

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université SAAD DEHLEB BLIDA
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département : Aéronautique



Mémoire de fin d'études
En vue d'obtention
Du diplôme d'ingénieur en Aéronautique

Option : Structure

THEME

**DITERMINATION DU FACTEUR D'INTENSITE
DES CONTRAINTES PAR LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS**

Présentée par :

Mlle: AMMOUR Souad

Encadrée par :

Mme. SARI

Membre de jury :

**Président de Jury : Mer. ELNACH
Egsaminateur : Mer. BADER EILDIN
Egsaminatrice : Mme. SAMAR**

ANNEE UNIVERSITAIRE 2010 /2011.

Résumé

Ce travail s'inscrit dans le cadre du développement d'un code de calcul pour simuler la fissure et déterminer le facteur d'intensité des contraintes par la méthode des éléments finis triangulaires T3, qui se repose sur le principe des puissances virtuelles en utilisant la technique de la rosette permettant l'extrapolation des déplacements nodaux à la pointe de la fissure.

Abstract

This work deals with the development of computer code for creak simulation and stress intensity factor evaluation trough triangular finite element method T3, based on virtual power principle, which use 'rosette' technique that allowed us a nodal displacements extrapolation at the creak extremity.

ملخص

هذا العمل يدخل في إطار تطوير برنامج يقوم بتباين معلوماتي لعملية الانشقاق و حساب عامل شدة الإجهاد بطريقة العناصر المنتهية المثلثية T3 التي تتوقف على مبدأ الإستطاعات المفترضة, حيث نستعمل تقنية [la rosette] التي تسمح للإحداثيات القطبية بالتغير العقدي عند نقطة الإنشقاق.

Remerciement

Avant tout nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a donné la force et la volonté pour qu'on puisse accomplir ce travail.

Je voudrais tout d'abord remercier Madame Elkahina Sari Professeur à l'université saad dahleb de blida, pour m'avoir fait l'honneur encadrer. Et m'avoir soutenu pour ce sujet de recherche

Je remercie vivement madame Hamadouche.

J'adresse aussi mes plus vifs remerciements aux Professeurs :

Badreldin, Kirat, Thahi, belmachri...

Je tiens à remercier Monsieur Elnache et madame Semar.

Merci également aux membres du jury, pour avoir accepté d'en faire partie et pour leurs remarques pertinentes.

Je n'oublie pas de remercier les enseignants du département d'aéronautique pour leurs savoirs qui m'ont donné durant ma formation.

Souad

Dédicace

Avant tout Je dédie ce modeste travail :

À la chère de mon cœur qui ma fait le sacrifice :

maman rahimaha Allah.

À Mon bon histoire qui à été plein de réussite papa.

À mes chères sœurs Sabah et Assma.

À mes chère frères Mohamed, Yacine et Abde Alhalim.

À ma promotrice Mme Sari.

À tous mes amis et collègues d'étude.

Souad

SOMMAIRE :

RESUMEE

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES ABREVIATIONS

INTRODUCTION GENERALE..... 1

CHAPITRE I : étude bibliographique

I.1 / Définition..... 4

I.2/ Mode de rupture..... 4

I.3/ La théorie de Griffith..... 5

I.4/ Etude d'un milieu élastique fissuré..... 8

1. La zone d'élaboration..... 8

2. La zone singulière..... 8

3. La zone des champs lointains..... 8

I.5/ Facteur d'intensité des contraintes..... 9

I.6/ Singularité des contraintes en pointe de fissure..... 11

I.7/ Ténacité..... 13

I.8/ Endommagement par fatigue..... 13

1.8 .A/ Principaux mécanismes physiques de fissuration par fatigue en Mode I..... 13

1.8.B/ Régimes de croissance par fatigue des fissures longues, Loi de Paris..... 17

1.8.C/ Origines physiques des trois régimes de fissuration par fatigue..... 18

CHAPITRE II : Modélisation et simulation numérique par la méthode des éléments finis

II.1/ Formulation faible de l'équilibre et principe des puissances virtuelles..... 22

II.2/ l'élément fini isoparamétrique..... 23

II.2.a/ représentation de la géométrie approchée..... 23

II.2.b/ La fonction d'interpolation..... 24

II.2.c/ Représentation locale des déplacements.....	25
II.2.d/ Représentation globale des déplacements.....	26
II.2.e/ Notion d'un vecteur global des degrés de liberté inconnus.....	27
II.A.f/ Maillage.....	28
II.3/ Construction du problème d'élasticité approché à l'aide d'éléments finis isoparamétriques	30
II.3.a/ Construction à partir d'une formulation faible.....	30
II.3.b/ Notion d'assemblage.....	32
II.4/ Calcul des intégrales élémentaires.....	34
II.4.a/ Matrices de rigidité élémentaires.....	34
II.4.b/ Forces nodales élémentaires associées aux efforts extérieurs.....	35
II.5/ Assemblage.....	35
II.5.a/ assemblage de la matrice de rigidité.....	35
II.5.b/ Assemblage du vecteur de forces nodales.....	39
II.6 / Application à la mécanique linéaire de la rupture et calcul numérique des facteurs d'intensité de contraintes.....	40
II.6.a/ La méthode des éléments finis pour les structures fissurées.....	40
II.6.b/ Évaluation des facteurs d'intensité de contraintes par extrapolation.....	42
CHAPITRE III : Résultat et interprétation	
III.1/ Définition du problème à résoudre	45
III.2/ Fichier de données.....	46
III.3/ Maillage.....	46
III.4/ Simulation, résultats et discussions.....	47
CONCLUSION GENERALE.....	51
ANNEXES	
BIBLIOGRAPHIE	

LISTE DES FIGURES :

Figure I.1 : Illustration des trois modes de rupture	5
Figure I.2 : Fissure débouchant dans une éprouvette chargée en mode I	6
Figure I.3 : les zones de champs mécaniques.....	9
Figure I.4: Champ de contraintes aux abords du front de fissure.....	9
Figure I.5 : Géométrie locale au voisinage de la pointe de fissure.....	12
Figure I.6 : Fissure de fatigue dans un alliage de Titane TA6V . La fissure se propage le long de lignes de glissement	14
Figure I.7 : Fissure de fatigue dans un alliage de Nickel N18 à température ambiante. La fissure se propage sur un plan « moyen » à l'intersection de deux systèmes de glissement.....	14
Figure I.8 : Facettes de pseudo-clivage de fatigue près du site d'amorçage d'une fissure de fatigue dans l'alliage de Titane TA6V (20°C).....	15
Figure I.9 : Stries de fatigue dans l'alliage de Titane TA6V (Kmax=4MPa(m1/2),20°C.....	16
Figure I.10 : Stries de fatigue dans du cuivre.....	16
Figure I.11 : mécanisme de formation des stries de fatigue.....	17
Figure I.12: Vitesses de fissuration mesurées sur éprouvette CT, sur un acier doux à 0,38 % de carbone à température ambiante et R=0. Illustration des différents régimes de propagation par fatigue. La loi de Paris s'applique dans le régime B.....	18
Figure I.13 : Méthode de mesure d'un pas de strie moyen sur une surface de rupture à gauche. A droite, rapport D de la vitesse de fissuration mesurée da/dN et du pas de strie S, tracé en fonction du pas de strie pour divers matériaux.....	20
Figure II.1 : Maillage avec « double nœuds » : portion de solide sans fissure et	

maillage réalisant une interpolation continue (en haut); portion de solide contenant une fissure F et maillage réalisant une interpolation discontinue à travers F (en bas). Dans les tables de connectivité des maillages respectifs, les éléments (a) et (b) sont ainsi définis par les listes de nœuds {17,18,4,3} et {11, 10, 18,17} (solide non fissuré) et {17,18, 4, 3} et {11,10, 20,19} (solide fissuré)..... 41

Figure II.2 : Notations pour le calcul de K_I , K_{II} par extrapolation au nœud double (B^+ , B^-) le plus proche de la pointe de fissure (à gauche) ou au moyen de plusieurs nœuds doubles successifs (B^+ , B^-), (C^+ , C^-),... (à droite)..... 43

Figure III.1 : Maillage d'une plaque fissurée en traction..... 45

Figure III.2 : Technique de la rosette..... 47

Figure III.3 : Organigramme de calcul..... 48

Figure III.4 : Plaque de hauteur croissante..... 49

LISTE DES TABLAUX :

Tableau II.1 : Fonction de forme pour un élément finis de référence.....	25
Tableau III.1 : comparaison entre valeur exacte et numérique.....	50

LISTE DES ABREVIATIONS :

Dof : vecteur global des degrés de liberté des inconnus

$\{F\}$: vecteur des efforts

$\{F_e\}$: vecteur de force élémentaire

$[K_e]$: matrice de rigidité élémentaire

$[K]$: matrice de rigidité globale

K_{IC} : la ténacité

K_I : le facteur d'intensité des contraintes pour le premier mode

K_{II} : le facteur d'intensité des contraintes pour le deuxième mode

K_{III} : le facteur d'intensité des contraintes pour le troisième mode

N : nombre des cycles

N_N : nombre des nœuds

N_e : nombre des éléments

N_k : fonction d'interpolation

T3 : élément triangulaire à trois nœuds

T6 : élément triangulaire à six nœuds

$\{U\}$: vecteur des déplacements

Introduction :

L'augmentation rapide et régulière des capacités (puissance, mémoire vive et stockage) des ordinateurs est certes un lieu commun maintes fois évoqué, mais n'en constitue pas moins un facteur essentiel du développement technologique. Un simple ordinateur personnel suffit actuellement pour effectuer des simulations numériques des systèmes physiques d'une grande complexité. Ces facteurs techniques et économiques, associés aux progrès dans la conception d'algorithmes et leur développement pratique, font que la simulation numérique occupe une place essentielle dans la recherche et l'industrie.

La simulation est en particulier un outil de conception et d'analyse essentiel dans tous les secteurs industriels faisant intervenir la Mécanique : automobile et ferroviaire, génie civil, énergie, la microélectronique et l'aérospatial. Elle est devenue une composante indispensable des compétences de l'ingénieur.

La simulation numérique de systèmes mécaniques ou physique s'appuie, selon les particularités du système analysé, sur plusieurs types de méthodes, en particulier : les volumes finis, les différences finis, les éléments de frontière et les éléments finis. Le choix parmi ces approches dépend des particularités des équations constituant le modèle mathématique du système à simuler et ses conditions aux limites.

Ce travail de thèse s'inscrit dans cette problématique : La simulation d'une fissure des solides déformables et détermination du facteur d'intensité de contrainte des solides déformables soumis un chargement uniaxial, repose sur la méthode des éléments finis qui s'appuie sur le principe des puissances virtuelles pour un élément

triangulaire. Ce l'ensemble de cette démarche que nous présentons dans ce mémoire de thèse qui s'articule en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique de la mécanique linéaire de la rupture, et une description détaillée du phénomène de fissuration.

Le deuxième chapitre forme le cœur de ce travail : il traite la modélisation par élément finis : maillage, matrices de rigidité, vecteur force élémentaires, assemblage et facteur d'intensité de contrainte avec une extrapolation des déplacements au voisinage de pointe de fissure.

Le dernier chapitre qui comprend le chapitre qui présente le développement de notre code de calcul sous Matlab et les résultats de notre simulation numérique qui permet de déterminer le facteur d'intensité de contrainte FIC pour des exemples des plaques a plusieurs dimensions soumis à un chargement uniaxial. Nos résultats ont été validés analytiquement.

Notons finalement que notre travail constitue un apport de la connaissance de la simulation numérique des fissures par la méthode des éléments finis.

Ce chapitre présente une étude bibliographique sur la mécanique linéaire de la rupture, qui concerne l'étude de l'effet de la présence de fissure dans un solide sous un champ contraints pour but d'éviter les accidents causés par la propagation brutale des fissures.

I.1 / Définition :

La mécanique de la rupture a pour objet l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Cela revient notamment à déterminer le champ des contraintes et des déformations au voisinage de la pointe d'une fissure. L'étude de ces champs mécaniques permettant ensuite de juger de la stabilité ou non d'une fissure.

La mécanique de la rupture se propose de décrire les étapes d'amorçage et de propagation de la fissuration. Selon le comportement du matériau durant la propagation d'une fissure, on peut être confronté à deux types de rupture :

- **Rupture fragile**, en l'absence de déformation plastique significative (mécanique linéaire de la rupture).
- **Rupture ductile**, en présence de déformation plastique non négligeable (mécanique non linéaire de la rupture).

I.2/ Mode de rupture :

Le critère de ruine prenant en considération les fissures existant au sein du matériau, il est important de pouvoir comparer un facteur de charge à un paramètre caractéristique du matériau, ce facteur s'obtient par considération des contraintes et déformation au voisinage du front de la fissure, pour les trois modes de fissuration élémentaires illustrés sur la figure I.1.

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants sont les suivant ^[2] :

- Mode I : ouverture (ou clivage).
- Mode II : cisaillement plan.
- Mode III : cisaillement anti-plan.

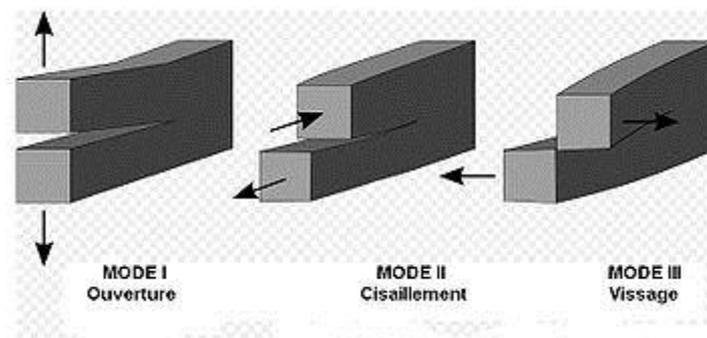
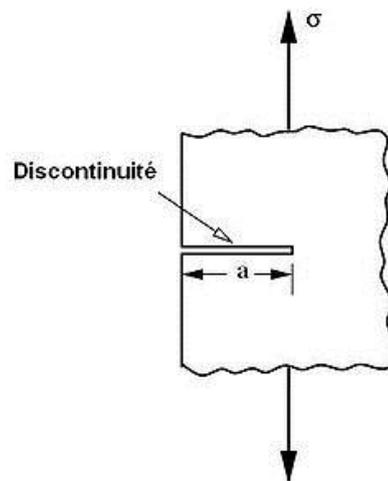


Figure I.1 : Illustration des trois modes de rupture.

I.3/ La théorie de Griffith :

De manière générale, une La mécanique de la rupture découverte pendant la Première Guerre mondiale par l'ingénieur aéronautique anglais, A. A. Griffith, pour expliquer la rupture des matériaux fragiles ^[3]. Le travail de Griffith a été motivé par deux faits contradictoires :

- La contrainte nécessaire pour rompre un verre courant est d'environ 100 MPa.
- La contrainte théorique nécessaire à la rupture de liaisons atomiques est d'environ 10 000 MPa.



**Figure I.2 : fissure débouchant dans
Une éprouvette chargée en mode I.**

Une théorie était nécessaire pour concilier ces observations contradictoires. En outre, les expérimentations sur les fibres de verre que Griffith lui-même a mené suggèrent que la contrainte de rupture augmente d'autant plus que le diamètre des fibres est petit. Par conséquent il en déduit que le paramètre de résistance uniaxiale à la rupture R_T , utilisé jusqu'alors pour prédire les modes de défaillance dans le calcul des structures, ne pourrait pas être une valeur indépendante des propriétés du matériau ^[4].

Griffith suggère que la faiblesse de la résistance à la rupture observée dans ses expériences, ainsi que la dépendance de l'intensité de cette résistance, étaient due à la présence de défauts microscopiques préexistants dans le matériau courant. Pour vérifier l'hypothèse de défauts préexistants, Griffith a introduit une discontinuité artificielle dans ses échantillons expérimentaux. Cette discontinuité était une forme de fissure débouchant plus importante que les autres discontinuités supposées préexistantes dans l'échantillon.

Les expériences ont montré que le produit de la racine carrée de la longueur de défauts (a) et la contrainte à la rupture (σ_f) était à peu près constante, ce qui est exprimé par l'équation :

Si l'on suppose la présence d'une fissure de taille a dans un matériau sous traction, le calcul de la valeur σ_f de la contrainte à partir de laquelle cette fissure grandit peut s'estimer simplement, cf.

L'explication de cette relation en termes de théorie de l'élasticité linéaire pose un problème de point singulier. En élasticité linéaire, la théorie prédit que la contrainte (et par conséquent l'effort) à l'extrémité d'une fissure dans un matériau idéalement élastique est infinie. Pour éviter ce problème, Griffith a développé une approche thermodynamique pour expliquer la relation qu'il a observée ^[5].

Le développement d'une fissure nécessite la création de deux nouvelles surfaces et donc une augmentation de l'énergie de surface. Griffith a trouvé une expression pour la constante C sur le plan de l'énergie de surface de la fissure en résolvant le problème de l'élasticité d'une fissure finie dans une plaque élastique ^[6]. En bref, l'approche était la suivante:

$$\sigma_f \sqrt{a} \approx C \quad (\text{I. 1})$$

- Calculer l'énergie potentielle stockée dans un échantillon parfait sous une charge de traction uniaxiale.
- Ajuster la contrainte de sorte que la charge appliquée ne déforme pas l'échantillon, puis introduction d'une fissure dans l'éprouvette. La fissure relaxe la contrainte et, par voie de conséquence, relaxe l'énergie élastique aux abords des faces de la fissure. D'autre part, de par son existence, la fissure augmente l'énergie de surface totale de l'échantillon.

- Calculer la différence d'énergie libre (énergie de surface - énergie élastique) en fonction de la longueur de la fissure. La rupture se produit lorsque l'énergie libre atteint une valeur maximale pour une longueur critique de fissure, au-delà de laquelle l'énergie libre diminue du fait de la propagation de la fissure, c'est-à-dire de l'augmentation de la longueur de la fissure jusqu'à provoquer la rupture. Grâce à cette méthode, Griffith a constaté que :

$$C = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \quad (I. 2)$$

Où :

E : est le module de Young du matériau

γ : est la densité d'énergie de surface du matériau.

Les valeurs $E = 62 \text{ GPa}$ et $\gamma = 1 \text{ J/m}^2$ donnent un excellent modèle pour déterminer la contrainte de rupture prédite par Griffith pour un matériau fragile.

I.4/ Etude d'un milieu élastique fissuré :

Dans un milieu élastique fissuré, la région proche de la pointe de fissure peut être décomposée en trois zones ^[7]:

1. La zone d'élaboration : au voisinage direct de la pointe de fissure, l'étude de cette zone (considérée comme ponctuelle d'un point de vue mécanique) est très complexe dans la mesure où les contraintes tendent vers l'infini (d'un point de vue théorique) à la pointe de fissure.

2. La zone singulière : dans cette zone, le champs de contrainte présente une singularité en $r^{-1/2}$.

3. La zone des champs lointains : extérieure aux deux précédentes, elle raccorde la zone singulière aux conditions aux limites de chargement et déplacement.

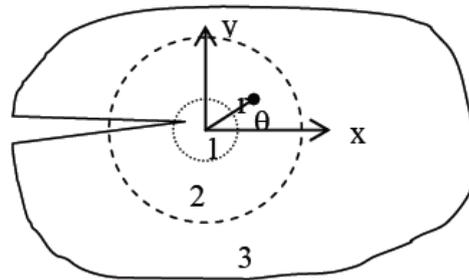
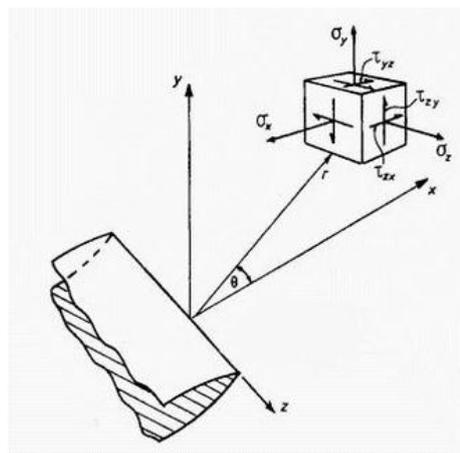


Figure I.3 : Les zones de champs mécaniques.

C'est la singularité d'ordre $-1/2$ dans la zone singulière qui caractérise la solution obtenue en élasticité pure.

I.5/ Facteur d'intensité des contraintes :

Les facteurs d'intensité des contraintes correspondent à des cinématiques particulières du mouvement des fissures. Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, les contraintes et les déformations au voisinage d'une fissure^[8].



**Figure I.4 : Champ de contraintes
Abords du front de fissure.**

Une autre réalisation importante du groupe de travail a été de trouver une méthode de calcul de la quantité d'énergie disponible pour une fracture au niveau de la contrainte asymptotique et les champs de déplacement autour d'un front de fissure dans un solide idéalement élastique^[9], dans le cas d'un chargement en mode I.

$$\bar{\sigma}_{xy} \approx \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{xy}(\theta) \quad (\text{I. 3})$$

Avec :

r : la distance au front de fissure.

$$\bar{\sigma}_x \approx \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (\text{I.4})$$

$$\bar{\sigma}_y \approx \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (\text{I.5})$$

$$\tau_{x,y} \approx \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (\text{I.6})$$

En déformation plane :

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{I.7})$$

En contrainte plane :

$$\sigma_z = 0 \quad (\text{I.8})$$

K_I est le seul paramètre fournissant une caractéristique du champ de contrainte existant aux abords du fond de fissure. C'est le facteur d'intensité de contrainte (en déformation plane). La valeur de K_I peut être calculée en analyse de contrainte en fond de fissure (à la pointe de la fissure). Des expressions de K_I ont été déterminées pour un

grand nombre de cas de chargement et de configuration de pièces. Toutes les expressions sont de la forme^[10] :

$$K_I = \alpha\sigma\sqrt{\pi a} \quad (B) \quad \text{en Mp} \sqrt[2]{m} \quad (B) \quad (I.19)$$

Avec :

α : facteur tenant compte de la géométrie de la fissure et de la répartition des contraintes.

σ : contraintes dans le matériau normales au plan de fissure et en l'absence de celle-ci.

Au niveau de chargement produisant l'initiation d'une fissure correspond une valeur particulière de K_I . Cette valeur particulière de K_I est désignée par le symbole K_{Ic} et c'est une propriété du matériau au même titre que la limite d'élasticité. Ces deux propriétés varient avec la température, la vitesse de chargement et la structure métallurgique^[11].

I.6/ Singularité des contraintes en pointe de fissure :

Plusieurs idées ont été proposées : du raffinement de la zone singulière à l'introduction brutale de la singularité pour trouver une solution préservant à la fois les fonctions de forme et les fonctions d'interpolation^[12].

Pour un matériau à comportement élastique linéaire, on démontre que les champs de contrainte en un point de coordonnées polaires (r, θ) dont l'origine est placée en pointe de fissure (la direction $\theta = 0$ correspondant à la tangente à la fissure en sa pointe) ont, au voisinage de la pointe (c'est-à-dire pour r petit devant la longueur ℓ de la fissure), la forme asymptotique suivante^[13] :

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[5 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[-5 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + O(1)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[-3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + O(1) \quad (\text{I.10})$$

$$\bar{\sigma}_{r\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + O(1)$$

(Restreinte ici au cas des déformations planes) et sont donc en particuliers singuliers comme $1/\sqrt{r}$. Les facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} , K_{III} , apparaissant dans ces expressions dépendent de la géométrie du domaine et de la fissure ainsi que du chargement appliqué, en nature et en intensité.

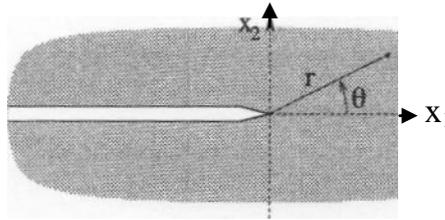


Figure I.5 : Géométrie locale au voisinage de la pointe de fissure.

De même, la discontinuité (vectorielle) de déplacement à la traversée de la fissure et au voisinage de la pointe est donnée par l'expression asymptotique suivante :

$$[[U]] = 4/\mu\sqrt{r/2\pi} \{ (1 - \nu) [K_I e_1 + K_{II} e_2] + K_{III} e_3 \} + O(r) \quad (\text{I.11})$$

Dans ces expressions asymptotiques, la notation $O(r^\alpha)$ indique, conformément à l'usage des termes non spécifiés d'ordre r^α pour r petit.

I.7/ Ténacité :

Dans le cas d'une propagation de fissure selon un mode donné, le critère de propagation proposé par Irwin en 1957 porte sur la limitation de la valeur de K_I par une valeur critique appelée ténacité :

$$\begin{array}{ll} \text{si } K_I < K_{Ic}, & \text{alors } \dot{a} = 0 \\ \text{si } K_I = K_{Ic} & \text{alors } \dot{a} \geq 0 \end{array}$$

La ténacité K_{Ic} , étant alors une grandeur caractéristique du matériau, accessible à l'expérience, que l'on mesure sur des expériences de traction d'éprouvettes de rupture ou de flexion de poutre entaillées. La validité de la notion de ténacité, assez problématique sur le plan théorique car la singularité des solutions élastiques en contrainte implique l'apparition de zones plastiques autour des pointes de fissure, est bien vérifiée sur le plan expérimental pour certaines classes de matériaux (en particulier les métaux).

I.8/ Endommagement par fatigue :

1.8.A/ Principaux mécanismes physiques de fissuration par fatigue en Mode I :

La fissure est un défaut dans un matériau caractérisé par une discontinuité brutale, où la matière est séparée sur une certaine surface. Elle entraîne une grande concentration de contrainte à son fond. Sa propagation, sous l'effet de contraintes suffisantes, combinée ou non avec un environnement agressif mène à la rupture.

L'objectif de cette ressource est de présenter les principaux mécanismes physiques de fissuration en Mode I. Une première partie détaille les mécanismes de propagation de fissures, une deuxième partie, les régimes de croissance par fatigue des fissures longues et une dernière partie présente les origines physiques des différents régimes de fissuration.

I.8.A.a/ Cas pour des faibles facteurs d'intensité des contraintes :

Pour les facteurs d'intensité des contraintes les plus faibles, la propagation de la fissure est fortement influencée par la microstructure du matériau. Dans les matériaux métalliques, à faible facteur, noté ΔK , la fissure se propage généralement sur des plans privilégiés selon l'orientation cristalline des grains. Par exemple, dans les tous premiers stades de la fissuration, il est généralement observé que la fissure se développe en mode de cisaillement sur les plans de glissement actifs (Figure I.6). Puis, lorsque le nombre de systèmes actifs augmente, la fissure peut alors se propager en mode d'ouverture sur un plan moyen à l'intersection de deux systèmes de glissement (Figure I.7).

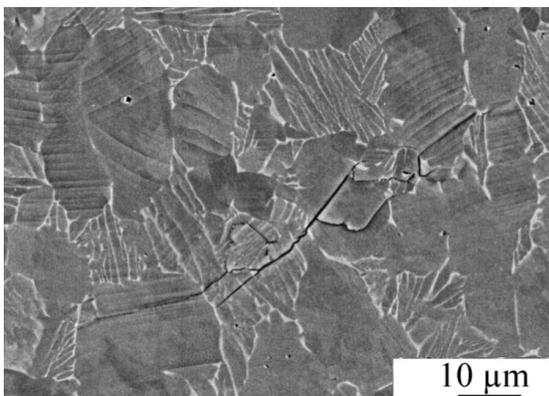


Figure I.6 : Fissure de fatigue dans un alliage de Titane TA6V [Le Biavant, 2000]. La fissure se propage le long de lignes de glissement.

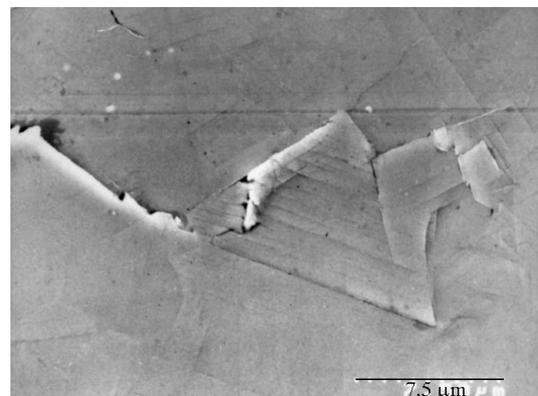


Figure I.7 : Fissure de fatigue dans un alliage de Nickel N18 à température ambiante [Pommier,1992]. La fissure se propage sur un plan « moyen » à l'intersection de deux systèmes de glissement.

Lorsque la fissure se propage ainsi, le long de plans cristallins particuliers, l'aspect de la surface de rupture peut faire penser au clivage, bien qu'on puisse y voir aussi les marques laissées par la propagation cyclique de la fissure (Figure I.8). Ces faciès de rupture s'observent autour des sites d'amorçage des fissures, ou pour des fissures déjà longues qui se propagent sous l'effet d'un facteur d'intensité des contraintes faible, qui tend vers le seuil de non-propagation des fissures ΔK_{th} ^[14].

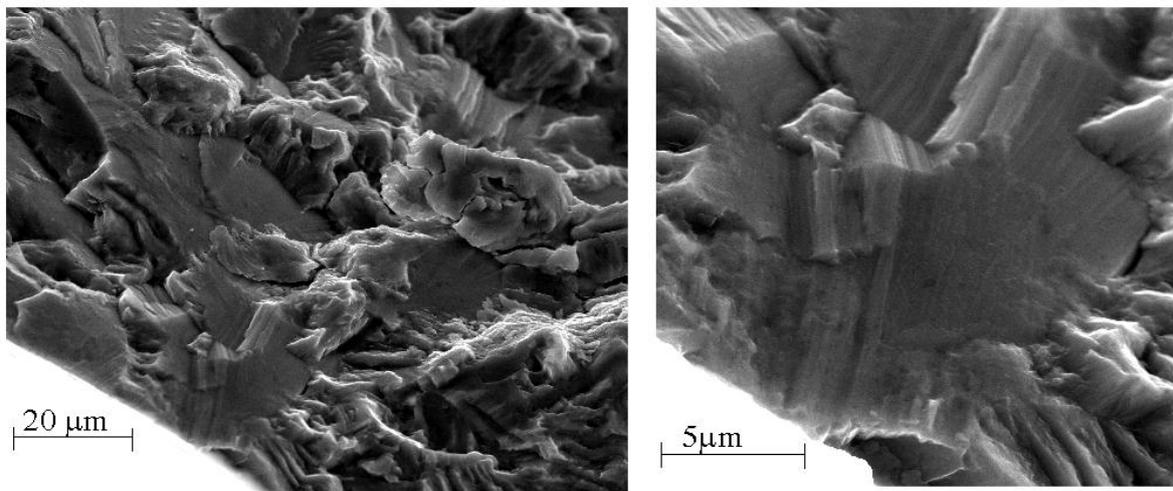


Figure I.8 : Facettes de pseudo-clivage de fatigue près du site d'amorçage d'une fissure de fatigue dans l'alliage de Titane TA6V (20°C) [Sampablo, 2000].

I.8.A.b/ Cas pour des facteurs d'intensité des contraintes plus élevés :

Lorsque ΔK augmente, le nombre de systèmes de glissement actifs augmente également et le faciès de la fissure présente généralement un relief moins important. La fissure se propage plus régulièrement, avec une sensibilité moindre à la microstructure du matériau. On peut alors observer des stries de fatigue sur la surface de rupture (Figure I.9) qui sont typiques d'une propagation par fatigue. Ces stries sont observées dans la plupart des matériaux ductiles (Figure I.10), y compris parfois dans des matières plastiques ^[15].

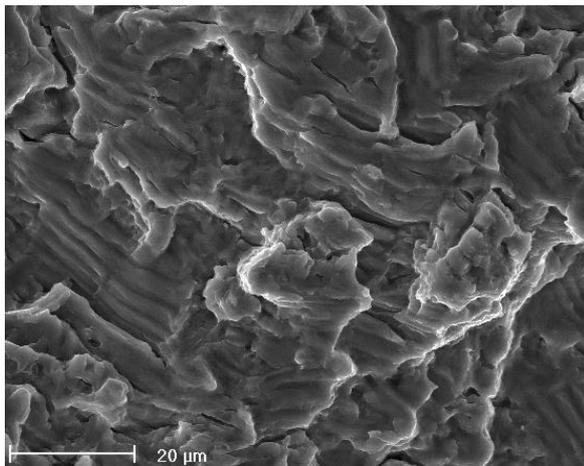


Figure I.9 : Stries de fatigue dans l'alliage de Titane TA6V ($K_{max}=40 \text{ MPa}(m^{1/2}), 20^\circ\text{C}$) [Malherbe,2000] (photo par I. Nedbal).

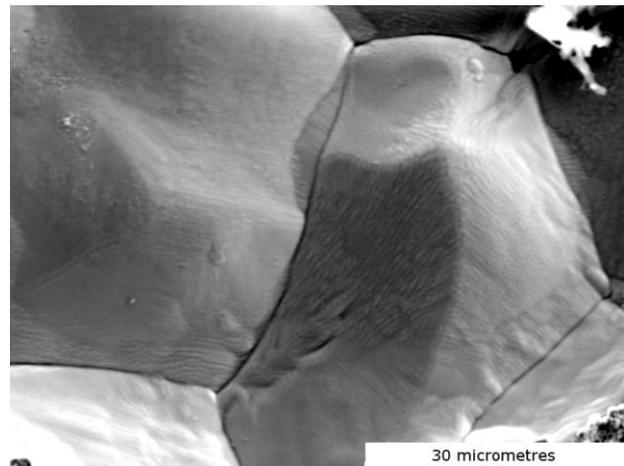


Figure I.10 : Stries de fatigue dans du cuivre OFHC (Photo S. Pommier).

I.8.A.c/ Pour des faibles niveaux de chargement :

Lorsque le nombre de systèmes de glissement actifs est faible à l'extrémité de la fissure, soit du fait du faible niveau de contrainte appliqué, soit du fait de la structure du cristal, la fissure peut néanmoins se propager en mode I. Elle glisse alternativement (Figure I.11) sur un système puis un autre lors de l'ouverture. Une branche de fissure se forme sur chaque plan de glissement. A la décharge, une déformation plastique en retour se produit, mais les nouvelles surfaces, exposées à l'environnement externe lors de l'ouverture de la fissure, ne se résorbent pas lors de la décharge. La fissure s'est donc étendue d'une longueur qui dépend du cosinus de l'angle entre la direction de glissement et le plan de la fissure. La propagation provient donc d'une composante du glissement dans la direction de propagation. La fissure se propage alors, sur un plan moyen à l'intersection des deux systèmes de glissement actifs et laisse de nombreuses branches secondaires de part et d'autre de ce plan (Figure I.11).

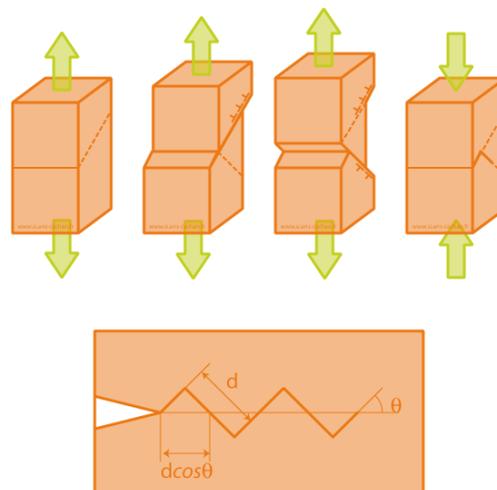


Figure I.11 : Mécanisme de formation des stries de fatigue

Selon Neumann [Neumann, 1969].

I.8.B/ Régimes de croissance par fatigue des fissures longues, Loi de Paris :

La sollicitation appliquée à l'extrémité de la fissure, par un champ de contrainte, peut être caractérisée par le facteur d'intensité des contraintes. Le mécanisme physique principal conduisant à l'extension de la fissure est une déformation plastique cyclique.

Le diagramme (Figure I.12), tracé en coordonnées logarithmiques, fait apparaître trois régimes. Un régime central (régime de Paris B), la vitesse de fissuration est proportionnelle à l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes à une puissance m . Les valeurs de m s'étagent généralement entre 2 et 4, voire 5 pour des alliages peu résistants à la fissuration par fatigue. Dans le cas de l'acier doux étudié m est trouvé égal à 3,5. Ce régime est appelé le (régime de Paris C), les vitesses de fissuration sont supérieures à celles prévues, la fissure se propage de manière instable pour $K = K_c$. En deçà, régime A, les vitesses de fissuration sont inférieures à celles prévues. Lorsque ΔK diminue jusqu'à atteindre le seuil de non-propagation ΔK_{th} , la vitesse de fissuration diminue rapidement, et la fissure semble apparemment s'arrêter ou du moins sa propagation est indétectable^[16].

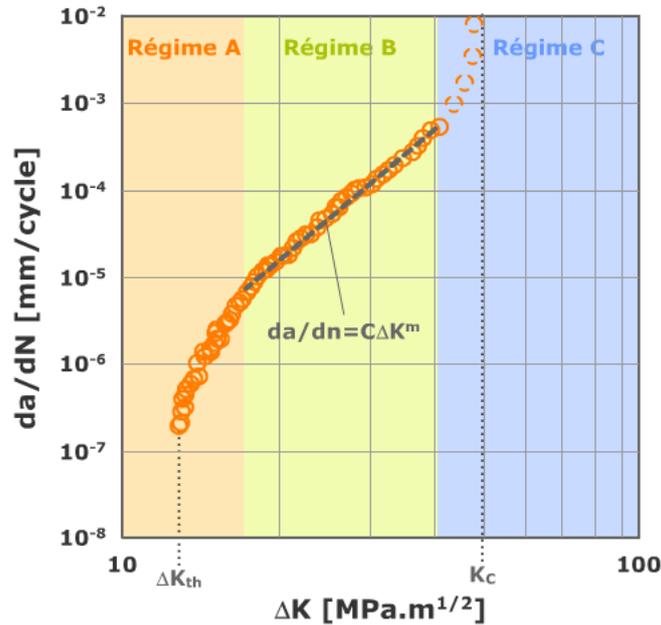


Figure I.12 : Vitesses de fissuration mesurées sur éprouvette CT, sur un acier doux à 0,38 % de carbone à température ambiante et $R=0$. [Pommier, 2001], Illustration des différents régimes de propagation par fatigue. La loi de Paris s'applique dans le régime B.

L'intérêt de cette approche réside dans la zone B, qui permet à l'ingénieur de construire une méthode de dimensionnement des pièces de sécurité. Si l'on considère, par exemple, une fissure centrale de Griffith dans une plaque sollicitée en traction cyclique (σ compris entre 0 et σ_y), dont la taille initiale est a_c . La rupture se produit pour $K=K_c$. La durée de vie se calcule par intégration de la loi de Paris. On calcule la dimension du défaut critique pour $K=K_c$ ^[17]:

$$K = K_c \Rightarrow \sigma_y \sqrt{\pi a_c} = K_c \Rightarrow a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_c}{\sigma_y} \right)^2 \quad (I.12)$$

- N : le nombre de cycles.
- ΔK : la variation du facteur d'intensité de contrainte.
- K , C et m : des coefficients dépendant du matériau.

Puis, à partir de la loi de Paris :

$$\frac{da}{dN} = C[\Delta k]^m \quad (\text{I. 13})$$

On détermine le nombre de cycle à rupture par intégration de cette loi :

$$N = \int_{a=a_0}^{a=a_0} \frac{1}{c(\Delta\sigma_y\sqrt{\pi a})^m} da \quad (\text{I. 14})$$

I.8.C/ Origines physiques des trois régimes de fissuration par fatigue :

La corrélation entre la vitesse de fissuration macroscopique et le pas des stries sur la surface de rupture. Sont Des mesures réalisées en microscopie à balayage sur des matériaux variés. Le pas de strie moyen est mesuré sur les surfaces de rupture dans une plage de largeur Δl . Le rapport D , entre la vitesse de propagation de la fissure, et le pas de strie, est tracé sur la (Figure I.13), en fonction du pas de strie.

Pour des pas de strie compris entre $0,05 \mu\text{m}$ et $2 \mu\text{m}$, la vitesse de propagation est de l'ordre D 'une strie par cycle. Dans le régime B, la propagation de la fissure est donc bien régie principalement par la formation des stries.

Pour un pas de strie dans le régime C supérieur à $2 \mu\text{m}$, la vitesse de fissuration est supérieure à une strie par cycle. D'autres mécanismes de rupture contribuent à la propagation tels que des micro-déchirures ductiles et du clivage. cette déchirure est sensible au taux de triaxialité et le clivage à la contrainte principale maximale (en K_{max}) tandis que la déformation plastique, qui permet de former des stries, est activée par l'amplitude de la contrainte équivalente de cisaillement (en ΔK).

Pour un pas de strie inférieur à $0,05 \mu\text{m}$, la vitesse de fissuration est inférieure à une strie par cycle (régime A). Le processus de croissance est discontinu, la fissure se propage dans certains grains bien orientés en pointe de fissure, tandis qu'elle reste bloquée en d'autres points. Ceci introduit un effet d'échelle. Le nombre de grains sur le front de la fissure il se trouvera toujours des grains dans lesquels la fissure se propage et d'autres où elle est arrêtée. la vitesse de fissuration est très faible, les mécanismes physiques dépendants du temps prennent une grande importance; corrosion de surface, croissance d'une couche d'oxyde, etc...^[18]

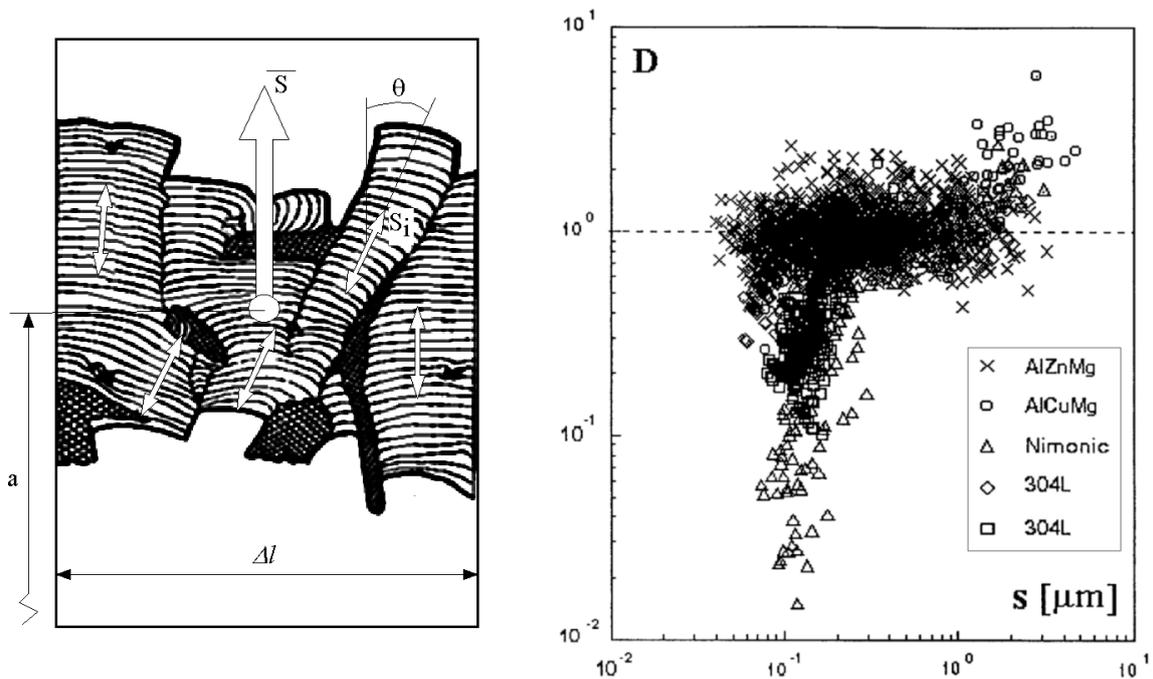


Figure I.13 : Méthode de mesure d'un pas de strie moyen sur une surface de rupture à gauche. A droite, rapport D de la vitesse de fissuration mesurée da/dN et du pas de strie S, tracé en fonction du pas de strie pour divers matériaux.

Ce chapitre présente la construction et la résolution du problème approché d'équilibre en élasticité au moyen de la méthode des éléments finis en déplacement qui s'appuie sur la formulation faible de l'équilibre résultant du principe des puissances virtuelles.

II.1/ Formulation faible de l'équilibre et principe des puissances virtuelles :

L'équilibre du solide, sollicité par des densités de forces de volume \underline{f} , du déplacement \underline{u}^D imposés sur une partie S_u de la frontière $\partial\Omega$ et une densité surfacique d'effort \underline{T}^D sur la partie complémentaire S_T de $\partial\Omega$, est décrit par des champs de déplacement \underline{u} , de déformation $\underline{\varepsilon}$ et de contrainte $\underline{\sigma}$ gouvernés par les équations locale^[19] :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\nabla\underline{u} + \nabla^T\underline{u})(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega) \quad (\text{II. 1})$$

$$\text{div} \underline{\sigma}(\underline{x}) + \rho \underline{f}(\underline{x}) = 0 \quad (\underline{x} \in \Omega) \quad (\text{II. 2})$$

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \mathcal{A} : \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega) \quad (\text{II. 3})$$

Et les conditions aux limites :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^D(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in S_u) \quad (\text{II. 4})$$

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}^D(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in S_T) \quad (\text{II. 5})$$

Tel que :

- L'équation (II.1) est l'équation de compatibilité cinématique.
- L'équation (II.2) est l'équation d'équilibre.
- L'équation (II.3) est l'équation de comportement.

L'équation local d'équilibre (II.2) peut être exprimée sous une forme intégrale équivalente par dualisation, c'est-à-dire multiplication par un champ $\underline{\omega} \in \mathcal{C}$ arbitraire des déplacements cinématique admissibles et intégration sur Ω . On obtient ainsi la forme faible de l'équation locale d'équilibre. Qui correspond au principe des puissances virtuelles (PPV) :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} [\underline{\underline{\omega}}] dV = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{\omega}} dV + \int_{\partial\Omega} [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}] \cdot \underline{\underline{\omega}} dS \quad (\text{II.6})$$

On peut incorporer dans l'équation (II.6) du principe des puissances virtuelle la relation combinant l'équation (II.1) et (II.3) pour obtenir la formulation faible pour le problème élastique :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} [\underline{\underline{u}}] : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}} [\underline{\underline{\omega}}] dV = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{\omega}} dV + \int_{S_T} \underline{\underline{T}}^D \cdot \underline{\underline{\omega}} dS \quad (\text{II.7})$$

II.2/ l'élément fini isoparamétrique :

Dans le domaine de la mécanique des solides, l'approche de référence est celle fondée sur la notion d'élément fini. Elle repose sur la représentation de la configuration géométrique comme assemblage d'éléments de forme simple construite à partir de polynôme.

II.2.a/ représentation de la géométrie approchée :

Il importe de disposer d'une méthode permettant la représentation mathématique d'éléments qui résident dans l'espace physique, dont l'emplacement, l'orientation et les dimensions peuvent être choisis arbitrairement, et qui sont susceptibles de présenter des arêtes ou des faces courbes. Diverses formes (triangulaire, quadrangulaire, cubique...) doivent être disponibles. La méthode de représentation autorisant ce degré

de généralité et de généricité repose sur la définition d'éléments de référence $\Delta \subset \mathbb{R}^D$, de formes simples et de dimensions « normalisées », comme par exemple :

- le carré unité ($D = 2$)

$$\Delta = \{(a_1, a_2) / -1 \leq a_1, a_2 \leq 1\} ;$$

- le cube unité ($D = 3$)

$$\Delta = \{(a_1, a_2, a_3) / -1 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1\} ;$$

- le triangle unité ($D = 2$)

$$\Delta = \{(a_1, a_2) / (a_1, a_2) \geq (0, 0), 1 - a_1 - a_2 \geq 0\} ;$$

- le tétraèdre unité ($D = 3$)

$$\Delta = \{(a_1, a_2, a_3) / (a_1, a_2, a_3) \geq (0, 0, 0), 1 - a_1 - a_2 - a_3 \geq 0\} ;$$

La notation \underline{a} désigne le vecteur des coordonnées paramétriques d'un point de l'élément de référence Δ .

II.2.b/ La fonction d'interpolation :

Considérons alors un élément générique E de l'espace physique' contenant n_e nœuds $\underline{x}^{(k)}$, $1 \leq k \leq n_e$. Les points de E sont mis en relation avec ceux de l'élément de référence Δ_e approprié par une représentation paramétrique de la forme :

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_K(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \quad (\text{II.8})$$

Les fonctions de forme $N_k(\underline{a})$ sont des polynômes à D variables.

La définition des fonctions de forme $N_k(\underline{a})$ est soumise à la contrainte suivante : la

représentation (I.8) doit être vraie si \underline{x} est un nœud $\underline{x}^{(\ell)}$, ce qui impose de vérifier les identités

$$\underline{x}^{(\ell)} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}^{(\ell)}) \underline{x}^{(k)} \quad (1 \leq \ell \leq n_e) \quad (\text{II. 9})$$

Où $\underline{a}^{(\ell)}$ désigne l'antécédent de $\underline{x}^{(\ell)}$ sur l'élément de référence Δ . Cette condition devant être vraie pour tout choix d'emplacement des n_e nœuds, les fonctions de forme doivent donc vérifier

$$N_k(\underline{a}^{(\ell)}) = \delta_{k\ell} \quad (1 \leq k, \ell \leq n_e) \quad (\text{II. 10})$$

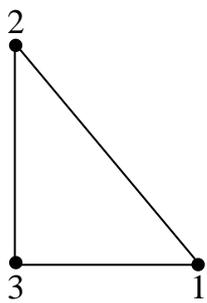
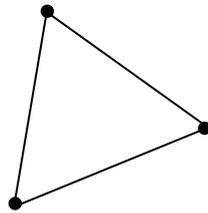
(référence)	(déformé)	Fonctions de forme
 <p>triangle,</p>	 <p>3 nœuds</p>	$N_1(a_1, a_2) = a_1$ $N_2(a_1, a_2) = a_2$ $N_3(a_1, a_2) = 1 - a_1 - a_2$ <p>(degré partiel 1, degré total 2)</p>

Tableau II .1 : Fonction de forme pour un élément finis de référence.

II.2.c/ Représentation locale des déplacements :

Une fois construite une représentation du solide selon les principes ci-dessus, on choisit de représenter tout champ de déplacement $\underline{v}(\underline{x})$ par interpolation des valeurs nodales $\underline{v}^{(k)}$ avec les mêmes fonctions d'interpolation $N_k(\underline{a})$. En d'autres termes, on

pose pour tout point de l'élément fini E une interpolation \underline{v}_h d'un champ \underline{v} sous la forme :

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{ne} N_k(\underline{a}) \underline{v}^{(k)} \quad (\text{II.11})$$

Le terme « isoparamétrique » fait ainsi référence au fait que les mêmes fonctions de forme, ou d'interpolation, sont utilisées pour représenter la géométrie et les inconnues.

Il est commode, en termes de programmation, de disposer l'ensemble des valeurs nodales associées à l'élément E_e dans un « vecteur » $\{\mathbb{V}_e\}$ de longueur $D \times n_e$ selon la convention

$$\{\mathbb{V}_e\} = \{\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(ne)}\}^T = \{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_D^{(ne)}\}^T. \quad (\text{II.12})$$

La formule (I.11) d'interpolation isoparamétrique prend alors la forme équivalente

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = [\mathbb{N}(\underline{a})] \{\mathbb{V}_e\} \quad \text{pour tout } \underline{x} \in E \text{ défini par (II.8)}$$

Les fonctions de forme étant disposées dans la matrice $[\mathbb{N}(\underline{a})]$ à D lignes et $D \times n_e$ colonnes :

$$[\mathbb{N}(\underline{a})] = \begin{bmatrix} N_1(\underline{a}) & 0 & 0 & N_{ne}(\underline{a}) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\underline{a}) & 0 & \dots & 0 & N_{ne}(\underline{a}) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\underline{a}) & 0 & 0 & 0 & N_{ne}(\underline{a}) \end{bmatrix} \quad (\text{si } D = 3) \quad (\text{II.13})$$

II.2.d/ Représentation globale des déplacements :

A partir des représentations (II.8) et (II.11) du vecteur position et du déplacement, définies « localement » (c'est-à-dire élément par élément), un champ de déplacement

\underline{v}_h peut être représenté « globalement » (c'est-à-dire sur le domaine approché Ω_h complet) sous la forme

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_N} \check{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)} \quad (\underline{x} \in \Omega_h) \quad (\text{II.14})$$

$\Omega^{(n)}$: la région formée par la réunion des éléments finis contenant le nœud $\underline{x}^{(n)}$

II.2.e/ Notion d'un vecteur global des degrés de liberté inconnus :

La représentation (II.14) opère une sommation sur tous les nœuds du maillage et ne fait pas de distinction entre déplacements nodaux inconnus ou imposés via des conditions aux limites de la relation (II.4). Toute composante de déplacement nodal $v_j^{(n)}$ peut être repérée par l'indice de composante j ($1 \leq j \leq D$) et le numéro de nœud n pour pouvoir opérer et systématiser la distinction entre les déplacements de valeur imposée par les conditions aux limites et les autres (qui seront qualifiés de *libres* dans la suite), un numéro d'inconnue $\text{dof}(n,j)$ est attribué à chaque couple (n, j) selon la convention :

$$\text{dof}(n,j) > 0 \text{ (} v_j^{(n)} \text{ libre),} \quad \text{dof}(n,j) \leq 0 \text{ (} v_j^{(n)} \text{ imposé).} \quad (\text{II.15})$$

De plus, deux déplacements nodaux libres distincts ne doivent pas avoir le même numéro d'inconnue : les numéros (strictement positifs) donnés aux $v_j^{(n)}$ libres doivent être tous différents. Une méthode non obligatoire mais naturelle consiste à attribuer aux déplacements nodaux libres des numéros consécutifs à partir de 1. La traduction informatique naturelle de la définition (II.15) est la table des inconnues dof de dimension $N_N \times D$.

La représentation (II.14) est alors mise sous la forme :

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \underline{v}_h^{(D)}(\underline{x}) + \underline{v}_h^{(0)}(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega_h) \quad (\text{II.16})$$

Avec

$$\underline{u}_h^{(D)}(\underline{x}) = \sum_{(n,i) \mid \text{dof}(n,j) \leq 0} \check{N}_n(\underline{x}) u_j^{(D)}(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j, \quad \in C_h(\underline{u}^D), \quad (\text{II.17})$$

$$\underline{v}^{(0)} = \sum_{(n,i) \mid \text{dof}(n,j) > 0} \check{N}_n(\underline{x}) v_j^{(n)} \underline{e}_j \quad \in C_h(\underline{0}),$$

Ou $C_h(\underline{u}^D)$ et $C_h(\underline{0})$ désignent les ensembles de déplacements cinématiquement admissibles respectivement à la donnée \underline{u}^D et à zéro) au sens de la discrétisation éléments finis.

avec

$$\underline{\varphi}^K(\underline{x}) = \check{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j \quad \text{et} \quad \alpha_K = v_j^{(n)} \quad \text{avec} \quad K = \text{dof}(n,j). \quad (\text{II.18})$$

La notation $\{\mathbb{V}\}$ désignera par convention la liste des valeurs nodales du champ de déplacement \underline{v}_h laissées inconnues par les conditions aux limites, c'est-à-dire (avec la définition ci-dessus de la table des inconnues) :

$$\{\mathbb{V}\} = \{ v_j^{(n)} \mid \text{dof}(n, j) > 0, (1 \leq n \leq N_N, 1 \leq j \leq D) \}. \quad (\text{II.19})$$

II.A.f/ Maillage :

On se place à partir de maintenant dans le cadre général d'un solide dont la configuration est décrite par le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^D$ ($D = 2$ en déformations planes ou contraintes planes $D = 3$ pour un solide tridimensionnel).

(i) Le domaine Ω est divisé en N_E régions E_e ($1 \leq e \leq N_E$) de forme simple : triangles, quadrangles (problème plan) ; parallélépipèdes, prismes ou tétraèdres (solide tridimensionnel). Ces régions pourront être distordues, et en particulier avoir des faces ou côtés curvilignes. Chacune de ces régions définira le support géométrique d'un élément fini.

(ii) On choisit par ailleurs un nombre fini N_N de points (n) ($1 \leq n \leq N_N$) de Ω , appelés *nœuds*. Ces nœuds comprennent en particulier tous les sommets des régions du découpage.

L'ensemble des éléments E_e et des nœuds (n) ainsi définis constituent un maillage de Ω . Pour un découpage donné de Ω en éléments, le choix des nœuds n'est pas arbitraire. Il doit en effet correspondre à l'une des possibilités répertoriées de familles de fonctions de forme associées à une forme d'élément donnée.

Sur le plan informatique, les données nécessaires à la définition d'un maillage sont habituellement structurées en deux tables :

- La table des coordonnées nodales, notée *coor*, disposée en N_N lignes et D colonnes, telle que la ligne n donne les coordonnées du nœud $x^{(n)}$:

$$\text{coor}(n, j) = x_j^{(n)};$$

- la table de connectivité, notée *conec*, disposée en N_E lignes, telle que la ligne e donne la liste des numéros des nœuds situés sur l'élément E_e . Tous les éléments n'ayant pas nécessairement le même nombre de nœuds, il faut par ailleurs stocker la valeur de n_e pour chaque élément, par exemple sous la forme d'une colonne supplémentaire de *conec*. On aura ainsi :

$$\begin{aligned} \text{conec}(e, 0) &= n_e && \text{(nombre de nœuds de l'élément } E_e), \\ \text{conec}(e, 1 : n_e) &&& \text{(liste des numéros globaux des nœuds de } E_e) \end{aligned}$$

(Où la notation « $1 : n_e$ », de style « MATLAB », désigne l'ensemble $\{1, 2, \dots, n_e\}$ d'entiers). De même, la relation

$$n = \text{conec}(e, k)$$

Indique que le nœud de numéro local k relativement à l'élément fini E_e est le nœud $\underline{x}^{(n)}$ de numéro global n .

II.3/ Construction du problème d'élasticité approché à l'aide d'éléments finis isoparamétriques :

Supposons le solide Ω et le champ de déplacement représentés à l'aide d'un maillage d'éléments finis isoparamétriques. La construction du problème approché est alors s'appuyée sur une formulation faible découlant du principe des puissances virtuelles (I.7).

II.3.a/ Construction à partir d'une formulation faible :

Les formulations faibles issues du principe des puissances virtuelles constituent le support de construction de problèmes approchés par éléments finis en mécanique des solides permettant le plus grand degré de généralité. Pour le cas présent de l'élasticité linéaire, la méthode des éléments finis prend appui sur la formulation faible (II.7), et la construction du problème approché consiste dans son principe à :

- (i) Construire un domaine approché $\Omega_h = \cup_e E_e$ au moyen d'un maillage respectant la conformité, ce qui implique le choix des types d'éléments utilisés:

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \quad (\underline{x} \in E_e \quad 1 \leq e \leq N_E);$$

- (ii) Chercher le déplacement inconnu \underline{u} sous la forme (II.16) - (II.17), soit :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \underline{u}_h^{(D)}(\underline{x}) + \underline{u}_h^{(0)}(\underline{x}) \quad \in C_h(\underline{u}^D) \quad (\underline{x} \in \Omega_h), \quad (\text{II. 20})$$

Avec

$$\underline{u}_h^{(D)}(\underline{x}) = \sum_{(n,i) | \text{dof}(n,j) \leq 0} \check{N}_n(\underline{x}) u_j^{(D)}(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j, \quad \in C_h(\underline{u}^D),$$

$$\underline{u}^{(0)} = \sum_{(n,i) | \text{dof}(n,j) > 0} \check{N}_n(\underline{x}) u_j^{(n)} \underline{e}_j \quad \in C_h(\underline{0});$$

(iii) Utiliser des champs virtuels $\underline{\omega}$ cinématiquement admissibles à zéro de la forme (II.16) et (II.17), soit

$$\underline{\omega}(\underline{x}) = \sum_{(n,i) | \text{dof}(n,j) > 0} \check{N}_n(\underline{x}) \omega_j^{(n)} \underline{e}_j \quad \in C_h(\underline{0}) \quad (\underline{x} \in \Omega_h) \quad (\text{II. 21})$$

La forme discrète de la formulation faible (II .7) s'écrit alors

Trouver $\underline{u}_h^{(0)} \in C_h(\underline{0})$ tel que : $\forall \underline{\omega} \in C_h(\underline{0})$,

$$\int_{\Omega_h} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(0)}] : A : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] dV = - \int_{\Omega_h} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(0)}] : A : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] dV + \int_{\Omega_h} \underline{f} \cdot \underline{\omega} dV + \int_{S_{T,h}} \underline{T}^D \cdot \underline{\omega} dS. \quad (\text{II. 22})$$

Regroupant les valeurs nodales $\underline{u}_j^{(n)}$ et $\underline{\omega}_j^{(n)}$ ($\text{dof}(n,j) > 0$) dans les « vecteurs » $\{\underline{U}\}$ et $\{\underline{W}\}$ on propose que la taille des vecteurs $\{\underline{U}\}$, $\{\underline{W}\}$ est donc égale au nombre N de degrés de liberté restant inconnus après prise en compte des déplacements imposés), la formulation faible discrète (II.22) prend la forme :

$$\text{Trouver } \{\underline{U}\} \in \mathbb{R}^N \text{ tel que : } \forall \{\underline{W}\} \in \mathbb{R}^N \quad \{\underline{W}\}^T [\mathbb{K}] \{\underline{U}\} = \{\underline{W}\}^T \{\underline{F}\} \quad (\text{II.23})$$

Où $[\mathbb{K}]$ est la matrice de rigidité de la structure et ${}^T \{\mathbb{F}\}$ le vecteur des efforts généralisés (forces nodales), qui est équivalente au système d'équations d'inconnue $\{\mathbb{U}\} \in \mathbb{R}^N$:

$$[\mathbb{K}] \{\mathbb{U}\} = \{\mathbb{F}\}. \quad (\text{II.24})$$

II.3.b/ Notion d'assemblage :

En pratique, le calcul de la matrice de rigidité $[\mathbb{K}]$ et du vecteur des forces nodales $\{\mathbb{F}\}$ n'est pas réalisé par substitution explicite des définitions (II.16) et (II.17) dans la relation (II.18), qui demanderait de former explicitement les fonctions de forme globales $\check{N}_n(\underline{x})$, mais par un procédé *d'assemblage* reposant sur un traitement élément par élément des calculs nécessaires.

Cette approche est fondée sur le fait que les intégrales intervenant dans les relations (II.18) et (II.19) définissant $[\mathbb{K}]$ et $\{\mathbb{F}\}$ portent sur Ω_h et sa frontière, et sont donc additives par rapport aux éléments finis. Après introduction de la partition $\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{N_E} E_e$, les relations (II.17) et (II.18) conduisent à définir $[\mathbb{K}]$ et $\{\mathbb{F}\}$ à travers

$$\{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}] \{\mathbb{U}\} = \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(0)}] : A : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] dV, \quad (\text{II.25})$$

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}\} = \sum_{e=1}^{N_E} \left\{ - \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(D)}] : A : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] dV + \int_{E_e} \underline{f} \cdot \underline{\omega} dV + \int_{\gamma_T^e} \underline{T}^D \cdot \underline{\omega} dS, \right\} \quad (\text{II.26})$$

Où $\underline{\omega} \in C_h(\Omega)$ est un champ virtuel associé au maillage et $\gamma_T^e = \partial E_e \cap S_T$ désigne la portion de la frontière de l'élément E_e située sur S_T (qui est de fait vide pour un grand nombre d'éléments).

Les expressions (II.25) et (II.26) suggèrent que le calcul effectif de la matrice de rigidité $[\mathbb{K}]$ et du second membre $\{\mathbb{F}\}$ pourra être effectué à l'aide d'une procédure consistant à :

- (i) évaluer des intégrales sur des éléments et des portions de frontières d'éléments, puis
- (ii) reporter ces contributions dans des matrices et vecteurs associés aux valeurs nodales de l'ensemble du maillage.

En pratique, la procédure de construction de la matrice $[\mathbb{K}]$ et du vecteur $\{\mathbb{F}\}$, en termes d'équilibre des efforts généralisés intérieurs et extérieurs s'écrivent :

$$\{\mathbb{F}^{\text{int}}\} + \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (\text{II.27})$$

Avec

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}^{\text{int}}\} = - \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{u}}_h] : A : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{\omega}}] dV, \quad (\text{II.28})$$

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\} = \sum_{e=1}^{N_E} \left\{ \int_{E_e} \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{\omega}} dV + \int_{\gamma_{Te}} \underline{\underline{T}}^D \cdot \underline{\underline{\omega}} dS, \right\} \quad (\text{II.29})$$

La raison en est que les contributions des éléments à la matrice de rigidité dans (II.25) et aux efforts généralisés associés aux déplacements imposés dans (II.26) proviennent toutes deux de l'intégrale (II.28) donnant la puissance virtuelle des efforts intérieurs sur l'élément. Il est donc préférable de calculer cette dernière comme un tout sur chaque élément puis d'en extraire les contributions à $[\mathbb{K}]$ et $\{\mathbb{F}\}$.

II.4/ Calcul des intégrales élémentaires :

La construction du système (II.24) passe par l'évaluation des contributions de chaque élément fini aux expressions (II.28) et (II.29). Cette section a pour objet de détailler les méthodes permettant l'évaluation de ces contributions, habituellement qualifiées d'élémentaires.

II.4.a/ Matrices de rigidité élémentaires :

La contribution d'un élément générique E_e à la puissance dans un champ virtuel $\underline{\omega}$ des efforts intérieurs associés au champ \underline{u}_h est, d'après (II.28), donnée par

$$\int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h] : \mathbf{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] dV. \quad (\text{II.30})$$

L'approche générale et systématique pour l'évaluation de contributions ayant la forme d'une intégrale sur un élément (habituellement appelées *intégrales élémentaires*) consiste à utiliser la correspondance entre E_e et l'élément de référence Δ_e , via le changement de variable $\underline{x} \in E_e \rightarrow \underline{a} \in \Delta$ défini par (II.8).

La densité de travail des efforts intérieurs Est données par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h] : \mathbf{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] = \{\varepsilon[\underline{u}_h]\}^T [\mathbf{A}] \{\varepsilon[\underline{\omega}]\} = \{\mathbb{W}_e\}^T [\mathbf{B}(\underline{a})]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{B}(\underline{a})] \{\mathbb{U}_e\},$$

Tandis que l'élément différentiel de volume se transforme selon

$$dV(\underline{x}) = J(\underline{a}) dV(\underline{a})$$

Cela conduit à écrire l'intégrale élémentaire (II.30) en termes d'une matrice de rigidité élémentaire $[\mathbb{K}_e]$:

$$\int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h] : \mathbf{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] dV = \{\mathbb{W}_e\}^T [\mathbb{K}_e] \{\mathbb{U}_e\} \quad (\text{II.31})$$

$$\text{Avec} \quad [\mathbb{K}_e] = \int_{\Delta_e} [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] j_e(\underline{a}) dV(\underline{a}) \quad (\text{II.32})$$

II.4.b/ Forces nodales élémentaires associées aux efforts extérieurs :

Les forces nodales généralisées associées aux efforts extérieurs exercés sur l'élément E_e résultent de l'évaluation des contributions élémentaires

$$\int_{E_e} \underline{f} \cdot \underline{\omega} dV + \int_{\Gamma_{eT}} \underline{T}^D \cdot \underline{\omega} dS = \{\mathbb{W}_e\}^T \{ \mathbb{F}_e^{vol} + \mathbb{F}_e^{surf} \} = \{\mathbb{W}_e\}^T + \{\mathbb{F}_e^{ext} \} \quad (\text{II.33})$$

La restriction du champ $\underline{\omega}$ à l'élément E_e , l'intégrale sur l'élément E_e s'écrit, par le passage sur l'élément de référence Δ_e :

$$\int_{E_e} \underline{f} \cdot \underline{\omega} dV = \{\mathbb{W}_e\}^T \left\{ [N(\underline{a})]^T \{ \underline{f} \underline{x}(\underline{a}) \} j_e(\underline{a}) dV(\underline{a}) \right\} = \{\mathbb{W}_e\}^T \{ \mathbb{F}_e^{vol} \} \quad (\text{II.34})$$

Et

$$\int_{E_e} \underline{T}^D \cdot \underline{\omega} dS = \{\mathbb{W}_e\}^T \left\{ [N(\underline{a})]^T \{ \underline{T}^D \underline{x}(\underline{a}) \} j_e(\underline{a}) dS(\underline{a}) \right\} = \{\mathbb{W}_e\}^T \{ \mathbb{F}_e^{surf} \} \quad (\text{II.35})$$

-L'équation (II.34) représente les forces de volume.

- l'équation (II.35) représente les forces de surface.

II.5/ Assemblage :

II.5.a/ assemblage de la matrice de rigidité :

Séparation des contributions des déplacements inconnus et imposés sur un élément. La définition (II.31) de la matrice de rigidité élémentaire ne prend pas en compte l'éventualité que l'élément E_e supporte des déplacements imposés. Il en effet plus simple sur le plan pratique (programmation) de calculer la matrice élémentaire $[\mathbb{K}_e]$ complète, que l'élément supporte des déplacements imposés ou non.

On considère un élément fini générique comprenant n_e , nœuds en dimension $D = 2$ ou 3 . si E_e , supporte des déplacements imposés sur une partie de sa frontière, on opère une partition des Dn_e degrés de liberté de l'élément de façon à différencier les déplacements nodaux libres, dont le nombre est noté N_e (avec $N_e < Dn_e$, par hypothèse), et imposés. La liste des numéros locaux de l'ensemble des degrés de liberté de l'élément est $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, Dn_e\}$. pour simplifier la présentation, on suppose temporairement que les degrés de liberté libres et imposés correspondent respectivement aux sous-listes $\mathcal{L}^{(0)} = \{1, 2, \dots, N_e\}$ et $\mathcal{L}^{(D)} = \{N_e + 1, \dots, Dn_e\}$ de numéros. On pose alors

$$\{U_e\} = \begin{Bmatrix} \mathbb{U}_e^{(0)} \\ \mathbb{U}_e^{(D)} \end{Bmatrix}, \quad \{W_e\} = \begin{Bmatrix} \mathbb{W}_e^{(0)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

où les vecteurs $\{\mathbb{U}_e^{(0)}\}$ des inconnues effectives sur l'élément et $\{\mathbb{W}_e^{(0)}\}$ des valeurs nodales du champ virtuel sont de longueur N_e , et le vecteur $\mathbb{U}_e^{(D)}$ des déplacements nodaux imposés est de longueur $\bar{N}_e = (Dn_e) - N_e$. Les définitions (3.26) permettent notamment d'assurer que les restrictions de $\underline{u}_h^{(0)}$ et $\underline{\omega}$ à l'élément sont bien cinématiquement admissibles à zéro.

Si $[\mathbb{K}_e]$ désigne la matrice de rigidité élémentaire donnée par (II.32), c'est-à-dire définie pour tous les degrés de liberté de l'élément (et donc de dimension $Dn_e \times Dn_e$), la partition opérée dans (II.36) induit une décomposition de $[\mathbb{K}_e]$ en sous-matrices, de la forme

$$[\mathbb{K}_e] = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_e^{(00)} & \mathbb{K}_e^{(0D)} \\ \mathbb{K}_e^{(D0)} & \mathbb{K}_e^{(DD)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

avec $[\mathbb{K}_e^{(D0)}] = [\mathbb{K}_e^{(0D)}]^T$. Les sous-matrices $[\mathbb{K}_e^{(00)}]$, $[\mathbb{K}_e^{(0D)}]$ et $[\mathbb{K}_e^{(DD)}]$ ont pour dimensions respectives $N_e \times N_e$, $N_e \times \bar{N}_e$ et $\bar{N}_e \times \bar{N}_e$. Avec les partitions (II.36) et (II.37), la puissance virtuelle élémentaire des efforts intérieurs prend la forme

$$\{\mathbb{W}_e\}^T \{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\} = - \{\mathbb{W}_e^{(0)}\}^T ([\mathbb{K}_e^{(00)}] \{\mathbb{U}_e^{(0)}\} + [\mathbb{K}_e^{(0D)}] \{\mathbb{U}_e^{(D)}\}) \quad (\text{II.38})$$

En d'autres termes, la contribution de l'élément à la matrice de rigidité globale est réduite à la sous-matrice $[\mathbb{K}_e^{(00)}]$ de dimension $N_e \times N_e$, tandis que la contribution aux forces nodales généralisées associées aux déplacements imposés est

$$\{\mathbb{F}_e^u\} = - [\mathbb{K}_e^{(0D)}] \{\mathbb{U}_e^{(D)}\}. \quad (\text{II.39})$$

Le vecteur $\{\mathbb{F}_e^u\}$ est associé par dualité aux N_e degrés de liberté effectifs des champs cinématiquement admissibles à zéro sur l'élément, et est donc de longueur N_e .

En pratique, les listes $\mathcal{L}^{(0)}$ et $\mathcal{L}^{(D)}$ ne sont en général pas formées de numéros consécutifs. L'expression (II.38) reste alors valable, mais avec les sous-matrices de $[\mathbb{K}_e]$ définies (avec une notation compacte de style MATLAB) par

$$[\mathbb{K}_e^{(00)}] = \mathbb{K}_e(\mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(0)}), \quad [\mathbb{K}_e^{(0D)}] = \mathbb{K}_e(\mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(D)}) \quad (\text{II.40})$$

Effectuer la partition (II.37) de la rigidité élémentaire et le calcul de $\{\mathbb{F}_e^u\}$ par (II.39) n'est nécessaire que si E_e a au moins un nœud situé sur S_u . Cette opération ne concerne donc qu'une fraction du nombre total d'éléments d'autant plus faible que le maillage est fin. Avec les notations introduites ci-dessus, le cas d'un élément ne présentant pas de déplacements imposés correspond bien sûr aux valeurs particulières

$$N_e = Dn_e, \quad \bar{N}_e = 0, \quad [\mathbb{K}_e^{(00)}] = [\mathbb{K}_e], \quad \{\mathbb{F}_e^u\} = \{0\}.$$

L'opération d'assemblage de la matrice de rigidité et du vecteur des forces nodales associées aux déplacements imposés revient alors formellement, avec les notations précédemment introduites, à exploiter les relations

$$\{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}] \{\mathbb{U}\} = \sum_{e=1}^{NE} \{\mathbb{W}_e^{(0)}\}^T [\mathbb{K}_e^{(00)}] \{\mathbb{U}_e^{(0)}\}, \quad (\text{II.41})$$

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}^u\} = - \sum_{e=1}^{NE} \{\mathbb{W}_e^{(0)}\}^T [\mathbb{K}_e^{(0D)}] \{\mathbb{U}_e^{(D)}\}, \quad (\text{II.42})$$

Résultant de la combinaison de (II.28), (II.31), (II.36) et (II.37), entre la matrice de rigidité globale et les blocs $[\mathbb{K}_e^{(00)}]$ et $[\mathbb{K}_e^{(0D)}]$ des matrices de rigidité élémentaires.

Ces relations ne peuvent toutefois pas être appliquées directement. En effet, chaque matrice élémentaire $[\mathbb{K}_e]$, une fois calculée selon le procédé décrit dans la section précédente, est définie par référence à la numérotation locale de l'élément E_e , tandis que la matrice globale $[\mathbb{K}]$ et le vecteur $\{\mathbb{F}^u\}$ sont bien sur définis en termes de la numérotation globale. Pour prendre en compte correctement la contribution de $[\mathbb{K}_e]$ à $[\mathbb{K}]$ et $\{\mathbb{F}^u\}$, il faut donc savoir à quels numéros globaux d'inconnues correspondent les numéros locaux associés à l'élément E_e . Ainsi, le calcul et l'assemblage de $[\mathbb{K}]$ et $\{\mathbb{F}^u\}$, qui sont effectués simultanément, fonctionnent schématiquement selon le principe suivant :

1. Initialisation : $[\mathbb{K}] = [0]$ (matrice $N \times N$), $\{\mathbb{F}^u\} = \{0\}$ (N -vecteur).

2. Boucle sur les éléments : pour $1 \leq e \leq N_E$, faire

(i) Déterminer le nombre de nœuds $n_e = \text{connec}(e, 0)$ de E_e ;

(ii) Déterminer la liste nodes des numéros globaux des nœuds de E_e :

$$\text{Nodes}(k) = \text{connec}(e, k) \quad (1 \leq k \leq n_e)$$

(iii) Déterminer les coordonnées des nœuds

$$\underline{x}^{(k)} = \text{coor}(\text{nodes}(k), :) \quad (1 \leq k \leq n_e);$$

(iv) Déterminer la restriction dof e à l'élément E_e de la table des inconnues :

$$\text{dof}_e = \{\text{dof}(n, j)\}, j = 1, \dots, D \text{ et } n \in \text{nodes}$$

(La liste dof e est 1D, dof étant parcourue ligne à ligne) ;

(v) Calculer $[\mathbb{K}_e]$;

(vi) Contribution de $[\mathbb{K}_e]$ à $[\mathbb{K}]$ et $\{\mathbb{F}^u\}$

$$\text{pour } 1 \leq p, q \leq Dn_e :$$

$$\mathbb{K}_{IJ} = \mathbb{K}_{IJ} + \mathbb{K}_{e, pq} \quad I = \text{dofe}(p) > 0, J = \text{dofe}(q) > 0$$

$$\mathbb{F}_I^u = \mathbb{F}_I^u - \mathbb{K}_{e, pq} \mathbb{U}_{eq}^{(D)} \quad I = \text{dofe}(p) > 0, \text{dof}(q) < 0$$

II.5.b/ Assemblage du vecteur de forces nodales :

Cette opération d'assemblage est réalisée de façon analogue à l'assemblage de $[\mathbb{K}]$, par exploitation de la relation :

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\} = \{\mathbb{W}\}^T (\{\mathbb{F}^{\text{vol}}\} + \{\mathbb{F}^{\text{surf}}\}) = \sum_{e=1}^{NE} \{\mathbb{W}_e\}^T (\{\mathbb{F}_e^{\text{vol}}\} + \{\mathbb{F}_e^{\text{surf}}\}). \quad (\text{II.43})$$

Le calcul et l'assemblage de $\{\mathbb{F}^{\text{vol}}\}$ et $\{\mathbb{F}^{\text{surf}}\}$ procèdent alors comme indiqué dans l'encadré ci-après. En pratique, cette procédure est susceptible de ne faire intervenir qu'une faible proportion des éléments finis du maillage. Par exemple :

- (a) Si les sollicitations consistent uniquement en des déplacements imposés, seuls les éléments dont au moins un nœud est situé sur S_u sont concernés, et les coefficients non nuls de $\{\mathbb{F}\}$ correspondent aux degrés de liberté portés par ces éléments.
- (b) Si les sollicitations consistent uniquement en des efforts imposés sur la surface, seuls les éléments dont un bord est situé sur S_T sont concernés, et les coefficients non nuls de $\{\mathbb{F}\}$ correspondent aux degrés de liberté associés aux nœuds situés sur S_T .

1. Initialisation : $\{\mathbb{F}\} = [0]$ (vecteur nul à N composantes).

2. Boucle sur les éléments : pour $1 \leq e \leq N_E$, faire

(i) Déterminer le nombre de nœuds $n_e = \text{connec}(e, 0)$ de E_e ;

(ii) Déterminer la liste nodes des numéros globaux des noeuds de E_e :

$$\text{nodes}(k) = \text{connec}(e, k) \quad (1 \leq k \leq n_e)$$

(iii) Déterminer les coordonnées des noeuds :

$$\mathbf{x}^{(k)} = \text{coor}(\text{nodes}(K), :) (1 \leq K \leq n_e);$$

(iv) Déterminer la restriction dofe à l'élément E_e de la table des inconnues :

$$\text{dof } e = \{ \text{dof}(n, j) \}, j = 1, \dots, D \text{ et } n \in \text{nodes}$$

(v) Calculer $\{F_e\}$

(vi) Contribution de $\{F_E\}$ à $\{F\}$:

$$F_I = F_I + F_{e,p} \quad 1 \leq p \leq Dn_e, \quad I = \text{dof}(p), \quad I > 0$$

II.6 / Application à la mécanique linéaire de la rupture et calcul numérique des facteurs d'intensité de contraintes :

II.6.a/ La méthode des éléments finis pour les structures fissurées :

En mécanique linéaire de la rupture, une fissure est modélisée, pour les problèmes plans considérés dans ce chapitre, par une ligne F à travers laquelle le champ de déplacement est discontinu. Un modèle construit par la méthode des éléments finis devra donc reproduire cette condition.

Les fonctions de base de la méthode des éléments finis sont par construction continues sur l'ensemble du domaine approché Ω_h . Par conséquent, une fissure ne pourra pas traverser des éléments : la courbe F devra coïncider avec des frontières d'éléments finis. De plus, il faut traiter les noeuds situés sur cette courbe comme des

« nœuds doubles », comme suggéré par la (figure II.1); cela revient à traiter le maillage du solide fissuré comme la situation limite du maillage d'un solide contenant une cavité infiniment mince. Les nœuds, éventuellement géométriquement confondus, relatifs aux deux lèvres de la fissure doivent porter des numéros distincts. Les fonctions de base construites sur un tel maillage sont alors automatiquement discontinues à travers F.

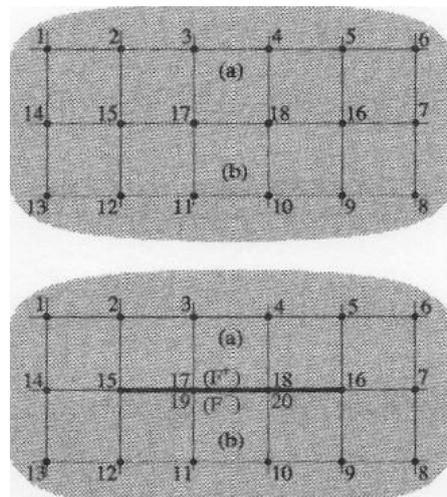


Figure II.1 : Maillage avec « double nœuds » : portion de solide sans fissure et maillage réalisant une interpolation continue (en haut); portion de solide contenant une fissure F et maillage réalisant une interpolation discontinue à travers F (en bas). Dans les tables de connectivité des maillages respectifs, les éléments (a) et (b) sont ainsi définis par les listes de nœuds $\{17,18,4,3\}$ et $\{11, 10, 18,17\}$ (solide non fissuré) et $\{17,18, 4, 3\}$ et $\{11,10, 20,19\}$ (solide fissuré).

Le caractère singulier en pointe de fissure de la solution élastique en déformation et en contrainte modifie (et, en fait, dégrade) les propriétés de convergence de la solution approchée vers la solution exacte quand le pas de maillage h tend vers zéro.

La modélisation d'un solide fissuré nécessite ainsi, pour obtenir une précision raisonnable, des aménagements spécifiques, tels que :

(a) Maillage très raffiné au voisinage de la pointe de fissure, afin d'améliorer la représentation de champs singuliers par les fonctions de base usuelles de la méthode des éléments finis;

(b) Création de nouveaux éléments finis, spécialement adaptés à la prise en compte de champs de déformations singuliers en $1/\sqrt{r}$ au voisinage de la pointe de fissure.

II.6.b/ Evaluation des facteurs d'intensité de contraintes par extrapolation :

Cette méthode, peu précise mais de mise en œuvre simple, consiste à exploiter directement les déplacements aux nœuds les plus proches d'une pointe de fissure, en les comparant à l'expression asymptotique (I.13) du saut de déplacement à travers la fissure.

Par exemple (avec les notations de la figure II.2), prenant sur les lèvres F_h^\pm de la fissure les nœuds B^+ et B^- les plus proches de la pointe A, la formule (I.13) suggère d'écrire

$$K_I \approx \frac{-E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{d}} [\underline{u}(B)].\underline{n}, \quad K_{II} \approx \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{d}} [\underline{u}(B)].\underline{t}, \quad (\text{II.44})$$

Où \underline{t} et \underline{n} sont les directions tangente et normale à F en A, B est le lieu géométrique commun à B^+ et B^- et d est la distance de B à A. Ces formules nécessitent un maillage très raffiné au voisinage de la pointe de fissure.

Une variante de cette approche consiste à utiliser plusieurs nœuds doubles successifs à partir de la pointe de fissure, et de considérer une approximation du saut de déplacement $[[\hat{u}]]$ de la forme

$$[[\hat{u}]] = \sqrt{r} [\alpha \underline{n} + \beta \underline{t}].$$

Les coefficients α , β sont alors recherchés par une méthode de moindres carrés, de façon à ce que la fonction $[[\hat{u}]]$ s'approche au mieux des valeurs de saut de déplacement aux nœuds doubles. Les facteurs K_I , K_{II} sont alors approchés par les valeurs obtenues par identification avec le terme principal de la relation^[20] (I.13).

$$K_I \approx \frac{\sqrt{2\pi E}}{8(1-\nu^2)} \alpha \qquad K_{II} \approx \frac{\sqrt{2\pi E}}{8(1-\nu^2)} \beta \qquad (\text{II.45})$$



Figure II.2 : Notations pour le calcul de K_I , K_{II} par extrapolation au nœud double (B^+ , B^-) le plus proche de la pointe de fissure (à gauche) ou au moyen de plusieurs nœuds doubles successifs (B^+ , B^-), (C^+ , C^-),... (à droite).

Dans ce modeste travail on a développé un code de calcul par la méthode des éléments finis sous MATLAB qui calcule le facteur d'intensité des contraintes pour une plaque d'Aluminium fissuré soumise à des charges uniaxiales. Ce code nécessite deux étapes essentielles : la génération de maillage dont on a utilisé l'élément triangulaire avec trois nœuds T_3 et la simulation par élément finis.

III.1/ Définition du problème à résoudre :

Dans ce projet de fin d'étude on développe un code de calcul de FCI par la méthode des éléments finis d'une éprouvette rectangulaire (largeur $2H$ et hauteur $2V$), constituée d'un matériaux élastique linéaire fictif (module de Young $E = 1$ et coefficient de poisson $\nu = 0.3$), traitée dans le cadre des déformations planes. L'origine des coordonnées (x_1, x_2) est choisie au centre de la plaque. La plaque contient une fissure définie géométriquement par un segment situé sur la droite $x_2=0$, de longueur $2a$, centrée sur l'origine. La plaque est chargée par une contrainte de traction simple σ appliquée selon la direction x_2 sur les bords $x_2 = \pm V$ (figure III.1).

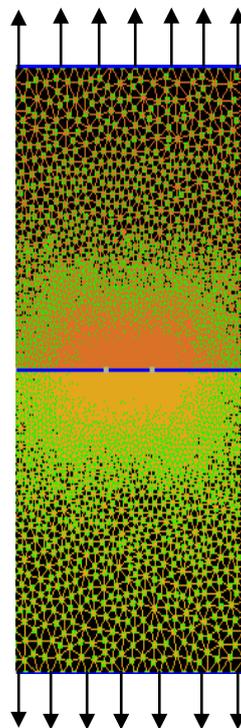


Figure III.1 : Maillage d'une plaque fissurée en traction.

III.2/ Fichier de données :

Les données nécessaires à l'analyse par éléments finis de notre structure sont mises en forme dans un fichier de données. Ce fichier de données contient d'abord le nom du fichier, la condition d'équilibre les propriétés physique du matériau et les conditions aux limites en efforts et en déplacement (Annexe A).

III.3/ Maillage :

On a utilisé le code GMSH V.50.1 comme un générateur de maillage qui nécessite deux fichiers : le premier est cité précédemment et le deuxième contient les informations géométriques et topologiques nécessaire à GMSH pour créer le maillage de la structure choisie. Pour définir le maillage, il faut d'abord introduire la géométrie de la surface, les paramètres de finesse du maillage, les points nécessaires pour définir les lignes, les cercles, les surfaces et les entités physiques et on a utilisé la procédure d'un maillage avec nœuds doubles (Annexe B).

Après la détermination des deux fichiers, on demande à GMSH de générer le maillage et sa sortie consiste à un autre fichier qui contient deux sections : la première contient les numéros des nœuds et ses trois coordonnées, et la deuxième contient les numéros des éléments et les numéros globaux des nœuds de l'élément (la connectivité).

On obtient en générale des résultats plus précis si le maillage est structuré autour des pointes de la fissure, pour cette raison on a entouré les pointes de la fissure par un cercle d'éléments identiques qui se raccordent avec le maillage externe, cette technique s'appelle technique de la rosette (figure III.2). Cette technique permet d'appliquer avec succès la méthode d'extrapolation des facteurs d'intensité des contraintes.

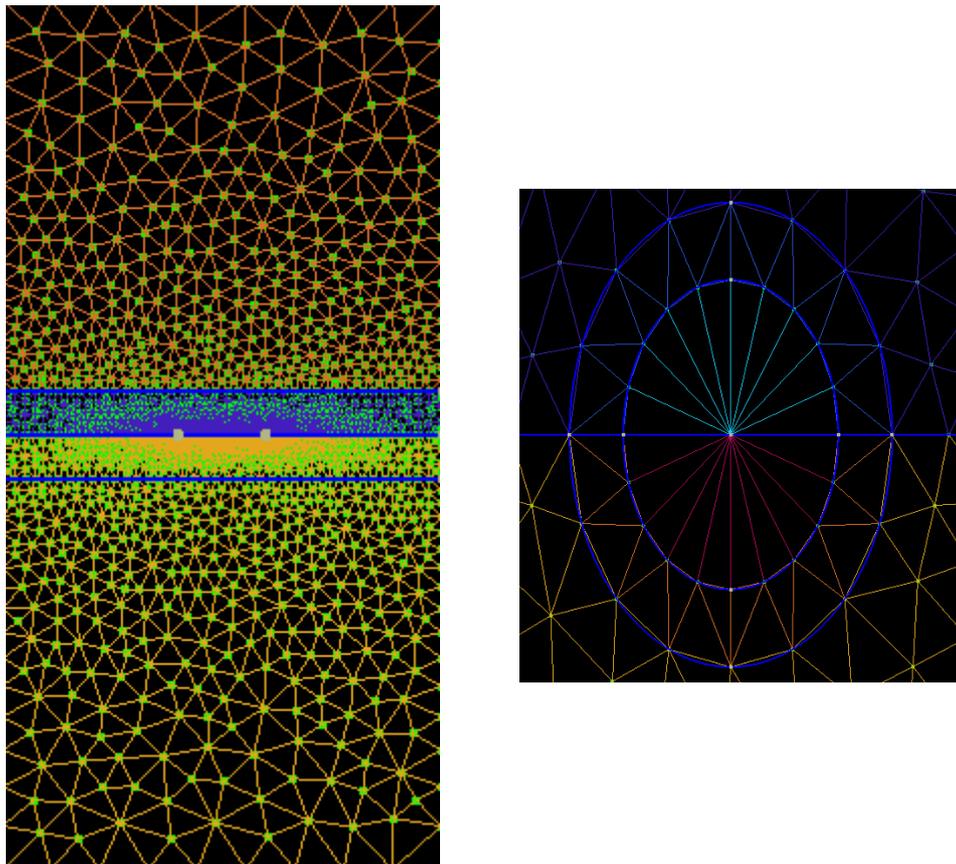


Figure III .2 : Technique de la rosette.

III.4/ Simulation, résultats et discussions :

D'abord les données écrites dans les fichiers présentés doivent être lues par MATLAB est transformées en données informatiques à l'aide des commandes de MATLAB, ensuite on calcule les matrices de rigidités et de forces élémentaires, puis l'assemblage de ces derniers pour tous les éléments de la plaque enfin, on résout le système d'équation pour déterminer le vecteur de déplacements nodaux.

A travers ce vecteur de déplacement, on détermine les contraintes pour chaque élément et le facteur d'intensité des contraintes par extrapolation des déplacements nodaux au voisinage de la pointe de la fissure.

Les étapes de réalisation de notre code de calcul sont représentées par l'organigramme suivant :

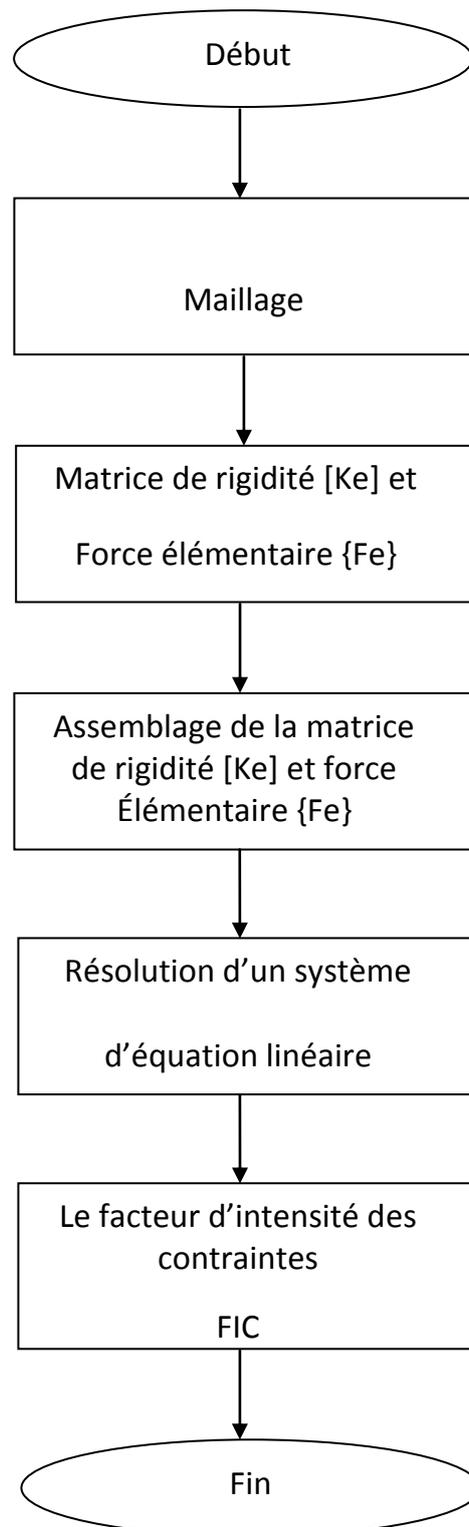


Figure III.3 : Organigramme de calcul.

La valeur exacte de FIC est connue pour une plaque de largeur finies $2H$ et de hauteur

$$v \rightarrow \infty : \quad k_I^H = \sigma \sqrt{\pi a} \left(\sec \frac{\pi a}{2H} \right)^{1/2} \quad (\text{III. 1})$$

Pour valider nos résultats numériques, on a examiné la convergence de FIC pour trois plaques de hauteur croissantes $V_1 = 10$, $V_2 = 15$ et $V_3 = 20$, $H = 5$ et $a = 1$, les dimensions de la plaque en (cm) (Figure III.4).

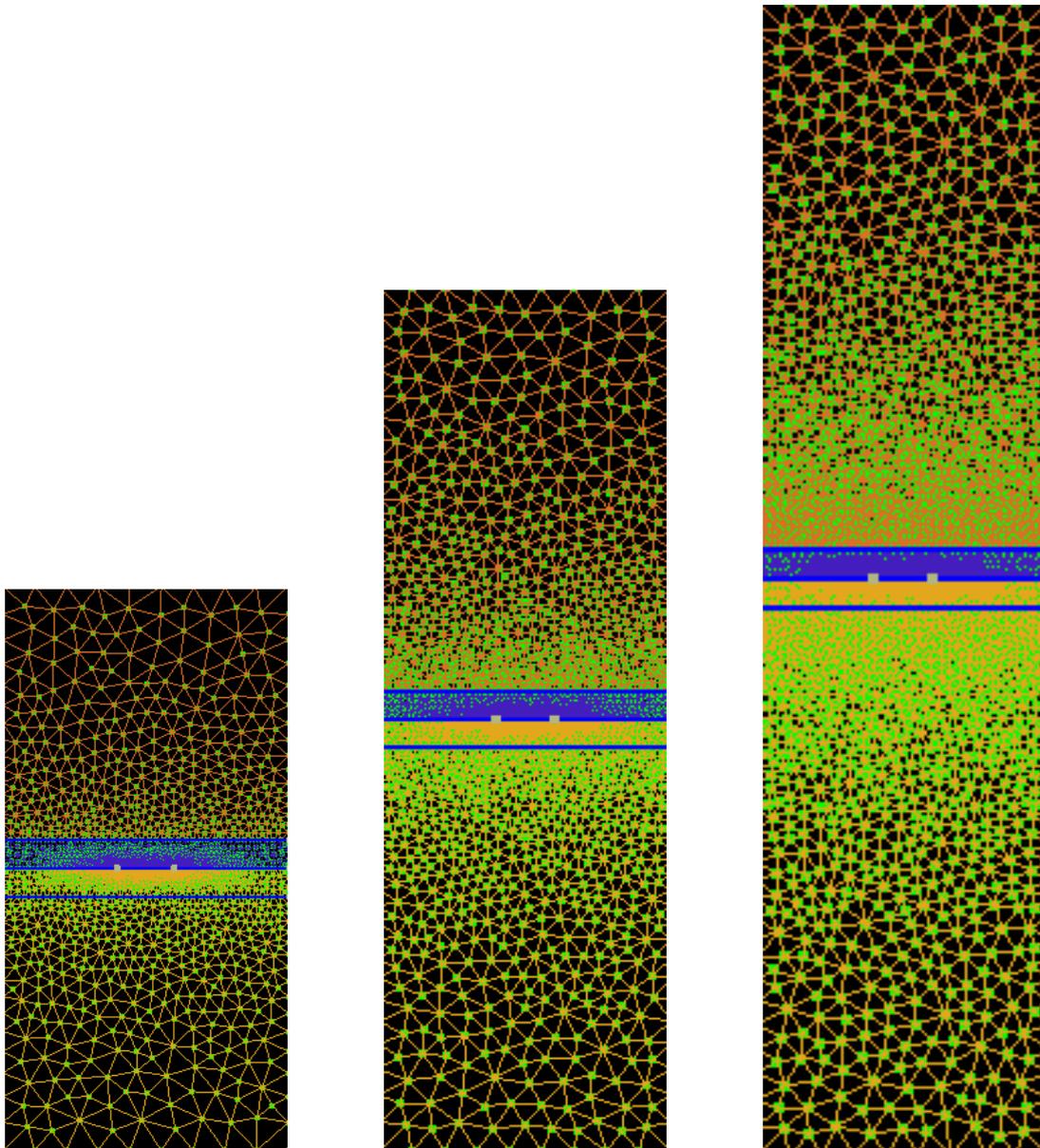


Figure III.4 : Plaque de hauteur croissante.

Les conditions au limite :

Pour les déplacements :

U=0 (direction 1 et 2)

Pour les efforts :

ELSET=1, DIR=2, VAL= -1.

ELSET=2, DIR=2, VAL= 1.

Les résultats sont donnés par le tableau suivant en utilisant 8508 éléments et 4519 nœuds :

$K_I \quad (Mp^2\sqrt{m})$	K_I^H	$K_I^{V_1}$	$K_I^{V_2}$	$K_I^{V_3}$
Valeurs	1.8175	1.6886	1.6450	1.6452

Tableau III .1 : comparaison entre valeur exacte et numérique.

On remarque que la comparaison est satisfaisante mais pas comme attendu. Par contre on peut conclure que puisque la différence entre le FIC pour la deuxième et la troisième plaque est très limitée, la troisième plaque représente d'une manière assez précise la plaque de largeur infinie objet des résultats analytiques.

Pour avoir plus de précision il faut utiliser les éléments finis spéciaux comme l'élément finis à six nœuds.

Conclusion :

L'objet de ce travail est de simuler la fissure d'une plaque sous sollicitation uniaxiale afin de prévoir le FIC par la résolution du problème approché d'équilibre en élasticité au moyen de la méthode des éléments finis qui a de nos jours avec le développement de l'informatique devenue un outil très puissant.

Cette méthode a prouvé une très grande consistance et qui a offert une très intéressante approche pour résoudre les problèmes de la mécanique linéaire de la rupture comparant avec les résultats analytiques, et pour avoir plus de précision il faut utiliser les éléments finis à six nœuds qui sont capables de représenter correctement le champ de déplacement près de la pointe avec l'utilisation de l'intégration numérique par points de Gauss pour les matrices rigidité et force élémentaires.

Ce travail aura plusieurs perspectives de recherche. Il serait intéressant d'étudier le FIC avec les éléments finis spéciaux sous chargement cyclique et de déterminer la vitesse de propagation de la fissure pour prédire la rupture.

Enfin, Ce travail mérite d'être accompli par une partie expérimentale de contrôle non destructif, pour qu'on puisse comparer l'approche numérique et expérimentale.

BIBLIOGRAPHIE :

- [1]. [Pineau 1998] A. Pineau – Mécanique élastoplastique de la rupture. Cours de DEA Mécanique et Matériaux. Evry, 1998.
- [2]. Anderson, T. L., Fracture mechanics : Fundamentals and Applications, CRC Press, Florida, 1995.
- [3]. Anderson, T. L., Fracture mechanics : Fundamentals and Applications, CRC Press, Florida, 1995.
- [4]. E. Erdogan (2000) Fracture Mechanics, International Journal of Solids and Structures, 27, pp. 171–183.
- [5]. Thèse, Etude de la propagation d'une fissure sous chargement thermique cyclique induisant un gradient de température dans l'épaisseur, année 2009.
- [6]. [Erdogan 1983] F. Erdogan – Stress intensity factors. J. of Appl. Mech., Vol. 50, pp. 992-1002, 1983.
- [7]. E. Erdogan (2000) Fracture Mechanics, International Journal of Solids and Structures, 27, pp. 171–183.
- [8]. [Zhang 1992] X.B. Zhang – Etude numérique de la propagation de fissures par la mécanique de la rupture, Thèse de Doctorat de l'Université de Clermont-Ferrand II, Juin 1992.
- [9]. [Hancock et al. 1993] J.W. Hancock, W.G. Reuter, D.M. Parks – Constraint and toughness parameterized by T. Constraint Effects in Fracture, ASTM STP 1171, Ed. E.M. Hacket, K.H. Schwalbe, R.H. Dodds, pp. 21-40, 1993.
- [10]. [Murakami et al. 1987] Y. Murakami et al. – Stress intensity factors handbook. Pergamon Press, 1987.
- [11]. Notions pratiques de mécanique de la rupture, (éditions eyrolles) paris 1980, p 13.
- [12]. [Henshell et al. 1975] R.D. Henshell, K.G. Shaw – Crack tip finite elements are unnecessary, Int. J. for Num. Meth. in Engng, Vol. 9, pp. 495-507, 1975.

- [13]. [Barsoum 1976] R.S. Barsoum – On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, Int. J. for Num. Meth. In Engng., Vol. 10, pp. 25-37, 1976.
- [14]. [Pommier, 1992] Rémillieux, S., (1992), Tenue à la fatigue du N18 à température ambiante, DEA de Génie des Matériaux, Juin 1992, IRC Birmingham.
- [15]. [Le Biavant, 2000] K. Le Biavant, (2000), Etude de l'amorçage de fissure de fatigue dans l'alliage de titane Ti- 6Al-4V, Thèse ECP, 11/12/2000.
- [16]. [Irwin, 1957] Irwin, G.R. (1957), Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, Journal of Applied Mechanics, 24, 361-4.
- [17]. [Paris, 1961] Paris, P.C., Gomez, M.P., Anderson W.P. (1961). A rational analytic theory of fatigue. The trend in engineering 13, pp. 528-34.
- [18]. [Nedbal, 1989] Nedbal, I., Siegl, J., Kunz, J. (1989), Advances in Fracture Research, ICF5, Pergamon Press 3483-3491.
- [19]. I.M. Smith and D.V.Griffiths ,“Programming the finite element method”,2nd edition,1988 ,ISBN 04711915521.
- [20] .David.V.Hutton, ”Fundamental of finite element analysis”,2004,ISBN 0-07-239536-2.
- [21]. Etude mathématique et numérique de méthodes d'éléments finis étendues pour le calcul en domaines fissurés, sans année.
- [22] .Initiation, propagation, arrêt et redémarrage de fissures sous impact, 2009.
- [23]. Endommagement de stratifiés aéronautiques à fibres de carbone et matrice polymère soumis à des chargements monotones ou cycliques à plusieurs températures. Essais et modélisation, 2006.
- [24]. Etude de la propagation d'une fissure sous chargement thermique cyclique induisant un gradient de température dans l'épaisseur, 2009.
- [25]. Etude mathématique et numérique de méthodes d'éléments finis étendues pour le calcul en domaines fissurés, 2008.
- [26]. Stratégies de calcul pour la fissuration en fatigue de structures aéronautiques, 2005.

[27]. Barrières thermiques fissurées verticalement par projection plasma pour applications aéronautiques : compréhension des phénomènes, réalisation et caractérisation des dépôts , 2005.

[28]. Méthode des éléments fini, , DAVEAU CHRISTIAN 1 : Université de Cergy-Pontoise, Département de mathématique, 95302, Cergy-Pontoise, cedex France, sans année.

[29]. Les éléments fins de la théorie a la pratique -Andre Fortin,1997-2011.