

SAVOIRS

MATHÉMATIQUES

ACTUELS

# ESPACES FONCTIONNELS

UTILISATION DANS LA RÉOLUTION  
DES ÉQUATIONS  
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

$$\operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

FRANÇOISE et GILBERT DEMENGEL



CNRS ÉDITIONS

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Avant-propos</b> .....	<b>vii</b>
Analyse du contenu du livre.....	viii
Organisation du livre.....	xi
<b>Préambule sur l'ellipticité</b> .....	<b>1</b>
Définitions générales.....	1
Problèmes aux limites.....	3
Équations non traitées dans le cadre de ce cours.....	5
<b>1. Rappels de topologie et d'analyse fonctionnelle</b> .....	<b>7</b>
1.1. Espaces vectoriels topologiques.....	7
1.2. Formes linéaires, dual topologique, topologie faible.....	14
1.3. Espace des fonctions continues sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$ .....	26
1.4. Distributions sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$ .....	29
1.5. Espaces $L^p$ , lorsque $p \in [1, +\infty[$ .....	40
1.6. Exercices sur le chapitre 1.....	49
<b>2. Les espaces de Sobolev. Théorèmes d'injection</b> .....	<b>61</b>
2.1. Définitions et premières propriétés.....	61
2.2. Injections de Sobolev pour $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ .....	72
2.3. Généralisation à d'autres ouverts.....	87
2.4. Injections compactes lorsque l'ouvert est borné.....	98
2.5. Trace sur la frontière d'un ouvert $\mathcal{C}^1$ .....	103
2.6. Exercices sur le chapitre 2.....	107
<b>3. Traces des fonctions des espaces de Sobolev</b> .....	<b>117</b>
3.1. Espaces $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$ , pour $p > 1$ .....	118
3.2. Cas du bord d'un ouvert autre que $\mathbb{R}^{N-1} \times ]0, \infty[$ .....	133
3.3. Trace des fonctions de $W^{1,1}(\Omega)$ .....	135
3.4. Densité de $\mathcal{C}^1(\partial\Omega)$ dans $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ .....	137
3.5. Traces d'ordre supérieur.....	148
3.6. Théorèmes d'injections continues. Injections compactes.....	166
3.7. Exercices sur le chapitre 3.....	171

<b>4. Espaces de Sobolev fractionnaires</b> .....	<b>181</b>
4.1. Distributions tempérées et transformation de Fourier.....	181
4.2. Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ .....	183
4.3. Les espaces $W^{s,p}(\Omega)$ pour $0 < s < 1$ .....	191
4.4. Théorèmes d'injection pour les $W^{s,p}(\Omega)$ .....	212
4.5. Injections compactes pour les $W^{s,p}(\Omega)$ , $\Omega$ borné.....	218
4.6. Les espaces $W^{s,p}(\Omega)$ , avec $s \in ]0, +\infty[$ .....	220
4.7. Appendice : théorème de convexité de Riesz.....	222
4.8. Exercices sur le chapitre 4.....	226
<b>5. EDP elliptiques : techniques variationnelles</b> .....	<b>231</b>
5.1. Présentation de quelques résultats utiles.....	231
5.2. Rappels d'analyse convexe.....	232
5.3. Résolution d'EDP linéaires elliptiques de type Dirichlet.....	238
5.4. Régularité des solutions précédentes.....	245
5.5. Problèmes de Neumann.....	253
5.6. Problèmes de Dirichlet et de Neumann non homogènes.....	260
5.7. Problème de l'élasticité.....	262
5.8. L'équation du $p$ -laplacien.....	264
5.9. Principes du maximum pour des EDP elliptiques.....	268
5.10. Problèmes coercifs sur des espaces non réflexifs.....	283
5.11. Surfaces minimales.....	285
5.12. Exercices sur le chapitre 5.....	288
<b>6. Distributions à dérivées mesures</b> .....	<b>301</b>
6.1. Rappels sur les mesures, convergences.....	302
6.2. Extension d'une mesure positive.....	308
6.3. Espace de fonctions à variation bornée.....	316
6.4. Distributions à gradient dans $L^p$ .....	325
6.5. Distributions à gradient dans $M^1(\Omega)$ .....	327
6.6. Fonctions à déformations dans $L^p$ , avec $1 < p < \infty$ .....	328
6.7. Espaces de fonctions à déformation dans $L^1$ .....	330
6.8. L'espace des fonctions à déformations mesures.....	341
6.9. Formules de Green généralisées.....	346
6.10. Fonctions de mesure.....	350
6.11. Exercices sur le chapitre 6.....	362
<b>7. Sur l'inégalité de Korn dans <math>L^p</math></b> .....	<b>373</b>
7.1. Harmonicité. Moyennes. Fonction maximale de Hardy.....	374
7.2. Transformation de Hilbert dans $\mathbb{R}$ .....	388
7.3. Les opérateurs de Riesz dans $\mathbb{R}^N$ .....	401
7.4. Inégalité de Korn dans $W^{1,p}(\Omega)$ , $\Omega$ étant borné.....	409
7.5. Exercices sur le chapitre 7.....	420

<b>Appendice sur la régularité.....</b>	<b>437</b>
A.1. Estimation de type $L^\infty$ .....	438
A.2. Estimations $W^{1,k}$ et $W^{1,\infty}$ dans le cas $p \geq 2$ .....	443
<b>Bibliographie.....</b>	<b>457</b>
<b>Index des notations.....</b>	<b>461</b>
<b>Index terminologique.....</b>	<b>463</b>

## ESPACES FONCTIONNELS

UTILISATION DANS LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS  
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FRANÇOISE et GILBERT DEMENGEL

Cet ouvrage présente et explicite des notions de base relatives à la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques et à l'étude de la régularité de leurs solutions.

Après une étude détaillée des espaces de Sobolev (premières propriétés, théorèmes d'injection, théorèmes d'injection compacte, aussi bien pour les Sobolev dits d'exposants entiers que pour les Sobolev d'exposants fractionnaires), ce livre aborde les méthodes variationnelles permettant, par l'utilisation de la convexité, d'obtenir des solutions pour certaines équations aux dérivées partielles, linéaires et quasilineaires.

Les auteurs développent aussi une étude qualitative des équations aux dérivées partielles modèles (régularité, principe du maximum strict) et présentent des problèmes issus de la théorie des surfaces minimales et de celle de la plasticité tridimensionnelle, qui demandent l'introduction et l'étude d'espaces de fonctions à dérivée mesure, espaces qui sont très proches des espaces de Sobolev classiques.

De nombreux exercices sont proposés avec, pour la plupart, des indications pour leur solution.

*Gilbert Demengel est agrégé de mathématiques, anciennement maître de conférences à l'ENS Cachan puis inspecteur général de mathématiques, actuellement inspecteur général de mathématiques honoraire. Françoise Demengel est ancienne élève de l'ENS, agrégée de mathématiques, habilitée à diriger des recherches, elle est professeur à l'université de Cergy-Pontoise.*

Série Mathématiques dirigée par Claude Sabbah

**SAVOIRS ACTUELS**

CNRS ÉDITIONS

[www.cnrseditions.fr](http://www.cnrseditions.fr)

 EDP  
SCIENCES

[www.edpsciences.org](http://www.edpsciences.org)

Création graphique : Béatrice Couedel



ISBN EDP Sciences 978-2-84881-994-1  
ISBN CNRS Éditions 978-2-271-04541-9

49 €

Ces ouvrages, écrits par des chercheurs, reflètent des enseignements dispensés dans le cadre de la formation à la recherche. Ils s'adressent donc aux étudiants avancés, aux chercheurs désireux de perfectionner leurs connaissances ainsi qu'à tout lecteur passionné par la science contemporaine.