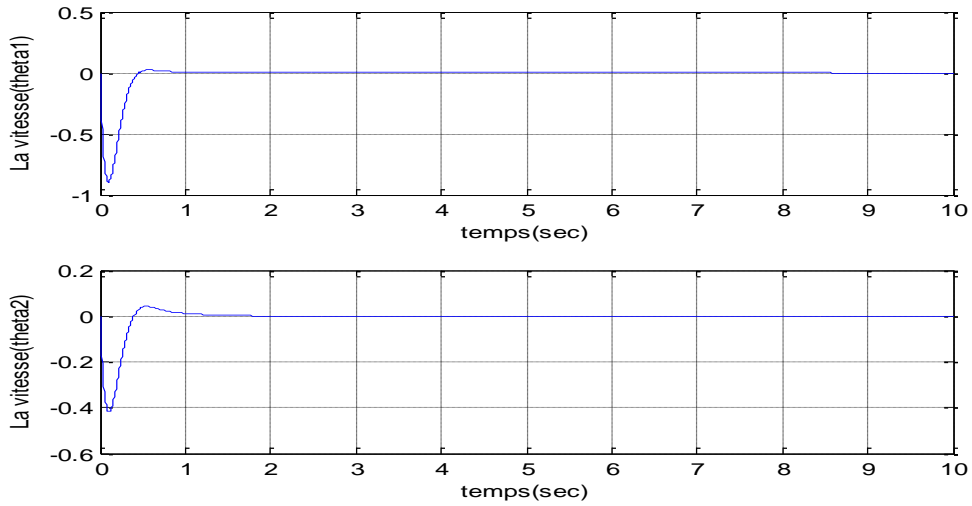
D'après les résultats on conclue que la commande PID à stabiliser le système a un temps  $t=4s$  et que le plan de phase rejoint l'origine.

Gaines et conditions	Les valeurs
conditions initiales $\Theta_1$	$10^0$
conditions initiales $\Theta_2$	$4^0$
Gaine de proportion $k_p$	8
Gaine d'intégrale $k_i$	0.5
Gaine de dérivé $k_d$	7



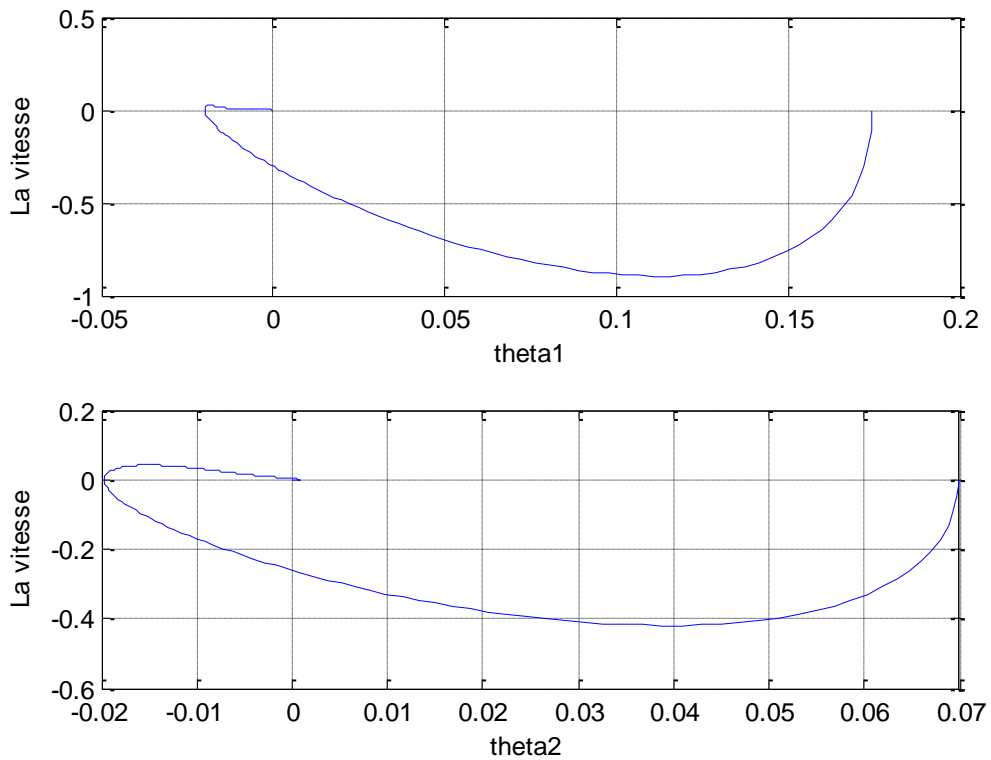
**Figure IV.18** Représentation des positions  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$ (pendule double) (2<sup>ème</sup> cas)

## Résultat et simulation



**Figure IV.19** Représentation des vitesses  $\dot{\Theta}_1$  et  $\dot{\Theta}_2$  (pendule double)

(2<sup>ème</sup> cas)

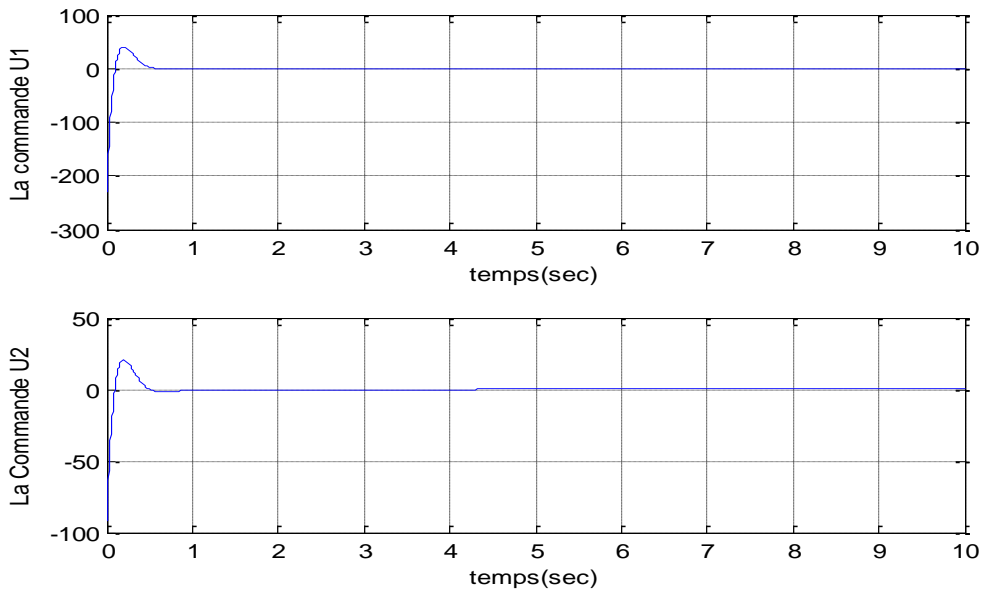


**Figure IV.20** Représentation des plans de phase 1et 2 (pendule double)

(2<sup>ème</sup> cas)



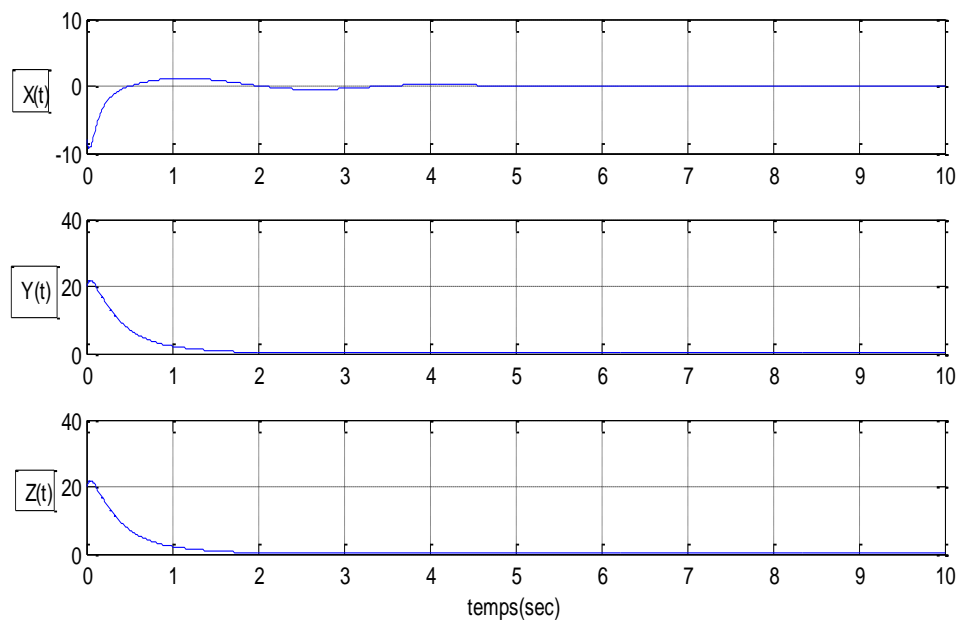
## Résultat et simulation



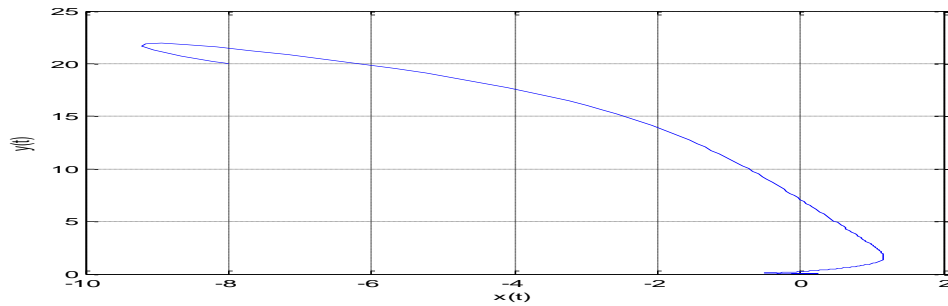
**Figure IV.21** Représentation des entrées de commandes 1 et 2 (pendule simple)  
(2<sup>ème</sup> cas)

### IV.3.6 La commande de système de LORENZ par la méthode PID :

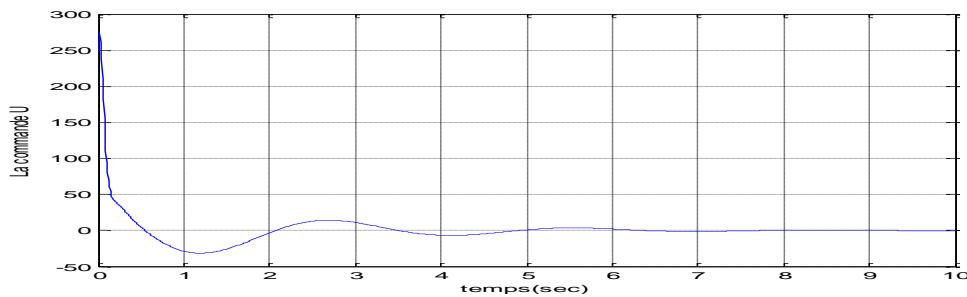
Gaines de commande	Les valeurs
Gaine de proportion $k_p$	22
Gaine d'intégrale $k_i$	8
Gaine de dérivé $k_d$	10



**Figure IV.22** représentation des états du système de LORENZ



**Figure IV.23** représentation de plan de phase du système de LORENZ

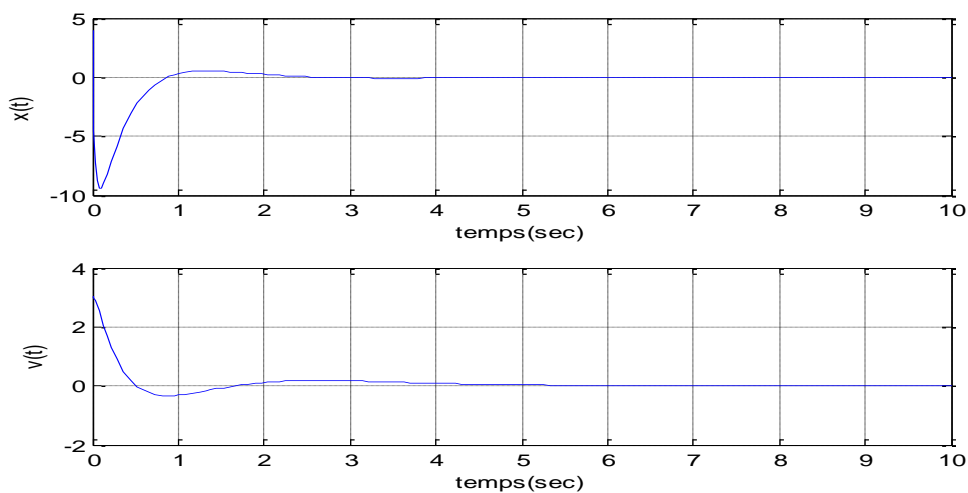


**Figure IV.24** représentation d'entrée de commande

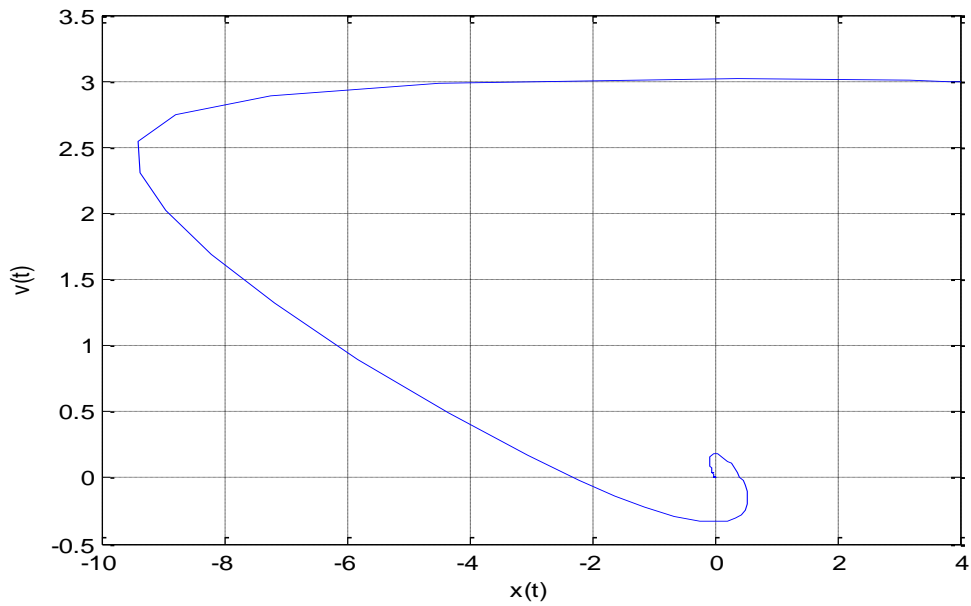
D'après les résultats on conclue que la commande PID à stabiliser les états du système a un temps  $t=2s$  et que le plan de phase rejoint l'origine.

### IV.3.7 La commande de l'oscillateur de DUFFING par la méthode PID :

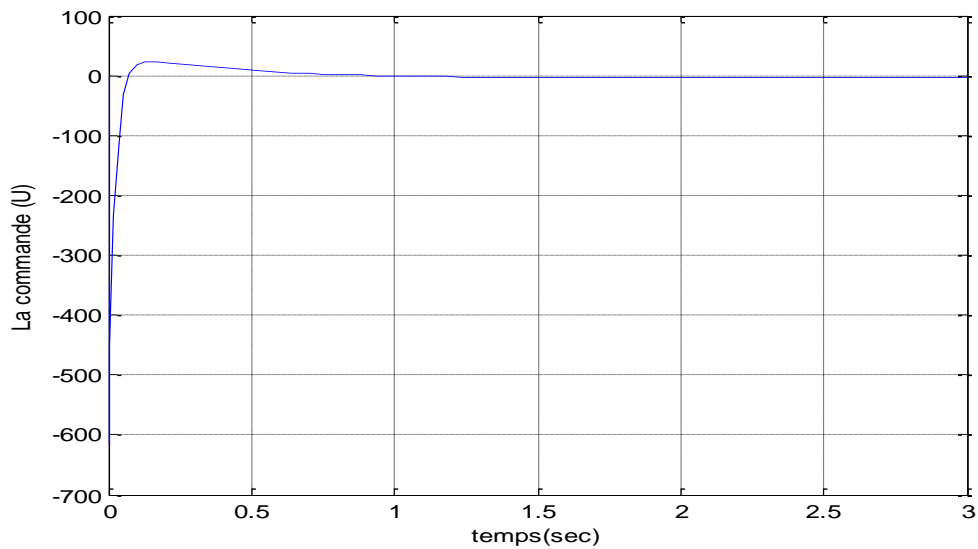
Gaines de commande	Les valeurs
Gaine de proportion $k_p$	12
Gaine d'intégrale $k_i$	3
Gaine de dérivé $k_d$	6



**Figure IV.25** représentation les variables des états de l'oscillateur de DUFFING



**Figure IV.26** représentation de plan de phase de l'oscillateur de DUFFING

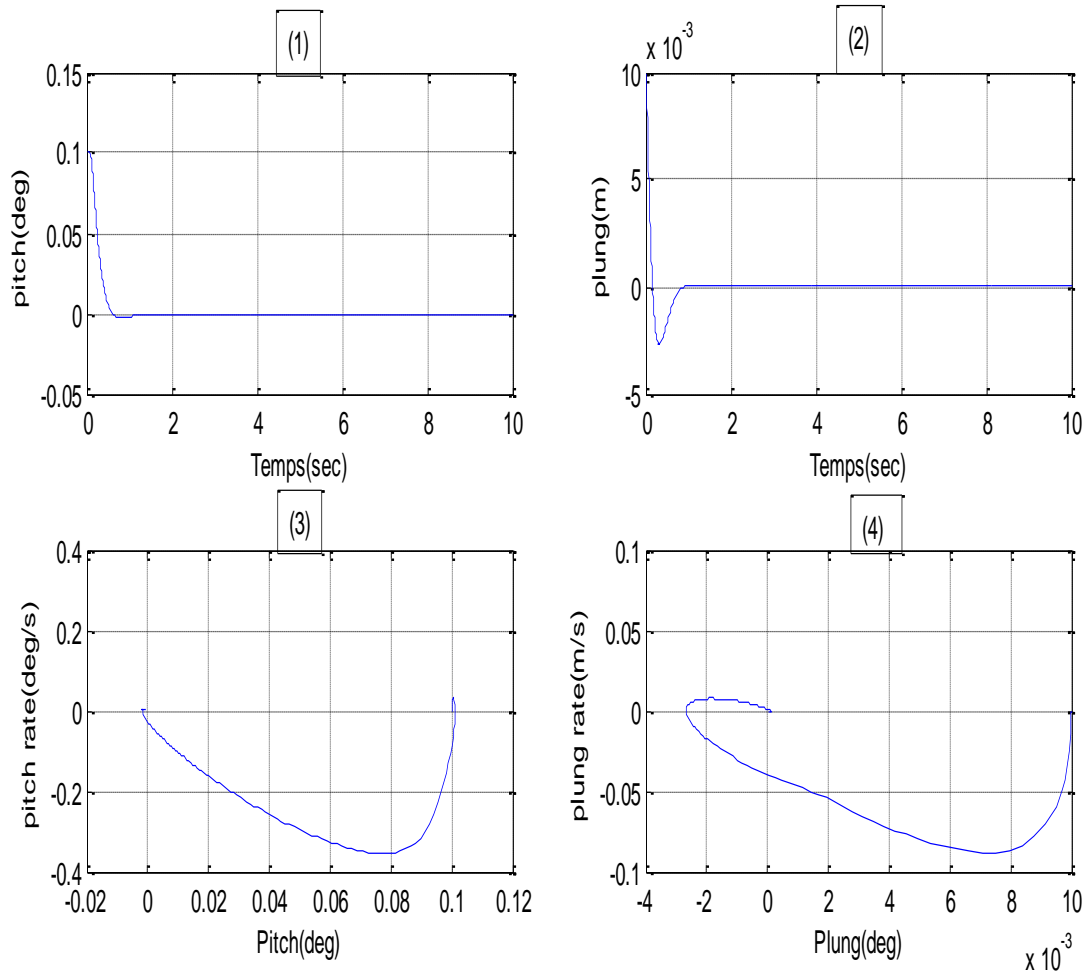


**Figure IV.27** représentation d'entrée de commande

Nous avons intégré la commande PID dans le système et on remarque que ce régulateur arrive à stabiliser les systèmes et éliminer les mouvements chaotiques dans un temps de réponse environ  $T_S = 1.5s$  mais avec des gains de commande ( $k_p$ ,  $k_i$ ,  $k_d$ ) importants.

### IV.3.8 La commande de modèle de l'aéroélasticité par la méthode PID :

Gaines de commande	Les valeurs
Gaine de proportion $k_p$	15
Gaine d'intégrale $k_i$	4
Gaine de dérivé $k_d$	6



**Figure IV.** réponse en boucle fermée.(1)réponse d'angle de pitch ;(2)réponse de déplacement de plung ;(3)plan de phase de l'ange de pitch,(4)plan de phase de déplacement de plung

On remarque que ce régulateur arrive a stabilisé le système et éliminer les mouvements chaotiques dans un temps de repense environs  $T_S=1s$  mais avec des gains de commande ( $k_p$  ;  $k_i$  ;  $k_d$ ) importants .

### IV.4 Simulation de la commande VSS par régime glissant :

#### IV.4.1 La commande de pendule simple en régime glissant :

##### IV.4.1.1 Synthèse de loi de commande :

Le dynamique de système est donnée par :

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases} \quad (IV.2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -gx_1 + U \end{cases}$$

Choisissons la surface de glissement comme suit :

$$S = cx_1 + x_2$$

$$\dot{S} = c\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \quad (IV.3)$$

$$\dot{S} = cx_2 + (-gx_1 + U)$$

$$\dot{S} = cx_2 - gx_1 + U$$

Et  $U_{eq}$  la commande équivalente calculée lorsque :

$$\dot{S} = 0$$

En utilisant la théorie de la commande par mode de glissement, la loi de commande est la suivante :

$$U_{eq} = -cx_2 + gx_1 \quad (IV.4)$$

Avec  $\Delta U$  est le terme de correction défini par :

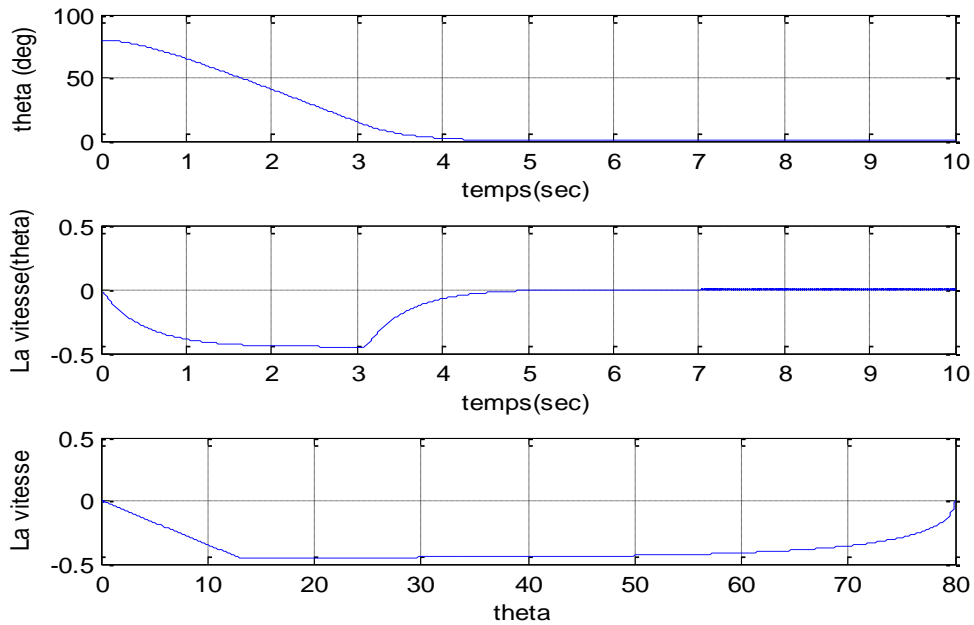
$$\Delta U = -M \text{sign}(S) \quad (IV.5)$$

Donc la commande devient :

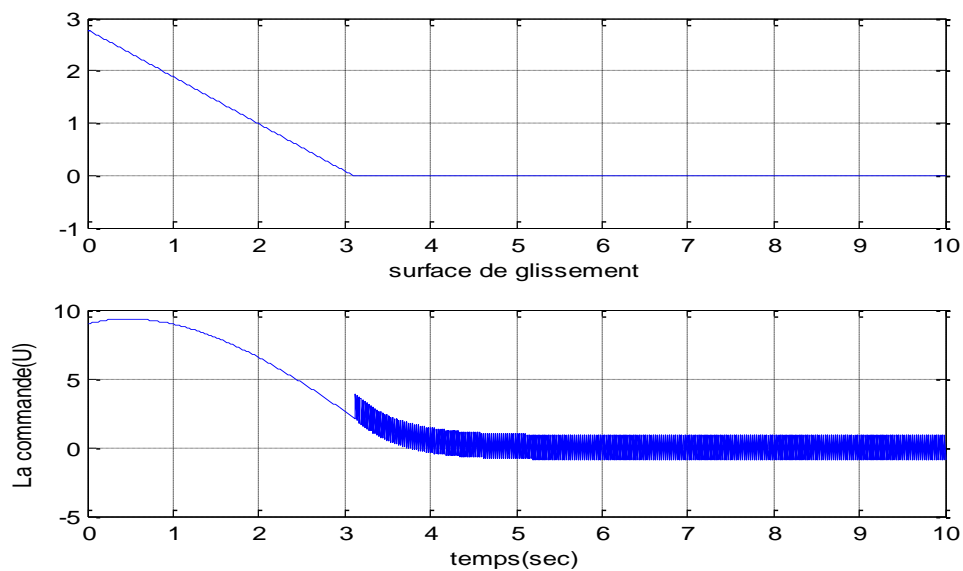
$$U = -cx_2 + gx_1 - M \text{sign}(S) \quad (IV.6)$$

## Résultat et simulation

Gaines et condition	Les valeurs
La fonction utilisée	Sign
Condition initiale $\Theta$	$80^0$
M	0,9



**Figure IV.28** représentation de la position  $\Theta_1$  et la vitesse  $\dot{\Theta}_1$  et le plan de phase

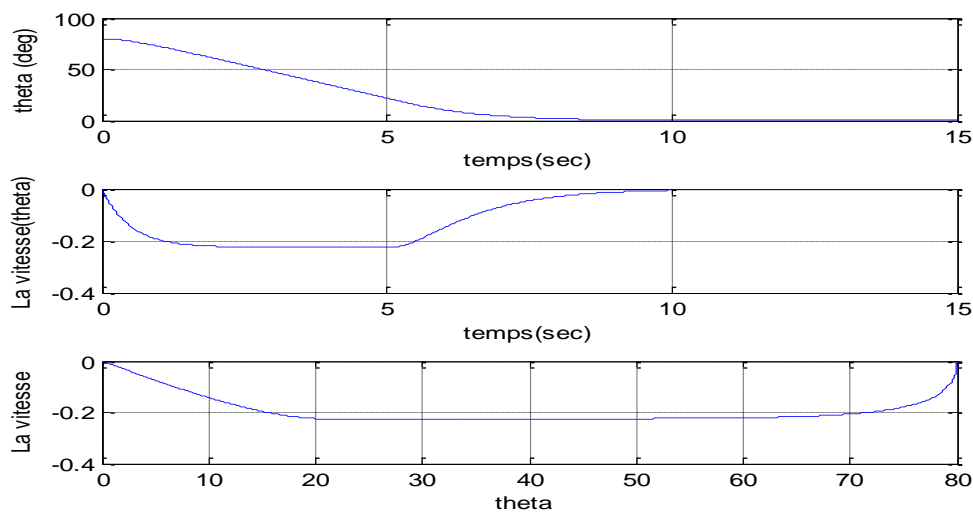


**Figure IV.29** Représentation de la surface de glissement et la commande avec phénomène de chattering

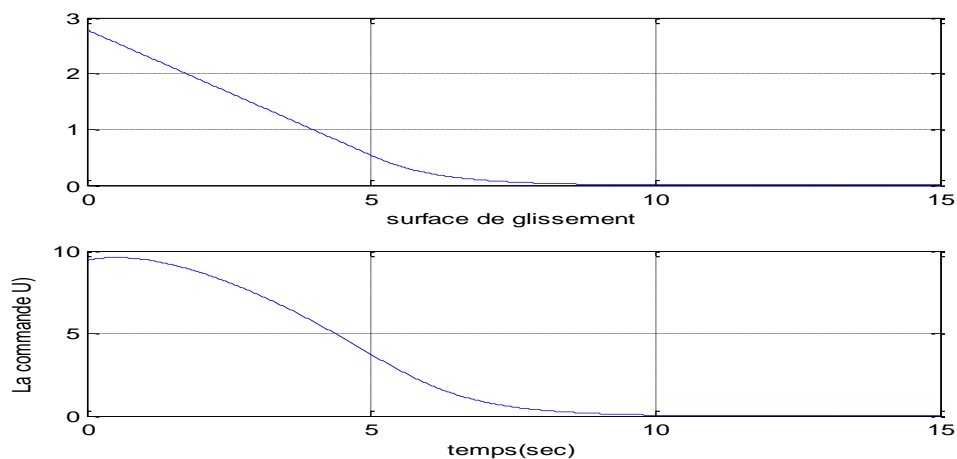
## IV.4.1.2 Annulation du phénomène de réticence

Pour annuler le phénomène de réticence nous utilisons la fonction « sat », à la place de la fonction « signe ». On obtient les résultats suivants :

Gains et condition	Les valeurs
La fonction utiliser	Saturation
Condition initiale $\Theta$	$80^0$
M	0,9



**Figure IV.30** Représentation de la position  $\Theta_1$  et la vitesse  $\dot{\Theta}_1$  et la phase après l'élimination de chattering (pendule simple)



**Figure IV.31** Représentation de la surface de glissement et la commande après l'élimination de chattering (pendule simple)

D'après les résultats on remarque qu'après l'élimination de chattering on a eu des dégradations de performances concernant le temps de réponse qui augmente

## Résultat et simulation

### IV.4.2 La commande de pendule double en régime glissant :

#### IV.4.2.1 Synthèse de loi de commande :

D'après la synthèse de loi de commande de pendule simple on peut déduire la loi de commande de pendule double et en à trouver les commande suivantes :

Pour la première masse :

La surface de glissement :

$$S = 5 \theta_2 + \dot{\theta}_1 \quad (IV.7)$$

$$U_1 = -\theta_1 - 2\theta_2 + M \text{sign}(S) \quad (IV.8)$$

Pour la deuxième masse :

$$S = 5 \theta_2 + \dot{\theta}_1 \quad (IV.9)$$

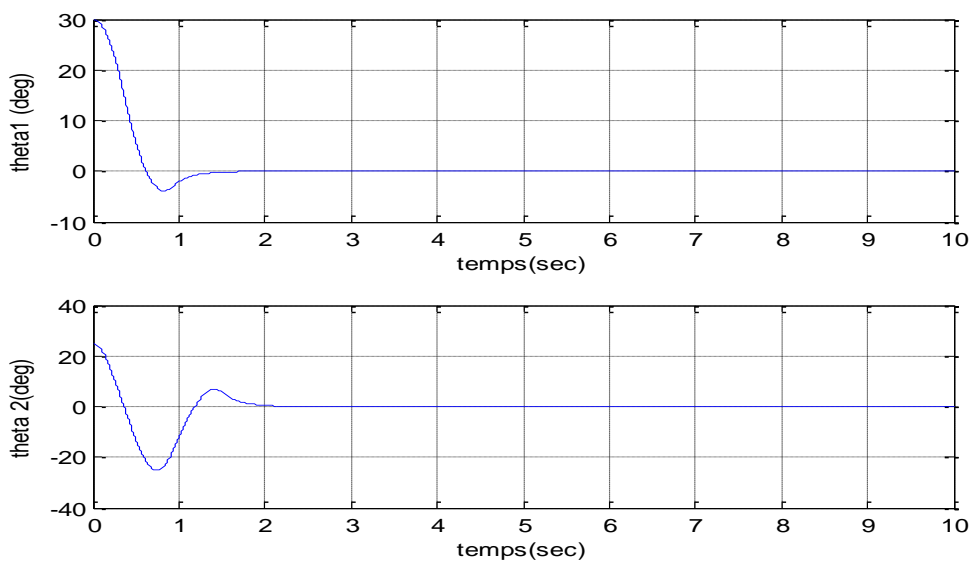
$$U_1 = -\theta_1 - 5\theta_2 + M \text{sign}(S) \quad (IV.10)$$

Avec :

$$\Delta U = -M \text{sign}(S) \quad (IV.11)$$

Les résultats de la commande en régime glissant :

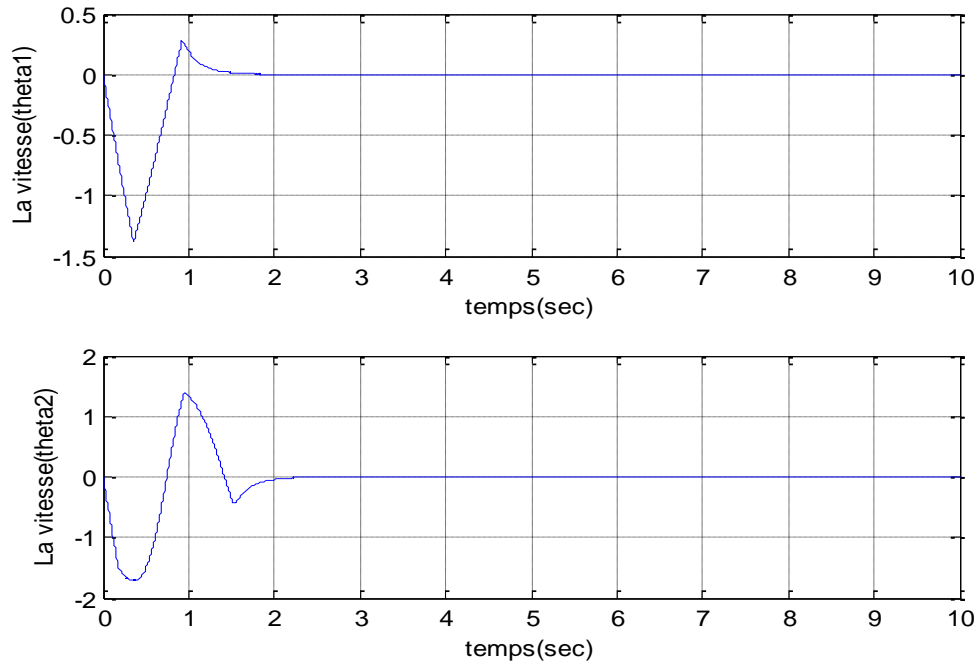
Gaines et condition	Les valeurs
La fonction utilisée	Sign
$\Theta_1$	$30^0$
$\Theta_2$	$25^0$
M	3



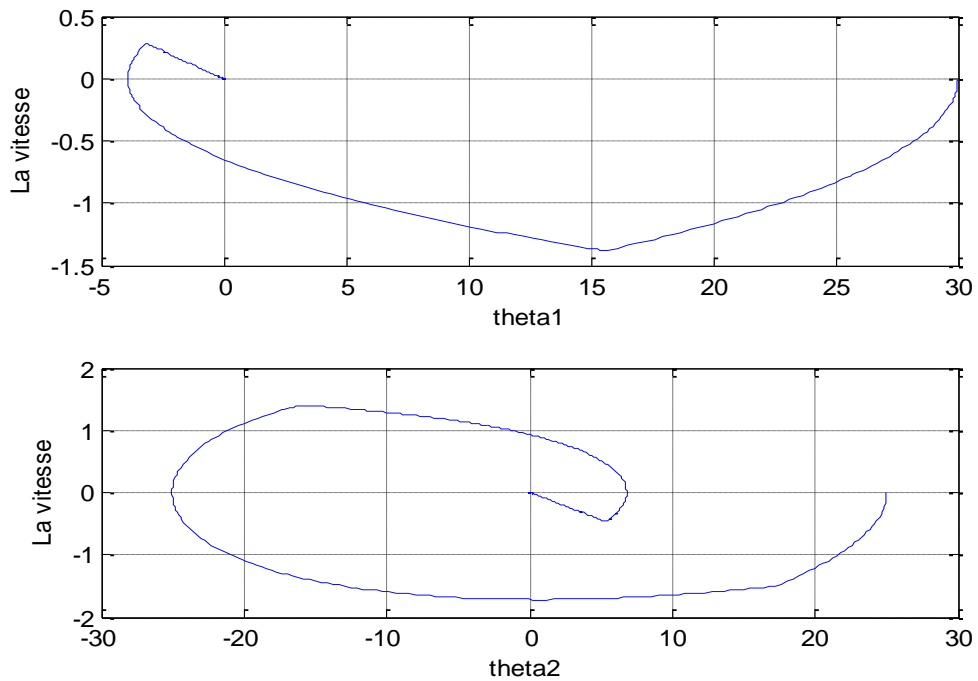
**Figure IV.32** Représentation des positions  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (pendule double)



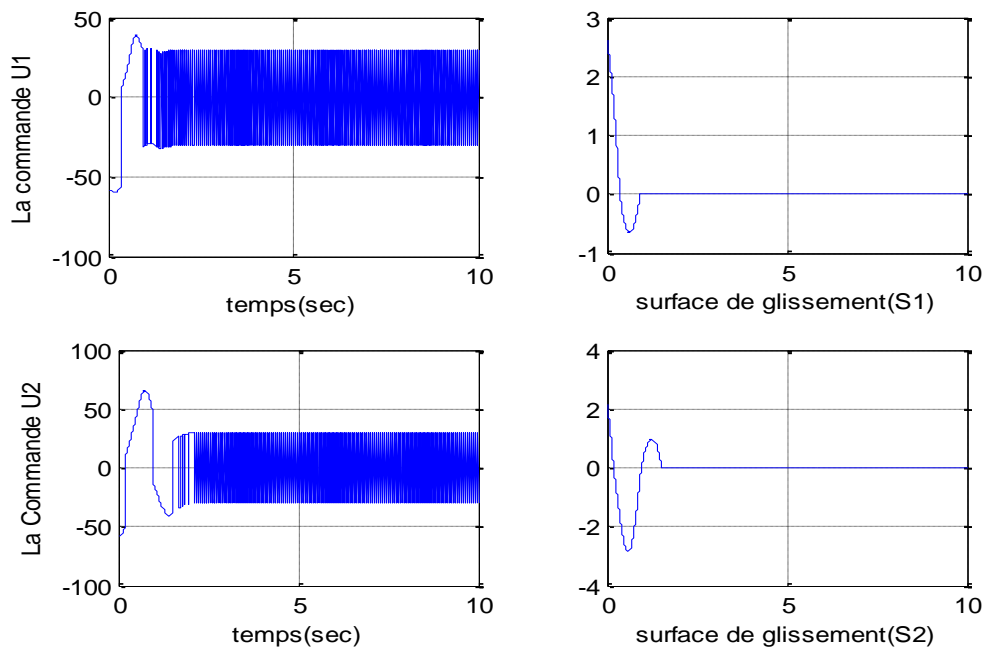
## Résultat et simulation



**Figure IV.33** Représentation des vitesses  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$  (pendule double par commande Vss)



**Figure IV.34** Représentation des plans de phase 1et 2(pendule double pas Vss)

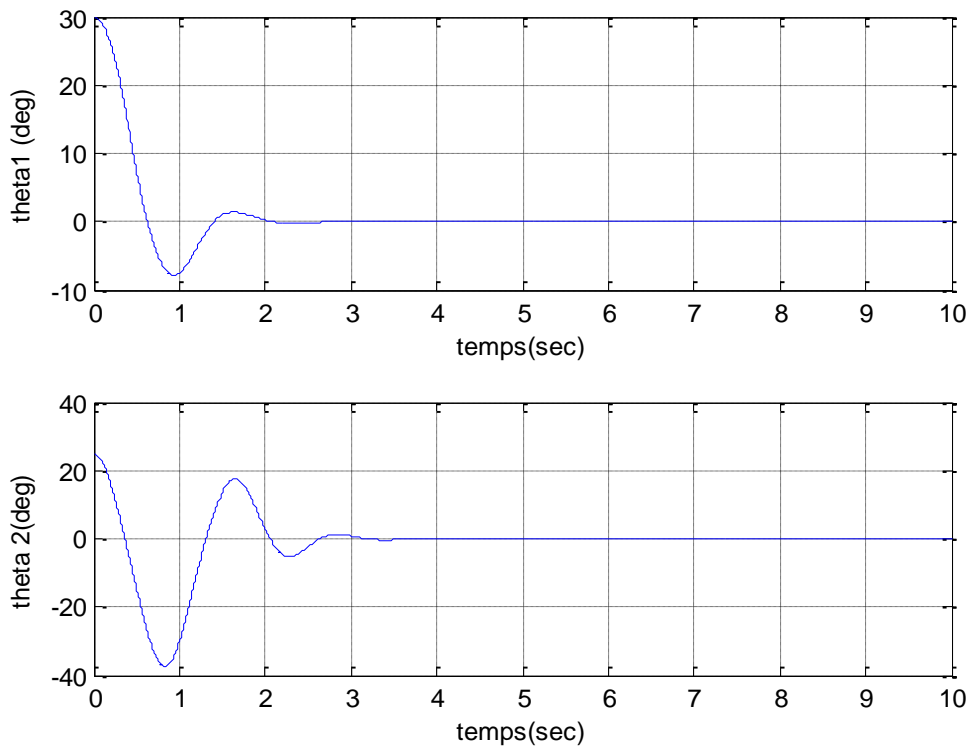


**Figure IV.35** Représentation de la surface de glissement et la commande équivalente avec phénomène de chatterring

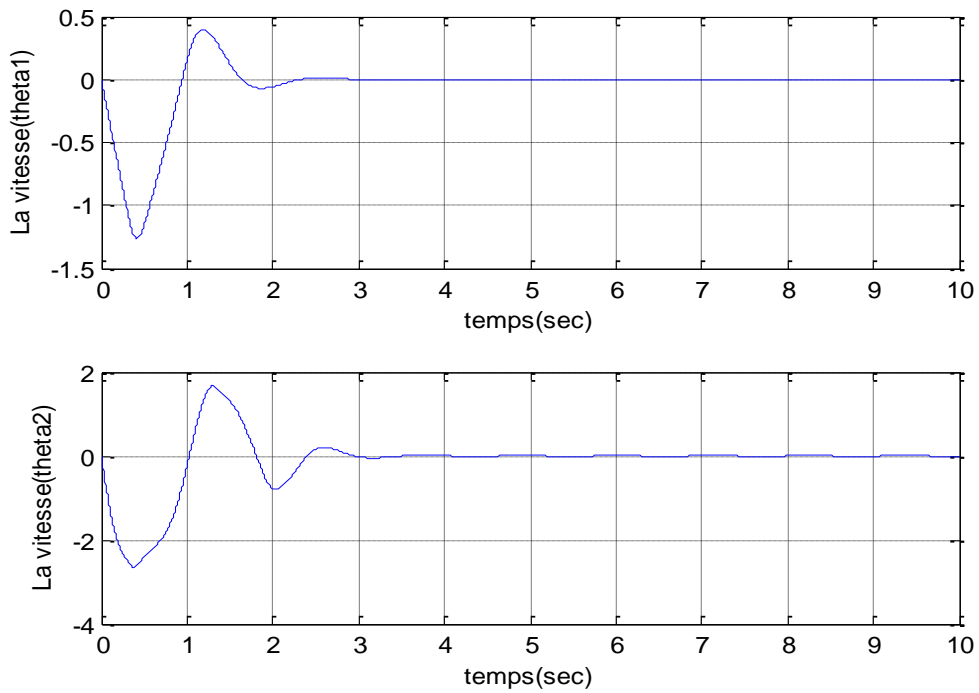
### IV.4.2.2 Annulation du phénomène de réticence

Comme le système prédisant pour annuler le phénomène de réticence nous utilisant la fonction « *sat* », à la place de la fonction « *signe* ». On obtient les résultats suivants :

Gaines et condition	Les valeurs
La fonction utilisée	Saturation
$\Theta_1$	$30^0$
$\Theta_2$	$25^0$
M	5

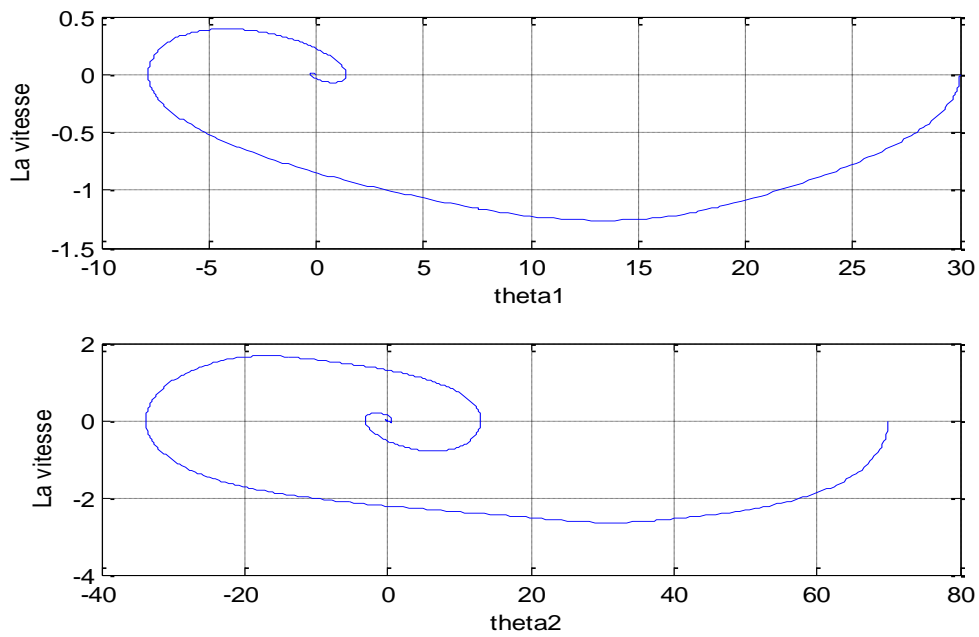


**Figure IV.36** Réponse des positions  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (pendule double par commandes après l'élimination de réticences)

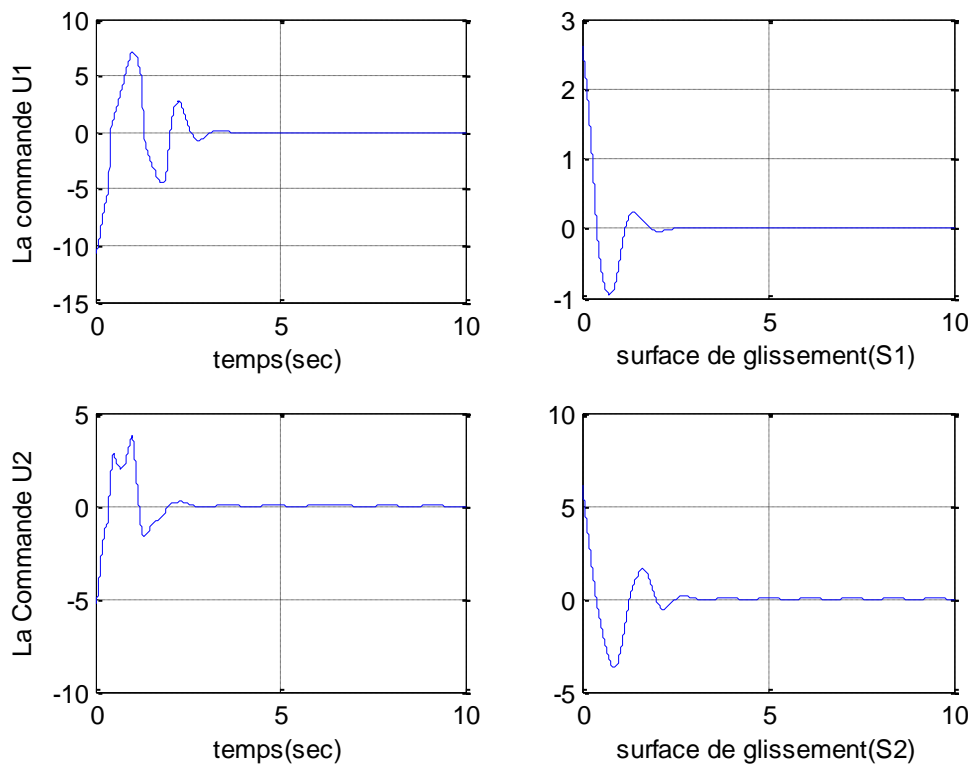


**Figure IV.37** Représentation des vitesses  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$  (pendule double par Commande VSS après l'élimination de réticences)

## Résultat et simulation



**Figure IV.38** Représentation des plans de phase 1et 2 (pendule double par commande Vss après l'élimination de réticences)



**Figure IV.39** Représentation de la surface de glissement et la commende après l'élimination de chattering (pendule double)

### IV.5 La commande de système de LORENZ par VSS en régime glissant :

#### IV.5.1 Synthèse de loi de commande :

Le modèle de LORENZ avec la commande est définie comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y + U \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}\tag{II.24}$$

et en détermine  $u(t)$  a fin de stabilisé le modèle ou propose une surface de glissement comme suit :

$$\begin{aligned}S &= cx + y \\ \dot{s} &= c\dot{x} + \dot{y} \\ s &= (c\sigma - 1)y + (\rho - c\sigma)x - xz + U\end{aligned}\tag{IV.12}$$

Et  $U_{eq}$  la commande équivalente calculée lorsque :

$$\dot{S} = 0$$

En utilisant la théorie de la commande par mode de glissement, la loi de commande équivalente est la suivante :

$$U_{eq} = -(c\sigma - 1)y - (\rho - c\sigma)x + zx\tag{IV.13}$$

Avec  $\Delta U$  est le terme de correction défini par :

$$\Delta U = \mu s - M \text{sign}(S)\tag{IV.14}$$

la commande U peut être écrit donc comme suit :

$$U = U_{eq} - \mu s - M \text{sign}(S)\tag{IV.15}$$

Donc :

$$U = -(c\sigma - 1)y - (\rho - c\sigma)x + zx - \mu s - M \text{sign}(S)\tag{IV.16}$$

Avec :

$$\begin{cases} c = 1.5 \\ M = 11 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

### IV.5.2 Test de stabilité au sens de Lyapunov :

Soit la fonction de Lyapunov candidate suivante :

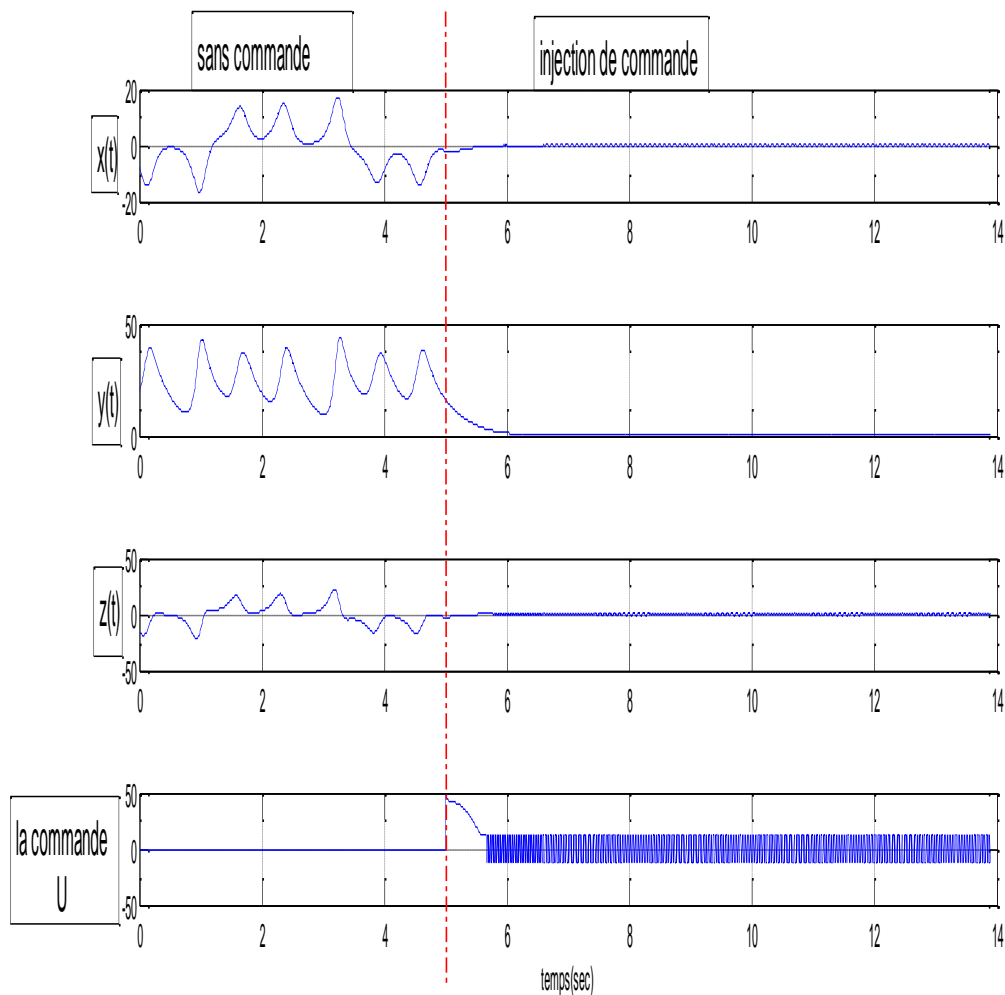
$$v = \frac{1}{2} s^2 \quad (IV.17)$$

On peut montrer facilement que :

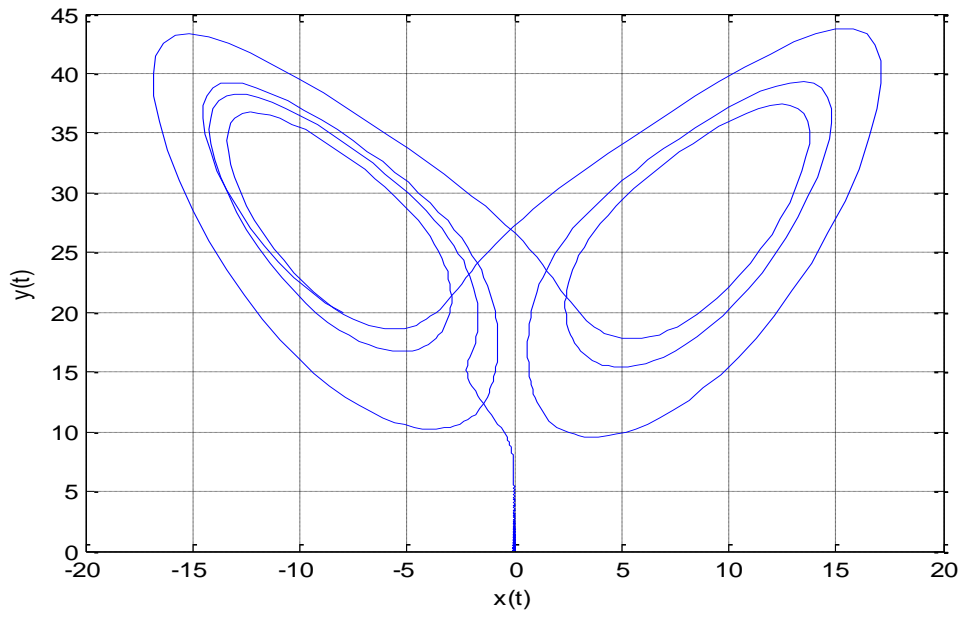
$$\begin{aligned} \dot{v} &= s \dot{s} \leq 0 \\ \dot{v} &= s \dot{s} = s(-\mu s - M \operatorname{sign}(s)) \\ &= -\mu s^2 - M|s| \leq 0 \end{aligned} \quad (IV.18)$$

Donc la stabilité de système est vérifiée au sens de Lyapunov

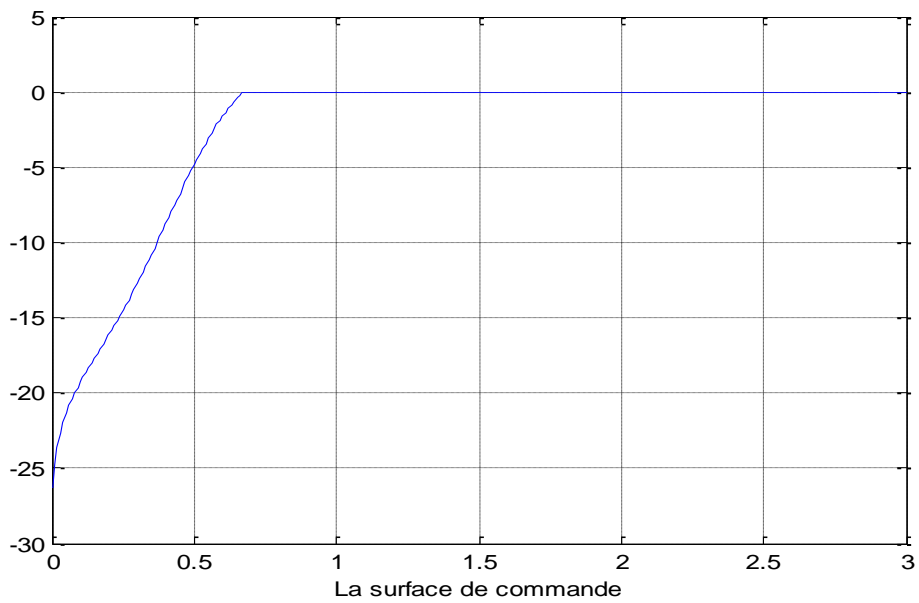
### IV.5.3 Simulation en utilisant la fonction sign :



**Figure IV.40** représentation des états avec l'injection de commande après 5sec



**Figure IV.41** représentation de plan de phase a l'injection de la commande après 5Sec



**Figure IV.42** représentation de la surface de glissement

## IV .5.4 Simulation en utilisation de la fonction de saturation :

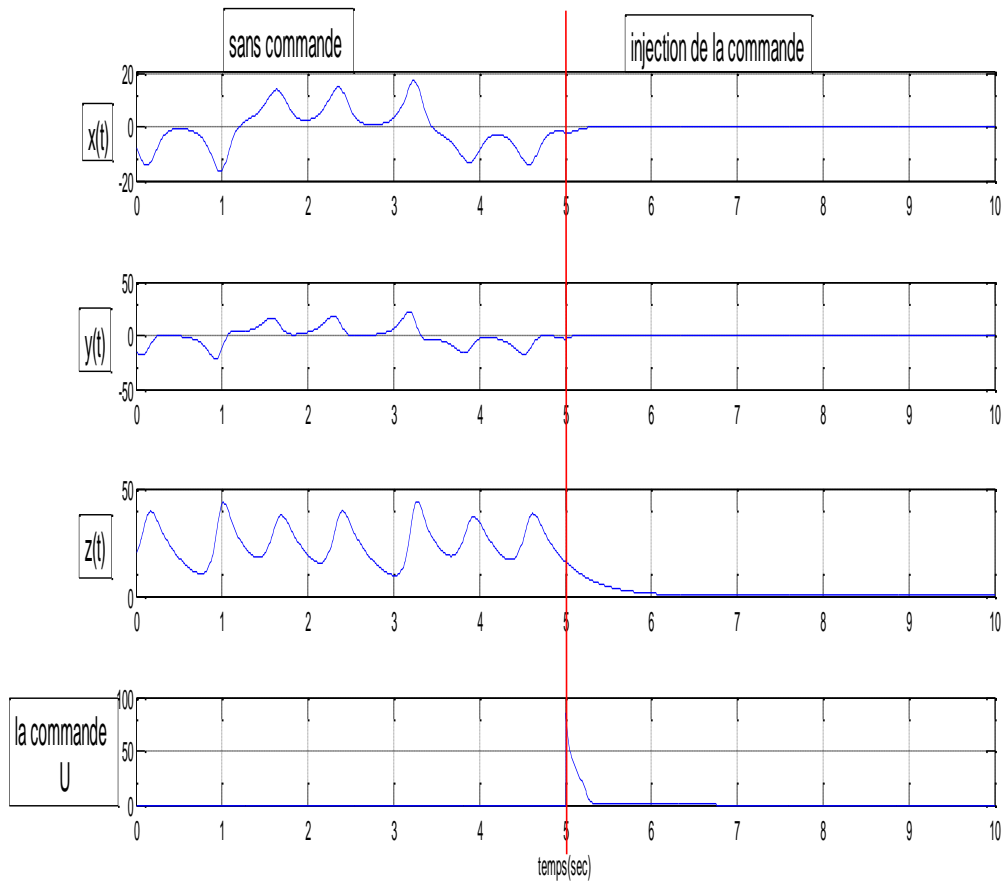


Figure IV.43 représentation des états avec l'injection de commande après 5sec

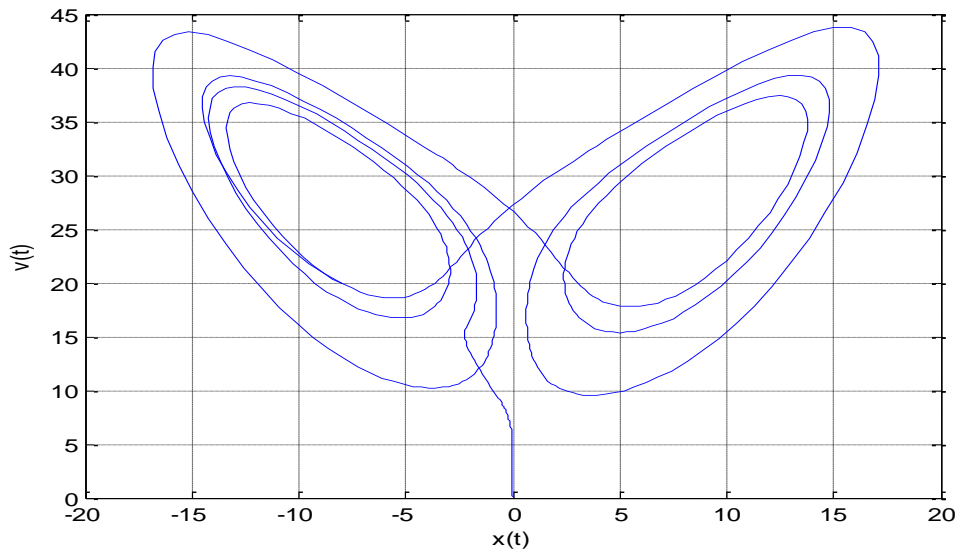
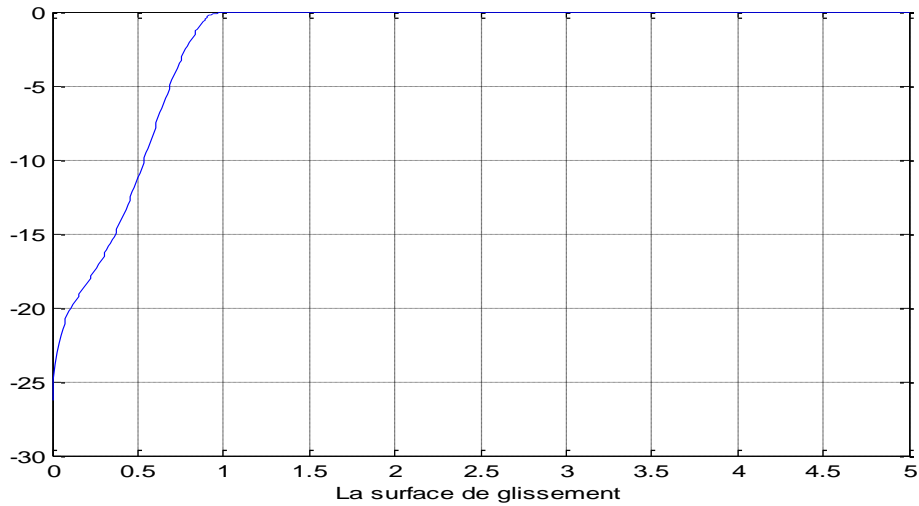


Figure IV.44 représentation de plan de phase a l'injection de la commande après 5 sec





**Figure IV.45** représentation de la surface de glissement

D'après les résultats on conclue lors ce qu'on a injecté la commande VSS le système se stabilise dans uns temps très petit a un temps  $t=2s$  et que le plan de phase rejoint l'origine

### IV.6 La commande de l'oscillateur de DUFFING par VSS en régime glissant :

#### IV.6.1 Synthèse de loi de commande :

L'oscillateur de DUFFING est défini par :

$$\ddot{x} = -x^3 - \gamma \dot{x} + f \cos \omega t + U \quad (\text{II.25})$$

Le dynamique de système est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - \gamma x_2 + \cos(\omega t) + U \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

Généralement, il est souhaitable que les états d'erreur convergent vers zéro donc on a choisi la surface de glissement comme suit :

$$S = c x_1 + x_2$$

$$\dot{S} = c \dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

$$\dot{S} = c x_2 - x_1^3 - \gamma x_2 + \cos(\omega t) + U \quad (\text{IV.20})$$

## Résultat et simulation

Et  $U_{eq}$  la commande équivalente calculée lorsque :

$$\dot{S} = 0$$

En utilisant la théorie de la commande par mode de glissement, la loi de commande est la suivante :

$$U_{eq} = -(-x_1^3 - \gamma x_2 + \cos(\omega t)) - c x_2 \quad (IV.21)$$

Avec  $\Delta U$  est le terme de correction défini

par :

$$\Delta U = -M \text{sign}(S / \beta) \quad (IV.22)$$

Donc la commande devient :

$$U = U_{eq} - M \text{sign}(S / \beta) \quad (IV.23)$$

Pour la simulation on a choisi  $\gamma = 0.05$ ,  $\omega = 2\pi$ . avec des condition initiales  $x(0) = [3 \ 4]$

Et pour la commande  $c = 1$ ,  $\beta = 0.05$

### IV.6.2 simulation en utilisant la fonction sign :

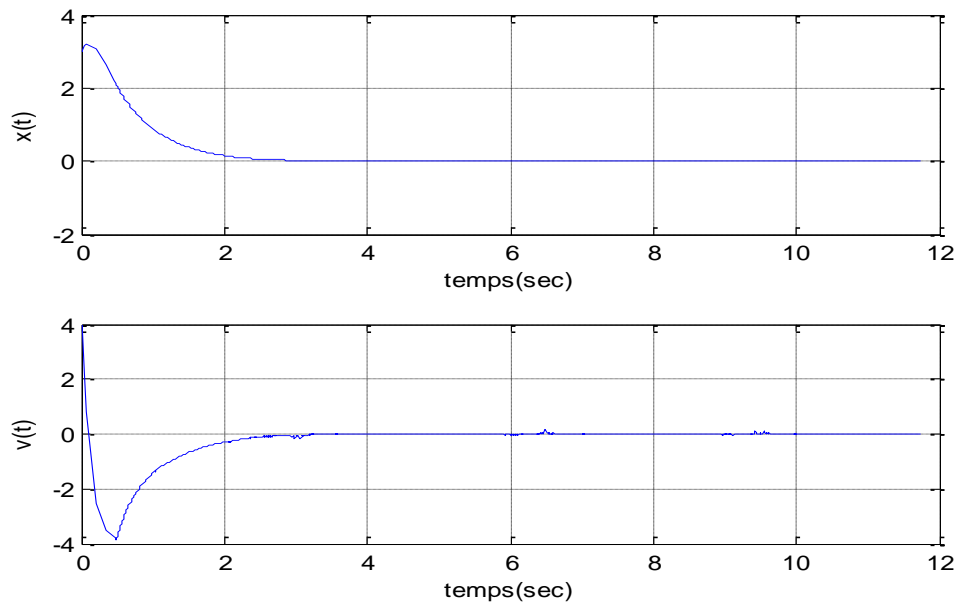


Figure IV.46 représentation des variables d'état de système

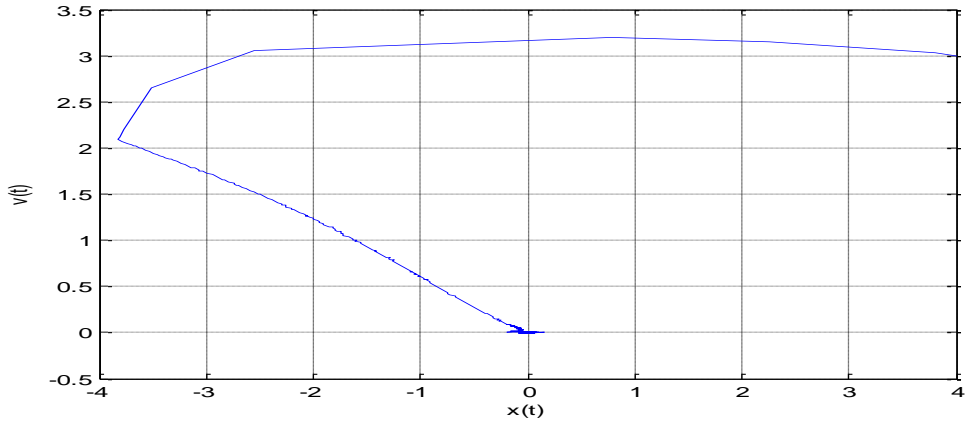


Figure IV.47 représentation de plan de phase

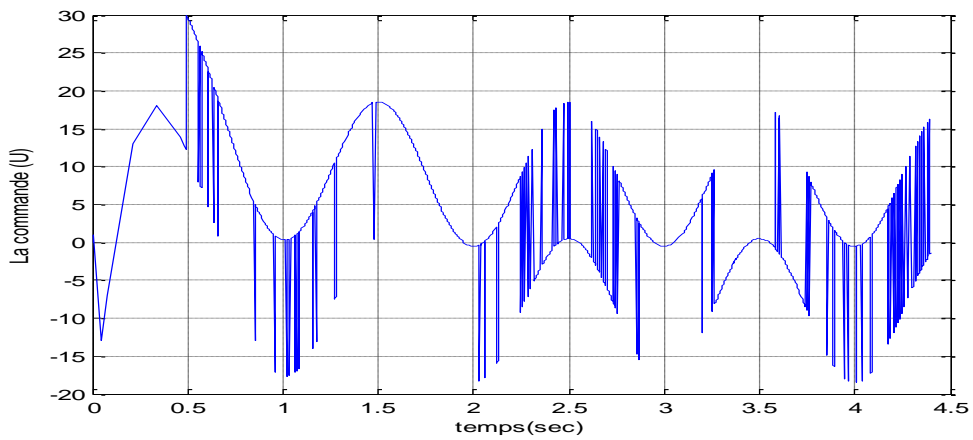


Figure IV.48 la représentation de l'entrée de la commande

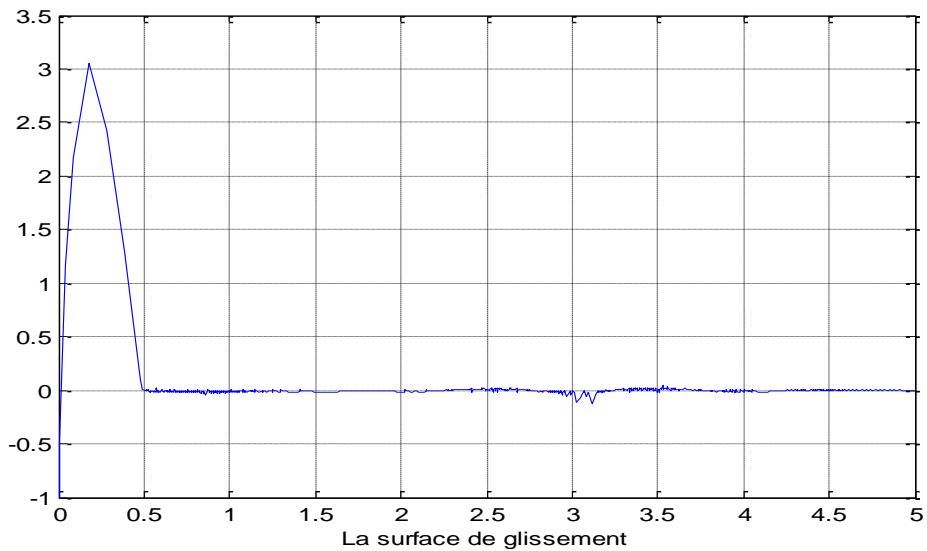


Figure IV.49 la surface de glissement

## IV.6.3 Simulation en utilisant la fonction de saturation

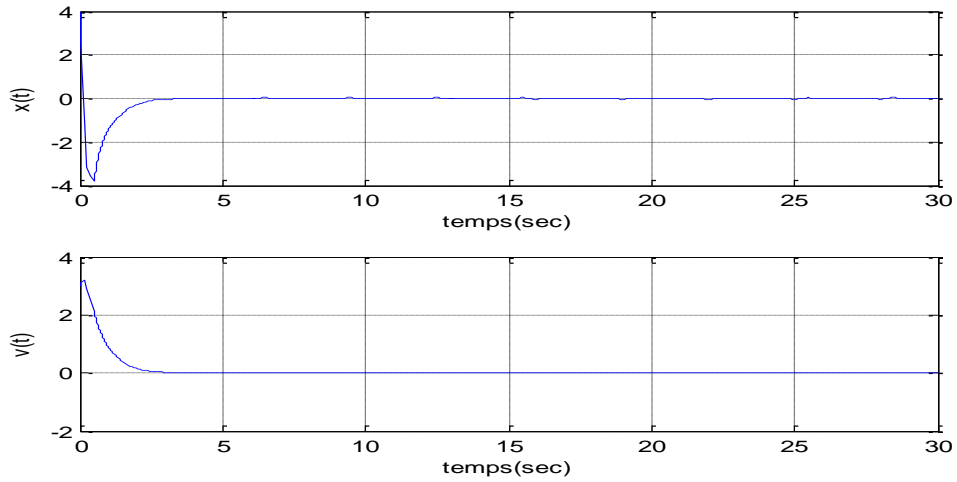


Figure IV.50 représentation des variables d'état de système

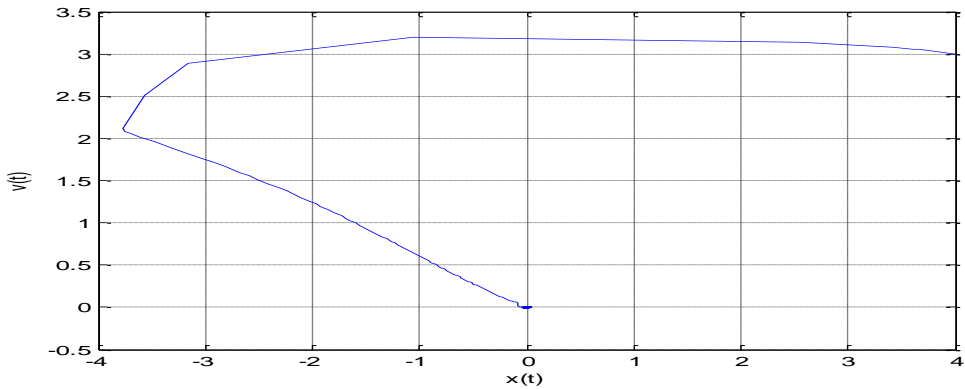


Figure IV.51 représentation de plan de phase

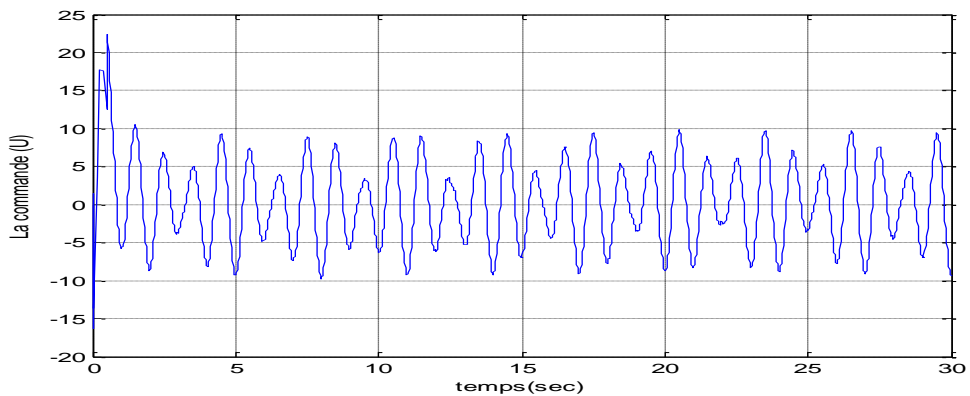
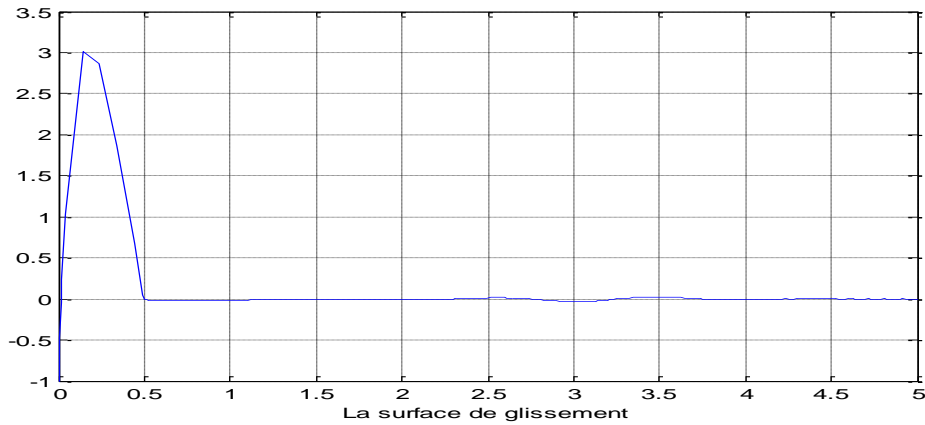


Figure IV.52 la représentation de l'entrée de la commande



**Figure IV.53** la surface de glissement

D'après les résultats exprimés dans les figures précédentes, on remarque que la commande arrive à stabiliser le système dans un temps de réponse envahissant 4 secondes, mais avec l'apparition de phénomènes de chatter ou de réticence. Pour illustrer ce problème, on a remplacé la fonction « sign » par la fonction « sat » et après ce changement, comme il est apparié dans les figures, ce problème est résolu, mais le temps de réponse est augmenté.

### IV.7 La commande du modèle d'aéroélasticité par VSS en régime glissant :

pour le modèle d'aéroélasticité, on utilise directement la fonction de saturation pour éviter le phénomène de chatter.

#### IV.7.1 Synthèse de loi de commande :

On considère que le système aéroélectrique donné par l'équation (7) est écrit comme suit :

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (21)$$

$$\dot{x}_2 = a_{h_1} x_1 + a_{\dot{h}_1} x_2 + a_{\alpha_{11}} x_3 + a_{\alpha_{12}} x_3^2 + a_{\alpha_{13}} x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_1} x_4 + u_1 + d_1$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (22)$$

$$\dot{x}_4 = a_{h_2} x_1 + a_{\dot{h}_2} x_2 + a_{\alpha_{21}} x_3 + a_{\alpha_{22}} x_3^2 + a_{\alpha_{23}} x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_2} x_4 + u_2 + d_2$$

Pour le sous-système 1 équation (21), la surface de glissement est proposée comme suit :

$$s_1 \equiv c_1 x_1 + x_2 = 0$$

La commande équivalente :

## Résultat et simulation

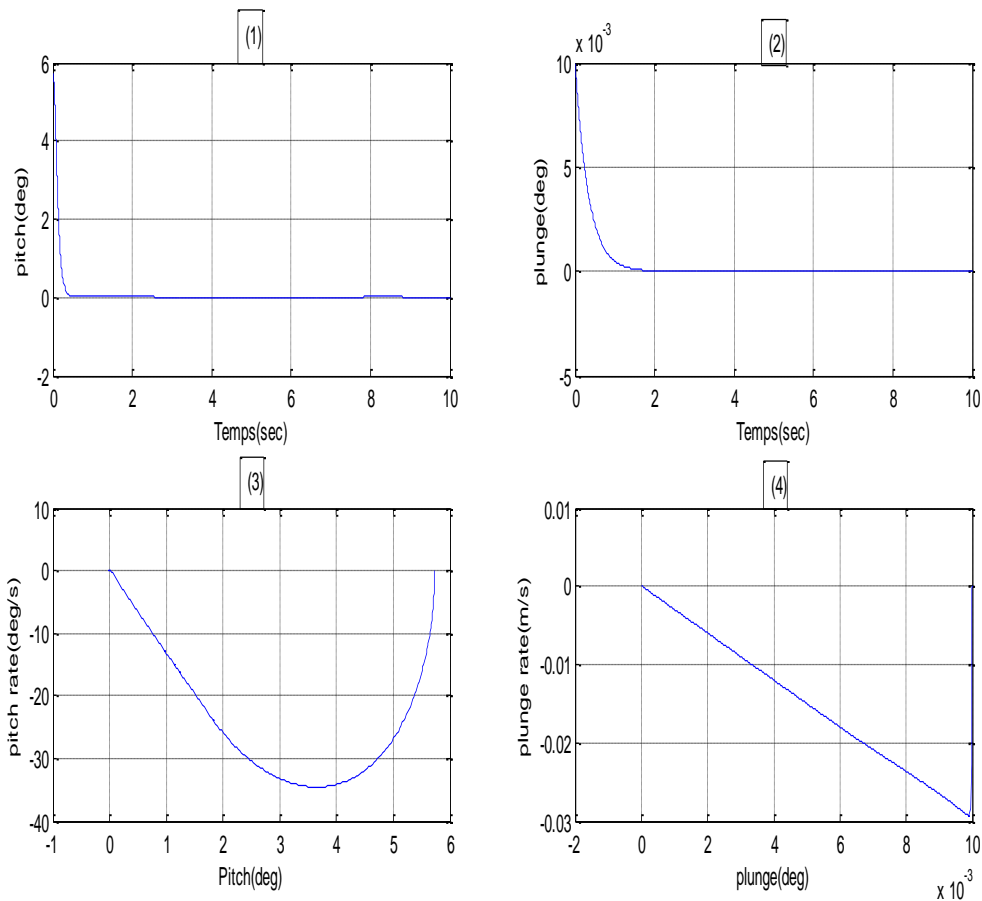
$$u_{1eq} = -(a_{h_1} + \mu_1 c_1)x_1 - (a_{\dot{h}_1} + c_1)x_2 - (a_{\alpha_{11}}x_3 + a_{\alpha_{12}}x_3^2 + a_{\alpha_{13}}x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_1}x_4)$$

Avec  $\Delta U$  est le terme de correction défini par :

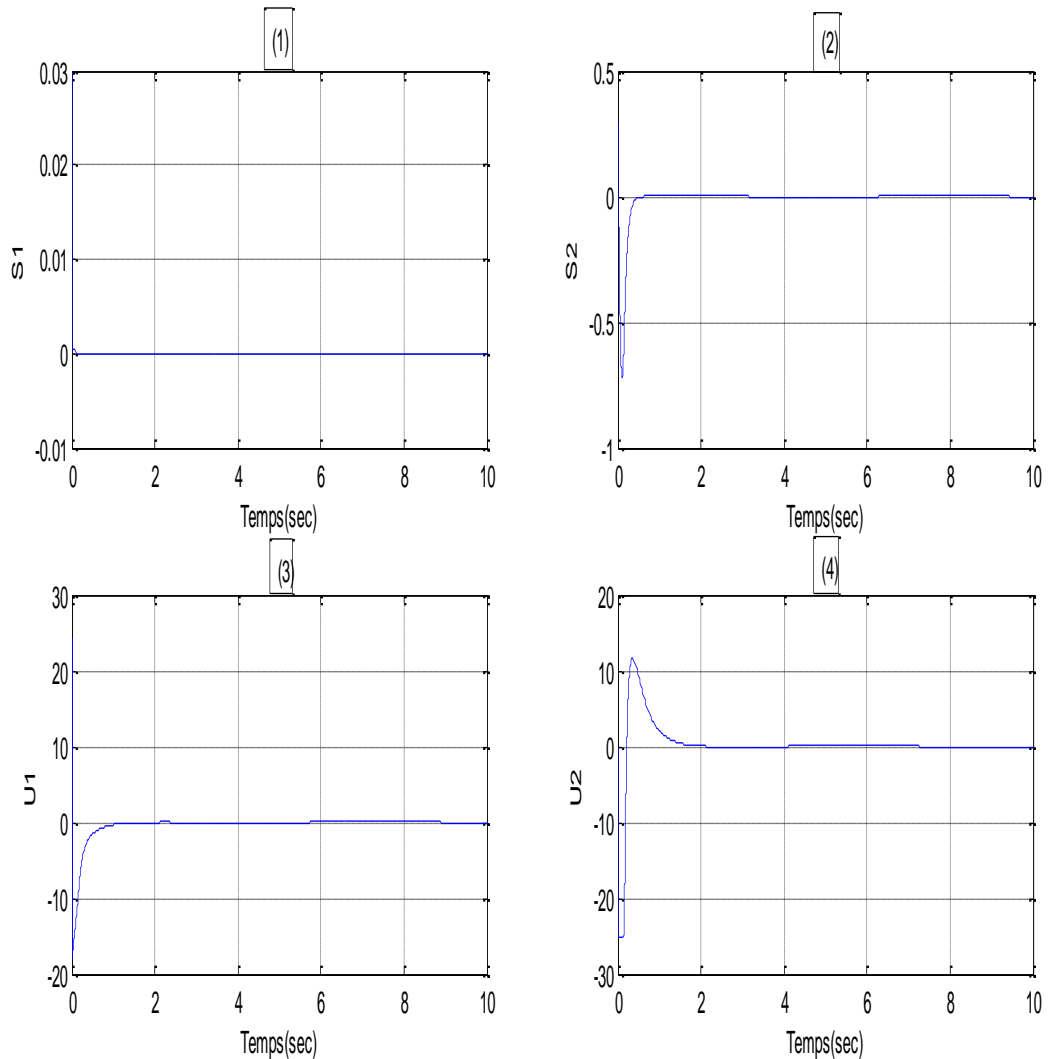
$$\Delta u = -M_1 \cdot \text{sat}(s_1)$$

Donc l'expression de la commande devient :

$$u_1 = u_{1eq} - M_1 \cdot \text{sat}(s_1)$$



**Figure IV.** réponse en boucle fermée.(1)réponse d'angle de pitch ;(2)réponse de déplacement de plong ;(3)plan de phase de l'angle de pitch,(4)plan de phase de déplacement de plong



**Figure IV.** réponse en boucle fermée.(1),(2)représentation des surfaces de glissement  $S_1$  et  $S_2$ ;(3),(4)représentation de l'entrée de commande  $U_1, U_2$

On remarque que la loi de commande arrive à stabiliser le système et supprimer effectivement le mouvement chaotique de l'aile sans problème de broutement.

### IV.7 Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre l'application de la technique de la commande par mode glissant sur les systèmes chaotiques. L'utilisation de cette méthode vient après avoir testé que le système est chaotique d'une autre commande linéaire telle que la commande PID.

L'objectif étant de contribuer à l'amélioration des performances et l'amélioration. C'est une commande non linéaire à régime glissant déduite sur la base d'un choix convenable des surfaces de commutation. Nous montrons d'après les résultats de simulation obtenus que les paramètres variables influencent sur l'annulation des phénomènes chaotiques du système de commande.





## Conclusion générale

---

L'un des problèmes les plus importants des systèmes dynamiques non-linéaires est l'apparition de comportements chaotique; comme nous avons vu dans notre travail, la théorie du chaos est l'une des méthodes les plus utilisées pour étudier la stabilité des systèmes non-linéaire. Nous constatons que ce comportement stable ou instable, est lié à la fois à la caractéristique et aux conditions initiales.

Cependant, tout le système non-linéaire ne sont pas réguliers, comme nous avons remarqué dans notre travail, il nous est possible de dégager les conditions nécessaires pour observer des trajectoires chaotiques. L'ors qu'il n'existe pas toujours de solutions analytiques aux trajectoires calculées dans l'espace de phase, la méthode d'analyse des systèmes dans le plan de phase s'applique de façon générale à tout système décrit par un ensemble d'équations différentielles du second ordre ; cette méthode connue de puis longtemps, connaît un regain d'intérêt lié aux performances des calculateurs actuels qui rendent possible le calcul des trajectoires solutions par une intégration numérique .

Le chaos s'observe également dans bon nombres de systèmes physique. si on avait à trouver un point commun à la dynamique de ces systèmes si divers, ce serait leur grande sensibilité par rapport aux conditions initiales, ce qui signifie qu'une minuscule différence entre deux solutions tend à s'amplifier avec le temps. Notre étude du chaos s'est limitée ici à quelque modèle physique.

Les modèles on était utiliser avec succès, pour modéliser des comportements complexes dans les systèmes dynamique non- linéaires. La simulation de ces modèles nous a permis de commander l'évolution des états du système par suppression du phénomène chaotique en injectant des commandes linéaire comme la commande Pid et non linéaire VSS par régime glissant.

## Bibliographie

- [1] **Glendinning, P.** [1994] Stability, Instability and Chaos. (Cambridge university Press, New York).
- [2] **Ogorzalek, M.** [1997] Chaos and Complexity in Nonlinear Electronic Circuits. (World Scientific, Singapore).
- [3] **Yager, R. R. & Zadeh, L.A.** [1992] An Introduction to Fuzzy Logic Applications in intelligent Systems (Kluwer Academic Publishers, New York).
- [4] **Chen, G.** [2003] Control of Chaos (World Scientific, Singapore).
- [5] **Zhang, Y., Ang, W.T., Jin, J., Zhang, S., Man, Z.,** Nonlinear Adaptive Sliding Mode Control for a Rotary Inverted Pendulum, chapter in book, School of Mechanical and Aerospace Engineering, Nanyang Technological University, Blk N3, B4a-02A, Singapore 639798
- [6] **Alwi, H., et al.,** Fault Detection and Fault-Tolerant Control Using Sliding Modes, Advances in Industrial Control, DOI 10.1007/978-0-85729-650-4\_3, Springer-Verlag London Limited 2011.
- [7] **Noura, H., Theilliol, D., Ponsart, J.C., Chamseddine, A.** Fault-tolerant Control Systems Design and Practical Applications, Advances in Industrial Control , ISBN 978-1-84882-652-6 Springer-Verlag London Limited 2009.
- [8] **Lopez, P., Nouri, A.S.** Théorie élémentaire et pratique de la commande par les régimes glissants, ISBN 10 3-540-31003-7- Springer Berlin Heidelberg New York 2006.
- [9] **Michel BERTRAND,** Chaînes de régulation types . Centre d'Enseignement et de Recherche de Lille. 10/12/1997
- [10] **Z.Li :** Fuzzy chaotic systems ,chaos and chaos contrôle, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006.
- [11] Mémoire de magistère en mathématique, Ibtissem talbi, « système dynamique non linéaires et phénomène du chaos », département mathématique université mentouri de constantine, 29/06/2010.
- [12] **Thierry Dudok de wit,** « Physique Non Linéaire », Université d'Orléans ,janvier 2012 .
- [13] **Ko J., Strganac, T.W., Kurdila, A.J.** Nonlinear Adaptive Control of an Aeroelastic System via Geometric Methods," AIAA, SDM, Long Beach, CA April, 1998.

[14] **Gujjula, S., Singh, S. N., Yim, W.** Adaptive and neural control of a wing section using leading- and trailing-edge surfaces, *Aerospace Science and Technology* 9 (2005) 161–171.

[15] **Theodorsen, T.** General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter, NACA TR 496, 1935

[16] **Fung, Y.C.** An Introduction to the Theory of Aeroelasticity, Dover Publication, INC. Mineola, New York 1955 (reprinted by Dover 1993), ISBN 0-486-49505-1.

[17] **Laurent STAINIER** Cour Aéroélasticité (AERO-016) Département Aérospatiale & Mécanique Université de Liège Année académique 2006-2007

**Etat de l'art**

**Chapitre 2 :**  
**Modélisations**  
**mathématiques du chaos**

**Chapitre 3 :**  
**La commande linéaire et**  
**non-linéaire**

# **Chapitre 4:**

## **Résultats et simulations**

# **Conclusion générale**