

**G. H. HARDY**

**DIVERGENT  
SERIES**



**ÉDITIONS  
JACQUES GABAY**

# CONTENTS

NOTE ON CONVENTIONS . . . . .	xv
<b>I. INTRODUCTION</b>	
1.1. The sum of a series . . . . .	1
1.2. Some calculations with divergent series . . . . .	2
1.3. First definitions . . . . .	5
1.4. Regularity of a method . . . . .	10
1.5. Divergent integrals and generalized limits of functions of a continuous variable . . . . .	10
1.6. Some historical remarks . . . . .	13
1.7. A note on the British analysts of the early nineteenth century . . . . .	18
NOTES ON CHAPTER I . . . . .	21
<b>II. SOME HISTORICAL EXAMPLES</b>	
2.1. Introduction . . . . .	23
A. <i>Euler and the functional equation of Riemann's zeta-function</i>	
2.2. The functional equations for $\zeta(s)$ , $\eta(s)$ , and $L(s)$ . . . . .	23
2.3. Euler's verification . . . . .	24
B. <i>Euler and the series <math>1 - 1!x + 2!x^2 - \dots</math></i>	
2.4. Summation of the series . . . . .	26
2.5. The asymptotic nature of the series . . . . .	27
2.6. Numerical computations . . . . .	28
C. <i>Fourier and Fourier's theorem</i>	
2.7. Fourier's theorem . . . . .	29
2.8. Fourier's first formula for the coefficients . . . . .	30
2.9. Other forms of the coefficients and the series . . . . .	33
2.10. The validity of Fourier's formulae . . . . .	34
D. <i>Heaviside's exponential series</i>	
2.11. Heaviside on divergent series . . . . .	36
2.12. The generalized exponential series . . . . .	37
2.13. The series $\sum \phi^{(n)}(x)$ . . . . .	38
2.14. The generalized binomial series . . . . .	39
NOTES ON CHAPTER II . . . . .	39
<b>III. GENERAL THEOREMS</b>	
3.1. Generalities concerning linear transformations . . . . .	42
3.2. Regular transformations . . . . .	43
3.3. Proof of Theorems 1 and 2 . . . . .	44
3.4. Proof of Theorem 3 . . . . .	46
3.5. Variants and analogues . . . . .	49
3.6. Positive transformations . . . . .	52
3.7. Knopp's kernel theorem . . . . .	54
3.8. An application of Theorem 2 . . . . .	56
3.9. Dilution of series . . . . .	59
NOTES ON CHAPTER III . . . . .	60

## IV. SPECIAL METHODS OF SUMMATION

4.1.	Nörlund means	64
4.2.	Regularity and consistency of Nörlund means	64
4.3.	Inclusion	66
4.4.	Equivalence	67
4.5.	Another theorem concerning inclusion	68
4.6.	Euler means	70
4.7.	Abelian means	71
4.8.	A theorem of inclusion for Abelian means	73
4.9.	Complex methods	76
4.10.	Summability of $1-1+1-\dots$ by special Abelian methods	77
4.11.	Lindelöf's and Mittag-Leffler's methods	77
4.12.	Means defined by integral functions	79
4.13.	Moment constant methods	81
4.14.	A theorem of consistency	84
4.15.	Methods ineffective for the series $1-1+1-\dots$	85
4.16.	Riesz's typical means	86
4.17.	Methods suggested by the theory of Fourier series	87
4.18.	A general principle	89
	NOTES ON CHAPTER IV	91

## V. ARITHMETIC MEANS (1)

5.1.	Introduction	94
5.2.	Hölder's means	94
5.3.	Simple theorems concerning Hölder summability	95
5.4.	Cesàro means	96
5.5.	Means of non-integral order	97
5.6.	A theorem concerning integral resultants	98
5.7.	Simple theorems concerning Cesàro summability	100
5.8.	The equivalence theorem	103
5.9.	Mercer's theorem and Schur's proof of the equivalence theorem	104
5.10.	Other proofs of Mercer's theorem	106
5.11.	Infinite limits	107
5.12.	Cesàro and Abel summability	108
5.13.	Cesàro means as Nörlund means	109
5.14.	Integrals	110
5.15.	Theorems concerning summable integrals	111
5.16.	Riesz's arithmetic means	112
5.17.	Uniformly distributed sequences	115
5.18.	The uniform distribution of $\{n^2\alpha\}$	117
	NOTES ON CHAPTER V	118

## VI. ARITHMETIC MEANS (2)

6.1.	Tauberian theorems for Cesàro summability	121
6.2.	Slowly oscillating and slowly decreasing functions	124
6.3.	Another Tauberian condition	126
6.4.	Convexity theorems	127

6.5.	Convergence factors . . . . .	128
6.6.	The factor $(n+1)^{-s}$ . . . . .	131
6.7.	Another condition for summability . . . . .	132
6.8.	Integrals . . . . .	135
6.9.	The binomial series . . . . .	136
6.10.	The series $\sum n^\alpha e^{ni\theta}$ . . . . .	139
6.11.	The case $\beta = -1$ . . . . .	139
6.12.	The series $\sum n^{-b} e^{Ain^\alpha}$ . . . . .	141
	NOTES ON CHAPTER VI . . . . .	145
<b>VII. TAUBERIAN THEOREMS FOR POWER SERIES</b>		
7.1.	Abelian and Tauberian theorems . . . . .	148
7.2.	Tauber's first theorem . . . . .	149
7.3.	Tauber's second theorem . . . . .	150
7.4.	Applications to general Dirichlet's series . . . . .	153
7.5.	The deeper Tauberian theorems . . . . .	153
7.6.	Proof of Theorems 96 and 96 $\alpha$ . . . . .	156
7.7.	Proof of Theorems 91 and 91 $\alpha$ . . . . .	158
7.8.	Further remarks on the relations between the theorems of § 7.5. . . . .	161
7.9.	The series $\sum n^{-1-ic}$ . . . . .	163
7.10.	Slowly oscillating and slowly decreasing functions . . . . .	164
7.11.	Another generalization of Theorem 98 . . . . .	165
7.12.	The method of Hardy and Littlewood . . . . .	170
7.13.	The 'high indices' theorem . . . . .	172
	NOTES ON CHAPTER VII . . . . .	175
<b>VIII. THE METHODS OF EULER AND BOREL (1)</b>		
8.1.	Introduction . . . . .	178
8.2.	The $(E, q)$ method . . . . .	178
8.3.	Simple properties of the $(E, q)$ method . . . . .	179
8.4.	The formal relations between Euler's and Borel's methods . . . . .	181
8.5.	Borel's methods . . . . .	182
8.6.	Normal, absolute, and regular summability . . . . .	184
8.7.	Abelian theorems for Borel summability . . . . .	184
8.8.	Analytic continuation of a function regular at the origin: the polygon of summability . . . . .	186
8.9.	Series representing functions with a singular point at the origin . . . . .	189
8.10.	Analytic continuation by other methods . . . . .	190
8.11.	The summability of certain asymptotic series . . . . .	191
	NOTES ON CHAPTER VIII . . . . .	195
<b>IX. THE METHODS OF EULER AND BOREL (2)</b>		
9.1.	Some elementary lemmas . . . . .	200
9.2.	Proof of Theorem 137 . . . . .	201
9.3.	Proof of Theorem 139 . . . . .	204
9.4.	Another elementary lemma . . . . .	205
9.5.	Ostrowski's theorem on over-convergence . . . . .	206
9.6.	Tauberian theorems for Borel summability . . . . .	208

9.7.	Tauberian theorems ( <i>continued</i> )	210
9.8.	Examples of series not summable (B)	213
9.9.	A theorem in the opposite direction	213
9.10.	The $(e, c)$ method of summation	214
9.11.	The circle method of summation	218
9.12.	Further remarks on Theorems 150-5	219
9.13.	The principal Tauberian theorem	220
9.14.	Generalizations	222
9.15.	The series $\sum z^n$	222
9.16.	Valiron's methods	223
	NOTES ON CHAPTER IX	224
<b>X. MULTIPLICATION OF SERIES</b>		
10.1.	Formal rules for multiplication	227
10.2.	The classical theorems for multiplication by Cauchy's rule	227
10.3.	Multiplication of summable series	228
10.4.	Another theorem concerning convergence	230
10.5.	Further applications of Theorem 170	232
10.6.	Alternating series	233
10.7.	Formal multiplication	234
10.8.	Multiplication of integrals	235
10.9.	Euler summability	236
10.10.	Borel summability	237
10.11.	Dirichlet multiplication	239
10.12.	Series infinite in both directions	239
10.13.	The analogues of Cauchy's and Mertens's theorems	241
10.14.	Further theorems	242
10.15.	The analogue of Abel's theorem	244
	NOTES ON CHAPTER X	245
<b>XI. HAUSDORFF MEANS</b>		
11.1.	The transformation $\delta$	247
11.2.	Expression of the $(E, q)$ and $(C, 1)$ transformations in terms of $\delta$	248
11.3.	Hausdorff's general transformation	249
11.4.	The general Hölder and Cesàro transformations as $\mathfrak{H}$ transformations	250
11.5.	Conditions for the regularity of a real Hausdorff transformation	252
11.6.	Totally monotone sequences	253
11.7.	Final form of the conditions for regularity	255
11.8.	Moment constants	256
11.9.	Hausdorff's theorem	258
11.10.	Inclusion and equivalence of $\mathfrak{H}$ methods	262
11.11.	Mercer's theorem and the equivalence theorem for Hölder and Cesàro means	263
11.12.	Some special cases	266
11.13.	Logarithmic cases	268
11.14.	Exponential cases	269
11.15.	The Legendre series for $\chi(x)$	271

11.16.	The moment constants of functions of particular classes . . . . .	272
11.17.	An inequality for Hausdorff means . . . . .	273
11.18.	Continuous transformations . . . . .	275
11.19.	Quasi-Hausdorff transformations . . . . .	277
11.20.	Regularity of a quasi-Hausdorff transformation . . . . .	278
11.21.	Examples . . . . .	279
	NOTES ON CHAPTER XI . . . . .	280
<b>XII. WIENER'S TAUBERIAN THEOREMS</b>		
12.1.	Introduction . . . . .	283
12.2.	Wiener's condition . . . . .	285
12.3.	Lemmas concerning Fourier transforms . . . . .	287
12.4.	Lemmas concerning the class $U$ . . . . .	288
12.5.	Final lemmas . . . . .	290
12.6.	Proof of Theorems 221 and 220 . . . . .	292
12.7.	Wiener's second theorem . . . . .	294
12.8.	Theorems for the interval $(0, \infty)$ . . . . .	295
12.9.	Some special kernels . . . . .	297
12.10.	Application of the general theorems to some special kernels . . . . .	299
12.11.	Applications to the theory of primes . . . . .	303
12.12.	One-sided conditions . . . . .	304
12.13.	Vijayaraghavan's theorem . . . . .	305
12.14.	Proof of Theorem 238 . . . . .	308
12.15.	Borel summability . . . . .	312
12.16.	Summability $(R, 2)$ . . . . .	314
	NOTES ON CHAPTER XII . . . . .	316
<b>XIII. THE EULER-MACLAURIN SUM FORMULA</b>		
13.1.	Introduction . . . . .	318
13.2.	The Bernoullian numbers and functions . . . . .	320
13.3.	The associated periodic functions . . . . .	321
13.4.	The signs of the functions $\phi_n(x)$ . . . . .	322
13.5.	The Euler-Maclaurin sum formula . . . . .	323
13.6.	Limits as $n \rightarrow \infty$ . . . . .	326
13.7.	The sign and magnitude of the remainder term . . . . .	327
13.8.	Poisson's proof of the Euler-Maclaurin formula . . . . .	330
13.9.	A formula of Fourier . . . . .	331
13.10.	The case $f(x) = x^{-s}$ and the Riemann zeta-function . . . . .	332
13.11.	The case $f(x) = \log(x+c)$ and Stirling's theorem . . . . .	333
13.12.	Generalization of the formulae . . . . .	335
13.13.	Other formulae for $C$ . . . . .	336
13.14.	Investigation of the Euler-Maclaurin formula by complex integration . . . . .	339
13.15.	Summability of the Euler-Maclaurin series . . . . .	341
13.16.	Additional remarks . . . . .	345
13.17.	The $\mathfrak{R}$ definition of the sum of a divergent series . . . . .	346
	NOTES ON CHAPTER XIII . . . . .	347



**ÉDITIONS  
JACQUES GABAY**

RÉIMPRESSIONS

**Niels Henrik ABEL**

- *Ceuvres complètes (2 tomes)* suivies de  
— *Niels Henrik Abel — Sa vie et son action scientifique*, par C.-A. BJERKNES

**Jean D'ALEMBERT**

- *Traité de dynamique*

**André-Marie AMPÈRE**

- *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques*  
• *Considérations sur la théorie mathématique du jeu*

**Paul APPELL**

- *Traité de Mécanique rationnelle (5 tomes en 3 vol.)*

**Louis BACHELIER**

- *Calcul des probabilités*  
• *Les lois des grands nombres du calcul des probabilités* suivies de  
— *La spéculation et le calcul des probabilités*  
— *Les nouvelles méthodes du calcul des probabilités*  
•  *Le Jeu, la Chance et le Hasard*  
• *Collection de Mémoires* titres inclus  
— *Théorie de la spéculation*  
— *Théorie mathématique des jeux*  
— *Théorie des probabilités continues*  
— *Les probabilités à plusieurs variables*  
— *Mouvement d'un point ou d'un système soumis à l'action des forces dépendant du hasard*  
— *Les probabilités cinématiques et dynamiques*

**René BAIRE**

- *Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité*

**Stefan BANACH**

- *Théorie des opérations linéaires*

**Paul BARBARIN**

- *La Géométrie non euclidienne*

**Edmond BAUER**

- *Introduction à la théorie des groupes et à ses applications à la physique quantique*

**Jacques BERNOULLI**

- *L'art de conjecturer*  
Cette première partie de l'*Ars Conjectandi* (la traduction française des parties 2, 3 et 4 n'a jamais paru) contient le célèbre *Traité de la manière de raisonner dans les jeux de hasard*, par Christiaan HUYGENS

**Joseph BERTRAND**

- *Calcul des probabilités*

**Marcel BOLL**

- *La chance et les jeux de hasard*  
•  *Le mystère des nombres et des formes*

**Ludwig BOLTZMANN**

- *Leçons sur la théorie des gaz*

**Émile BOREL**

- *Leçons sur les séries divergentes*

**Émile BOREL & André CHÉRON**

- *Théorie mathématique du bridge à la portée de tous* suivie de  
— *Applications de la théorie des probabilités aux jeux de hasard*, par Émile BOREL & Jean VILLE  
— *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, par Émile BOREL

**Pierre BOUTROUX**

- *L'idéal scientifique des mathématiciens*

**Léon BRILLOUIN**

- *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*  
• *La science et la théorie de l'information*

**Louis de BROGLIE**

- *Ondes et mouvements*

**Georg CANTOR**

- *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*

**Sadi CARNOT**

- *Réflexions sur la puissance motrice du feu*

**Élie CARTAN**

- *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*  
•  *Leçons sur la géométrie projective complexe* suivies de  
— *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*  
— *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*

**Augustin-Louis CAUCHY**

- *Analyse algébrique*

**Michel CHASLES**

- *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*  
• *La dualité et l'homographie*  
• *Rapport sur les progrès de la géométrie*

**Rudolph CLAUZIUS**

- *Théorie mécanique de la chaleur*

**H. COMMISSAIRE & G. GAGNAC**

- *Cours de Mathématiques spéciales (3 tomes)*

**Antoine-Nicolas de CONDORCET**

- *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*

**Gaspard-Gustave CORIOLIS**

- *Théorie mathématique des effets du jeu de billard* suivie des deux célèbres *Mémoires*  
— *Sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines*  
— *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*

=  blong®

(Suite à l'intérieur)

**Diffusion-Distribution : JACQUES GABAY**

151 bis, rue Saint-Jacques 75005 PARIS

Tél. (1) 43 54 64 64 — Fax : (1) 43 54 87 00