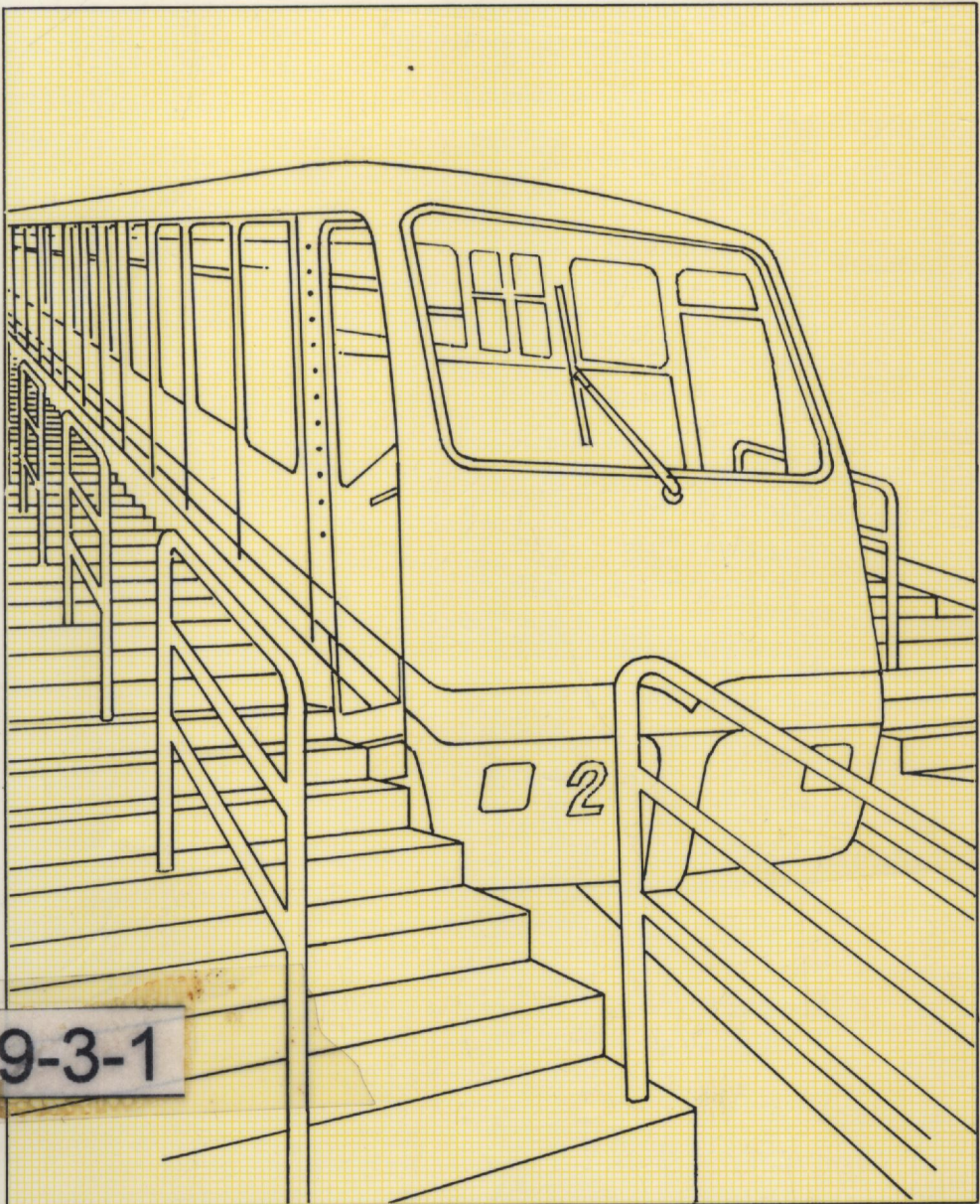


Processus stochastiques

ALAN RUEGG



519-3-1

TABLE DES MATIÈRES

	AVANT-PROPOS	v
CHAPITRE 1	INTRODUCTION	1
	1.1 Rappels de quelques résultats de calcul de probabilité	1
	1.1.1 Généralités	1
	1.1.2 Théorème des probabilités totales	1
	1.1.3 Espérances mathématiques conditionnelles	2
	1.1.4 Théorème de multiplication	3
	1.1.5 Quelques propriétés de la loi exponentielle	3
	1.1.6 Loi gamma	4
	1.2 Rappels d'analyse linéaire	4
	1.2.1 Valeurs propres et vecteurs propres	4
	1.2.2 Matrices stochastiques	5
	1.3 Rappels d'analyse mathématique	6
	1.3.1 Fonctions génératrices	6
	1.3.2 Transformées de Laplace	8
	1.3.3 Equations aux différences	8
	1.3.4 Equations aux dérivées partielles	9
	1.3.5 La fonction $o(h)$	10
	1.4 Généralités sur les processus stochastiques	11
	1.5 Problèmes	12
CHAPITRE 2	CHAÎNES DE MARKOV	15
	2.1 Introduction	15
	2.2 Définitions	16
	2.2.1 Chaînes de Markov à temps discret	16
	2.2.2 Matrice de transition et graphe des transitions ..	17
	2.2.3 Exemples	18
	2.3 Propriétés fondamentales	19
	2.3.1 Probabilités de transition à n étapes	19
	2.3.2 Loi de probabilité de X_n	20
	2.3.3 Exemples	21

2.3.4	Chaînes de Markov à deux états.....	22
2.4	Comportement asymptotique.....	23
2.4.1	Régime transitoire et régime permanent.....	23
2.4.2	Existence d'une distribution limite.....	24
2.4.3	Exemples.....	24
2.5	Distributions stationnaires.....	25
2.5.1	Définitions et méthodes de calcul.....	25
2.5.2	Exemples.....	26
2.5.3	Existence et unicité des distributions stationnaires.....	27
2.5.4	Distributions stationnaires et distributions limites.....	29
2.6	Chaînes de Markov absorbantes.....	30
2.6.1	Définition.....	30
2.6.2	Délais d'absorption et probabilités d'absorption.....	30
2.6.3	Deux théorèmes.....	32
2.6.4	Exemples.....	33
2.6.5	Délais d'atteinte et probabilités d'atteinte.....	34
2.7	Chemins aléatoires.....	35
2.7.1	Généralités.....	35
2.7.2	Chemins aléatoires à deux états absorbants.....	36
2.7.3	Temps moyen d'absorption.....	38
2.7.4	Chemins aléatoires à un état absorbant.....	39
2.8	Phénomènes d'attente à temps discret.....	40
2.9	Problèmes.....	42
CHAPITRE 3	PROCESSUS DE POISSON.....	47
3.1	Introduction.....	47
3.1.1	Processus aléatoires à temps continu.....	47
3.1.2	Processus de comptage.....	48
3.1.3	Une relation fondamentale.....	48
3.2	Définition et propriété principale.....	49
3.2.1	Définition.....	49
3.2.2	Propriété principale.....	50
3.2.3	Démonstration.....	50
3.2.4	Graphe des transitions.....	52
3.3	Processus de Poisson et loi exponentielle.....	52
3.3.1	Intervalle entre deux événements.....	52
3.3.2	Généralisations.....	53
3.3.3	Nouvelle caractérisation du processus de Poisson.....	53
3.3.4	Exemple.....	54
3.4	Propriétés supplémentaires.....	55

88	3.4.1	Superposition	55
88	3.4.2	Décomposition	56
90	3.4.3	Processus de Poisson et loi uniforme	57
90	3.4.4	Nombre d'événements pendant un intervalle aléatoire	58
90	3.4.5	Processus de Bernoulli	59
90	3.5	Processus de Poisson composé	60
92	3.5.1	Définition	60
92	3.5.2	Caractéristiques du processus de Poisson composé	60
94	3.5.3	Généralisation	62
94	3.6	Problèmes	63
97	CHAPITRE 4	PHÉNOMÈNES D'ATTENTE, PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT	65
97	4.1	Phénomènes d'attente	65
100	4.1.1	Introduction	65
101	4.1.2	Classification des systèmes d'attente	65
101	4.1.3	Analyse mathématique	67
101	4.2	Le système d'attente M/M/1	67
104	4.2.1	Régime transitoire	67
102	4.2.2	Régime stationnaire	60
107	4.2.3	Remarques et exemples	70
107	4.3	Caractéristiques d'un système d'attente	71
108	4.3.1	Définitions, formules de Little	71
109	4.3.2	Caractéristiques du système M/M/1	72
111	4.3.3	Distribution du temps de séjour T	73
112	4.4	Processus de naissance et de mort	74
112	4.4.1	Introduction	74
112	4.4.2	Définition	75
112	4.4.3	Régime transitoire et régime stationnaire	75
112	4.4.4	Graphes des transitions	76
112	4.4.5	Exemples	77
112	4.5	Systèmes d'attente autres que M/M/1	79
121	4.5.1	Généralités	79
121	4.5.2	Système à plusieurs stations M/M/s	79
121	4.5.3	Distribution du temps de séjour	82
121	4.5.4	Le système M/M/ ∞	82
121	4.5.5	Système à pertes M/M/s/s	83
124	4.5.6	Remarques	84
124	4.6	Croissance de populations	85
124	4.6.1	Introduction	85
124	4.6.2	Croissance pure	86

4.6.3	Décroissance pure	88
4.6.4	Croissance et décroissance	88
4.7	Problèmes d'absorption	90
4.7.1	Généralités	90
4.7.2	Probabilités d'absorption et probabilités d'atteinte	90
4.7.3	Temps jusqu'à l'absorption	92
4.7.4	Temps moyen jusqu'à l'absorption	92
4.7.5	Période d'activité d'un système d'attente	93
4.8	Problèmes	94
CHAPITRE 5 GÉNÉRALISATION DES PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT		
5.1	Chaînes de Markov à paramètre continu	97
5.1.1	Introduction	97
5.1.2	Exemple	98
5.1.3	Définitions et propriétés principales	100
5.1.4	Taux de transition	101
5.1.5	Equations de Kolmogorov et régime transitoire ..	102
5.1.6	Exemple	103
5.1.7	Equations de balance et régime transitoire	104
5.1.8	Evolution temporelle des chaînes de Markov	105
5.2	Le système d'attente M/G/1	107
5.2.1	Introduction	107
5.2.2	Chaîne de Markov induite	108
5.2.3	Distribution stationnaire	109
5.2.4	Nombre moyen de clients dans le système	111
5.2.5	Temps de séjour moyen	112
5.2.6	Période d'activité	113
5.2.7	Exemples	113
5.3	Le système d'attente M/G/ ∞	116
5.4	Problèmes	117
CHAPITRE 6 APPLICATION A DES PROBLÈMES DE FIABILITÉ		
6.1	Introduction	121
6.1.1	Généralités	121
6.1.2	Définitions	121
6.1.3	Distribution exponentielle	123
6.1.4	Autres distributions de fiabilité	124
6.2	Systèmes non réparables	125
6.2.1	Généralités	125
6.2.2	Systèmes sans redondance	126

6.2.3	Systèmes en parallèle.....	126
6.2.4	Autres système à redondance active.....	127
6.2.5	Systèmes à redondance passive.....	129
6.2.6	Composants à fiabilité exponentielle.....	129
6.2.7	Exemples.....	130
6.3	Systèmes réparables.....	131
6.3.1	Introduction.....	131
6.3.2	Méthode des processus stochastiques.....	132
6.3.3	Fiabilité et disponibilité.....	133
6.3.4	Modélisation par les processus de naissance et de mort.....	134
6.3.5	Modélisation par les chaînes de Markov à temps continu.....	136
6.3.6	Systèmes non markoviens.....	137
6.3.7	Cycles de service.....	139
6.4	Problèmes.....	140
SOLUTIONS DES PROBLÈMES.....		143
BIBLIOGRAPHIE.....		147
INDEX ALPHABÉTIQUE.....		149

1.1. Théorème des probabilités totales

Si les probabilités conditionnelles sont considérées comme un outil principal de calcul des probabilités, elles doivent cette réputation avant tout au résultat souvent connu sous le nom de *théorème des probabilités totales*. Avant de l'énoncer, rappelons qu'en calcul des probabilités, on fait correspondre à une expérience stochastique l'ensemble fondamental Ω formé de toutes les issues possibles de cette expérience. On appelle alors *partition* de Ω toute famille d'événements (B_1, B_2, \dots) s'excluant mutuellement et dont la réunion est Ω .

PROPOSITION 1.1. Soit (B_1, B_2, \dots) une partition de l'ensemble fondamental Ω . Alors

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

quel que soit l'événement A .

Processus stochastiques

ALAN RUEGG

Les applications des processus stochastiques existent dans de nombreux domaines de l'ingénieur (transmission de signaux, télétrafic, transport ou fiabilité), mais ce sont également des informaticiens, physiciens, biologistes, sociologues, ainsi que des spécialistes d'autres disciplines qui font appel, de plus en plus, à la modélisation par les processus stochastiques, notamment ceux du type markovien. La lecture du livre ne nécessite que des connaissances élémentaires en calcul des probabilités, ainsi qu'en calcul différentiel et intégral.

Cet ouvrage se veut une introduction aux processus stochastiques à valeurs discrètes. Il est destiné en premier lieu à des étudiants ingénieurs du premier et du deuxième cycle universitaire; il permet également à l'ingénieur praticien de s'initier à ce domaine important des mathématiques appliquées.

L'auteur est né à Bâle en 1932. Il est mathématicien, diplômé (1956) de l'École polytechnique fédérale de Zurich et Docteur ès sciences de cette même institution (1962). Il a été professeur assistant (1967-70) à l'Université du Connecticut (USA). Depuis 1970, il est professeur de mathématiques à l'École polytechnique fédérale de Lausanne où il s'est spécialisé dans l'enseignement de cours destiné à des ingénieurs et à des architectes.

