

République Algérienne Démocratique et Populaire.

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique.

Université Saad Dahlab Blida.

Faculté de technologie.

Département de génie mécanique.



Exemple de calcul d'une poutre piézoélectrique avec la méthode des éléments finis.

Par

Bouhedma Sofiane

Pour l'obtention du diplôme de Master

Promoteur : **Ouali Mohammed**, Professeur, USD-Blida.

Co- promoteur : **Ali Mahieddine**, M.C.B, université de Khemis Miliana.

Année universitaire: 2012/2013

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au bon dieu et au concours de plusieurs personnes, à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je tiens tout d'abord à remercier les honorables membres de jurys de m'avoir accordé cette chance d'exposer mon travail.

Je voudrais aussi adresser toute ma gratitude au Professeur M.Ouali pour son aide, sa patience et ses précieux conseils, qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Je tiens aussi à remercier le Dr. A.Mahieddine, qui n'a jamais réfuté mes sollicitations et m'a toujours répondu présents.

Je désire aussi remercier tous les enseignants du département de génie mécanique et particulièrement de la conception mécanique.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers ma famille, qui m'a apporté son support moral et intellectuel tout au long de mes études, sans oublier mes amis et mes collègues de classe.

Dédicace

A mes parents B.MOHAMED et B.HANIFA

A mes frères et sœurs AMINA, MOHAMED, MAAMAR (ALI), ZOUHOUR ET ZAKARIA.

Vous vous êtes dépensés pour moi sans compter. En reconnaissance de tous les sacrifices consentis par tous et chacun et en particulier ma grande sœur AMINA qui a sacrifié toute sa vie pour moi, qui m'encourage et me soutient toujours à faire un pas de plus dans la vie.

Avec toute ma gratitude et mon amour.

A mes nièces RITAJ et Jana et à mon cousin FAIZ.

A mes amis HAMZA, MEROUANE, ISHAK, MOHAMED, KARIM et à tous mes camarades de classe.

Et à tous ceux qui me sont chers.

Je dédie ce travail

Abstract

Piezoelectric materials are subject to a great deal of research in recent years, whether for mechanical purposes for their potential applications in the fields of mechanical engineering, as a tool of control and regulation, the case of the active control and vibration analysis, or for technological purposes in electronics such as crystal oscillators areas. They can also be used as actuators as well as vibration sensors.

The application of the piezoelectric effect in the vibration control of beams taking into account the influence of different parameters is the subject of this work. We propose to solve the equation of motion using the NEWMARK approach or other numerical methods based on a finite element discretization. A MATLAB code is proposed to simulate and compare the results of a system formed by a beam of piezoelectric material.

The contents of the present work revolve around:

- The piezoelectricity.
- The active control.
- Characterization of piezoelectric materials.
- Mechanical and electrical boundary conditions.
- Modeling of simple piezoelectric beams.
- Numerical methods for piezoelectric materials.
- Application.

Résumé

Les matériaux piézoélectriques font l'objet d'un grand nombre de recherches ces dernières années, que ce soit à des fins mécaniques, pour leurs éventuelles applications dans les domaines de mécanique, comme un outil de commande et de régulation, le cas du contrôle actif et d'analyse vibratoire, ou à des fins technologiques dans les domaines d'électronique comme par exemple les oscillateurs à quartz. Ils peuvent être utilisés aussi bien comme actionneurs que comme capteurs de vibrations.

L'application de l'effet piézoélectrique dans le contrôle vibratoire des poutres en tenant compte de l'influence de différents paramètres fait l'objet de notre sujet. On se propose de résoudre l'équation du mouvement en appliquant la méthode de NEWMARK ou d'autres méthodes numériques en se basant sur une discrétisation par éléments finis. Un modèle numérique sera proposé afin de simuler et comparer les résultats d'un système formé par une poutre en matériau piézoélectrique.

Le contenu du mémoire gravitera autour de :

- La piézoélectricité.
- Le contrôle actif.
- Caractérisation des matériaux piézoélectriques.
- Conditions aux limites mécaniques et électriques.
- Modélisation des poutres piézoélectriques simples.
- Méthodes numériques pour les matériaux piézoélectriques.
- Application.

Sommaire :

I.	Introduction et état de l'art	(1)
II.	Généralités	(7)
II.1	Contrôle actif.....	(7)
II.1.1.	Généralités.....	(7)
II.1.2.	Techniques de contrôle actif des structures.....	(8)
II.1.3.	Méthodes de contrôle actif.....	(8)
II.1.4.	Application industrielle du contrôle actif.....	(9)
II.2	Elasticité linéaire.....	(10)
II.2.1.	Equations de champs.....	(11)
II.2.2.	Loi de comportement.....	(12)
II.2.3.	Relation déformations-déplacements.....	(12)
II.2.4.	Résolution du problème élastique.....	(13)
II.2.4.1.	Méthode des déplacements.....	(13)
II.2.4.2.	Méthode des contraintes.....	(14)
II.2.5.	Energie de déformation.....	(14)
II.3.	Théorie des poutres.....	(15)
II.3.1.	Définition.....	(15)
II.3.2.	Typologie des poutres.....	(15)
II.3.3.	Hypothèses sur les dimensions de la section droite.....	(16)
II.3.4.	Exemples de sections droites de poutres.....	(16)
II.4.	Hypothèse de Bernoulli.....	(17)
II.5.	Hypothèse de Timoshenko.....	(19)
III.	La Piézoélectricité	(22)
III.1.	L'effet piézoélectricité.....	(22)
III.2.	Principaux matériaux piézoélectriques.....	(24)
III.3.	Quelques applications de l'effet piézoélectrique.....	(25)
III.4.	Equations constitutives de la piézoélectricité.....	(26)
III.5.	Poutres piézoélectriques.....	(28)
III.5.1.	Champs de déplacement.....	(29)
III.5.2.	Champs de déformation.....	(29)

III.5.3. Hypothèses simplificatrices des équations constitutives de la piézoélectricité.....	(30)
III.6. Formulation variationnelle.....	(32)
III.6.1. Aperçu sur le principe variationnel d'Hamilton.....	(32)
III.6.2. Formulation variationnelle (cas élastique).....	(34)
III.6.3. Formulation variationnelle dans le cas piézoélectrique.....	(35)
III.7. Discrétisation par éléments finis.....	(36)
III.7.1. Introduction.....	(36)
III.7.2. Déroulement de l'étude.....	(38)
III.7.3. Cas de poutre.....	(39)
III.7.4. Calcul des matrices élémentaires.....	(41)
III.7.4.1. Cas élastique.....	(41)
III.7.4.2. Cas piézoélectrique.....	(43)
III.8. Intervention de l'amortissement structural.....	(45)
III.8.1. Les types d'amortissement.....	(46)
III.8.2. L'énergie de dissipation.....	(47)
III.8.3. Equivalence entre amortissement structural et amortissement visqueux.....	(48)
III.8.4. Détermination du coefficient d'amortissement.....	(49)
III.8.5. Raisons de notre choix d'un amortissement de Rayleigh....	(51)
III.9. Résolution du problème dynamique par la méthode de Newmak....	(52)
IV. Interprétation des résultats	(57)
IV.1. Résultats du cas élastique.....	(57)
IV.2. Résultats du cas piézoélectrique.....	(62)
IV.3. Influence du choix de matériaux.....	(67)
IV.4. Influence des dimensions.....	(69)

Liste des tableaux:

Tableau 3-1 : Différentes équations de la piézoélectricité.

Tableau 3-2 : Les fonctions d'interpolation dans le cas des poutres.

Tableau 4-1 : Résultats de l'étude statique de la poutre élastique.

Tableau 4-2 : Comparaison entre la flèche analytique et celle du modèle éléments finis.

Tableau 4-3 : Comparaison entre les valeurs propres analytiques et numériques (cas élastique).

Tableau 4-4 : Résultats de l'étude statique de la poutre piézoélectrique.

Tableau 4-5 : Comparaison entre les valeurs propres analytiques et numériques (cas piézoélectrique).

Tableau 4-6 : Caractéristiques matérielles des matériaux piézoélectriques utilisés.

Annexe :

Liste des symboles :

E : Module de Young. $[\text{N}/\text{m}^2]$

ν : Coefficient de Poisson.

G : Module d'élasticité en cisaillement. $[\text{N}/\text{m}^2]$

ρ : Masse volumique. $[\text{Kg}/\text{m}^3]$

σ : Contraintes. $[\text{N}/\text{m}^2]$

u : Déplacement selon la direction x .

v : Déplacement selon la direction y .

w : Déplacement selon la direction z .

θ : Rotation autour de y .

ε : Déformations.

\bar{C} : Matrice des constantes élastiques. $[\text{N}/\text{m}^2]$

\bar{S} : Matrice de la complaisance mécanique. $[\text{m}^2/\text{N}]$

D : Déplacement électrique (induction). $[\text{C}/\text{m}]$

\bar{e} : Matrice des constantes piézoélectriques qui traduisent la proportionnalité entre la charge et la contrainte à champs électrique nul ou constant. $[\text{C}/\text{m}^2]$

\bar{d} : Matrice des constantes piézoélectriques qui traduisent la proportionnalité entre la charge et la déformation à champs électrique nul ou constant. $[\text{C}/\text{N}]$

\bar{g} : Matrice des constantes piézoélectriques qui traduisent la proportionnalité entre la contrainte et le champ résultant à induction nulle ou constante. $[\text{m}^2/\text{C}]$

\bar{h} : Matrice des constantes piézoélectriques qui traduisent la proportionnalité entre la déformation et le champ résultant à induction nulle ou constante. $[\text{N}/\text{C}]$

$\bar{\varepsilon}$: Matrice des constantes diélectriques (Permittivité électrique). $[\text{F}/\text{m}]$

$\bar{\beta}$: Constante d'imperméabilité diélectrique. $[\text{m}/\text{F}]$

\mathbf{E} : champ électrique. $[\text{V}/\text{m}]$

E_c : Energie cinétique. $[\text{J}]$

E_p : Energie potentielle. $[\text{J}]$

W_{ext} : Travail des forces extérieures. $[\text{J}]$

$[\mathbf{M}]_e$: Matrice de masse élémentaire.

$[\mathbf{K}]_e$: Matrice de rigidité élémentaire.

$[\mathbf{C}]_e$: Matrice d'amortissement élémentaire.

$\{f\}_e$: Vecteur de forces extérieures élémentaire.

q_e : Déplacements nodaux élémentaires.

\dot{q}_e : vitesses nodales élémentaires.

\ddot{q}_e : Accélérations nodales élémentaires.

Φ_e : Degrés de liberté élémentaires.

[M] : Matrice de masse.

[K] : Matrice de rigidité.

[C] : Matrice d'amortissement.

$\{ \}^t$: La transposée.

$()_{,i}$: La dérivée par rapport à la variable i .

Liste des figures :

- Fig-2-1:** Principe du contrôle actif des vibrations.
- Fig 2-2:** Principe d'un dispositif de contrôle actif par anticipation.
- Fig 2-3:** Principe d'un dispositif de contrôle actif par rétroaction.
- Fig 2-4 :** Atténuation du bruit dans un avion à moteur à réaction (doc. Lord).
- Fig 2-5 :** Atténuation du bruit dans un avion à hélice turbopropulsé (doc. Lord).
- Fig 2-6 :** Distribution des contraintes.
- Fig 2-7 :** Caractéristiques géométriques d'une poutre.
- Fig 2-8 :** Différentes géométries de poutres à plan moyen de symétrie.
- Fig 2-9 :** La déformation d'une poutre de type Bernoulli.
- Fig 2-10:** Illustration du modèle de Bernoulli des poutres.
- Fig 2-11 :** Déplacements d'une poutre plane.
- Fig 3-1 :** Effet piézoélectrique direct et inverse.
- Fig 3-2 :** Classement des matériaux cristallins.
- Fig 3-3 :** Piézoélectricité naturelle.
- Fig 3-4 :** Courbe liant la déformation au champ électrique d'un matériau piézoélectrique.
- Fig 3-5 :** La poutre considérée.
- Fig 3-6 :** Déformation de la poutre.
- Fig 3-7 :** Procédure de la méthode des éléments finis.
- Fig 3-8** Elément de la poutre.
- Fig 3-9:** Courbe d'hystérésis.
- Fig 3-10:** Structure soumise à une excitation.
- Fig 3-11:** Courbe de la force en fonction du déplacement.
- Fig 3-12:** Schéma de Newmark.
- Fig 4-1 :** Poutre élastique.
- Fig 4-2 :** La flèche de la poutre élastique.
- Fig 4-3 :** Rotation de la poutre élastique.
- Fig 4-4 :** Le déplacement axial u d'une poutre élastique.
- Fig 4-5 :** Superposition des modes 8 propres de vibration d'une poutre console élastique.
- Fig 4-6 :** Les vibrations verticales de la poutre élastique.
- Fig 4-7 :** Les vibrations axiales de la poutre élastique.
- Fig 4-8 :** Poutre piézoélectrique.
- Fig 4-9 :** La flèche w d'une poutre console en mode actionneur.

Fig 4-10 : La rotation θ d'une poutre console en mode actionneur.

Fig 4-11 : Le déplacement axial u d'une poutre console en mode actionneur.

Fig 4-12 : Superposition des modes 8 propres de vibration d'une poutre console élastique.

Fig 4-13 : Les vibrations verticales de la poutre piézoélectrique.

Fig 4-14 : Les vibrations longitudinales de la poutre piézoélectrique.

Fig 4-15 : Comparaison des flèches de la poutre console en mode actionneur pour différents matériaux.

Fig 4-16 : Comparaison des déplacements axiaux de la poutre console en mode actionneur pour différents matériaux.

Fig 4-17: Influence de la longueur sur la flèche de la poutre piézoélectrique.

Fig 4-18 : Influence de l'épaisseur sur la flèche de la poutre piézoélectrique.

Fig 4-19 : Influence de l'épaisseur sur les vibrations verticales de la poutre.

I) Introduction et état de l'art:

La piézoélectricité représente la propriété d'une certaine classe de matériaux à transformer l'énergie mécanique en énergie électrique et vice versa. Malgré que le phénomène de la piézoélectricité montre tous les ingrédients pour fasciner les physiciens et aussi bien les ingénieurs, il ne joue qu'un rôle secondaire ou subordonné dans l'enseignement des sciences. La raison est que la piézoélectricité semble être un effet physique mineur, mais l'énorme développement technologique au cours des dernières décennies a à peine atteint la sensibilisation du public et des chercheurs qui semblent être de plus en plus intéressés et impressionnés par l'application de ce phénomène dans les différents secteurs de l'industrie. En terme de chiffre et d'après des études qui ont été faites dans ce domaine, le coût annuel des dispositifs piézoélectriques est de plusieurs dizaines de milliards de dollars. À peine remarquée par le grand public, la piézoélectricité est devenue une innovation motrice. Le monde entier s'est lancé et a créé de nouveaux marchés avec des chiffres d'affaires importants. Ces marchés couvrent un très grand spectre de domaines et d'applications technologiques, surtout les domaines de l'information et de la communication, l'automatisation industrielle, les diagnostics médicaux, le contrôle et l'industrie militaire. Toutes ces innovations sont en réalité en matière de matériaux. Les nouvelles classes de matériaux piézoélectriques récemment inventées offrent de nombreuses possibilités et ouvrent de nouveaux horizons. Le développement des matériaux piézo-électriques offre un très large spectre d'application.

C'est pour cette raison que des efforts considérables ont été réalisés ces dernières années pour le développement des matériaux et structures dites "intelligentes". En effet, l'importance des enjeux technologiques fait que l'intérêt pour ces matériaux est sans cesse croissant dans de nombreux domaines. Ils peuvent être utilisés aussi bien dans les applications quotidiennes comme les transports, les communications, les loisirs, que dans les secteurs de pointe comme l'aérospatial, l'aéronautique, la robotique, la détection de défauts structuraux, l'ingénierie médicale, l'isolation et le contrôle des vibrations.

L'intérêt de ces matériaux réside essentiellement dans leurs propriétés physiques, à savoir leur capacité à engendrer des déformations contrôlables par application d'un champ électrique et réciproquement à convertir un chargement mécanique (une déformation) en un signal électrique. Cette réciprocité du phénomène piézoélectrique est ce qui permet leur utilisation comme capteur ou actionneur [1].

Van Nostrand et Inman [2] ont développé une approche par éléments finis pour la construction des matrices masse et rigidité. Shen [3] a proposé un modèle basé sur la théorie des poutres de Timoshenko, en modélisant la poutre et l'élément piézoélectrique séparément et en utilisant des éléments poutres.

Kusculuoglu et Al [4] ont présenté un modèle éléments finis pour les poutres comportant des actionneurs piézoélectriques. Ce modèle est basé sur la théorie des poutres de Timoshenko et porte sur les comportements de l'actionneur piézoélectrique.

Osama J. Aldraihem et Ahmed A. Khdeir [5] ont présenté une solution analytique exacte pour les poutres contenant n actionneurs piézoélectriques. La solution obéit aux théories des poutres de 1^{er} ordre, ainsi qu'aux théories d'ordre supérieur. Cette solution peut être utilisée pour l'obtention des informations sur la déformation sous différentes conditions limites.

A. Mukherjee et A. Saha Chaudhuri [6] montrent l'effet des grandes déformations sur les matériaux et les structures piézoélectriques soumises à des chargements variables, les champs de déformations en éléments finis sont basés sur la théorie de cisaillement du premier ordre. Narayanan et Balamurugan [7] ont proposé une modélisation par éléments finis des poutres, plaques et coques.

Donthireddy et Chandrashekhara [8] élaborent un modèle éléments finis, pour l'analyse et le contrôle de forme des poutres piézoélectriques présentant des actionneurs intégrés ou collés à la surface.

Huang et Sun [9] ont réalisé une analyse dynamique des poutres composites avec des capteurs et actionneurs piézoélectriques intégrés. Cette analyse est basée sur la théorie de Reissner Mindlin des plaques pour développer le modèle de poutre proposé.

J. M. Simões Moita, C.M.M. Soares et C.A.M. Soares [10] ont traité les problèmes des vibrations forcées et de résonance dans le cas des poutres et des plaques composées de couches piézoélectriques fonctionnant autant qu'actionneurs et capteurs piézoélectriques. Ils ont proposé aussi des modèles éléments finis pour déterminer les déplacements.

Edery-Azulay et Abramovich [11] ont étudié les effets des matériaux piézo-céramiques dans l'atténuation des vibrations des poutres composites. Un modèle exact, basé sur la théorie des déformations du premier degré a été développé.

Detwiller et Al. [12] ont effectué une analyse par éléments finis des structures composites multicouches comportant des actionneurs et des capteurs piézoélectriques.

G.E. Stavroulakisa,b, G. Foutsizic et E. Hadjigeorgiouc [13] ont réalisé la conception d'un mécanisme de commande des vibrations pour une poutre avec des capteurs et actionneurs

piézoélectriques collés. L'application des structures intelligentes pour l'élimination des vibrations et une discrétisation par éléments finis sont utilisées pour modéliser la structure. Guanghui Qing, Jiajun Qiu et Yanhong Liu [14] ont introduit un modèle mathématique pour l'analyse statique et dynamique d'une plaque comportant des patches piézoélectriques. Dans ce modèle, la plaque ainsi que les patches sont discrétisés en mêmes éléments linéaires quadrilatères en plus les équations algébriques de ces derniers sont établies séparément. Marcelo A. Trindade et Ayech Benjeddou [15] ont présenté un modèle éléments finis pour l'analyse des vibrations d'une poutre sandwich comportant un actionneur ou un capteur. Le modèle mécanique présenté est une amélioration de la théorie classique, dans laquelle l'âme est modélisée par la loi de cisaillement du 3^{ème} ordre. Le modèle éléments finis élaboré tient compte de la longueur de la poutre. Electriquement, la tension électrique est constante pour les couches piézoélectriques et le potentiel électrique est variable (quadratique du 3^{ème} degré) dans l'âme, tandis que mécaniquement, le déplacement axial est linéaire, la rotation de l'âme en flexion est quadratique et le déplacement transversal de la poutre sandwich est cubique. C. W. Lim, W. Q. Chen et Q. C. Zeng [16] présentent une solution exacte pour les poutres composites épaisses multicouches composées de plusieurs âmes de natures différentes, en utilisant la représentation d'état pour former une matrice de transfert permettant de lier le comportement de la couche supérieure à celui de la couche inférieure de la poutre. Bernadette MIARA [17] a étudié la contrôlabilité exacte d'un corps tridimensionnel, dont la loi de comportement fait intervenir un couplage élastique-électrique. Benjeddou et Trindale [18] développent une formulation pouvant simuler les poutres sollicitées en traction et en cisaillement sous l'effet d'un actionneur. Ils considèrent le modèle Euler-Bernoulli pour les actionneurs et le modèle Timoshenko pour les couches épaisses. S. Belouettar, L. Azrar, E.M. Daya, V. Laptev et M. Potier-Ferry [19] ont traité le problème des vibrations linéaires et non linéaires des poutres sandwich piézoélectriques/élastiques, ainsi que l'influence d'un contrôle actif (feedback) sur les réponses de la poutre. Pour résoudre le problème, ils se sont basés sur la méthode de la balance harmonique et celle de Galerkin. Huang et Sun [20] développent un modèle analytique pour des poutres multicouches composites avec des couches piézoélectriques. Le modèle est développé à partir des énergies du système en se basant sur la théorie des plaques de Mindlin et de la piézoélectricité linéaire. José R. Fernández, Rebeca Martínez, Georgios et E. Stavroulakis [21] ont présenté une approche numérique d'un problème quasi statique piézoélectrique avec endommagement par la méthode des éléments finis. L'endommagement est aussi inclus dans le modèle. Le problème variationnel est formulé comme deux équations variationnelles linéaires pour les

déplacements et le potentiel électrique et une équation variationnelle non-linéaire parabolique pour l'endommagement.

Tylikowski [22] a développé un modèle dynamique, pour prédire la réponse des poutres avec des actionneurs piézoélectriques collés aux surfaces supérieures et inférieures des poutres. Les résultats obtenus sont comparés avec des résultats antérieurs obtenus pour un couplage statique entre les poutres et les actionneurs.

H.Y. Shenga, H. Wang et J.Q. Ye [23] en se basant sur la théorie d'élasticité 3D et de la piézoélectricité, ils ont abouti à l'équation d'état d'une plaque piézoélectrique stratifiée, soumise à des conditions limites générales. La solution analytique satisfaisant les conditions aux limites mécaniques et électriques a été trouvée en utilisant la méthode de la matrice de transfert et en imposant des conditions de continuité dans les interfaces.

Badre-Ala et Al [24] ont étudié les contraintes entre les couches dans les traitements de l'amortissement sous contrôle actif. Ils ont analysé l'effet des actions de contrôle dans l'amplitude des contraintes.

Claire Ossadzow-David et Maurice Touratier [25] ont présenté une nouvelle méthode, pour l'étude des coques piézoélectriques (mono et multicouches) en 2D sous chargement électromécanique. Cette méthode permet de satisfaire les conditions de compatibilité pour les déplacements et le potentiel électrostatique au niveau des interfaces entre les couches, sans oublier les conditions aux limites. Cette méthode tient compte aussi du cisaillement et des termes de la membrane à travers des fonctions trigonométriques.

Sun et Huang [26] ont présenté un modèle analytique de poutres multicouches composites avec des capteurs et actionneurs piézoélectriques.

Yepeng Xu et Ding Zhou [27] ont développé une méthode destinée au contrôle des structures, qui peut être aussi appliquée dans des projets, nécessitant une grande précision sur l'analyse des contraintes et des déplacements, tel que la conception des appareils micromécaniques. Ils ont considéré une poutre piézoélectrique d'épaisseur variable, supportée par deux appuis. Pour résoudre complètement le problème aux contraintes planes et déterminer les déplacements, ils ont développé en séries de Fourier les équations différentielles obtenues en appliquant les conditions aux limites.

A. Ariaei, S.Ziaei-Rad et M.Ghayour [28] ont proposé une méthode analytique pour l'utilisation des patches piézoélectriques dans la réparation des poutres fissurées soumises à l'action d'une masse en mouvement. Les équations de mouvement ont été obtenues en utilisant le modèle de Timoshenko et en incluant l'effet dynamique d'une masse en mouvement se déplaçant le long d'une trajectoire vibrante. La poutre fissurée était modélisée

par un ensemble de segments liés entre eux par deux ressorts sans masse au niveau de la fissure (l'un représente l'extension longitudinale et l'autre pour la rotation).

A. Lazarus, O. Thomas et J.-F. Deü [29] ont élaboré un modèle éléments finis d'ordre réduit pour les vibrations non linéaires d'une poutre piézoélectrique multicouche. La non-linéarité géométrique est prise en compte (Von Karman).

B. Behjat et M.R. Khoshravan [30] ont utilisé la méthode des éléments finis, ainsi que le principe de Hamilton pour l'étude statique de la flexion non linéaire et les vibrations libres d'une plaque piézoélectrique à gradient évolué (fonctionnel). Cette étude est basée aussi sur la théorie de cisaillement du 1^{er} ordre sous chargement mécanique et électrique.

Claire Ossadzow-David et Maurice Touratier [31] présentent une méthode pour l'étude des coques piézoélectriques (mono et multicouches) en 2D sous chargement électromécanique. Cette méthode permet de satisfaire les conditions de compatibilité pour les déplacements et le potentiel électrostatique au niveau des interfaces entre les couches et elle tient compte aussi du cisaillement et des termes de la membrane à travers des fonctions trigonométriques.

M.H. Kahrobaiyan, M.Asghari et M.T.Ahmadian [32] ont développé un modèle éléments finis dépendant de la taille pour les poutres piézoélectriques de type Euler-Bernoulli basé sur les théories non-classiques de la continuité, pour rendre possible la modélisation avec précision des composants (poutres) à l'échelle micro / nano.

Tan et Tong [33]: ont élaboré un modèle analytique pour la détection du décollement dans les poutres composites. Une comparaison des trois premières fréquences entre les modèles -analytique et éléments finis- a été présentée.

Yiming Fu, Jianzhe Wang et Yiqi Mao [34] ont considéré une poutre piézoélectrique encastree-encastree, de type Euler-Bernoulli dans un environnement dans lequel la température est variable, pour étudier analytiquement le flambage thermo-piézoélectrique, ainsi que les vibrations non linéaires de la poutre et sa stabilité dynamique. Les charges critiques du flambage thermo-piézoélectrique sont obtenues par la méthode de Galerkin, ainsi que la solution analytique des vibrations est obtenue en introduisant la notion des fonctions elliptiques et la méthode de la balance harmonique, pour déterminer les frontières des régions instables.

Jin-Chein Lin et M.H. Nien [55] ont réalisé une étude sur le contrôle actif des vibrations des structures intelligentes (poutre stratifiée en matériau composite) en utilisant des actionneurs et des capteurs piézoélectriques, ainsi que l'influence de la direction des fibres de renforcement sur le positionnement des actionneurs et sur le contrôle actif. Les capteurs/actionneurs sont montés sur la poutre stratifiée en matériau composite.

Ali Mahieddine, Joël Pouget et Mohammed Ouali [36] ont présenté un modèle éléments finis pour des poutres piézoélectriques avec des couches partiellement décollées et qui permet d'analyser leur comportement vibratoire. L'avantage principal de cette formulation est qu'elle permet de modéliser le décollement à n'importe quel point de la structure. Les régions avec décollement sont modélisées en supposant que les contraintes sont nulles entre les couches supérieures et les couches inférieures. En plus, aux interfaces entre les couches décollées et non décollées, la continuité des déplacements est assurée.

M. Ishihara et N. Noda [37] ont étudié une fissure surfacique dans un corps piézo-thermo-élastique due à un chargement thermique. Le modèle utilisé dans cette étude est un corps semi infini piézo-thermo-élastique bidimensionnel comportant une fissure sur la surface soumise à un changement brusque de la température et à un déplacement électrique. Ils ont utilisé des exemples numériques pour le contrôle du facteur d'intensité de contrainte SIF "*Stress Intensity Factor*". Les exemples numériques montrent les effets du temps, de la largeur du changement de température appliquée et de l'importance du déplacement électrique appliqué sur le SIF.

Qibo Mao [38] résout le problème de la forme des capteurs piézoélectriques modaux pour les poutres non uniformes de type Euler-Bernoulli à sections droites rectangulaires. Une expression générale pour décrire la forme des capteurs piézoélectriques modaux est présentée et dans laquelle le signal de sortie du capteur conçu est proportionnel à la réponse du mode en question. Cette méthode peut être aussi appliquée, afin d'obtenir une approximation de la solution de la seconde dérivée spatiale des formes de mode pour n'importe quelle poutre non uniforme de type Euler-Bernoulli, ayant une section droite rectangulaire.

Chun-Fu Chenn et John-Han Chen [39] ont traité le problème non linéaire de la déflexion à grande échelle d'une plaque circulaire, multicouche et isotrope comportant une couche piézoélectrique, soumise à une tension électrique initiale et qui repose sur deux appuis simples. L'approche utilise le modèle de Von Karman des plaques, ainsi que la résolution du problème est faite par la méthode des différences finies.

Liang Wang, Rui-xiang Bai et Haoran Chen [40] ont étudié le comportement d'une fissure au niveau de l'interface entre l'actionneur piézoélectrique et la poutre élastique en statique et en tenant compte de l'effet de cisaillement (Modèle de Timoshenko), La solution analytique est obtenue, en calculant les contraintes dans l'interface et l'énergie émise en mode I et II au niveau de l'interface, qui est soumise à des sollicitations mécaniques et électriques.

II-1) Contrôle actif :

II-1-1) Généralités :

Le brevet de Lueg en 1936 est généralement cité comme fondateur du concept de contrôle actif. Les premières applications industrielles ont été surtout dans le domaine de l'acoustique, en particulier, pour contrôler le bruit des ventilateurs dans les conduits de ventilation et de conditionnement d'air, Il est devenu aujourd'hui un véritable produit industriel.

Aussi parmi les premières applications industrielles du contrôle actif, on cite celle du 'contrôle du bruit résiduel dans la cavité interne des casques antibruit' connus sous le nom des casques actifs [41].

Le contrôle actif des vibrations est une opération complexe à cause de la coexistence, à une fréquence donnée, de plusieurs ondes avec des célérités (vitesses) qui sont fonctions de la fréquence, ainsi que l'importance que jouent les conditions aux limites et la complexité des structures en jeu, qui sont généralement multidirectionnelles [42].

Le développement du contrôle actif n'était significatif qu'au milieu des années 1980 dans le domaine de la maîtrise des émanations acoustiques des sous-marins porteurs de la force stratégique de dissuasion. C'est l'origine principale des développements des «plots actifs» ou de paliers magnétiques actifs. Dans le domaine de l'aéronautique, les premières applications des plots actifs étaient sur la suspension active des réacteurs du «business jet» Citation X de Cessna de la société Lord, dans le but d'atténuer le bruit transmis dans la cabine [41].

Le principe du contrôle actif des vibrations est l'interférence destructive de deux champs (sonores ou vibratoires) c'est-à-dire bloquer la vibration en exerçant une vibration antagoniste créée artificiellement avec des propriétés en miroir, à tout instant, relativement à la vibration indésirable, pour rendre leur somme vectorielle nulle [41] [42].

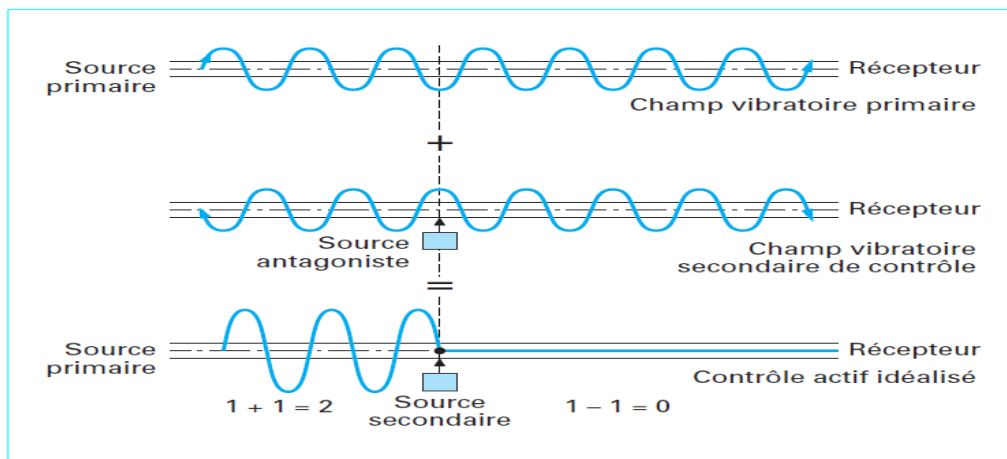


Fig-2-1: Principe du contrôle actif des vibrations.

En effet, on accroît l'énergie vibratoire de la structure en amont du contrôle, en principe du double : $1 - 1 = 0$ (en aval du contrôle) $\Rightarrow 1 + 1 = 2$ (en amont).

Donc, il existe deux types de champs [42]:

- le premier correspond à la perturbation qu'on désire atténuer (ou de préférence éliminer) appelé « champ primaire »,
- et le deuxième dit « champ secondaire » est créé par le dispositif de contrôle.

II-1-2) techniques de contrôle actif des structures :

On introduit deux techniques (ANC et AVC) appelées techniques de commandes actives des vibrations et des bruits. L'idée principale d'ANC et d'AVC est de superposer le signal du bruit ou de la vibration avec un autre signal de la même grandeur et en opposition de phase (déphasage de 180°). Le but est d'annuler ce bruit ou cette vibration (principe « antibruit », de Lueg cité auparavant).

La différence entre les deux techniques ANC et AVC réside dans la source du signal d'annulation, dans le cas d'ANC le signal est produit par des hauts parleurs, tandis que celui d'AVC est produit par des actionneurs.

II-1-3) Méthodes de contrôle actif :

Il existe deux méthodes de contrôle actif : le contrôle par anticipation feedforward et le contrôle par rétroaction feedback.

- a) Le contrôle par anticipation « **feedforward** » : Comme son nom l'indique "contrôle par anticipation" signifie que le signal de la perturbation est prévisible, car dans certains cas, on peut prévoir sa nature, par exemple, dans le cas des vibrations émises par des machines tournantes, les vibrations ont tendance à être harmoniques et il y a aussi le cas où la perturbation se propage, de sorte qu'elle soit fonction de sa valeur en amont [41]. P. Lueg a été le premier à explorer ce domaine en étudiant le bruit dans un conduit. Le schéma suivant représente le principe du contrôle actif par anticipation :

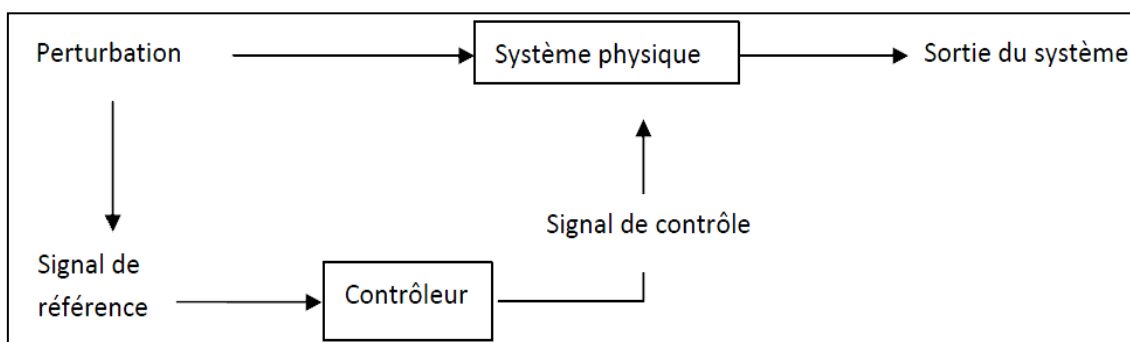


Fig 2-2: Principe d'un dispositif de contrôle actif par anticipation.

b) Le contrôle par rétroaction « **feedback** » : Ce type de contrôle a été développé pour la première fois par Olsen et May en 1955. Le principe est de filtrer le signal d'erreur (capté par des capteurs) à l'aide du contrôleur qui commande alors les actionneurs de contrôle, donc ce type de contrôle fait partie du contrôle actif AVC [42].

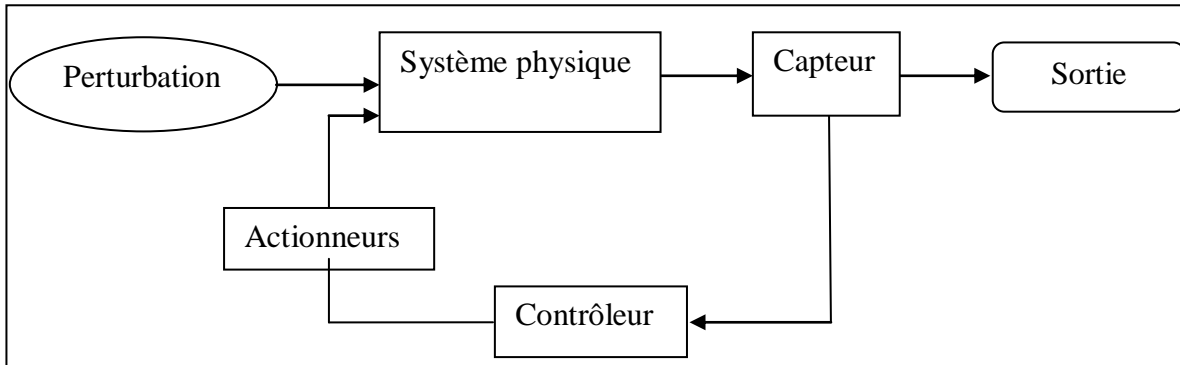


Fig 2-3: Principe d'un dispositif de contrôle actif par rétroaction.

II-1-4) Application industrielle du contrôle actif :

- Application du contrôle actif sur les avions (réduction du bruit dans les cabines):

Les exigences croissantes de confort d'une clientèle assez exigeante des business jets ont poussé les sociétés **Cessna** (constructeur), **Pratt & Whitney** (motoriste) et **Lord** (équipementier spécialisé en isolation antivibratoire) à développer une solution de suspensions actives pour la gamme Citation X. Cette solution consiste à introduire ce qu'on appelle des plots actifs pour moteur d'avion à réaction. Une analyse a démontré que la principale source de bruit était la transmission au fuselage des vibrations de balourd des moteurs.

A cause des contraintes de sécurité et de la poussée élevée, ils ont décidé d'utiliser un kit de contrôle actif développé par la société Lord. Le principe physique est d'utiliser un actionneur compact implanté au sein du plot, pour assouplir la raideur du plot dans la bande de fréquences à contrôler.

Dans le cas d'avions à hélices, tels que les avions turbopropulsés, la source principale de bruit dans la cabine est la pression dynamique du sillage de chaque pale d'hélice sur le segment voisin du fuselage. Il y a ensuite propagation sous forme de vibrations et de bruit. La stratégie de contrôle adoptée de nouveau par l'équipe Lord-Digisonix est alors de contrôler activement la vibration de la zone de fuselage directement soumise au sillage du passage de pales. Les figures suivantes montrent les techniques et l'intérêt du contrôle actif dans les avions [42].

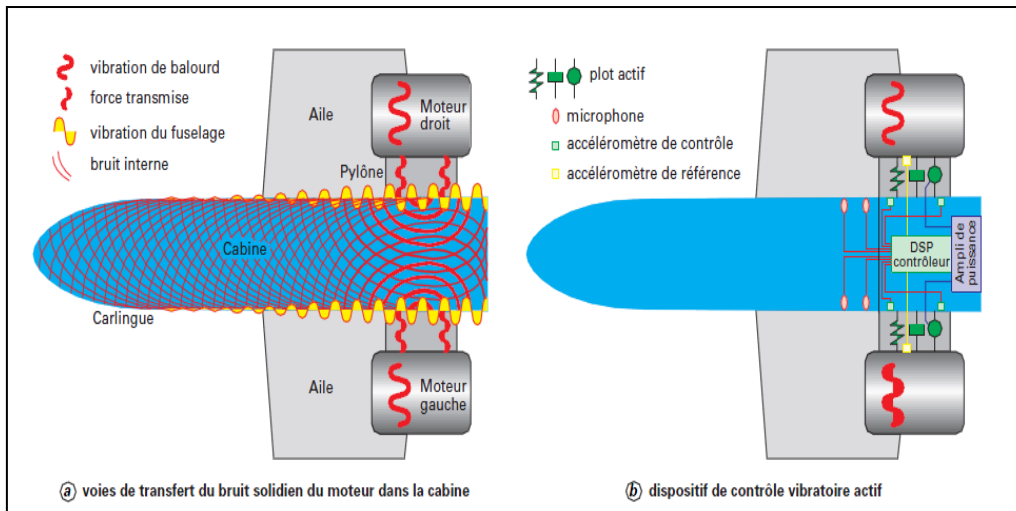


Fig 2-4 : Atténuation du bruit dans un avion à moteur à réaction
(doc. Lord).

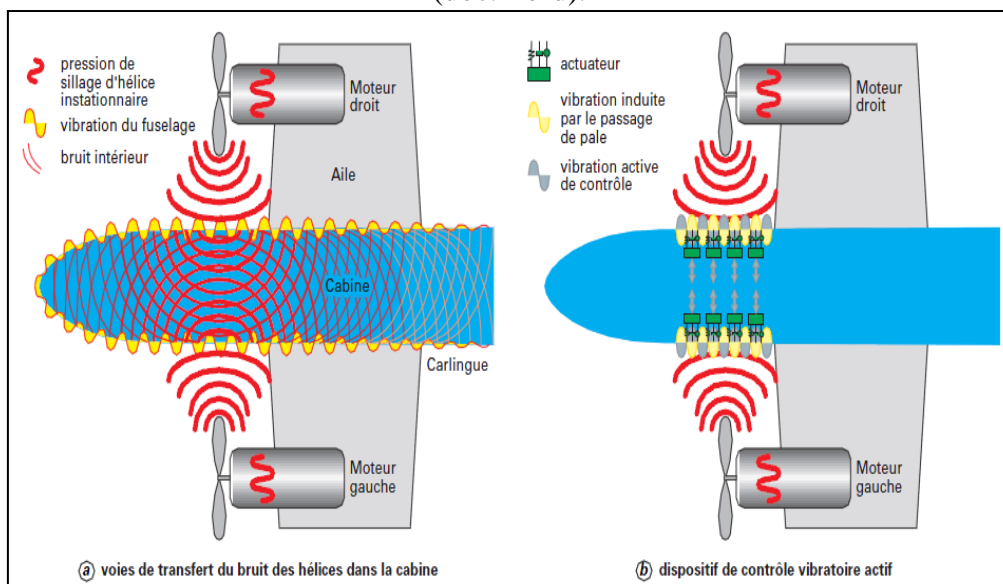


Fig 2-5 : Atténuation du bruit dans un avion à hélice turbopropulsé
(doc. Lord).

II-2) Elasticité linéaire [43]:

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'évolution d'un système mécanique qui, à partir d'un état initial non chargé, va atteindre un nouvel état d'équilibre sous l'action de sollicitations extérieures. L'objectif ici est de déterminer ce nouvel état. En effet, la connaissance des contraintes dans le système permet l'analyse de sa tenue aux sollicitations, à l'aide des critères de dimensionnement, utilisés pour les matériaux métalliques.

Dans ce qui suit, on considère un système constitué d'un matériau homogène et isotrope, à comportement élastique linéaire, tout en restant dans le domaine des petits déplacements et des petites déformations (Hypothèse des Petites Perturbations). Le système est supposé

subir des déformations isothermes, sous l'action de sollicitations extérieures appliquées progressivement, statiques ou quasi-statiques, à partir d'un état initial non contraint. Une solution analytique n'est accessible que dans des situations relativement simples. Par conséquent, pour traiter un problème pratique, on doit en général avoir recours à des méthodes numériques, pour obtenir une approximation de la solution du problème. Cependant, il est souvent possible d'approcher un problème complexe par un problème simplifié, dont la solution analytique existe, ce qui permet une analyse critique des résultats obtenus par des méthodes numériques. Les solutions analytiques de l'élasticité linéaire sont donc extrêmement précieuses et permettent d'aborder de nombreux problèmes. Soit un solide S, soumis à un champ de contraintes :

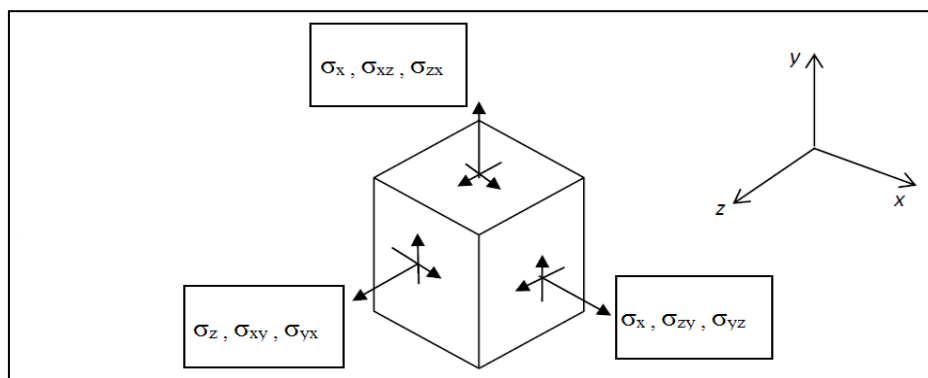


Fig 2-6 : Distribution des contraintes.

II-2-1) Équations de champs [43]:

Les contraintes sont un tenseur symétrique d'ordre 2, donc caractérisées par six composantes. Elles sont régies par trois équations locales d'équilibre (cas statique):

$$\overrightarrow{\text{div}} \sigma + \vec{f} = \vec{0} \quad (2.1)$$

Ce qui donne en coordonnées cartésiennes (après projection):

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0$$

NB : Pour passer au cas dynamique, il suffit de prendre en considération l'accélération, autrement dit :

$$\overrightarrow{\text{div}} \sigma + \vec{f} = \rho \vec{u}$$

Il est donc clair que ces équations sont insuffisantes pour déterminer complètement les contraintes.

II-2-2) Loi de comportement [43], [44]:

Le matériau constitutif joue un rôle dans la réponse du système, il faut donc faire intervenir sa loi de comportement, qui relie le tenseur des contraintes à celui des déformations. Celui-ci est noté $\bar{\bar{\epsilon}}$ en petites transformations et est symétrique.

La loi de comportement s'écrit dans le cas d'un matériau isotrope :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \cdot \text{trace} \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \mathbf{I} + 2\mu \bar{\bar{\epsilon}} \quad (2.2)$$

Avec : λ et μ sont les coefficients de Lamé tels que:

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} ;$$

ν : Coefficient de Poisson. et E : Module de Young.

En coordonnées cartésiennes l'expression précédente (en utilisant la convention de l'indice muet c.à.d. sommation sur les indices répétés):

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

Avec : δ_{ij} : est le Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Plus explicitement :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \cdot \epsilon_{xx} + \lambda \epsilon_{yy} + \lambda \epsilon_{zz} & \sigma_{xy} &= 2\mu \cdot \epsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= \lambda \epsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu) \cdot \epsilon_{yy} + \lambda \epsilon_{zz} & \text{et} & \sigma_{yz} &= 2\mu \cdot \epsilon_{yz} \\ \sigma_{zz} &= \lambda \epsilon_{xx} + \lambda \epsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu) \cdot \epsilon_{zz} & \sigma_{zx} &= 2\mu \cdot \epsilon_{zx} \end{aligned}$$

La relation inverse donne la relation entre les déformations et les contraintes :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = -\frac{\nu}{E} \cdot \text{trace} \bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{I} + \frac{1+\nu}{E} \bar{\bar{\sigma}} \quad (2.3)$$

De manière plus détaillée :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \cdot \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz} & \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \cdot \sigma_{xy} \\ \epsilon_{yy} &= -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{xx} + \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz} & \text{et} & \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2G} \cdot \sigma_{yz} \\ \epsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} + \frac{1}{E} \sigma_{zz} & \epsilon_{zx} &= \frac{1}{2G} \cdot \sigma_{zx} \end{aligned}$$

Avec : G : Module de cisaillement (glissement).

II-2-3) Relation déformations-déplacements (équations de compatibilité):

Les relations déformations-déplacements sont données par :

$$\bar{\bar{\epsilon}}(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\overline{\text{grad}} \vec{u} + \overline{\text{grad}}^T \vec{u}) \quad (2.4)$$

Qui peuvent être écrites en coordonnées cartésiennes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}$$

Il y a alors 15 équations de champs aux dérivées partielles, pour 15 inconnues correspondant aux composantes des contraintes (6 composantes), des déformations (6) et du déplacement (3 composantes). Ces équations posées sur le domaine Ω , sont complétées par des conditions aux limites portant sur la frontière $\partial\Omega$.

Du point de vue pratique, ces conditions aux limites permettent de fixer les constantes d'intégration, qui apparaissent lors de l'intégration des équations aux dérivées partielles.

Donc le problème de l'élasticité plane consiste à déterminer \vec{u} (déplacement), $\bar{\varepsilon}$ (déformation) et $\bar{\sigma}$ (les contraintes), autrement dit, résoudre les équations de champ suivantes :

$$\overrightarrow{\text{div}} \sigma + \vec{f} = \vec{0}$$

$$\bar{\sigma} = \lambda \cdot \text{trace} \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{I} + 2\mu \bar{\varepsilon}$$

$$\bar{\varepsilon}(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}^T \vec{u})$$

II-2-4) Résolution du problème élastique:

Deux approches existent pour la résolution du problème d'élasticité, selon la manière, la recherche de la solution est faite en choisissant le champ de déplacement ou le champ de contrainte comme inconnu principal.

II-2-4-1) Méthode des déplacements :

Équations de Lamé-Navier:

$$(\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) + \mu \cdot \Delta \vec{u} + \vec{f} = \vec{0} \quad (2.5)$$

Il existe une autre forme pour interpréter ces équations qui est :

$$(\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) + \mu \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}) + \vec{f} = \vec{0}$$

Le processus de résolution avec la méthode des déplacements consiste donc à :

- postuler un champ de déplacement ;
- vérifier les conditions aux limites sur les déplacements ;
- vérifier les équations de Lamé-Navier ;
- vérifier les conditions aux limites sur les contraintes ;
- conclure grâce à l'unicité.

Si le champ de déplacement est irrotationnel, les équations se réduisent à :

$$(\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) + \vec{f} = \vec{0} \quad (2.6)$$

II-2-4-2) Méthode des contraintes [44]:

La seconde méthode de résolution consiste à rechercher directement les contraintes.

Le champ de contrainte doit vérifier les conditions aux limites portant sur les contraintes et les équations d'équilibre.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + \boldsymbol{\varepsilon}_{kk,ij} - (\boldsymbol{\varepsilon}_{jk,ik} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ik,jk}) = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

Ce sont les équations de compatibilité des déformations en coordonnées cartésiennes.

En pratique, lors d'une approche en contraintes, ces équations sont exprimées en fonction des contraintes. Pour cela, il faut utiliser la loi de comportement. Mais les équations obtenues sont difficiles à exploiter, c'est pourquoi elles sont combinées avec les équations d'équilibre, pour donner finalement les équations de Beltrami-Michell (2.8):

$$\overline{\text{div}}(\text{grad} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{1}{1+\nu} \overline{\text{grad}}(\text{grad}(\text{trace} \bar{\boldsymbol{\sigma}})) + \frac{\nu}{1-\nu} \mathbf{I} \text{div} \bar{\mathbf{f}} + \overline{\text{grad}} \bar{\mathbf{f}} + \overline{\text{grad}}^T \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

Dans le cas particulier, où les forces de volume sont constantes i.e. $\overline{\text{grad}} \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$, l'équation se réduit à ses deux premiers termes. En coordonnées cartésiennes, cela donne :

$$(\mathbf{1} + \nu) \Delta \boldsymbol{\sigma}_{ij} + \boldsymbol{\sigma}_{kk,ij} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Le processus de résolution avec la méthode en contrainte est donc :

- postuler un champ de contrainte ;
- vérifier les conditions aux limites sur les contraintes ;
- vérifier les équations d'équilibre ;
- vérifier les équations de Beltrami-Michell ;
- intégrer les déformations et obtenir le champ de déplacement ;
- vérifier les conditions aux limites sur les déplacements ;
- conclure grâce à l'unicité.

II-2-5) Energie de déformation [45]:

Soit le champ de contrainte :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x & \boldsymbol{\sigma}_{xy} & \boldsymbol{\sigma}_{xz} \\ \boldsymbol{\sigma}_{xy} & \boldsymbol{\sigma}_y & \boldsymbol{\sigma}_{yz} \\ \boldsymbol{\sigma}_{xz} & \boldsymbol{\sigma}_{yz} & \boldsymbol{\sigma}_z \end{pmatrix} \text{ puisque il est symétrique on peut écrire } \{\boldsymbol{\sigma}\} = \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\sigma}_x \\ \boldsymbol{\sigma}_y \\ \boldsymbol{\sigma}_z \\ \boldsymbol{\sigma}_{yz} \\ \boldsymbol{\sigma}_{xz} \\ \boldsymbol{\sigma}_{xy} \end{matrix} \right\}$$

Et le champ de déformation est :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x & \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} & \boldsymbol{\varepsilon}_{xz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} & \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} & \boldsymbol{\varepsilon}_{yz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xz} & \boldsymbol{\varepsilon}_{yz} & \boldsymbol{\varepsilon}_z \end{pmatrix} \text{ symétrique aussi, donc } \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\varepsilon}_z \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \end{matrix} \right\}$$

L'expression qui donne l'énergie de déformation est :

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (2.10)$$

Sous forme éclatée:

$$U = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dv$$

II-3) Théorie des poutres:

II-3-1) Définition [46]:

Une poutre est un solide engendré par une surface plane Ω (comme il est indiqué sur la **figure 2-13**), dont le centre de gravité G lors de son déplacement décrit une courbe C , le plan contenant Ω reste constamment normal à la tangente en G à cette courbe C .

Ω est appelée la section droite ou section transversale de la poutre (profil pour certaines poutres commercialisées).

La section droite Ω peut être variable, mais de façon continue. Autrement dit, le profil ne doit pas présenter des discontinuités. Dans ce cas, la poutre est dite à section variable ou à inertie variable. Elle peut être aussi pleine ou évidée.

La courbe C décrite par G est dite ligne (ou fibre) moyenne de la poutre.

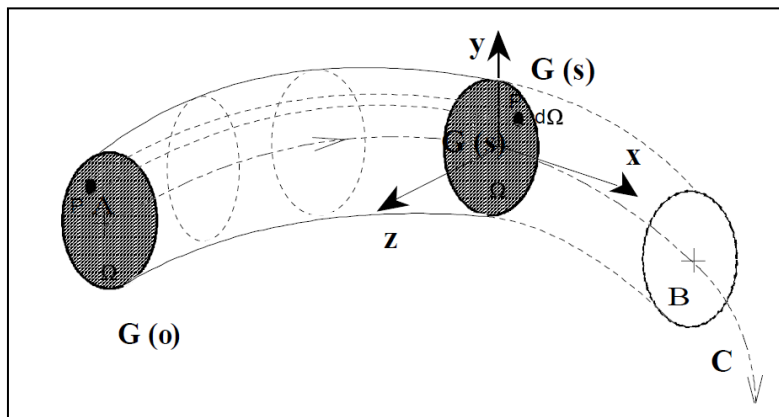


Fig 2-7 : Caractéristiques géométriques d'une poutre.

II-3-2) Typologie des poutres [46]:

Les poutres sont classées suivant la forme de la ligne moyenne:

- une poutre droite lorsque C est une droite,
- une poutre gauche lorsque C est une courbe gauche,
- un arc lorsque C est une courbe plane ouverte (portique si C est formée de segments de droites),
- un anneau lorsque C est une courbe plane fermée,

- une poutre à plan moyen de symétrie, lorsque C est une courbe plane et si de plus le plan contenant C est un plan de symétrie de Ω .

II-3-3) Hypothèses sur les dimensions de la section droite [46]:

Les hypothèses de la théorie des poutres ne donneront des résultats réalistes que si les conditions suivantes sont respectées.

- Les dimensions transversales de la section droite Ω doivent être petites devant la longueur de la poutre. Elles ne doivent pas cependant être trop petites, car les déplacements sont supposés faibles. Si nous appelons élancement géométrique le rapport de la longueur de la poutre à sa dimension transversale moyenne,

$$\lambda_g = \frac{L}{\text{moy}(b,h)}$$

(b,h) étant respectivement la plus grande largeur de la poutre et la hauteur. Cet élancement ne doit pas être trop faible ni trop élevé. L'approximation de la RDM est de l'ordre de $(1/\lambda_g^2)$.

- De plus il faut que le rayon de courbure de la ligne moyenne soit grand vis à vis des dimensions de la section droite et que la géométrie de celle-ci ne varie que lentement.
- L'ordre de grandeur des rapports des longueurs caractéristiques

Avec: L = longueur de la ligne moyenne.

h = la plus grande dimension transversale de la section droite.

b = la plus petite dimension transversale de la section droite.

R = rayon de courbure de la poutre.

Comme ordre de grandeur, on se base sur:

a) Pour une poutre : $\frac{1}{30} \leq \frac{h}{L} \leq \frac{1}{5}$

b) Pour un arc : $\frac{1}{100} \leq \frac{h}{L} \leq \frac{1}{5}$ et $\frac{h}{b} \leq 10$

c) Pour les poutres courbes : $\frac{R}{h} > 5$

II-3-4) Exemples de sections droites de poutres à plan moyen de symétrie [46]:

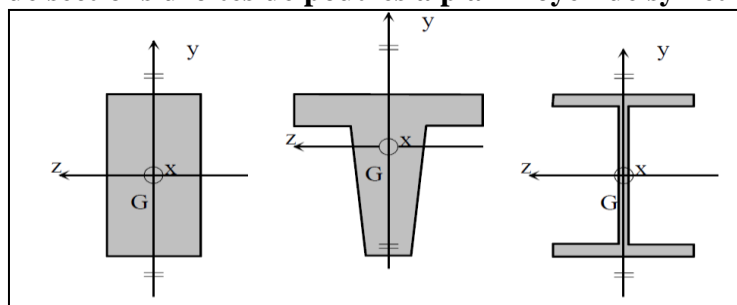


Fig 2-8 : Différentes géométries de poutres à plan moyen de symétrie.

Hypothèses sur le matériau [46]:

Les matériaux envisagés sont supposés :

- **Homogènes** : tous les éléments du matériau, aussi petits soient-ils, ont une structure identique.
- **Isotropes** : les propriétés mécaniques sont les mêmes en tous points et dans toutes les directions.
- **Continus** : les propriétés varient de manière continue d'un point à l'autre et pas de discontinuités sous forme de boules d'air.

Dans le **domaine élastique** : les relations entre contraintes et déformations sont linéaires «**loi de HOOKE**».

II-4) Hypothèse de Bernoulli:

Le caractère linéique de la géométrie des poutres fait qu'on s'attend à ce que les phénomènes prépondérants soient essentiellement longitudinaux. On énonce alors les hypothèses de Bernoulli:

- **Les sections droites restent planes.**
- **Les sections droites se déforment librement dans leur plan.**
- **La variation des déformations de la section le long de la poutre est très petite.**

Autrement dit, toute section droite d'une poutre subit un déplacement de solide rigide qui la maintient perpendiculaire à la ligne moyenne déformée. Cette hypothèse se vérifie pour les déformations dues aux contraintes normales, mais non pour celles que provoquent les contraintes tangentiels qui entraînent un gauchissement des sections.

Une proposition plus proche de la réalité expérimentale s'énoncerait: deux sections droites infiniment voisines deviennent après déformation, deux sections qui sont dans le cas le plus général, gauches, mais superposables par simple déplacement. Dans les poutres à section pleine, le gauchissement n'affecte guère la distribution des contraintes normales.

Soit une poutre encastree en A et libre en B, soumise à l'action d'une force F (**figure 2-9**). Sur le parement de la poutre, traçons 2 sections droites $\Omega(x)$, $\Omega'(x)$ voisines de dx (lignes \perp à la ligne moyenne dans la configuration non chargée). Après l'application de la charge F, ces lignes se déplacent, sans se déformer, c'est à dire qu'elles restent toujours droites. On en conclue que les sections droites restent planes, de plus on constate qu'elles restent perpendiculaires à la ligne moyenne déformée, d'où l'hypothèse de **Bernoulli [47]**.

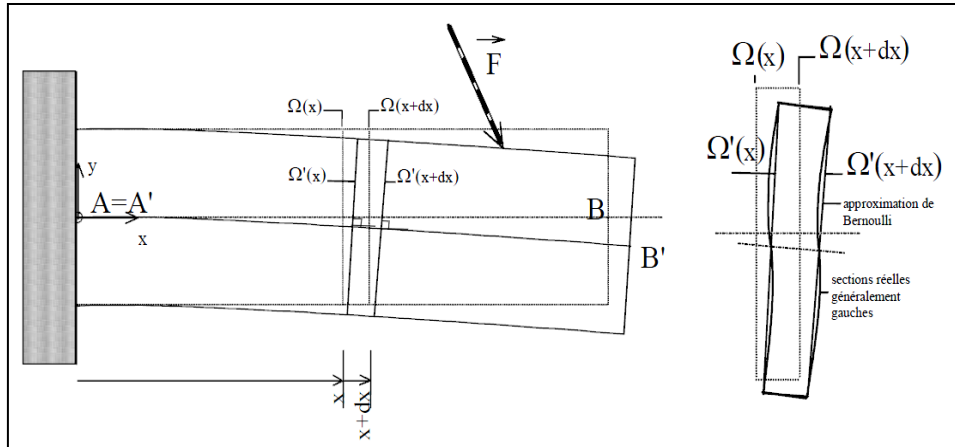


Fig 2-9 : La déformation d'une poutre de type Bernoulli.

Pour illustrer l'hypothèse de Bernoulli sur les poutres, on considère le cas suivant [48]:

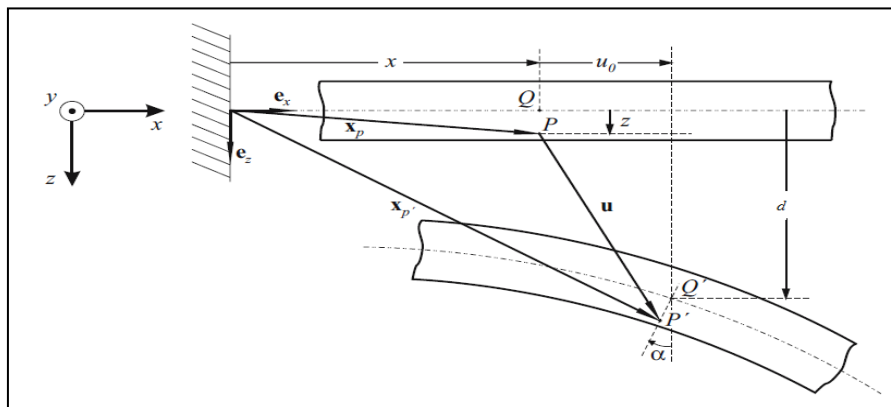


Fig 2-10: Illustration du modèle de Bernoulli des poutres.

Cette figure représente l'emplacement du point P considéré avant et après déformation.

Le système de coordonnées est choisi de telle manière que le vecteur unitaire \mathbf{e}_x coïncide avec l'axe principal.

u_0 et d sont respectivement les déplacements dans les directions x et z .

X_p et $X_{p'}$ sont les vecteurs position des points P et P'.

Le déplacement \mathbf{u} peut s'écrire : $\mathbf{u} = X_p - X_{p'}$

Or : $X_p = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z$

$$X_{p'} = (x + u_0 - z \sin(\theta))\mathbf{e}_x + (d + z \cos(\theta))\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{U} = (u_0 - z \sin(\theta))\mathbf{e}_x + (d + z \cos(\theta) - z)\mathbf{e}_z$$

Pour des angles faibles, on a: $\sin(\theta) \cong \theta$ et $\cos(\theta) \cong 1$

En injectant ces simplifications, l'expression du déplacement \mathbf{U} prend la forme:

$$\mathbf{U} = (u_0 - z\theta)\mathbf{e}_x + d\mathbf{e}_z \quad (2.11)$$

Où : $u = (u_0 - z\theta)$ Déplacement selon l'axe longitudinal x, $v = 0$ Déplacement selon l'axe y et $w = d$ Déplacement selon l'axe vertical z.

Donc l'expression de U s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{U} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$$

A partir de cette expression, on peut déterminer les déformations, ainsi que les contraintes.

Les déformations sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \end{array} \right. \quad (2.12)$$

D'autre part, dans le cadre de l'hypothèse de Bernoulli, les contraintes, ainsi que les déformations transversales sont nulles [48]:

$$\sigma_{xz} = 0 \text{ Ou } \varepsilon_{xz} = 0 \text{ i.e } \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta = 0 \right)$$

On peut déduire que :

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Alors :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Et encore :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

II-5) Hypothèse de Timoshenko [47]:

La théorie de Timoshenko pour les poutres suppose qu'une section plane reste plane, mais pas forcément perpendiculaire à la ligne moyenne.

L'hypothèse de base porte sur une schématisation du champ de déplacement à l'intérieur du solide (hypothèse "cinématique") : le solide est assimilé à un milieu curviligne, le champ de déplacement du milieu continu étant ensuite évalué à partir de la solution trouvée, en supposant qu'une section droite initialement plane et perpendiculaire à la "ligne moyenne", ainsi définie reste plane. En un point quelconque du milieu curviligne, il est donc possible de résumer la solution du problème par la connaissance de trois composantes de déplacement (selon x, y et z). Pour le cas d'une poutre plane chargée dans son plan, elle ne subsiste que trois inconnus, deux translations de la ligne moyenne (respectivement U et V selon x et z) et une rotation (angle θ , caractérisant la flexion autour de y).

Le champ de déplacement pour un point M (x, y, z) quelconque s'exprime en fonction de ces inconnus :

$$\mathbf{u} = U + z \cdot \theta \text{ et } \mathbf{w} = V$$

Ainsi que le champ de déformation est donné par :

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} + z \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \epsilon_{zz} = \frac{\partial V}{\partial z} \\ 2\epsilon_{xz} = \theta + \frac{\partial V}{\partial x} \end{cases} \quad (2.14)$$

Ces relations sont indépendantes du comportement du matériau. La ligne moyenne est définie par $\int_S \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{ds} = \mathbf{0}$. Si la section est symétrique par rapport au plan (x, y), ce sera l'axe x. Les équations d'équilibre et celles de comportement doivent alors être exprimées en termes de U, V, θ , et de N, T, M, qui désignent respectivement les forces normales et tangentielles à la section droite et le moment de flexion autour de y.

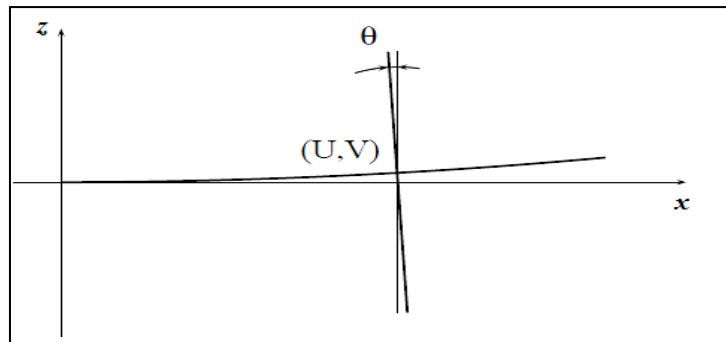


Fig 2-11 : Déplacements d'une poutre plane.

On particularise maintenant la théorie au cas d'un comportement élastique isotrope. En utilisant les relations donnant ϵ_{xx} et ϵ_{xz} en fonction des contraintes, du module de Young E et du coefficient de Poisson ν , (soit : $E\epsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ et $2\mu\epsilon_{xz} = \sigma_{xz}$), on trouve :

Pour la déformation selon l'axe x :

$$\int_S \epsilon_{xx} \, dS = \int_S u_{,x} \, dS = \int_S U_{,x} \, dS + \int_S (z \cdot \theta)_{,x} \, dS$$

S: section droite de la poutre.

Si bien que:
$$N = \int_S \sigma_{xx} \, dS = \int_S U_{,x} \, dS + \nu \int_S (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \, dS$$

Car :
$$E \cdot \epsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \nu \cdot (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

De même:
$$\int_S z \epsilon_{xx} \, dS = \int_S z U_{,x} \, dS + \theta_{,x} \int_S z^2 \, dS$$

$$\int_S z \epsilon_{xz} \, dS = \int_S z U_{,x} \, dS + \theta_{,x} \cdot I$$

Avec: $I = \int_S z^2 \cdot dS$ (rigidité à la flexion)

Si bien que:
$$N = \int_S z \cdot \sigma_{xx} \, dS = EI\theta_{,x} + \nu \cdot \int_S z \cdot (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \, dS$$

Enfin:
$$2 \int_S \epsilon_{xz} \, dS = \int_S (u_{x,z} + u_{z,x}) \, dS = \int_S U_{,z} \, dS + \int_S (z\theta)_{,z} \, dS + \int_S V_{,x} \, dS = \int_S (\theta + V_{,x}) \, dS$$

Si bien que:
$$T = 2\mu \int_S \epsilon_{xz} \, dS = \int_S \mu S (\theta + V_{,x}) \, dS$$

Si les contraintes σ_{yy} et σ_{zz} sont négligées devant σ_{xx} , ces relations prennent la forme suivante:

$$\begin{aligned} N &= ESU_{,x} \\ T &= \mu S(\theta + V_{,x}) \\ M &= EI\theta_{,x} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Le déplacement horizontal s'obtient en intégrant la relation:

$$U_{,x} = \frac{N}{ES} \quad (2.16)$$

La rotation relative entre les sections s'obtient en intégrant la relation:

$$\theta_{,x} = \frac{M}{EI} \quad (2.17)$$

La flèche est la somme de deux termes, l'un provenant de la rotation, et l'autre de l'effort tranchant T :

$$V_{,x} = \theta + \frac{T}{\mu S} \quad (2.18)$$

Dans ce chapitre, on a donné quelques éléments théoriques, qu'on juge nécessaires pour la suite de notre travail.

III-1) L'effet piézoélectrique :

Le mot piézoélectricité vient du grec et signifie «électricité par pression» (piézo provient de Piézein et veut dire pression ou serrage en grec). Ce nom a été proposé par Hankel en 1881 pour décrire le phénomène découvert un an plus tôt par les frères Pierre et Jacques Curie. Ils ont constaté que des charges positives et négatives sont apparues sur les surfaces du Crystal lorsque ce dernier est comprimé dans diverses directions.

On appelle piézo-électricité la propriété que possèdent certains matériaux naturels ou synthétiques de pouvoir transformer une énergie électrique en énergie mécanique, autrement dit de se polariser (l'apparition de charges électriques) sous l'effet d'une contrainte mécanique, ces charges proviennent d'un couplage entre les propriétés électriques et élastiques du matériau piézoélectrique ou inversement, c'est à dire de se déformer lorsque le matériau est soumis à un champ électrique [42]. Le premier effet est appelé « effet piézoélectrique direct » qui permet d'utiliser ces matériaux comme capteurs, le second « effet piézoélectrique inverse » qui permet de les utiliser comme actionneurs [1].

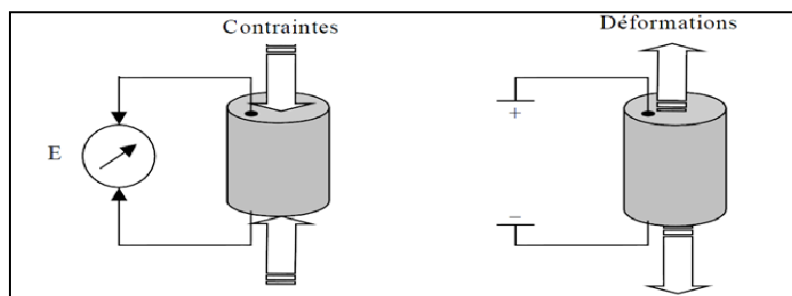


Fig 3-1 : Effet piézoélectrique direct et inverse.

L'organigramme (**fig 3-2**) représente le classement des matériaux cristallins.

La piézoélectricité est de deux types [49]:

- 1) Piézoélectricité naturelle (**fig3-3**): Certains cristaux tels que le quartz sont naturellement piézo-électriques. Une maille de cristal de quartz est composée d'atomes de silicium portant une charge électrique positive et d'atomes d'oxygène portant une charge électrique négative. Sur la figure (**fig3-3**), on voit qu'en l'absence de déformation, le barycentre des charges positives est confondu avec celui des charges négatives. Si maintenant on applique une force de compression, la maille cristalline va se déformer, de sorte que le barycentre des charges positives et celui des charges négatives vont s'écarter. On a ainsi créé un dipôle électrique qui par réaction, va faire apparaître des charges de signes opposés sur les deux électrodes: c'est l'effet direct. Si au contraire on apporte des charges électriques, sous l'effet de forces électrostatiques, la maille va se déformer: c'est l'effet inverse.

2) Piézoélectricité artificielle (**fig 3-4**): La majorité des matériaux piézo-électriques utilisés dans la fabrication des transducteurs sont au départ des matériaux ferroélectriques, c'est à dire que la courbe liant le champ électrique et la déformation n'est plus une droite. On voit sur la figure (**fig 3-4**) que la déformation est positive, quel que soit le signe du champ électrique. On remarque, que si on observe une partie de la courbe autour d'une valeur élevée du champ électrique E_p , on retrouve une relation linéaire (la tangente à la courbe).

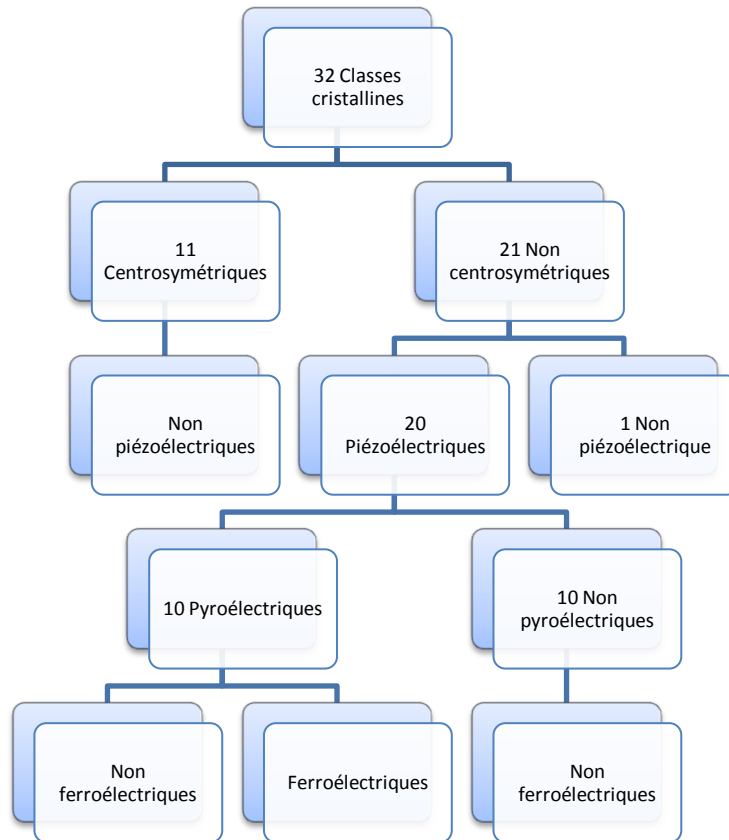


Fig 3-2 : Classement des matériaux cristallins.



Fig 3-3 : Piézoélectricité naturelle.

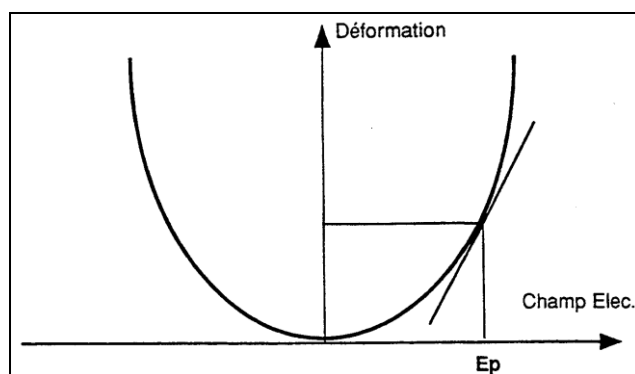


Fig 3-4 : Courbe liant la déformation au champ électrique d'un matériau piézoélectrique.

III-2) Principaux matériaux piézoélectriques [49]:

II-1-1) Les cristaux: Le cristal piézo-électrique le plus connu est le quartz , mais ses propriétés sont peu attrayantes pour les applications de transducteurs médicaux : son impédance acoustique est relativement élevée et son coefficient de couplage très faible. D'autres cristaux, tels que le niobate de lithium (LiNbO_3) ou le tantalate de lithium (LiTaO_3) affichent des valeurs de coefficients de couplage plus élevées. Le coût élevé et la fragilité de ces cristaux expliquent que l'on ne les retrouve que très peu dans les produits actuels. Ils sont cependant utilisés en laboratoire dans des dispositifs à très haute résolution pour des raisons essentiellement technologiques.

III-2-2) Les céramiques: Les céramiques piézo-électriques sont incontestablement les matériaux les mieux adaptés à l'heure actuelle pour une utilisation échographique. Ils sont souvent utilisés tels quels, mais entrent également dans la fabrication des composites. Ces matériaux ont un coût relativement faible, ils sont usinables et faciles à transformer et surtout qu'ils offrent un éventail très large de performances. En effet, il existe de très nombreuses compositions différentes, dont les propriétés diélectriques et mécaniques varient considérablement, de sorte que l'on trouve toujours une céramique adaptée à une application particulière.

Citons entre autres, les titanates de baryum qui sont les ancêtres des céramiques actuelles, la famille des PZT (plomb zirconate titanate) qui compte à elle seule cinq à six compositions différentes et qui est la plus utilisée, les titanates de plomb qui tendent de plus en plus à concurrencer les PZT et enfin les métaniobates de plomb utilisés pour l'imagerie haute résolution.

Notons que les céramiques sont des polycristaux, qui sont fabriqués par frittage d'un mélange

d'oxydes et que leur procédé de fabrication peut être modulé comme leur composition, afin d'ajuster leurs performances diélectriques, mécaniques et piézo-électriques.

III-2-3) Les polymères : Certains polymères tels que le PVDF (Poly Vynil Di Fluorure) et des copolymères tels que le (PVDF-TrFE) peuvent acquérir des propriétés piézo-électriques. Ils se caractérisent par une faible impédance acoustique et sont donc supérieurs à ce point de vue. Cependant jusqu'à une période récente, leurs coefficients de couplage étaient bien plus faibles que ceux des céramiques. L'amélioration des procédés de fabrication et plus particulièrement ceux des copolymères a abouti à des valeurs de coefficient de couplage de l'ordre de la moitié de ceux obtenus avec des céramiques. Les transducteurs à base de copolymères ont aujourd'hui des performances qui s'approchent de celles des capteurs à céramiques. Ils sont essentiellement utilisés dans les dispositifs haute fréquence à cause d'avantages technologiques

III-2-4) Les composites: Leur origine provient du constat selon lequel aucun matériau existant n'avait à la fois une impédance acoustique assez faible, pour bien transmettre son énergie aux tissus biologiques et une valeur du coefficient de couplage élevée. En effet, les céramiques souffrent d'une impédance acoustique, trop élevée et les polymères d'une valeur de coefficient de couplage trop faible. L'idée est donc née qu'il fallait utiliser à la fois une céramique à coefficient élevé, associée à un matériau passif de faible impédance acoustique, de sorte que le matériau résultant ait une impédance acoustique plus faible, tout en gardant un coefficient de couplage comparable avec celui d'une céramique [49].

III-3) Quelques applications de l'effet piézoélectrique:

La piézoélectricité trouve un très grand nombre d'applications dans l'industrie et dans la vie quotidienne. Nous utilisons souvent des objets tels que les allume-gaz électriques, les briquets, les déclencheurs des "airbags". . . etc. En effet, l'application d'une pression sur l'allume-gaz, donc le cristal piézoélectrique, produit une tension électrique capable de se décharger sous forme d'étincelles. D'une manière plus générale, les matériaux piézoélectriques sont maintenant largement mis à profit dans les technologies avancées aussi bien pour constituer des actionneurs électromécaniques que des capteurs de vibrations. L'utilisation des matériaux piézoélectriques se retrouve dans des domaines toujours plus variés. La souplesse de commande ainsi que la durée de vie importante des structures piézoélectriques font de leurs applications technologiques prometteuses [1].

Donner une liste exhaustive des applications de la piézoélectricité serait une tâche difficile. Néanmoins, nous illustrons quelques exemples d'applications :

- La réduction des vibrations dans les ailes des avions s'avère nécessaire. Certains angles de vols à haute vitesse créent des vibrations importantes au bout d'aile, ce qui diminue la durée de vie de la structure par un phénomène de fatigue accélérée. Des travaux sont menés pour contrôler la flexion et la torsion, en utilisant des transducteurs piézoélectriques.
- Dans le domaine de l'aéronautique, les pales d'hélicoptères sont soumises à de très fortes vibrations dues aux instabilités aérodynamiques. Afin de palier à cela, un bimorphe piézoélectrique incorporé dans la pale actionne un volet, pour lui donner un angle et atténuer les effets nuisibles de la turbulence.
- Le casque de protection auditive actif est l'une des premières applications du contrôle actif. Les casques actifs utilisent un contrôle qui leur permet d'atténuer les bruits stationnaires de basses fréquences du type moteur d'avion, turbine. . .
- Les sources de bruit provenant des turbulences engendrées par l'écoulement d'air autour d'un avion. La suppression du bruit à l'intérieur du fuselage utilise des microphones comme capteurs et des couches piézoélectriques couplées au fuselage comme actionneurs.

III-4) Equations constitutives de la piézoélectricité :

La piézoélectricité se manifeste par la conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique et inversement. Les équations décrivant les effets piézoélectriques direct et indirect relient une variable mécanique (déformation ' ε ' ou contrainte ' σ ') et une variable électrique (déplacement électrique D ou champ électrique E).

Le tableau suivant regroupe les différentes écritures des équations constitutives de la piézoélectricité, selon le couple de variables d'état choisi [1,42, 50]:

Variables d'état	Grandeurs électriques	Grandeurs mécaniques
σ, E	$D = \bar{\varepsilon}^\sigma \cdot E + \bar{d} \cdot \sigma$	$\varepsilon = \bar{S}^E \cdot \sigma + \bar{d}^t \cdot E$
σ, D	$E = \bar{\beta}^\sigma \cdot D - \bar{g} \cdot \sigma$	$\varepsilon = \bar{S}^D \cdot \sigma + \bar{g}^t \cdot D$
ε, E	$D = \bar{\varepsilon}^\varepsilon \cdot E + \bar{e} \cdot \varepsilon$	$\sigma = \bar{C}^E \cdot \varepsilon - \bar{e}^t \cdot E$
ε, D	$E = \bar{\beta}^\varepsilon \cdot D - \bar{h} \cdot \sigma$	$\sigma = \bar{C}^D \cdot \varepsilon - \bar{h}^t \cdot D$

Tableau 3-1 : Différentes équations de la piézoélectricité.

{ }^t: transposée de la matrice.

()^x: signifie que cette grandeur est considérée à x constant.

Mais les expressions les plus utilisées en termes d'études sont :

a) A température constante :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \bar{\mathbf{C}}\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\mathbf{e}}^t \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \bar{\mathbf{e}}\boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{E}\end{aligned}\quad (3.1)$$

Où :

$\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{D} et \mathbf{E} sont respectivement les contraintes, les déformations, les déplacements électriques et le champ électrique.

$\bar{\mathbf{C}}$: est la matrice des constantes élastiques (matrice de rigidité).

$\bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}_{ij}]$ avec $i=1,2,\dots,6$ et $j=1,2,\dots,6$

$\bar{\mathbf{e}}$: est la matrice des constantes piézoélectriques.

$[\mathbf{e}] = [\mathbf{e}_{ij}]$ avec $i=1, 2, 3$ et $j=1,2,\dots,6$

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$: est la matrice des constantes diélectriques.

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}]$ avec $i,j=1,2,3$

Cette expression peut être représentée autrement, en introduisant une nouvelle matrice appelée matrice de charge et notée $[\mathbf{d}]$, telle que $[\mathbf{e}] = \bar{\mathbf{C}} [\mathbf{d}]$.

Avec $[\mathbf{d}] = [\mathbf{d}_{ij}]$ $i=1,2,3$ et $j=1,2,\dots,6$

Donc si on remplace dans l'expression précédente, cette dernière devient :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \bar{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\mathbf{d}}^t \mathbf{E}) \\ \mathbf{D} &= \bar{\mathbf{e}}\boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{E}\end{aligned}\quad (3.2)$$

Matriciellement et sous forme plus explicite, on peut écrire:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}x \\ \boldsymbol{\sigma}y \\ \boldsymbol{\sigma}z \\ \boldsymbol{\sigma}yz \\ \boldsymbol{\sigma}xz \\ \boldsymbol{\sigma}xy \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}x \\ \boldsymbol{\varepsilon}y \\ \boldsymbol{\varepsilon}z \\ \boldsymbol{\varepsilon}yz \\ \boldsymbol{\varepsilon}xz \\ \boldsymbol{\varepsilon}xy \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ e_{16} & e_{26} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E1 \\ E2 \\ E3 \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}x \\ \boldsymbol{\sigma}y \\ \boldsymbol{\sigma}z \\ \boldsymbol{\sigma}yz \\ \boldsymbol{\sigma}xz \\ \boldsymbol{\sigma}xy \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}x \\ \boldsymbol{\varepsilon}y \\ \boldsymbol{\varepsilon}z \\ \boldsymbol{\varepsilon}yz \\ \boldsymbol{\varepsilon}xz \\ \boldsymbol{\varepsilon}xy \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E1 \\ E2 \\ E3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - d_{11}E_1 - d_{21}E_2 - d_{31}E_3 \\ \varepsilon_y - d_{12}E_1 - d_{22}E_2 - d_{32}E_3 \\ \varepsilon_z - d_{13}E_1 - d_{23}E_2 - d_{33}E_3 \\ \varepsilon_{yz} - d_{14}E_1 - d_{24}E_2 - d_{34}E_3 \\ \varepsilon_{xz} - d_{15}E_1 - d_{25}E_2 - d_{35}E_3 \\ \varepsilon_{xy} - d_{16}E_1 - d_{26}E_2 - d_{36}E_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}$$

b) A température variable [51]:

$$\begin{aligned} \sigma &= \bar{C}\varepsilon - \bar{e}^t E - \lambda\theta \\ D &= \bar{e}\varepsilon + \bar{\epsilon}E + p\theta \\ S &= \lambda\varepsilon + pE + \frac{\rho C_v}{T_0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Avec:

θ : variation de la température telle que:

$$\theta = T - T_0$$

T_0 : la température initiale.

p : constante de pyroélectricité (terme de couplage thermoélectrique).

ρ : densité du matériau.

λ : module thermique.

C_v : chaleur spécifique.

III-5) Poutres piézoélectriques:

Dans notre travail, on s'intéresse à l'étude des poutres piézoélectriques et plus particulièrement aux poutres piézoélectrique en flexion, donc on considère une poutre de longueur L , de masse volumique ρ et de section droite A .

On prend comme hypothèses de base :

- Le matériau est homogène, isotrope et son comportement élastique est linéaire.
- L'épaisseur de la poutre est faible devant sa longueur totale $e < L$.
- La poutre admet un plan de symétrie qui est (yz).
- La flexion se passe autour de l'axe Y.
- On suppose que la poutre considérée se déforme selon la figure (3.6) :

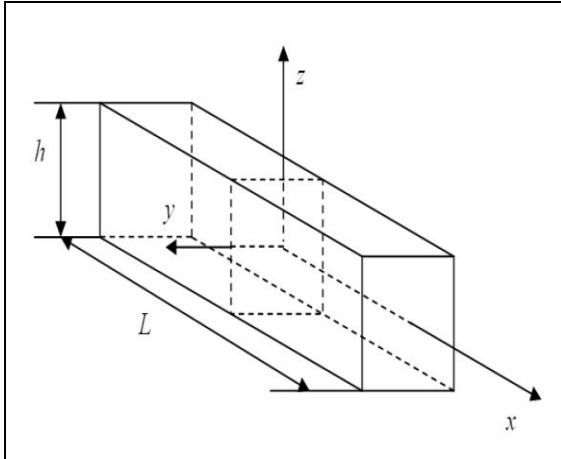


Fig 3-5 : La poutre considérée.

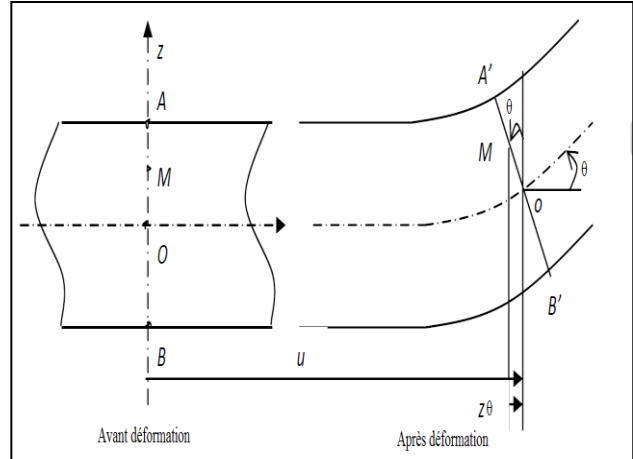


Fig 3-6 : Déformation de la poutre.

III-5-1) Champs de déplacement :

Soit $M(x,y,z)$ un point de la poutre appartenant à la section droite. En utilisant la loi de Kirchhoff du 1^{er} degré, le champ de déplacement est donné par [1], [42] :

$$(3.4) \begin{cases} \mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, t) - z \cdot \theta \mathbf{y}(x, t) \\ \mathbf{V}(x, y, z, t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{W}(x, y, z, t) = \mathbf{w}(x, t) \end{cases}$$

u, v et w sont les déplacements dans les directions X, Y et Z .

U exprime la nouvelle position du point M selon la direction X .

V le déplacement selon l'axe Y . La poutre n'est pas chargée dans cette direction, ce qui explique que le point M ne se déplace pas dans cette direction.

W représente la flèche.

III-5-2) Champs de déformation:

Le champ de déformation est déduit en utilisant les équations de compatibilité, citées dans le chapitre précédent et qui sont:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} \\ \epsilon_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \\ \epsilon_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \\ \epsilon_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \quad (3.5)$$

Si on remplace U, V et W par leurs valeurs on aboutit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \varepsilon_y = 0 \\ \varepsilon_z = 0 \\ \varepsilon_{xy} = 0 \\ \varepsilon_{yz} = 0 \\ \varepsilon_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} - \theta = 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

III-5-3) Hypothèses simplificatrices des équations constitutives de la piézoélectricité:

Dans notre cas d'étude (étude des poutres piézoélectriques) il y a des simplifications importantes à apporter sur le plan mécanique et électrique telles que :

Du point de vue mécanique :

- Les contraintes : $\sigma_y, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$ sont nulles.
- L'ordre des tenseurs et leurs nombres impliquent qu'un grand nombre de constantes scalaires sont nécessaires pour décrire le phénomène piézoélectrique.

Selon le type de symétrie du cristal utilisé, par exemple pour des matériaux de symétrie orthotrope à isotropie transverse tels que les polymères PVDF ou les céramiques PZT, le nombre de constantes élastiques se réduit à 9 constantes. On désigne par « matériau orthotrope » que ce dernier possède trois plans de symétrie. Dans ce cas la matrice des constantes élastiques (matrice de rigidité élastique) est donc donnée par:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Du point de vue électrique :

- Les champs électriques E1 et E2 sont négligeables devant E3.
- Les déplacements électriques D sont exprimés en fonction du champ électrique E par:

$$\mathbf{D}_i = \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_i + \mathbf{P}_i \quad (3.7)$$

Où: P est le vecteur de polarisation et $\bar{\varepsilon}$ est la permittivité du vide $\bar{\varepsilon}_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Le champ électrique dérive d'un potentiel Φ :

Alors :

$$\mathbf{E} = -\Phi_{,i}$$

Φ : potentiel électrique.

Les milieux piézoélectriques sont supposés isolants (ils contiennent autant de charges positives et négatives, ils sont donc électriquement neutres et ne conduisent pas le courant électrique. Dans notre cas l'axe de polarisation est Z. Dans notre cas $E_x = 0, E_y = 0$ et $E_z \neq 0$.

- La matrice des coefficients piézoélectriques est donnée par :

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- La matrice des coefficients diélectriques est donnée par :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \epsilon_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

En tenant compte de ces simplifications, les équations constitutives de la piézoélectricité deviennent:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ E_z \end{Bmatrix}$$

Ou encore en introduisant la matrice des charges d:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{15} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ E_z \end{Bmatrix} \right)$$

$$\text{Et } \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \epsilon_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ E_z \end{Bmatrix}$$

Donc le problème se réduit à :

$$\sigma_x = \tilde{C}_{11}\varepsilon_x - \tilde{e}_{31}E_Z \quad (3.8)$$

Et

$$D_z = \tilde{e}_{31}\varepsilon_x + \bar{\epsilon}_{33}E_Z \quad (3.9)$$

Ou bien (sous une autre écriture) :

$$\sigma_x = \tilde{C}_{11}(\varepsilon_x - d_{31}E_Z)$$

Et

$$D_z = \tilde{e}_{31}\varepsilon_x + \bar{\epsilon}_{33}E_Z$$

Avec:

$$\tilde{C}_{11} = C_{11}$$

$$\tilde{C}_{55} = C_{44}$$

$$\tilde{e}_{31} = e_{31}$$

$$\tilde{\epsilon}_{33} = \epsilon_{33}$$

(3.10)

III-6) Formulation variationnelle:

III-6-1) Aperçu sur le principe variationnel d'Hamilton [52] :

Pour aborder les problèmes élastodynamiques des systèmes continus, il existe plusieurs méthodes et démarches, l'une d'elles consiste à postuler un principe variationnel ou énergétique global, exprimant l'équilibre de l'énergie de tout le domaine étudié sous la forme d'une fonctionnelle. La trajectoire réelle du système est alors celle qui rend cette fonctionnelle stationnaire par rapport à toute variation arbitraire de déplacement cinématiquement admissible entre deux instants donnés et s'annulant aux bornes de l'intégrale temporelle. Etant donné qu'une telle approche est largement décrite dans la littérature consacrée à la dynamique analytique et à la théorie des systèmes discrets, on se limite à présenter quelques développements et résultats majeurs. Le principe variationnel le plus couramment appliqué en dynamique des structures est « le principe de Hamilton », qui affirme que la somme des variations des énergies cinétiques et potentielles et de la variation du travail effectué par les forces non conservatives, prise pendant un intervalle de temps quelconque $[t_1, t_2]$ est identiquement nulle.

On appelle H fonctionnelle de Hamilton telle que :

$$H = \int_{t_2}^{t_1} (E_c - E_p + W_{ext}) dt \quad (3.11)$$

E_c, E_p et W_{ext} : désignent respectivement l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le travail des forces extérieures.

La stationnarité de l'énergie totale du système, qui constitue la fonctionnelle associée au principe variationnel, se traduit par l'équation suivante :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_c - E_p) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{ext} dt = 0 \quad (3.12)$$

δ : symbolise la variation subie durant l'intervalle de temps

Ce qui est équivalent à :

$$\delta H = 0$$

En admettant que le mouvement du solide déformable considéré puisse être complètement décrit par n coordonnées généralisées $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) satisfaisant les conditions aux limites sur les frontières, les énergies cinétique et potentielle peuvent être exprimées sous la forme des fonctions suivantes :

$$E_c = E_c(q, \dot{q}, t)$$

$$E_p = E_p(q, t)$$

Où q, \dot{q} représentent respectivement les déplacements et les vitesses du solide.

Si de plus le travail des forces peut être explicité par le produit scalaire suivant :

$$\delta W_{ext} = \delta q^T \cdot F \quad (3.13)$$

Où F représente les forces généralisées

δq^T désigne une variation arbitraire du déplacement généralisé.

Après la détermination de la variation première des énergies cinétique et potentielle, le principe variationnel de Hamilton prend la forme ci-après :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta q^T \left(\frac{\partial E_c}{\partial q} \right) + \delta \dot{q}^T \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) - \delta q^T \left(\frac{\partial E_p}{\partial q} \right) + \delta q^T \cdot F \right] dt = 0$$

Comme il est admis que la variation δq s'annule aux bornes de l'intervalle temporel considéré, en intégrant par partie les termes en vitesse, on aboutit à :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta q^T \left(-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) + \left(\frac{\partial E_c}{\partial q} \right) - \left(\frac{\partial E_p}{\partial q} \right) + F \right) \right] dt = 0 \quad (3.14)$$

Les déplacements étant arbitraires sur tout l'intervalle, l'application du principe de Hamilton consiste à vérifier les équations de mouvement de la structure issues des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial E_c}{\partial q} \right) + \left(\frac{\partial E_p}{\partial q} \right) = F \quad (3.15)$$

III-6-2) Formulation variationnelle (cas élastique):

La fonctionnelle de Hamilton \mathbf{H} est donnée par (3.11):

$$\mathbf{H} = \int_{t_0}^t (\mathbf{E}_c - \mathbf{E}_p + \mathbf{W}_{ext}) dt$$

Comme on a vu précédemment, le principe de Hamilton dit que le mouvement réel d'une poutre est celui qui rend stationnaire cette fonctionnelle par rapport à toute variation arbitraire de déplacement compatible entre deux instants, ce qui se traduit par :

$$\delta \mathbf{H} = 0$$

$$\delta \int_{t_0}^t (\mathbf{E}_c - \mathbf{E}_p + \mathbf{W}_{ext}) dt = 0$$

a) L'énergie cinétique :

L'expression de l'énergie cinétique est:

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{2} \rho \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dv \quad (3.16)$$

b) L'énergie potentielle:

L'expression qui donne l'énergie potentielle est:

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dv \quad (3.17)$$

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \int_v \left(\{\boldsymbol{\varepsilon}_x \quad \mathbf{0}\} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{C}}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \right) dv$$

En développant, on aboutit à :

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \int_v \underbrace{(\tilde{\mathbf{C}}_{11} \boldsymbol{\varepsilon}_x \boldsymbol{\varepsilon}_x)}_{\text{Elastique}} \cdot dv \quad (3.18)$$

c) **Travail des forces extérieures :** Dans ce cas les forces extérieures, ainsi que leurs travaux peuvent être d'une seule nature –mécanique-. Pour une poutre soumise sur toute sa longueur à l'action d'une charge répartie et un couple d'intensité linéique, le travail des forces extérieures s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{W}_{ext} = \int_A (\mathbf{w} \mathbf{p}_z + \boldsymbol{\theta}_y \mathbf{m}_y) \cdot dA \quad (3.19)$$

III-6-3) Formulation variationnelle dans le cas piézoélectrique:

On procède de la manière et on commence par définir les énergies et les travaux des forces extérieures.

a) L'énergie cinétique:

Comme on a vu précédemment dans (3.16), les composantes des matériaux piézoélectriques n'interviennent pas dans l'expression de l'énergie cinétique.

Donc :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega$$

b) L'énergie potentielle:

Dans notre cas, des paramètres piézoélectriques rentrent en jeu, donc l'expression de l'énergie potentielle comporte une composante élastique et une composante électrique.

L'énergie potentielle est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma \varepsilon - ED) d\Omega \quad (3.20)$$

$d\Omega$: élément de volume d'un milieu piézoélectrique.

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x & 0 \end{Bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{e}_{31} \\ 0 \end{Bmatrix} E_Z \right) - E_Z (\tilde{e}_{31} \varepsilon_x + \tilde{\epsilon}_{33} E_Z) \right) d\Omega$$

En développant, on aboutit à :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\underbrace{\tilde{C}_{11} \varepsilon_x \varepsilon_x}_{\text{Elastique}} - \underbrace{\tilde{e}_{31} \varepsilon_x E_Z - \tilde{e}_{31} E_Z \varepsilon_x}_{\text{Piézoélectrique}} - \underbrace{\tilde{\epsilon}_{33} E_Z E_Z}_{\text{Diélectrique}} \right) d\Omega \quad (3.21)$$

On constate bien l'apparition des composantes élastique, piézoélectrique et diélectrique.

L'énergie potentielle élastique :

L'énergie potentielle élastique est donnée par l'expression :

$$E_{p \text{ élastique}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{C}_{11} \varepsilon_x \varepsilon_x) d\Omega$$

Si on remplace les déformations par leurs expressions, on aboutit à :

$$E_{p \text{ élastique}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\tilde{C}_{11} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - 2z \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right] \right) d\Omega \quad (3.22)$$

L'énergie potentielle piézoélectrique :

L'énergie potentielle piézoélectrique est définie comme suit :

$$E_{p \text{ piézo}} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{e}_{31} \epsilon_x E_Z + \tilde{e}_{31} \epsilon_x E_Z) d\Omega$$

Sous forme encore plus détaillée, on a :

$$E_{p \text{ piézo}} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{e}_{31} \left(\frac{\partial u}{\partial x} E_Z + E_Z \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} E_Z - z \cdot E_Z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) d\Omega \quad (3.23)$$

L'énergie potentielle diélectrique :

Elle est donnée par :

$$E_{p \text{ diélect}} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{\epsilon}_{33} E_Z E_Z) d\Omega \quad (3.24)$$

c) Travail des forces extérieures :

Dans notre cas les forces extérieures, ainsi que leurs travaux peuvent être de natures différentes (mécanique ou électrique).

Pour une poutre soumise sur toute sa longueur à l'action d'une charge répartie et un couple d'intensité linéique, le travail des forces extérieures s'écrit sous la forme :

$$W_{ext} = \int_A (w p_z + \theta_y m_y + \phi \cdot D) \cdot dA \quad (3.25)$$

Où D est la charge appliquée sur la surface (déplacement électrique).

Après que la formulation variationnelle est développée, on passe à l'étape suivante, qui est la discrétisation par éléments finis.

III-7) Discrétisation par éléments finis :

III-7-1) Introduction :

La méthode des éléments finis fait maintenant partie des outils couramment utilisés lors de la conception et à l'analyse des produits industriels, c'est l'une des méthodes les plus efficaces et les plus générales, pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : mécanique, aérospatial, automobile, nucléaire, génie civil, construction navale...etc.

Les outils d'aide à la modélisation devenant de plus en plus perfectionnés, l'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée et peut sembler de moins en moins à une affaire de spécialistes. Si l'utilisation de la méthode se démocratise de par la simplicité croissante de mise en œuvre, la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode [53]. Généralement pour les structures mécaniques les solutions et réponses analytiques sont difficiles à développer et à obtenir souvent à cause de la complexité des structures ou du

problème lui-même. Alors une approximation des fonctions, qui expriment les comportements des structures, s'avère utile pour étudier le comportement et la réponse des structures considérées. Pour que l'approximation donne un résultat satisfaisant, il faut que l'erreur soit moindre entre la fonction réelle ou analytique et le modèle d'approche.

De ce fait, la M.E.F. est basée sur une décomposition du domaine, dans lequel on désire effectuer la simulation en sous-domaines de forme géométrique simple appelés 'éléments', pour lesquels on procède à des approximations nodales des champs de déplacements ou de contraintes, qui prennent en général la forme de fonctions polynomiales. L'ensemble de ces éléments constitue ce que l'on appelle le 'maillage du domaine'. Ces éléments sont liés par un nombre fini de conditions de continuité, exprimées en certains points communs à plusieurs éléments appelés 'nœuds' et on définit sur chaque nœud un nombre d'inconnus appelés 'degrés de liberté'.

Ce sont les méthodes classiques du calcul des structures, méthode des déplacements et celle des forces, qui sont à la base de la M.E.F. Selon que l'on approxime le champ des contraintes ou le champ des déplacements, on crée le modèle contrainte ou le modèle déplacement.

Le modèle déplacement semble plus commode à mettre en œuvre, car il s'adapte généralement mieux aux problèmes de calcul des structures et sera adopté dans ce qui suit.

Dans la méthode des déplacements, la formulation du problème est faite en fonction des déplacements aux nœuds, qui sont les inconnus cinématiques. La structure est préalablement discrétisée en éléments finis. Le calcul est conduit suivant deux niveaux de formulation : élémentaire au niveau de l'élément fini et globale au niveau de la structure complète.

- La formulation élémentaire : Pour chaque élément et dans un repère local, on choisit une fonction d'interpolation, qui représente la variation des déplacements à l'intérieur de cet élément en termes de déplacements nodaux. Puis on calcule pour chaque élément ses matrices de rigidité et de masse, ainsi que son vecteur des forces dits élémentaires.
- La formulation globale : Elle consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle de l'énergie potentielle en fonction des déplacements inconnus de tous les nœuds de la structure. Cette étape nécessite l'assemblage des matrices de rigidité et de masse et les vecteurs forces et déplacements de la structure à partir des caractéristiques élémentaires (matrices de rigidité et de masse et vecteurs forces et déplacements de chaque élément).

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis sont les suivantes [54]:

- Discrétisation du milieu continu en sous domaines.

- Construction de l'approximation nodale par sous domaine.
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.
- Assemblage des matrices élémentaires.
- Prise en compte des conditions aux limites.
- Résolution du système d'équations.

III-7-2) Déroulement de l'étude [54]: Pour réaliser une étude par éléments finis, il faut que les objectifs de l'étude soient bien définis (statique ou dynamique, élastique ou plastique, thermique, le type de matériaux, les charges appliquées...etc.) .Le cadre de l'étude, c'est-à-dire le temps et les moyens disponibles, doit être compatible avec les objectifs et la précision cherchée. Supposons que toutes ces conditions soient remplies, l'étude proprement dite est organisée de façon logique selon les étapes suivantes :

a) Analyse du problème [54]: Cette analyse doit fixer les paramètres du calcul et conduire à la réalisation d'un maillage. Cette phase basée sur l'expérience personnelle acquise dépend de nombreuses considérations. La difficulté essentielle est de trouver un bon compromis entre les paramètres propres au problème et ceux relatifs à l'environnement de travail. L'analyse du problème nous conduit à préciser un certain nombre d'hypothèses et à effectuer des choix qui conditionnent les résultats.

b) Choix du modèle : En calcul des structures, les plus classiques sont de type : poutre, élasticité plane, axisymétrique, coques mince ou épaisse, tridimensionnel. . . À ces modèles mathématiques correspondent des familles d'éléments finis.

c) Choix du type d'élément : Il est fonction de la précision voulue, de la nature du problème, mais aussi du temps disponible. On choisira les éléments les mieux adaptés dans les familles disponibles.

c) Hypothèse de comportement [54]: Quel est le modèle à utiliser pour représenter le comportement du matériau? Le calcul est-il linéaire ? Doit-on modéliser l'amortissement ? Si le matériau est hétérogène ou composite, peut-on utiliser une méthode d'homogénéisation ? Peut-on traduire l'incompressibilité du milieu ?...etc.

d) Choix du maillage : C'est l'ensemble des opérations à effectuer pour établir le modèle mathématique de calcul représentant le mieux la structure réelle. Pratiquement cette étape consiste du point de vue topologique, à ramener la structure à une géométrie simple, du point de vue rhéologique, elle consiste à choisir la loi constitutive du matériau et à déterminer les constantes qui définissent cette loi. Le maillage dépend essentiellement de la géométrie, des sollicitations extérieures, des conditions aux limites imposées, mais aussi des informations

recherchées : locales ou globales. Sans oublier bien entendu le type d'outils, dont on dispose, pour réaliser ce maillage.

e) Construction de l'approximation nodale : Pour chaque élément, on choisit une fonction d'interpolation, qui représente la variation des déplacements à l'intérieur de cet élément en termes de déplacements nodaux.

f) Exécution des calculs à l'échelle élémentaire : Cette étape constitue la partie la plus importante du problème. Les déplacements aux nœuds sont déterminés de telle façon que les contraintes engendrées dans l'élément équilibrent le chargement extérieur, de là la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ peut être déterminée. Il faut aussi calculer la matrice de masse $[M_e]$ de chaque élément. Cette matrice est déduite de l'énergie cinétique de l'élément.

Après avoir déterminé ces matrices élémentaires, il faut les exprimer dans le repère global choisi pour la structure.

g) Assemblage des matrices élémentaires : La phase de l'assemblage consiste à construire les matrices $[K]$, $[M]$ et $\{F\}$ de la structure complète à partir des matrices élémentaires $[K_e]$, $[M_e]$, $\{U_e\}$ et $\{F_e\}$ des différents éléments, exprimées dans le repère global, en sommant les énergies de déformation et cinétique de chaque élément, tout en respectant la compatibilité des déplacements et l'équilibre des forces au nœuds.

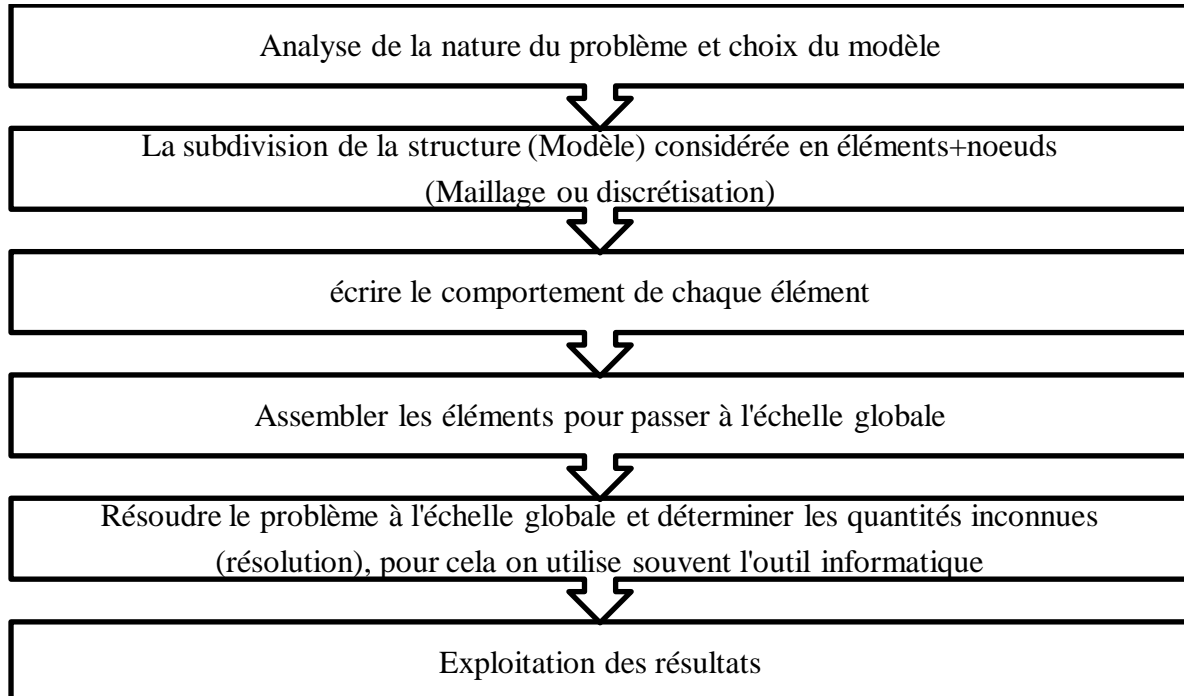


Fig 3-7 : Procédure de la méthode des éléments finis.

III-7-3) Cas de poutre :

Revenant à notre cas, comme la poutre possède une dimension caractéristique, elle sera alors considérée comme un élément linéaire. Elle sera aussi divisée en N éléments de longueur L_e .

Chaque élément possède deux nœuds notés par i et j situés aux extrémités de l'élément et chacun de ces nœuds possède trois degrés de liberté (u, w, θ) [1].

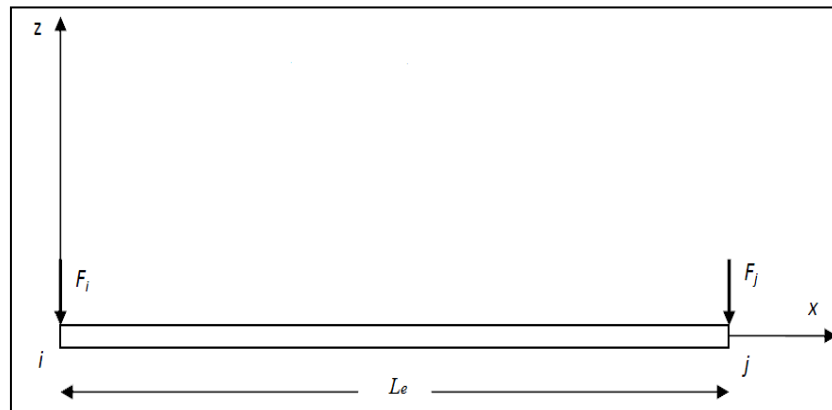


Fig 3-8 Élément de la poutre.

Pour notre étude, on choisit les fonctions d'interpolation de la forme :

$N(x)$	$N(\xi)$
$N_1 = 1 - \frac{x}{L_e}$	$N_1 = 1 - \xi$
$N_2 = \frac{x}{L_e}$	$N_2 = \xi$
$N_3 = \frac{x^3}{L_e^2} - 2\frac{x^2}{L_e} + x$	$N_3 = L_e \xi (\xi - 1)^2$
$N_4 = 2\frac{x^3}{L_e^3} - 3\frac{x^2}{L_e^2} + 1$	$N_4 = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1$
$N_5 = \frac{x^3}{L_e^2} - \frac{x^2}{L_e}$	$N_5 = L_e \xi^2 (\xi - 1)$
$N_6 = 3\frac{x^2}{L_e^2} - 2\frac{x^3}{L_e^3}$	$N_6 = \xi^2 (3 - 2\xi)$
$N_7 = 3\frac{x^2}{L_e^2} - 4\frac{x}{L_e} + 1$	$N_7 = 3\xi^2 - 4\xi + 1$
$N_8 = 6\frac{x^2}{L_e^3} - 6\frac{x}{L_e^2}$	$N_8 = \frac{6}{L_e} (\xi^2 - \xi)$
$N_9 = 3\frac{x^2}{L_e^2} - 2\frac{x}{L_e}$	$N_9 = 3\xi^2 - 2\xi$
$N_{10} = -6\frac{x^2}{L_e^2} + 6\frac{x}{L_e}$	$N_{10} = 6(-\xi^2 + \xi)$

Tableau 3-2: Les fonctions d'interpolation dans le cas des poutres.

Avec: $\xi = \frac{x-x_i}{L_e}$

On appelle \mathbf{N} la matrice d'interpolation telle que :
$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \\ 0 & N_7 & N_8 & 0 & N_9 & N_{10} \end{bmatrix}$$

Les déplacements globaux $\{u \ \theta \ w\}^T$ sont liés aux déplacements nodaux $q_e\{u_i \ \theta_i \ w_i \ u_j \ \theta_j \ w_j\}^T$ par la relation :

$$\begin{Bmatrix} u \\ \theta \\ w \end{Bmatrix} = Nq_e \quad (3.26)$$

Ou encore :

$$\begin{Bmatrix} u \\ \theta \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \\ 0 & N_7 & N_8 & 0 & N_9 & N_{10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \theta_i \\ w_i \\ u_j \\ \theta_j \\ w_j \end{Bmatrix}$$

Le potentiel électrique est aussi discrétisé de la manière suivante :

$$\Phi = N_\Phi \Phi_e \quad (3.27)$$

Dans laquelle :

N_Φ est la matrice d'interpolation donnée par :

$$N_\Phi = \left[\mathbf{1} - \frac{z}{h} \quad \frac{z}{h} \right]$$

Et Φ_e est le vecteur des degrés de liberté élémentaire formé par des degrés de liberté électriques :

$$\Phi_e = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix}$$

III-7-4) Calcul des matrices élémentaires :

Si on introduit les fonctions d'interpolation nodales dans les expressions des composantes énergétiques définies auparavant, afin d'aboutir aux expressions approximatives des énergies, ces expressions seront définies dans le but de déterminer les matrices de masse, de rigidité et le vecteur des forces extérieures.

III-7-4-1) Cas élastique :

a) Matrice de rigidité élémentaire:

Si on remplace les déformations par leurs approximations nodales, l'expression de l'énergie potentielle sera donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_\Omega q_e^t \left[\tilde{C}_{11} \left(\left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] + z^2 \left[\frac{dN_\theta}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_\theta}{dx} \right] - 2z \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_\theta}{dx} \right] \right) \right] q_e dv \quad (3.28)$$

Donc :

$$E_p = \frac{1}{2} q_e^t [K]_e q_e \quad (3.29)$$

Avec :

$[K]_e$: est la matrice de rigidité élémentaire due à l'élasticité et elle est donnée par :

$$[K]_e = \int_{\Omega} \left[\tilde{C}_{11} \left(\left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] + z^2 \left[\frac{dN_{\theta}}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_{\theta}}{dx} \right] - 2z \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_{\theta}}{dx} \right] \right) \right] dV \quad (3.30)$$

b) Matrice de masse élémentaire :

Faisons la même chose avec l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{q}_e^T ([N_u]^T [N_u] + z^2 [N_{\theta}]^T [N_{\theta}] + [N_w]^T [N_w] - 2z [N_u]^T [N_{\theta}]) \dot{q}_e dV \quad (3.31)$$

Après intégration on trouve :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T [M_e] \dot{q}_e \quad (3.32)$$

Avec : $[M_e]$ est la matrice de masse élémentaire. Elle est donnée par :

$$[M_e] = \rho \int_{\Omega} ([N_u]^T [N_u] + z^2 [N_{\theta}]^T [N_{\theta}] + [N_w]^T [N_w] - 2z [N_u]^T [N_{\theta}]) d\Omega \quad (3.33)$$

c) Vecteur de force élémentaire :

D'après l'expression du travail des forces extérieures et en suivant le même algorithme, on obtient l'expression discrète du travail des forces extérieures :

$$W_{ext} = \int_A [q_e^T ([N_w]^T p_z + [N_{\theta}]^T m_y)] dA \quad (3.34)$$

On peut écrire :

$$W_{ext} = q_e^T \{F\}_e \quad (3.35)$$

Avec :

$\{F\}_e$: est la composante mécanique du vecteur élémentaire de force, tel que :

$$\{F\}_e = \int_A ([N_w]^T p_z + [N_{\theta}]^T m_y) dA \quad (3.36)$$

Après avoir déterminé les matrices et vecteurs élémentaires, il faut passer à l'étape d'assemblage, afin de former les matrices et les vecteurs globaux représentant toute la structure.

D'après **III-6-1** : l'expression matricielle de la formulation variationnelle du principe de Hamilton mène aux équations de mouvement de la structure qui sont dans ce cas:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (3.37)$$

III-7-4-2) Cas piézoélectrique :

a) Matrice de rigidité élémentaire:

Dans le cas piézoélectrique, l'expression de l'énergie potentielle comporte elle-même 3 composantes, de ce fait la matrice de rigidité élémentaire comporte aussi 4 sous matrices, qui seront définies dans ce qui suit.

En remplaçant les déformations par leurs approximations nodales dans l'expression de l'énergie potentielle élastique, on trouve :

$$\mathbf{E}_p \text{ élastique} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q}_e^t \left[\tilde{\mathbf{C}}_{11} \left(\left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] + \mathbf{z}^2 \left[\frac{dN_{\theta}}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_{\theta}}{dx} \right] - 2\mathbf{z} \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_{\theta}}{dx} \right] \right) \right] \mathbf{q}_e d\Omega \quad (3.38)$$

Donc :

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^t [\mathbf{K}_{uu}]_e \mathbf{q}_e \quad (3.39)$$

Avec :

$[\mathbf{K}_{uu}]_e$: est la matrice de rigidité élémentaire due à l'élasticité et elle est donnée par :

$$[\mathbf{K}_{uu}]_e = \int_{\Omega} \left[\tilde{\mathbf{C}}_{11} \left(\left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] + \mathbf{z}^2 \left[\frac{dN_{\theta}}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_{\theta}}{dx} \right] - 2\mathbf{z} \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_{\theta}}{dx} \right] \right) \right] d\Omega \quad (3.40)$$

De même si on remplace les déformations, ainsi que le potentiel électrique par leurs expressions nodales dans l'expression de l'énergie potentielle piézoélectrique, on trouve :

$$\mathbf{E}_p \text{ piézo} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q}_e^t \left[\tilde{\mathbf{e}}_{31} \left(\left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T [\mathbf{N}_{\Phi}] + \mathbf{z} \left[\frac{dN_{\theta}}{dx} \right]^T [\mathbf{N}_{\Phi}] \right) \Phi_e + \Phi_e^T \left(\tilde{\mathbf{e}}_{31} \left([\mathbf{N}_{\Phi}]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] + [\mathbf{N}_{\Phi}]^T \left[\frac{dN_{\theta}}{dx} \right] \right) \right) \right] \mathbf{q}_e d\Omega \quad (3.41)$$

Soit:

$$\mathbf{E}_p \text{ piézo} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T [\mathbf{K}_{u\Phi}] \Phi + \frac{1}{2} \Phi_e [\mathbf{K}_{\Phi u}] \mathbf{q}_e^T \quad (3.42)$$

Avec: $[\mathbf{K}_{u\Phi}]$ et $[\mathbf{K}_{\Phi u}]$ sont les matrices de rigidité élémentaires dues à la piézoélectricité et elles sont données par :

$$[\mathbf{K}_{u\Phi}] = -\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{e}}_{31} \left(\left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T [\mathbf{N}_{\Phi}] + \mathbf{z} \left[\frac{dN_{\theta}}{dx} \right]^T [\mathbf{N}_{\Phi}] \right) d\Omega \quad (3.43)$$

$$[\mathbf{K}_{\Phi u}] = -\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{e}}_{31} \left([\mathbf{N}_{\Phi}]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] + [\mathbf{N}_{\Phi}]^T \left[\frac{dN_{\theta}}{dx} \right] \right) d\Omega \quad (3.44)$$

On fait la même chose avec l'expression de l'énergie potentielle diélectrique, on trouve :

$$\mathbf{E}_p \text{ diélect} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Phi_e^T \left(\tilde{\mathbf{\epsilon}}_{31} ([\mathbf{N}_{\Phi}]^T [\mathbf{N}_{\Phi}]) \right) \Phi_e d\Omega \quad (3.45)$$

Soit :

$$\mathbf{E}_p \text{ diélect} = \frac{1}{2} \Phi_e^T [\mathbf{K}_{\Phi\Phi}]_e \Phi_e \quad (3.46)$$

Sachant que :

$[\mathbf{K}_{\Phi\Phi}]_e$: matrice de rigidité élémentaire due à la diélectricité donnée par :

$$[\mathbf{K}_{\Phi\Phi}]_e = -\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{\epsilon}}_{31} ([\mathbf{N}_{\Phi}]^T [\mathbf{N}_{\Phi}]) d\Omega \quad (3.47)$$

Après avoir défini toutes les sous matrices de rigidité élémentaires (élastique, piézoélectrique et diélectrique), on construit la matrice de rigidité élémentaire $[\mathbf{K}]_e$ de telle sorte que :

$$[\mathbf{K}]_e = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}]_e & [\mathbf{K}_{u\Phi}]_e \\ [\mathbf{K}_{\Phi u}]_e & [\mathbf{K}_{\Phi\Phi}]_e \end{bmatrix}$$

Dans laquelle $[\mathbf{K}_{uu}]_e$ et $[\mathbf{K}_{\Phi\Phi}]_e$ représentent respectivement les composantes élastique et électrique de la structure d'une part. D'autre part les termes extra-diagonaux $[\mathbf{K}_{u\Phi}]_e$ et $[\mathbf{K}_{\Phi u}]_e$ représentent les termes de couplage entre ces composantes.

b) Matrice de masse élémentaire :

Revenons à l'expression de l'énergie cinétique définie auparavant et en remplaçant les déplacements par leurs approximations nodales, on aboutit à l'expression discrète de l'énergie cinétique, qui est :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{q}}_e^T ([\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{N}_u] + z^2 [\mathbf{N}_{\theta}]^T [\mathbf{N}_{\theta}] + [\mathbf{N}_w]^T [\mathbf{N}_w] - 2z [\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{N}_{\theta}]) \dot{\mathbf{q}}_e d\Omega$$

Après intégration on trouve :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_e^T [\mathbf{M}_e] \dot{\mathbf{q}}_e$$

Avec : $[\mathbf{M}_e]$ est la matrice de masse élémentaire. Elle est donnée par :

$$[\mathbf{M}_e] = \rho \int_{\Omega} ([\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{N}_u] + z^2 [\mathbf{N}_{\theta}]^T [\mathbf{N}_{\theta}] + [\mathbf{N}_w]^T [\mathbf{N}_w] - 2z [\mathbf{N}_u]^T [\mathbf{N}_{\theta}]) d\Omega$$

c) Vecteur de force élémentaire :

D'après l'expression du travail des forces extérieures et en suivant le même algorithme, on obtient l'expression discrète du travail des forces extérieures :

$$W_{ext} = \int_A [\mathbf{q}_e^T ([\mathbf{N}_w]^T \mathbf{p}_z + [\mathbf{N}_{\theta}]^T \mathbf{m}_y) + \Phi_e^T ([\mathbf{N}_{\Phi}]^T \mathbf{D})] dA \quad (3.48)$$

On peut écrire :

$$W_{ext} = \mathbf{q}_e^T \{\mathbf{F}\}_e + \Phi_e^T \{\mathbf{Q}\}_e \quad (3.49)$$

Avec :

$\{\mathbf{F}\}_e$: composante mécanique du vecteur élémentaire de force, tel qu'il est défini en (3.36) :

$$\{\mathbf{F}\}_e = \int_A ([\mathbf{N}_w]^T \mathbf{p}_z + [\mathbf{N}_{\theta}]^T \mathbf{m}_y) dA$$

$\{\mathbf{Q}\}_e$: composante électrique du vecteur élémentaire de force et donnée par :

$$\{\mathbf{Q}\}_e = \int_A \Phi_e^T ([\mathbf{N}_{\Phi}]^T \mathbf{D}) dA \quad (3.50)$$

De là on peut construire le vecteur élémentaire des forces de la manière suivante :

$$\{\mathbf{f}\}_e = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\}_e \\ \{\mathbf{Q}\}_e \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

Une fois les matrices et les vecteurs élémentaires sont définis, on passe à l'étape d'assemblage, pour les exprimer dans les repères globaux, afin de former les matrices et les vecteurs globaux représentant toute la structure.

L'expression matricielle de la formulation variationnelle donne les équations de mouvement de la structure :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\mathbf{u}}\} \\ \{\ddot{\Phi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}] & [\mathbf{K}_{u\Phi}] \\ [\mathbf{K}_{\Phi u}] & [\mathbf{K}_{\Phi\Phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}\} \\ \{\Phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{Q}\} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

NB: la matrice de masse intervient seulement avec les composantes mécaniques.

Sous forme explicite, les équations de mouvement sont données par :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_{uu}]\{\mathbf{u}\} + [\mathbf{K}_{u\Phi}]\{\Phi\} &= \{\mathbf{F}\} \\ [\mathbf{K}_{\Phi u}]\{\mathbf{u}\} + [\mathbf{K}_{\Phi\Phi}]\{\Phi\} &= \{\mathbf{Q}\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

NB : On peut également introduire la matrice d'amortissement $[\mathbf{C}]$ comme paramètre dans l'équation de mouvement, pour représenter le mécanisme de dissipation interne de la structure. Dans ce genre d'étude, on considère généralement un amortissement de type Rayleigh tel que:

$$[\mathbf{C}] = \alpha[\mathbf{M}] + \beta[\mathbf{K}_{uu}]$$

Les équations de mouvement deviennent :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_{uu}]\{\mathbf{u}\} + [\mathbf{K}_{u\Phi}]\{\Phi\} &= \{\mathbf{F}\} \\ [\mathbf{K}_{\Phi u}]\{\mathbf{u}\} + [\mathbf{K}_{\Phi\Phi}]\{\Phi\} &= \{\mathbf{Q}\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

III-8) Intervention de l'amortissement structural :

Toute structure réelle est plus ou moins amortie, ce qui provoque une dissipation de l'énergie lors des vibrations. Si cette énergie absorbée par la structure est très faible, ce qui implique un amortissement très faible, cette structure est dite conservative et si la structure dissipe de l'énergie d'où un amortissement important, alors la structure est dite dissipative [42].

L'amortissement dans les matériaux est un processus complexe, qui fait intervenir différents mécanismes de réorganisation de la micro et de la macro structure. Pendant la déformation, tous ces mécanismes d'amortissement sont impliqués, mais à des degrés divers, qui peuvent être influencés par la fréquence ou l'amplitude du mouvement, ainsi que par la température.

De ce fait, la caractérisation de l'amortissement intrinsèque des matériaux est très difficile[55].

Il est difficile de modéliser l'amortissement dans une structure dissipative. Cette dissipation est due à l'interaction entre les éléments constituant la structure ou à des mécanismes ou des dispositifs de dissipation d'énergie implantés au sein de la structure, ou encore à des mécanismes de frottement interne [56].

L'amortissement provient de diverses origines. Cette diversité est liée à la nature et aux sources des dissipations des énergies [56]. Un système réel peut intégrer des composants aux caractéristiques d'amortissement spécifiques, comme des plots de suspension, ou son support peut avoir pour fonction annexe de dissiper de l'énergie vibratoire [55].

III-8-1) Types d'amortissement :

Il existe plusieurs types d'amortissement, mais les plus courants sont :

- a) L'amortissement visqueux [42]: Le modèle d'amortissement visqueux est le plus couramment utilisé. Il correspond à la modélisation d'une énergie dissipée proportionnelle à la vitesse vibratoire et il est dû à l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux sur une surface solide.
- b) L'amortissement quadratique [42]: Dans ce type d'amortissement, la force d'amortissement est proportionnelle au carré de la vitesse vibratoire et c'est le cas pour un écoulement turbulent d'un fluide visqueux sur une surface solide.
- c) L'amortissement structural [42]: La force d'amortissement est proportionnelle au déplacement et elle est en phase avec la vitesse. Ce sont des mécanismes de frottement interne qui sont responsables de cet amortissement.
- d) L'amortissement de Coulomb 'sec'[42]:
La force d'amortissement est proportionnelle à l'effort normal à la surface et de sens opposé au sens de mouvement, elle est due au frottement entre deux surfaces solides.

Une supposition est faite dans le but de faciliter l'analyse dynamique des structures.

On admet un amortissement visqueux équivalent à l'amortissement existant au sein de la structure et ce n'est pas valable dans le cas où l'amortissement original est visqueux, ensuite on compare la variation de l'énergie dissipée par cycle (autrement dit, l'équivalence est sur la quantité de l'énergie dissipée) [42].

Dans notre travail, on s'intéressera uniquement à l'amortissement structural, vu sa présence et son importance dans l'analyse vibratoire des structures dissipatives et éventuellement à l'amortissement visqueux, qui peut être utilisé pour quantifier l'amortissement structural (amortissement visqueux équivalent) [42].

III-8-2) L'énergie de dissipation [42]:

Quand un corps rigide est soumis à un chargement cyclique (charge-décharge), une partie de l'énergie absorbée est dissipée par des mécanismes de frottement interne. Ce phénomène est dû à l'imperfection de l'élasticité du matériau considéré. Dans ce cas la courbe charge-décharge possède deux branches (l'une supérieure et qui correspond au chargement et l'autre inférieure, qui correspond au déchargement), le contour décrit par les deux branches forme ce qu'on appelle 'la boucle d'hystérésis'.

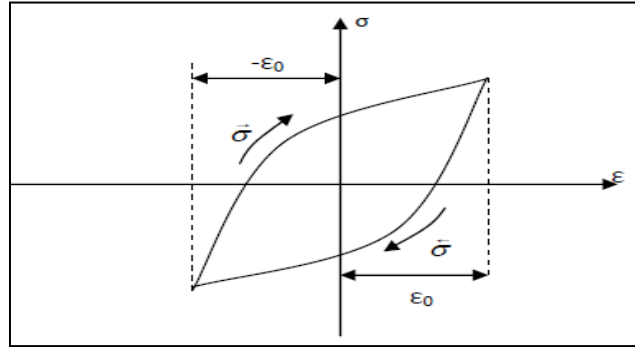


Fig 3-9: Courbe d'hystérésis.

La valeur de l'énergie dissipée par cycle dans le cas d'un amortissement hystérique peut être évaluée par la surface de la courbe d'hystérésis notée ' ΔW '.

L'aire de la courbe est donnée par :

$$\Delta W = \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \overrightarrow{\sigma(\varepsilon)} \cdot d\varepsilon + \int_{\varepsilon_0}^{-\varepsilon_0} \overleftarrow{\sigma(\varepsilon)} \cdot d\varepsilon \quad (3.55)$$

Où $\overrightarrow{\sigma(\varepsilon)}$ et $\overleftarrow{\sigma(\varepsilon)}$ décrivent respectivement les branches supérieure et inférieure du cycle.

La loi de Hooke « $\sigma = E\varepsilon$ » qui dit que la relation entre la contrainte et la déformation dans le domaine élastique est linéaire n'est donc plus valable en raison de l'imperfection des matériaux. De ce fait, plusieurs auteurs ont élaboré des équations différentielles non linéaires, qui décrivent cette relation [1].

- La relation de N.N. Davidankov : $\vec{\sigma} = E \cdot \left[\varepsilon \pm \frac{\eta}{n} (\varepsilon_2 \mp \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_2^n \right]$
- La relation de E.S. Sorokine : $\vec{\sigma} = E\varepsilon \pm E \frac{\bar{\psi}}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_2^2}}$
- La relation de Y.G. Panovco : $\vec{\sigma} = E \cdot \left[\varepsilon \pm a\varepsilon_2^n \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_2^2}} \right]$

Où : $\bar{\psi}$ est le Coefficient de dissipation d'énergie, n , η et a sont des paramètres définis par les courbes expérimentales.

II-8-3) Equivalence entre amortissement structural et amortissement visqueux [42]:

C'est une équivalence entre les quantités d'énergie dissipée par cycle de vibration.

$$U_D = \oint F_{am} \cdot dx \quad (3.56)$$

Or : $dx = \dot{x}dt$

Donc :

$$U_D = \oint F_{am} \dot{x} dt$$

\oint : intégrale sur un cycle

Considérons le système suivant :

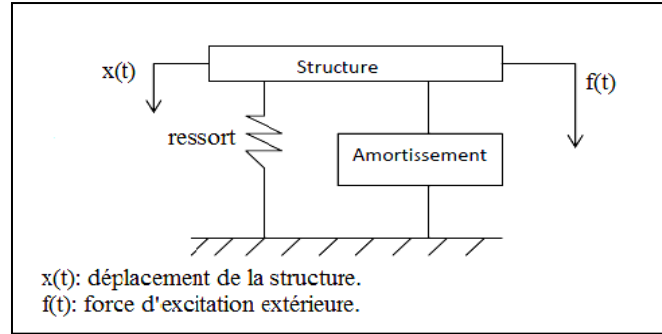


Fig 3-10: Structure soumise à une excitation.

Dans le cas d'un amortissement visqueux et d'une force d'excitation harmonique :

$$f(t) = F \sin(\omega t)$$

La réponse sera aussi harmonique :

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = X\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

La force d'amortissement dans ce cas est proportionnelle à la vitesse :

$$F_{am} = C\dot{x}(t)$$

On remplace dans l'expression de U_D , on trouve : $U_D = \int_0^T C\dot{x}(t)^2 dt$

$$U_D = \pi\omega CX^2 \quad (3.57)$$

Dans le cas d'un amortissement structural, la force d'amortissement F_{am} est supposée proportionnelle au déplacement $x(t)$: $F_{am} = a \cdot x(t)$

Donc si on la remplace dans U_D , on trouve l'énergie dissipée au bout d'un cycle de mouvement:

$$U'_D = a \cdot X^2$$

Où a est une constante.

Si on compare les deux expressions de l'énergie dissipée pendant un cycle de mouvement dans les deux cas, c'est à dire le cas des amortissements visqueux et hystérique, on a :

$$a = \pi C\omega$$

D'où :

$$C' = \frac{a}{\pi\omega} \quad (3.58)$$

Où C' est le coefficient d'amortissement équivalent à l'amortissement visqueux.

Pour déterminer l'amortissement visqueux équivalent, on considère un système mécanique comportant un amortissement structural et soumis à une force harmonique.

L'équation de mouvement est donnée par :

$$m. \ddot{x}(t) + C_{eq} \dot{x}(t) + k. x(t) = f(t) \quad (3.60)$$

Avec $f = F_0 e^{j\omega t}$ (une harmonique)

La solution est aussi harmonique $x(t) = X_0 e^{j\omega t}$

On les remplace dans l'équation de mouvement, on trouve :

$$\left(-m\omega^2 + k \left(1 + j \frac{a}{k\pi} \right) \right) X_0 = F_0 \quad (3.61)$$

Soit: $\bar{\lambda} = \frac{a}{k\pi} \Rightarrow C_{eq} = \frac{\bar{\lambda}}{\omega} k$

Si on remplace dans l'expression de l'énergie dissipée, on aboutit à :

$$U_D = \bar{\lambda} \pi k X^2 \quad (3.62)$$

L'équation de mouvement est donc donnée par :

$$m. \ddot{x}(t) + \frac{\bar{\lambda}}{\omega} k \dot{x}(t) + k. x(t) = f(t) \quad (3.63)$$

Où $\bar{\lambda}$ est la constante d'amortissement hystérique, qui dépend des propriétés mécaniques du matériau.

III-8-4) Détermination du coefficient d'amortissement [42]:

Pour la détermination du coefficient d'amortissement, on introduit une nouvelle notion, celle de la rigidité complexe, du fait qu'il est impossible de séparer l'amortissement structural de la rigidité. Considérant une rigidité complexe du type :

$$\tilde{k} = k (1 + j\eta) \quad (3.64)$$

Où k et η représentent respectivement la rigidité statique et le coefficient de perte.

Posant $k. \eta = \bar{\lambda}$ (coefficient de l'amortissement structural)

Alors :

$$\tilde{k} = k + j\bar{\lambda} \quad (3.65)$$

La force d'amortissement est donnée par :

$$F_{am} = j. \bar{\lambda}. x = j. k. \eta. x$$

Si on remplace dans l'équation de mouvement, on trouve :

$$m. \ddot{x}(t) + j. k. \eta. x(t) + k. x(t) = f(t)$$

$$m. \ddot{x}(t) + (k + j. k. \eta). x(t) = f(t)$$

Pour déterminer C_{eq} , on doit évaluer $\Delta \tilde{W} = \Delta W$

$$\Delta \tilde{W} = \int F_{am} . dx$$

D'autre part : $F_{am} = \tilde{k} \cdot x$

On est dans le cas d'une excitation harmonique, donc $x(t)$ est aussi harmonique de sorte que :

$$x(t) = X \sin(\omega t)$$

Donc :

$$\begin{aligned} F_{am} &= \tilde{k} \cdot X \cdot \sin(\omega t) \\ &= k \cdot X \cdot \sin(\omega t) + j\eta k X \sin(\omega t) \end{aligned}$$

On sait que $j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

Donc la partie imaginaire est en quadrature de phase avec la partie réelle.

De là on peut écrire :

$$\begin{aligned} F_{am} &= k \cdot X \cdot \sin(\omega t) + \eta k X \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ &= k \cdot X \cdot \sin(\omega t) + \eta k X \cdot \cos(\omega t) \end{aligned}$$

On sait que : $x(t) = X \sin(\omega t)$

De là on peut déduire que : $\sin(\omega t) = \frac{x(t)}{X}$

D'autre part on a :

$$\cos(\omega t) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega t)}$$

Donc si on remplace dans l'expression de F_{am} , on aboutit à :

$$F_{am} = kX \frac{x(t)}{X} + \eta kX \sqrt{1 - \left(\frac{x(t)}{X}\right)^2}$$

De là :

$$F_{am} = k \cdot x(t) + \eta \cdot k \sqrt{X^2 - x^2} \quad (3.66)$$

C'est l'équation d'une ellipse de pente k .

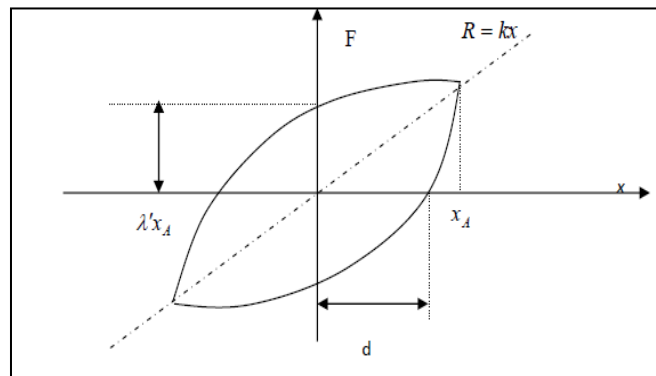


Fig 3-11: Courbe de la force en fonction du déplacement.

d est le point d'intersection entre la courbe d'hystérésis et l'axe ox .

$$\frac{\lambda'}{k} = \frac{d}{\sqrt{(x_A^2 - d^2)}}$$

d est trop petit car la structure possède un amortissement faible, donc on peut écrire :

$$\frac{\lambda'}{k} = \frac{d}{x_A}$$

D'autre part, le rapport entre l'énergie dissipée et l'énergie potentielle élastique est :

$$\frac{U_D}{U_E} = 2\pi\lambda' \quad (3.67)$$

L'équation de mouvement est :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C_{eq}]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\}$$

Dans notre cas, on choisit un amortissement proportionnel de type Rayleigh qui considère l'amortissement comme une application linéaire entre les matrices de masse et de rigidité :

$$[C_{eq}] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3.68)$$

α et β sont des constantes définies expérimentalement et choisies, de telle manière à ce que l'équation de mouvement représente le mieux possible le comportement de la structure.

Le modèle d'amortissement de Rayleigh dérive d'un modèle plus général dit amortissement de « **Caughey** », qui suppose que la matrice d'amortissement s'écrit sous la forme [57]:

$$[C] = [M] \sum_{i=0}^n \alpha_i ([M]^{-1}[K])^i$$

Si $i=1$, on se trouve dans le cas d'un amortissement de Rayleigh.

III-8-5) Raisons de notre choix [55]:

Les programmes de calcul en éléments finis permettent de déterminer les pulsations propres et les vecteurs propres des systèmes non amortis en fonction des propriétés de rigidité et des masses volumiques des matériaux. Mais la prise en compte de l'amortissement est beaucoup plus délicate, du fait que les pertes d'énergie d'un système peuvent avoir diverses origines. Lorsqu'on utilise le modèle d'amortissement hystérique, l'amortissement est représenté par une matrice $[C_{eq}] = \alpha[M] + \beta[K]$. L'intérêt de cette formulation est la facilité avec laquelle on « paramètre » l'amortissement dans un modèle de calcul. Il est alors tentant de retrouver cette même facilité lorsqu'on utilise le modèle d'amortissement visqueux. Mais dans ce cas, il n'y a pas de raison naturelle pour que la matrice d'amortissement soit fonction des matrices de masse et de raideur.

Cependant, le problème n'est pas de modéliser la physique des phénomènes d'amortissement, on sait que l'on ne dispose pas encore des outils pour le faire. La question est de savoir si

les modèles mathématiques existants peuvent rendre compte d'un amortissement réel, mesuré. Dans ce contexte, on exprime la matrice d'amortissement $[C]$ sous la forme simple $[C_{eq}] = \alpha[M] + \beta[K]$ et on teste la concordance des résultats obtenus avec ceux issus des mesures.

III-9) Résolution du problème dynamique par la méthode de Newmark:

Le schéma de Newmark est l'un des algorithmes les plus anciens et probablement les plus répandus des algorithmes d'intégration temporelle pour la dynamique des structures.

Les schémas de la famille Newmark font partie des schémas d'intégration à un pas, où l'état d'un système à un instant t_{n+1} est estimé à partir des données de l'état précédent, tel que:

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

Le développement limité de Taylor d'une fonction donne :

$$f(t_{n+1}) = f(t_n) + \Delta t \cdot f'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2!} f''(t_n) + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} f^{(n)}(t_n) + R_n$$

Avec R_n est le reste du développement de Taylor d'ordre n.

On utilise ce développement pour évaluer la vitesse et le déplacement à l'instant t_{n+1} à partir de l'état à l'instant t_n :

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3.69)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot \dot{u}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(\varepsilon)(t_{n+1} - \varepsilon) d\varepsilon$$

Ces expressions représentent une approximation de la vitesse et du déplacement et pour qu'elles soient complètement déterminées, on doit écrire l'accélération $\ddot{q}(\varepsilon)$ en fonction de \ddot{q}_n et \ddot{q}_{n+1} en utilisant toujours le développement de Taylor :

$$\ddot{u}_n = \ddot{u}(\varepsilon) + \ddot{u}(\varepsilon)(t_n - \varepsilon) + u^{(4)}(\varepsilon) \frac{(t_n - \varepsilon)^2}{2!} + \dots \quad (3.70)$$

$$\ddot{u}_{n+1} = \ddot{u}(\varepsilon) + \ddot{u}(\varepsilon)(t_{n+1} - \varepsilon) + u^{(4)}(\varepsilon) \frac{(t_{n+1} - \varepsilon)^2}{2!} + \dots$$

En multipliant \ddot{u}_n par $(1 - \gamma)$ et \ddot{u}_{n+1} par γ et en faisant la somme, on aboutit à:

$$\begin{aligned} (1 - \gamma)\ddot{u}_n + \gamma\ddot{u}_{n+1} &= (1 - \gamma)\ddot{u}(\varepsilon) + (1 - \gamma)\ddot{u}(\varepsilon)(t_n - \varepsilon) + (1 - \gamma)u^{(4)}(\varepsilon) \frac{(t_n - \varepsilon)^2}{2!} + \\ &\quad + \gamma\ddot{u}(\varepsilon) + \gamma\ddot{u}(\varepsilon)(t_{n+1} - \varepsilon) + \gamma u^{(4)}(\varepsilon) \frac{(t_{n+1} - \varepsilon)^2}{2!} \\ &= \ddot{u}(\varepsilon) + \gamma\ddot{u}(\varepsilon)(t_{n+1} - t_n) + \ddot{u}(\varepsilon)(t_n - \varepsilon) + h \left((t_n - t_{n+1})^2 u^{(4)}(\varepsilon) \right) \end{aligned}$$

$$= \ddot{u}(\varepsilon) + \gamma \ddot{u}(\varepsilon)(\Delta t) + \ddot{u}(\varepsilon)(t_n - \varepsilon) + h \left((\Delta t)^2 u^{(4)}(\varepsilon) \right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \ddot{u}(\varepsilon) &= (1 - \gamma) \ddot{u}_n + \gamma \ddot{u}_{n+1} - \gamma (\Delta t) \ddot{u}(\varepsilon) - (t_n - \varepsilon) \ddot{u}(\varepsilon) + h \left((\Delta t)^2 u^{(4)}(\varepsilon) \right) \\ \ddot{u}(\varepsilon) &= (1 - \gamma) \ddot{u}_n + \gamma \ddot{u}_{n+1} + (\varepsilon - \gamma \Delta t - t_n) \ddot{u}(\varepsilon) + h \left((\Delta t)^2 u^{(4)}(\varepsilon) \right) \end{aligned} \quad (3.71)$$

On suit les mêmes étapes, mais cette fois-ci on multiplie \ddot{u}_n par $(1 - 2\beta)$ et \ddot{u}_{n+1} par 2β , On trouve :

$$\begin{aligned} (1 - 2\beta) \ddot{u}_n + 2\beta \ddot{u}_{n+1} &= (1 - 2\beta) \ddot{u}(\varepsilon) + (1 - 2\beta) \ddot{u}(\varepsilon)(t_n - \varepsilon) + \\ &+ (1 - 2\beta) u^{(4)}(\varepsilon) \frac{(t_n - \varepsilon)^2}{2!} + 2\beta \ddot{u}(\varepsilon) + 2\beta \ddot{u}(\varepsilon)(t_{n+1} - \varepsilon) + \\ &+ 2\beta u^{(4)}(\varepsilon) \frac{(t_{n+1} - \varepsilon)^2}{2!} \\ &= \ddot{u}(\varepsilon) + 2\beta \ddot{u}(\varepsilon)(t_{n+1} - t_n) + \ddot{u}(\varepsilon)(t_n - \varepsilon) + \\ &+ h \left((t_{n+1} - t_n)^2 u^{(4)}(\varepsilon) \right) \end{aligned}$$

$$(1 - 2\beta) \ddot{u}_n + 2\beta \ddot{u}_{n+1} = \ddot{u}(\varepsilon) + 2\beta \ddot{u}(\varepsilon)(\Delta t) + \ddot{u}(\varepsilon)(t_n - \varepsilon) + h \left((\Delta t)^2 u^{(4)}(\varepsilon) \right)$$

D'où :

$$\ddot{u}(\varepsilon) = (1 - 2\beta) \ddot{u}_n + 2\beta \ddot{u}_{n+1} + (\varepsilon - 2\beta \Delta t - t_n) \ddot{u}(\varepsilon) + h \left((\Delta t)^2 u^{(4)}(\varepsilon) \right) \quad (3.72)$$

Avec: $0 < \gamma < 1$ et $0 < \beta < \frac{1}{2}$, γ et β déterminent le degré de pondération.

En remplaçant ces deux relations, on pourra évaluer les intégrales dans la formule (3.69) :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(\varepsilon) d\varepsilon = (1 - \gamma) \Delta t \ddot{u}_n + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1} + r_n \quad (3.73)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(\varepsilon)(t_{n+1} - \varepsilon) d\varepsilon = \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{u}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1} + \bar{r}_n \quad (3.74)$$

r_n et \bar{r}_n sont les erreurs du développement de Taylor. On pose:

$$r_n = \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) (\Delta t)^2 \ddot{q}(\varepsilon) + h \left((\Delta t)^3 u^{(4)}(\varepsilon) \right) \quad (3.75)$$

$$\bar{r}_n = \left(\beta - \frac{1}{6} \right) (\Delta t)^3 \ddot{q}(\varepsilon) + h \left((\Delta t)^4 u^{(4)}(\varepsilon) \right) \quad (3.76)$$

Pour: $t_n < \varepsilon < t_{n+1}$

Dans le cas où $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{6}$, la variation de l'accélération est supposée linéaire[58].

Par contre si $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$, l'accélération est supposée constante (pas de variation)[58].

Revenons aux expressions de u_{n+1} et \dot{u}_{n+1} et en remplaçant les intégrales par leurs approximations, on aboutit à:

$$\dot{u}_{n+1} \cong \dot{u}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{u}_n + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1} \quad (3.77)$$

$$u_{n+1} \cong u_n + \Delta t \cdot \dot{u}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{u}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1} \quad (3.78)$$

Ces expressions sont la base du schéma d'approximation de Newmark.

Si on considère l'équation de mouvement la plus générale :

$$[M]\ddot{\mathbf{u}} + [C]\dot{\mathbf{u}} + [K]\mathbf{u} = \{F\}$$

En associant aux déplacements et aux vitesses leurs expressions définies auparavant et en substituant ces relations dans l'équation de mouvement, on trouve [58]:

$$M\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + C(\dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) + K\left(\mathbf{u}_n + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}\right) = \{F\} \quad (3.79)$$

En aménageant cette expression, on aboutit à :

$$(M + \gamma \cdot \Delta t \cdot C + \beta \Delta t^2 K)\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = F_{n+1} - C(\dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma) \cdot \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}_n) - K\left(\mathbf{u}_n + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n\right) \quad (3.80)$$

Cette équation permet de calculer les accélérations $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$ à l'instant t_{n+1} , ainsi que les vitesses et les déplacements, en utilisant leurs expressions. Généralement la résolution d'un problème avec un schéma de Newmark est réalisée en deux étapes : prédiction-corrrection [42].

Pour une question de commodité, les valeurs prédites des vitesses notées $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^p$

et des déplacements notés \mathbf{u}_{n+1}^p sont définis respectivement par:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^p = \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma) \cdot \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (3.81)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^p = \mathbf{u}_n + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (3.82)$$

En remplaçant dans l'équation de mouvement, on trouve :

$$(M + \gamma \cdot \Delta t \cdot C + \beta \Delta t^2 K)\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = F_{n+1} - C\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^p - K\mathbf{u}_{n+1}^p$$

Ou encore :

$$\tilde{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = F_{n+1} - C\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^p - K\mathbf{u}_{n+1}^p \quad (3.83)$$

Avec :

$$\tilde{M} = (M + \gamma \cdot \Delta t \cdot C + \beta \Delta t^2 K) \quad (3.84)$$

Cette dernière équation (3.83) permet de déterminer les accélérations $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ qu'on utilise pour déterminer les vitesses $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ et les déplacements \mathbf{u}_{n+1} , qui sont donnés par :

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^p + \gamma \cdot \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (3.85)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^p + \beta \cdot \Delta t^2 \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (3.86)$$

La méthode de Newmark peut être résumée dans les étapes suivantes :

- Calcul de la première valeur de l'accélération $\ddot{\mathbf{u}}_0$ (conditions initiales) :

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0) \quad (3.87)$$

- Introduction de l'incrément temporel :

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_0 + \Delta t \text{ ou } \mathbf{t}_{n+1} = \mathbf{t}_n + \Delta t \text{ en général.}$$

- Etape de prédiction des déplacements et des vitesses :

$$\dot{\mathbf{u}}_1^p = \dot{\mathbf{u}}_0 + (1 - \gamma) \cdot \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}_0$$

$$\mathbf{u}_1^p = \mathbf{u}_0 + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_0 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_0$$

- Calcul de l'accélération $\ddot{\mathbf{u}}_1$:

$$\ddot{\mathbf{u}}_1 = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{K}\mathbf{u}_1)$$

- Etape de correction des valeurs prédites :

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \dot{\mathbf{u}}_1^p + \gamma \cdot \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}_1$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^p + \beta \cdot \Delta t^2 \cdot \ddot{\mathbf{u}}_1$$

- Le passage à l'état suivant, en introduisant un nouvel incrément temporel Δt

L'organigramme suivant résume la stratégie du schéma de Newmark :

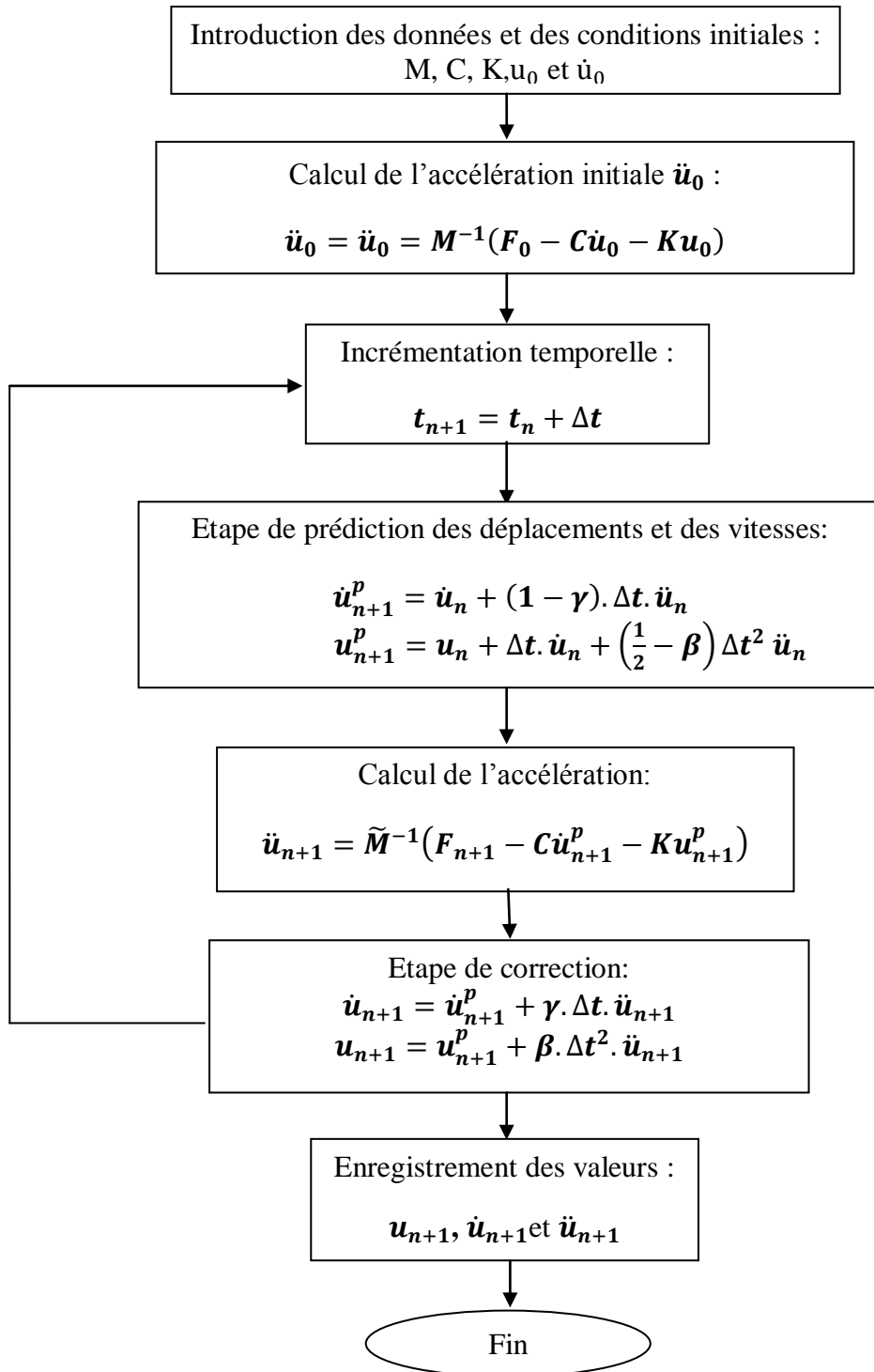


fig 3-12: Schéma de Newmark.

Dans ce chapitre, une modélisation des poutres piézoélectriques a été présentée et une formulation variationnelle a été développée, pour les poutres élastiques et piézoélectriques en statique et en dynamique, afin d'aboutir aux équations de mouvement, qui seront résolues par la suite par l'algorithme de Newmark.

Pour la validation de notre modèle destiné à l'étude des poutres, un programme en MATLAB a été élaboré. Ce code prend en considération les deux cas élastique et piézoélectrique.

IV-1) Résultats du cas élastique :

Afin d'effectuer les simulations numériques d'une poutre élastique en flexion, on considère une poutre console i.e Encastrée-libre de longueur $L = 0.5\text{m}$, largeur $b = 0.03\text{m}$ et épaisseur $h = 0.01\text{m}$. Cette poutre est soumise à l'action d'une charge répartie uniformément sur toute sa longueur ($Q=1000\text{ N/m}$) (fig 4-1). Le matériau choisi (Acier doux) a pour propriétés mécaniques :

Module de Young: $E = 2.10^{11}\text{ N/m}^2$.

Coefficient de Poisson: $\nu = 0.3$.

Masse volumique: $\rho = 8000\text{ Kg/m}^3$.

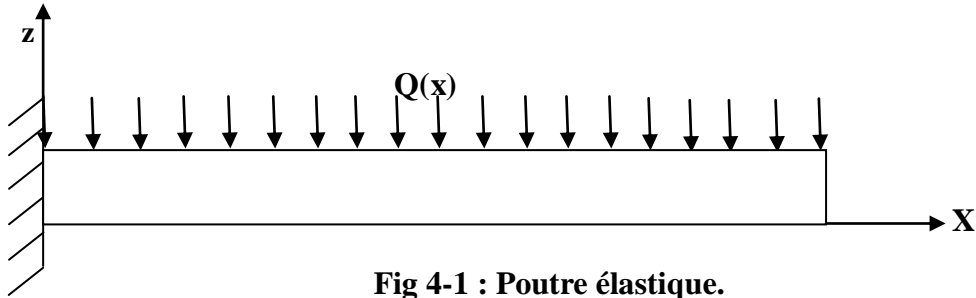


Fig 4-1 : Poutre élastique.

Le **tableau (4.1)** donne les résultats obtenus (déplacement vertical w , le déplacement axial u ainsi que la rotation θ), en utilisant un modèle éléments finis et en discrétisant la poutre en 20 éléments.

X	w(m)	theta(rad)	u(m)
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.025000	-0.000076	-0.005943	0.000000
0.050000	-0.000292	-0.011292	0.000000
0.075000	-0.000635	-0.016078	0.000000
0.100000	-0.001092	-0.020333	0.000000
0.125000	-0.001648	-0.024089	0.000000
0.150000	-0.002292	-0.027375	0.000000
0.175000	-0.003013	-0.030224	0.000000
0.200000	-0.003800	-0.032667	0.000000
0.225000	-0.004643	-0.034734	0.000000
0.250000	-0.005534	-0.036458	0.000000
0.275000	-0.006464	-0.037870	0.000000
0.300000	-0.007425	-0.039000	0.000000
0.325000	-0.008411	-0.039880	0.000000
0.350000	-0.009417	-0.040542	0.000000
0.375000	-0.010437	-0.041016	0.000000
0.400000	-0.011467	-0.041333	0.000000
0.425000	-0.012503	-0.041526	0.000000
0.450000	-0.013542	-0.041625	0.000000
0.475000	-0.014583	-0.041661	0.000000
0.500000	-0.015625	-0.041667	0.000000

Tableau 4-1: Résultats de l'étude statique de la poutre élastique.

Pour savoir si le modèle éléments finis utilisé est bien choisi, on compare les résultats de ce dernier avec les résultats analytiques.

L'expression analytique de la flèche est: $w(\text{analytique}) = \frac{1}{EI} \left(\frac{QL}{6} x^3 + \frac{QL^2}{4} x^2 \right)$

X	w (analytique)	w (EF)	Erreur
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.025000	-0.000076	-0.000076	0.000000
0.050000	-0.000292	-0.000292	0.000000
0.075000	-0.000635	-0.000635	0.000000
0.125000	-0.001092	-0.001092	0.000000
0.125000	-0.001648	-0.001648	0.000000
0.150000	-0.002292	-0.002292	0.000000
0.175000	-0.003013	-0.003013	0.000000
0.200000	-0.003800	-0.003800	0.000000
0.225000	-0.004643	-0.004643	0.000000
0.250000	-0.005534	-0.005534	0.000000
0.275000	-0.006464	-0.006464	0.000000
0.300000	-0.007425	-0.007425	0.000000
0.325000	-0.008411	-0.008411	0.000000
0.350000	-0.009417	-0.009417	0.000000
0.375000	-0.010437	-0.010437	0.000000
0.400000	-0.011467	-0.011467	0.000000
0.425000	-0.012503	-0.012503	0.000000
0.450000	-0.013542	-0.013542	0.000000
0.475000	-0.014583	-0.014583	0.000000
0.500000	-0.015625	-0.015625	0.000000

Tableau 4-2: Comparaison entre la flèche analytique et celle du modèle éléments finis.

D'après ce tableau (**Tableau 4-2**), on peut constater que les résultats obtenus par le modèle éléments finis sont en parfaite concordance avec les valeurs exactes.

Si on trace l'allure du déplacement vertical w en fonction de la longueur, on obtient le graphe suivant (**Fig 4-2**):

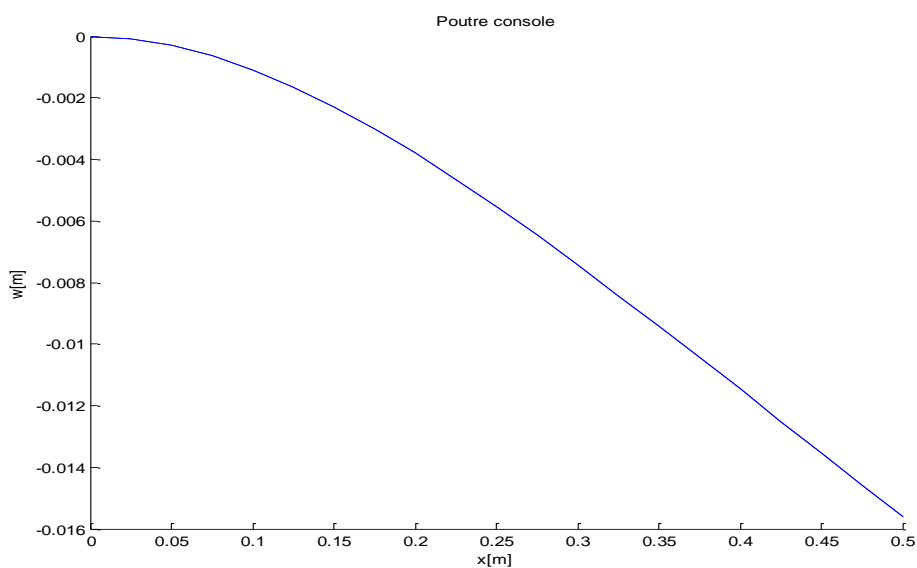


Fig 4-2 : La flèche de la poutre élastique.

L'allure de la rotation de la poutre en statique θ est représentée sur le graphe de la (Fig 4-3):

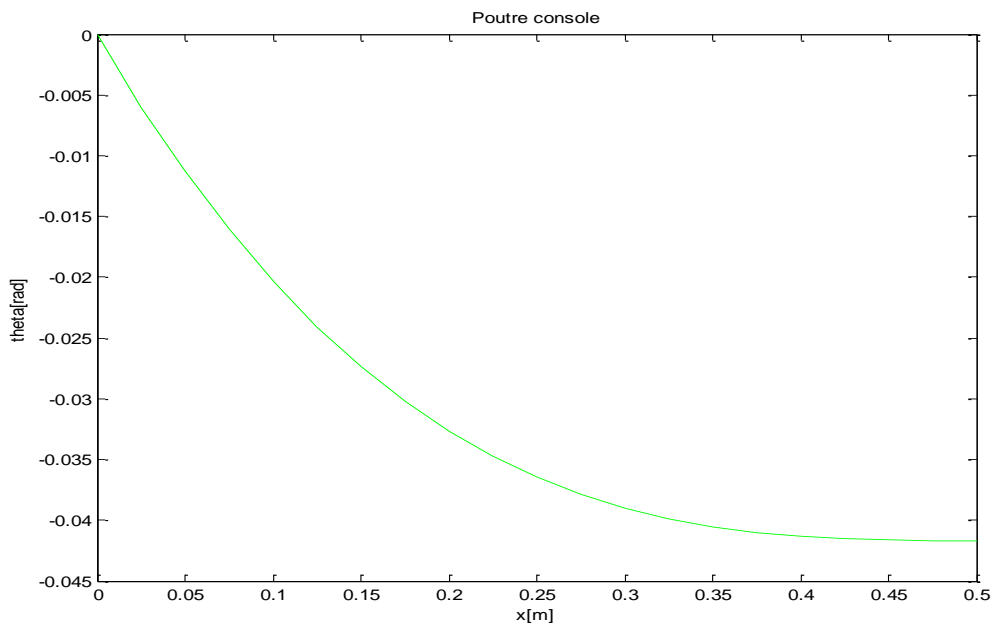


Fig 4-3 : Rotation de la poutre élastique.

Ainsi que le déplacement axial u , qui est nul dans ce cas tout au long de la poutre. (Fig 4-4)

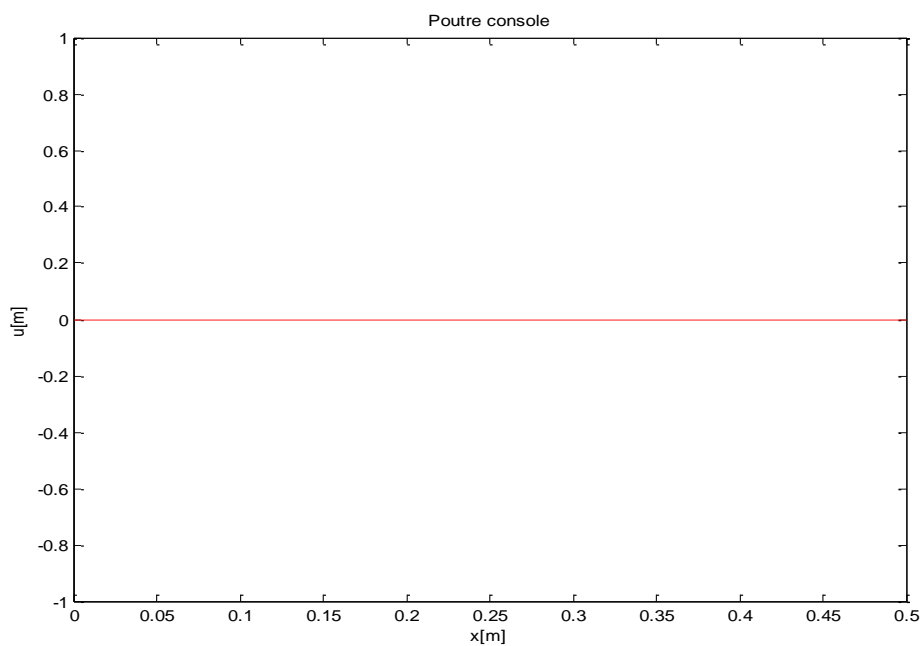


Fig 4-4 : Le déplacement axial u d'une poutre élastique

Pour valider le modèle éléments finis, on procède à une comparaison entre les valeurs propres analytiques et celles obtenues par éléments finis pour les 20 premiers modes.

Modes	Pulsations (exactes)	Pulsations (EF)	Erreur relative (%)
1	202.974704	202.979418	0.002322
2	1272.112568	1271.384009	0.057272
3	3562.310339	3556.908165	0.151648
4	6980.317978	6961.565494	0.268648
5	11538.892984	11489.741877	0.425960
6	17237.111742	17130.495851	0.618525
7	24074.974252	23871.677245	0.844433
8	32052.480512	31699.167162	1.102296
9	41169.630525	40597.153041	1.390533
10	51426.424289	50548.361883	1.707415
11	62822.861804	61534.309574	2.051088
12	75358.943071	73535.556627	2.419602
13	89034.668090	86531.964641	2.810931
14	103850.036860	100502.948007	3.223002
15	119805.049382	115427.715894	3.653714
16	136899.705655	131285.500183	4.100962
17	155134.005680	148055.765653	4.562662
18	174507.949457	165718.399369	5.036762
19	195021.536984	184253.876833	5.521267
20	216674.768264	203643.403014	6.014251

Tableau 4-3 : Comparaison entre les valeurs propres analytiques et numériques.

Cette comparaison montre que le modèle éléments finis est bien choisi puisque l'erreur relative ne dépasse pas les 6% pour le 20ème mode, ainsi que les résultats sont presque identiques.

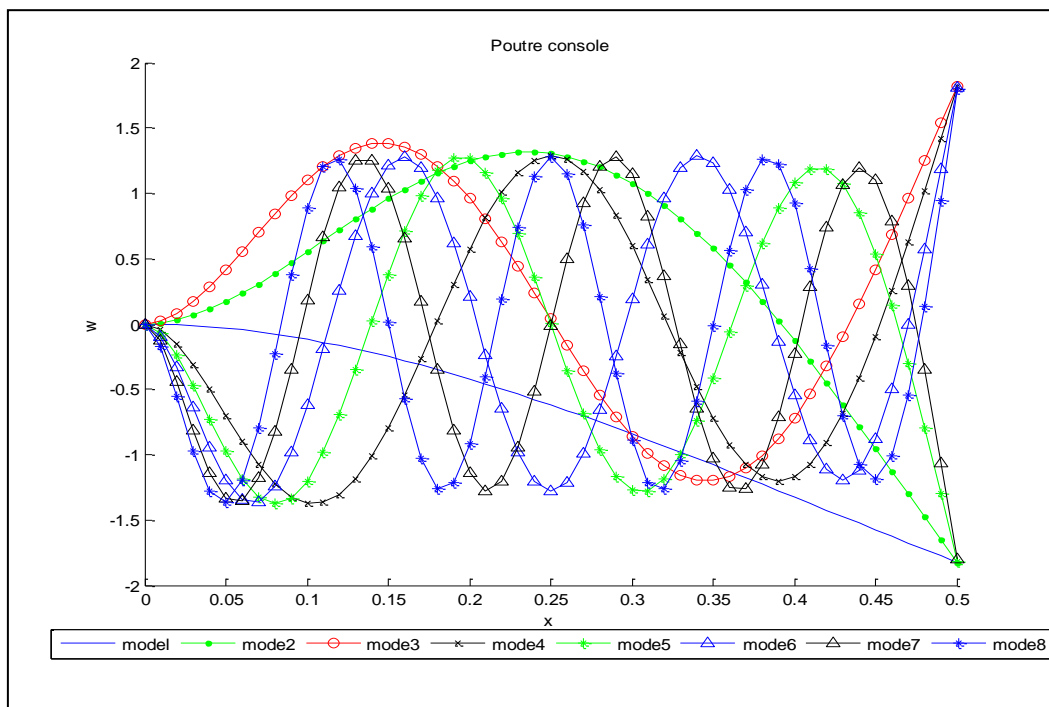


Fig 4-5 : Superposition des 8 modes propres de vibration d'une poutre console élastique.

Pour parler du problème dynamique, on considère la même poutre (en mode vibrations forcées non amorties) soumise à l'action d'une force harmonique $F=F.\cos(100.t)$. La résolution de ce problème par la méthode de Newmark donne le graphe (Fig 4-6) et qui représente les vibrations verticales de cette poutre.

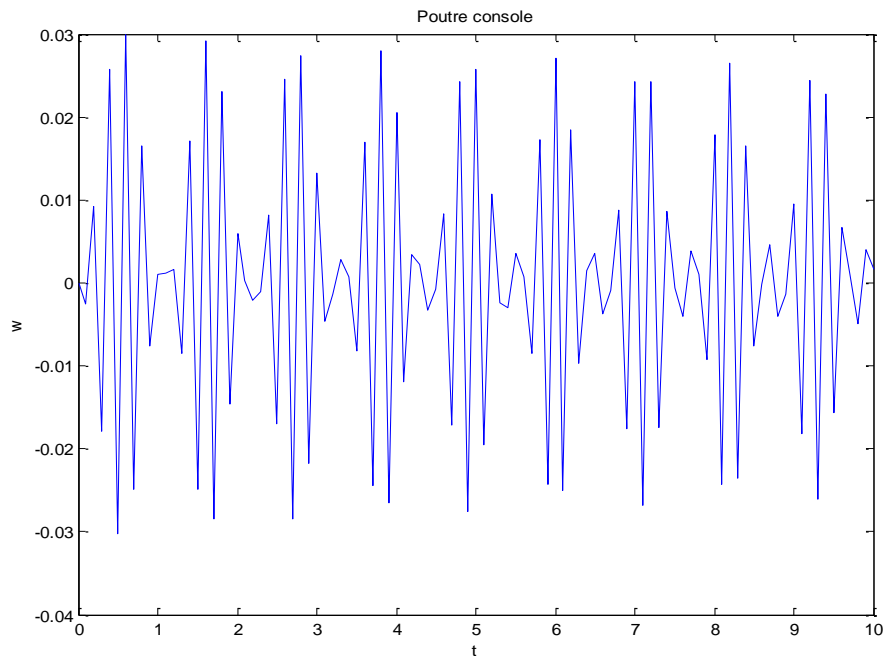


Fig 4-6 : Les vibrations verticales de l'extrémité libre de la poutre élastique.

Par contre les vibrations axiales de la poutre restent toujours nulles.

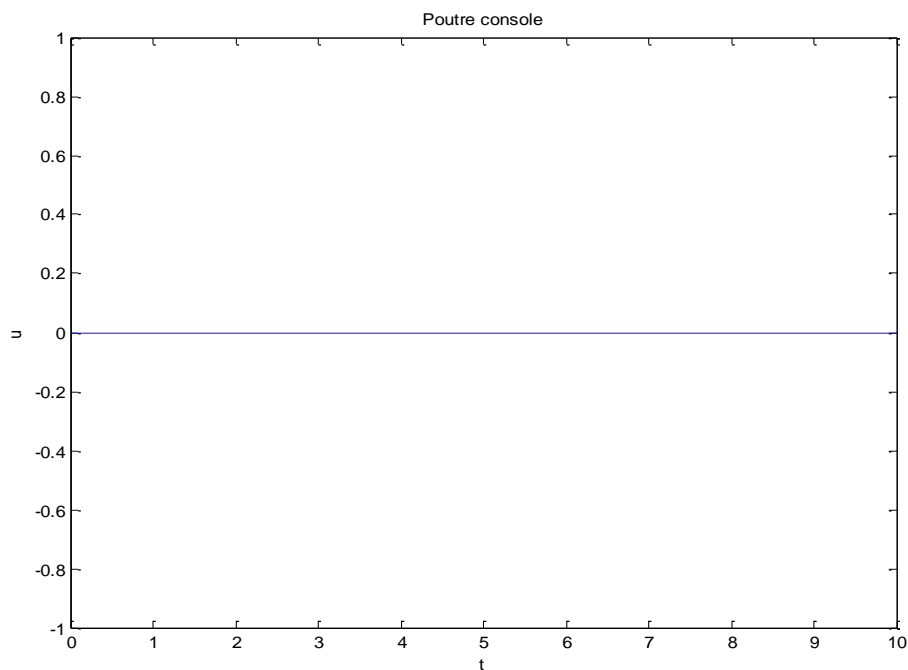


Fig 4-7 : Les vibrations axiales de l'extrémité libre de la poutre élastique.

IV-2) Résultats du cas piézoélectrique :

Afin d'étudier le cas piézoélectrique, on considère une poutre ayant les mêmes dimensions que celles du cas élastique. Cette poutre est soumise cette fois-ci à l'action d'une charge mécanique répartie uniformément sur toute la longueur et à une différence de potentiel électrique $V= 100$ volts dans la direction de l'épaisseur (**Fig 4-8**). Le matériau de la poutre est piézoélectrique, c'est une céramique piézoélectrique, le PZT-4, qui a pour propriétés mécaniques et électriques :

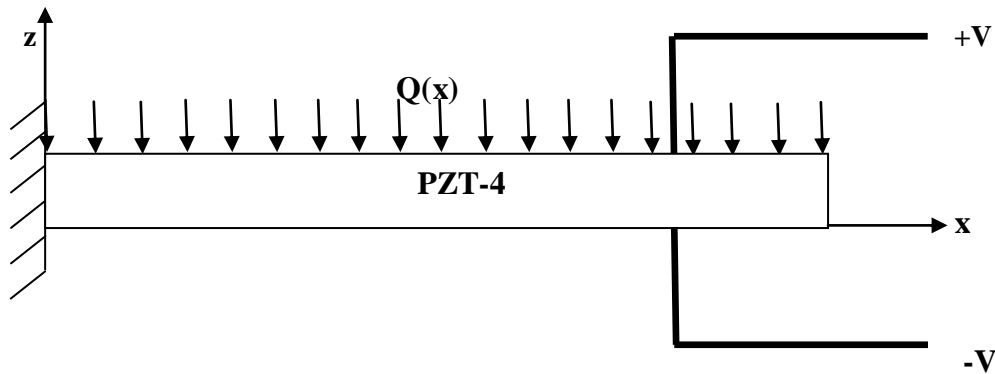


Fig 4-8 : Poutre piézoélectrique.

La masse volumique est $\rho=7500 \text{ Kg/m}^3$

La matrice des constantes élastiques est :

$$C = \begin{bmatrix} 13.90 & 7.78 & 7.43 & 0 & 0 & 0 \\ 7.78 & 13.90 & 7.43 & 0 & 0 & 0 \\ 7.43 & 7.43 & 11.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.07 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} \text{ [N/m}^2\text{]}$$

La matrice des constantes piézoélectriques est :

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.7 & 0 & 0 \\ -5.2 & -5.2 & 15.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ [C/m}^2\text{]}$$

La matrice des constantes diélectriques est :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 13.06 & 0 & 0 \\ 0 & 13.06 & 0 \\ 0 & 0 & 11.51 \end{bmatrix} \text{ [nF/m]}$$

Le **Tableau 4-4** englobe tous les résultats obtenus, dans l'étude statique de la poutre en flexion (le déplacement vertical « déflexion » w , la rotation de la poutre θ et le déplacement axial u).

X	w(m)	theta(rad)	u(m)
0.000000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
0.025000	-1.583026e-004	-1.245141e-002	5.996310e-009
0.050000	-6.122034e-004	-2.365877e-002	1.199262e-008
0.075000	-1.331420e-003	-3.368756e-002	1.798893e-008
0.100000	-2.287305e-003	-4.260324e-002	2.398524e-008
0.125000	-3.452852e-003	-5.047131e-002	2.998155e-008
0.150000	-4.802686e-003	-5.735724e-002	3.597786e-008
0.175000	-6.313075e-003	-6.332649e-002	4.197417e-008
0.200000	-7.961918e-003	-6.844456e-002	4.797048e-008
0.225000	-9.728755e-003	-7.277691e-002	5.396679e-008
0.250000	-1.159476e-002	-7.638901e-002	5.996310e-008
0.275000	-1.354275e-002	-7.934636e-002	6.595941e-008
0.300000	-1.555717e-002	-8.171442e-002	7.195572e-008
0.325000	-1.762411e-002	-8.355867e-002	7.795203e-008
0.350000	-1.973128e-002	-8.494458e-002	8.394834e-008
0.375000	-2.186806e-002	-8.593764e-002	8.994465e-008
0.400000	-2.402544e-002	-8.660332e-002	9.594096e-008
0.425000	-2.619604e-002	-8.700709e-002	1.019373e-007
0.450000	-2.837415e-002	-8.721443e-002	1.079336e-007
0.475000	-3.055567e-002	-8.729082e-002	1.139299e-007
0.500000	-3.273815e-002	-8.730173e-002	1.199262e-007

Tableau 4-4: résultats de l'étude statique de la poutre piézoélectrique.

Si on trace ces résultats sur des graphes pour voir l'allure, on obtient :

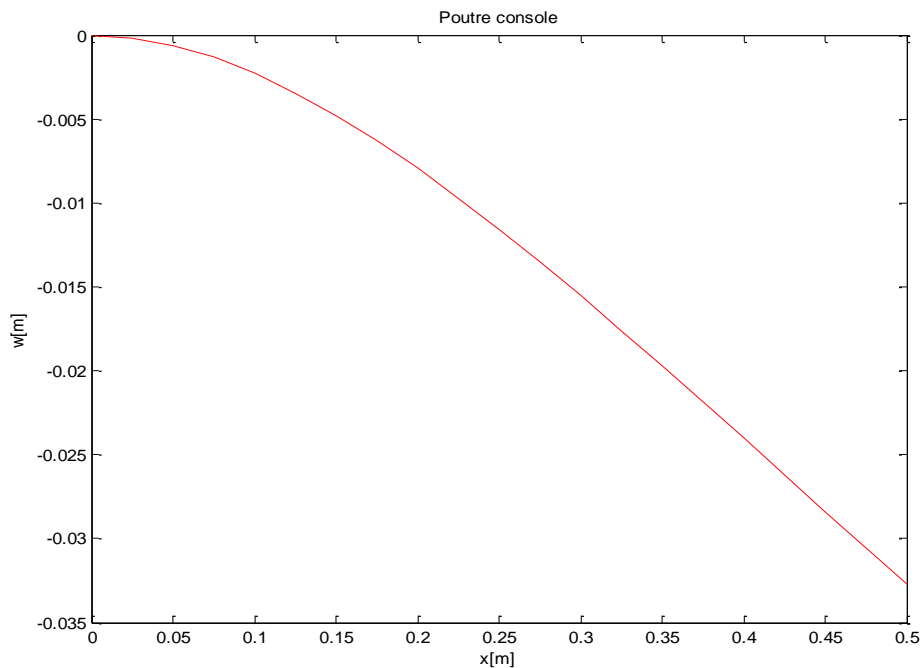


Fig 4-9 : La flèche w d'une poutre console en mode actionneur.

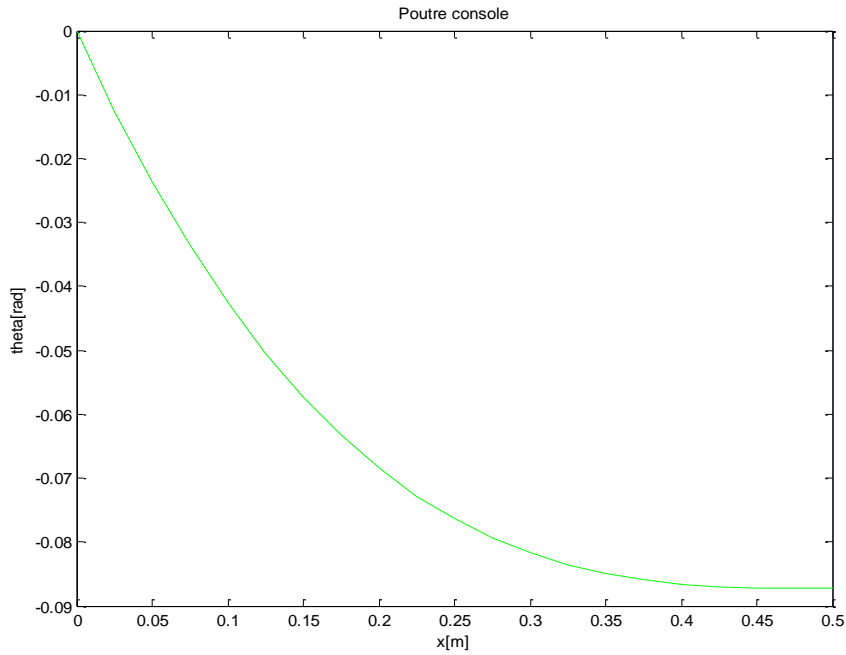


Fig 4-10 : La rotation θ d'une poutre console en mode actionneur.

Et le déplacement axial u :

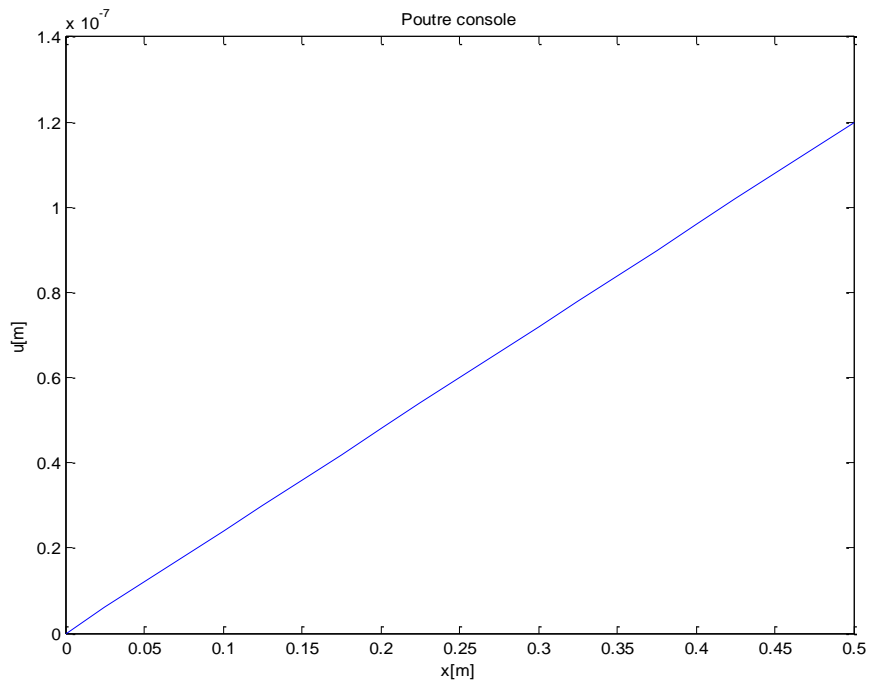


Fig 4-11 : Le déplacement axial u d'une poutre console en mode actionneur.

La première constatation importante, qu'on peut faire en comparant les résultats du cas élastique et piézoélectrique est que dans ce dernier, le déplacement axial u n'est plus nul, mais

en variation linéaire, ce qui se traduit par l'application d'une différence de potentiel électrique entre la surface supérieure et inférieure de la poutre.

La comparaison des valeurs propres analytiques et celles obtenues par éléments finis est résumée dans le tableau (4.5) :

Modes	Valeurs exactes	Modèle EF	Erreur relative (%)
1	144.823564	144.826929	0.002324
2	907.659290	907.139460	0.057272
3	2541.727953	2537.873472	0.151648
4	4980.495139	4967.115139	0.268648
5	8233.063393	8197.993809	0.425960
6	12298.773711	12222.702688	0.618525
7	17177.626092	17032.572564	0.844433
8	22869.620537	22617.529525	1.102296
9	29374.757045	28966.291223	1.390533
10	36693.035617	36066.533278	1.707415
11	44824.456253	43905.067173	2.051088
12	53769.018952	52468.022729	2.419602
13	63526.723714	61741.031085	2.810931
14	74097.570540	71709.404297	3.223002
15	85481.559430	82358.307992	3.653714
16	97678.690383	93672.924004	4.100962
17	110688.963399	105638.600341	4.562662
18	124512.378480	118240.986313	5.036762
19	139148.935623	131466.151084	5.521267
20	154598.634831	145300.684295	6.014251

Tableau 4-5 : Comparaison entre les valeurs propres analytiques et numériques (cas piézoélectrique).

D'après ce tableau, on voit bien que le modèle éléments finis choisi reste valable pour l'étude de la poutre piézoélectrique, avec une erreur qui ne peut pas aller au dessus des 6%, pour au moins les 20 premiers modes de vibration.

Si on trace les 8 premiers modes de vibrations, dans ce cas, on obtient le graphe (**Fig 4-12**) qui représente la superposition des 8 premiers modes de vibration.

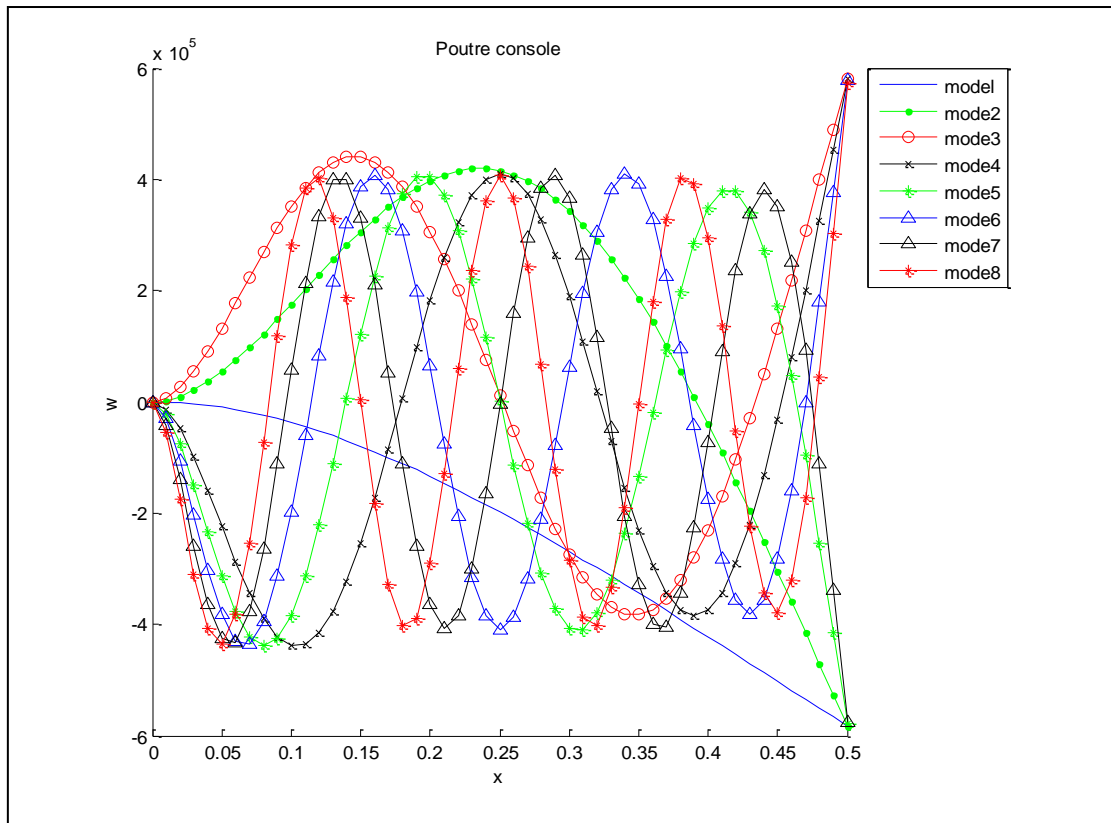


Fig 4-12 : Superposition des 8 modes propres de vibration d'une poutre console élastique.

On passe maintenant aux résultats du problème dynamique (i.e les vibrations forcées) sans tenir en compte l'amortissement structural de la poutre. L'excitation extérieure est harmonique $\mathbf{F}=\mathbf{F}.\cos(100.t)$. Le graphe (Fig 4-13) donne les vibrations verticales de la poutre.

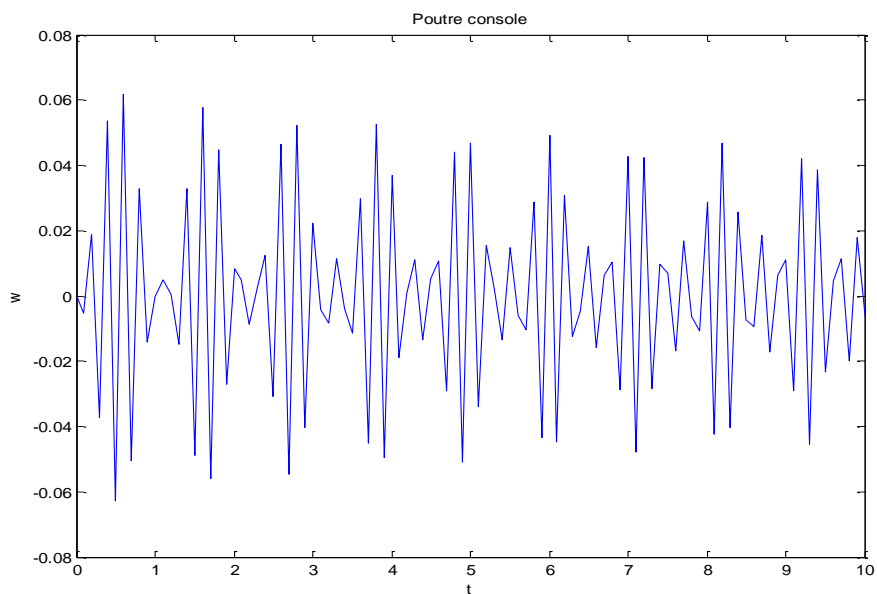


Fig 4-13 : Les vibrations verticales de l'extrémité libre de la poutre piézoélectrique.

Dans le cas de la poutre piézoélectrique en mode actionneur, les vibrations verticales sont aussi accompagnées de vibrations longitudinales, même si ces dernières sont de faibles amplitudes (**Fig 4.14**).

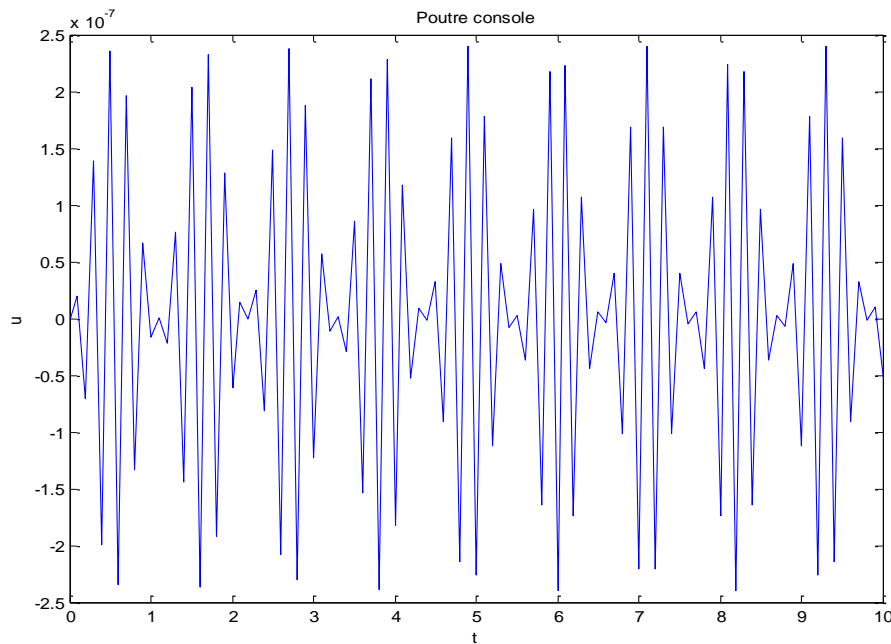


Fig 4-14 : Les vibrations longitudinales de l'extrémité libre de la poutre piézoélectrique.

On explique toujours l'apparition de ces vibrations longitudinales par l'application d'un potentiel électrique dans la direction de l'épaisseur de la poutre.

IV-3) Influence du choix de matériaux:

Afin de montrer l'importance du choix du matériau piézoélectrique sur le comportement de la poutre, on propose d'étudier la même poutre prise en compte en mode actionneur, en statique, mais pour différents matériaux : PZT2, PZT-4, PZT-5A, PZT-5H, PZT-7A, PZT-8, ZnO et ZnS.

Le **tableau (4-6)** présente les caractéristiques mécaniques et électriques des matériaux utilisés :

Caractéristiques	PZT-2	PZT-4	PZT-5A	PZT-5H	PZT-7A	PZT-8	Zno	ZnS
ρ [Kg/m ³]	7700	7500	7700	7500	7700	7600	5600	3980
C_{11} [10 ¹⁰ N/m ²]	13.48	13.90	12.04	12.6	15.77	13.64	20.97	11.39
C_{12} [10 ¹⁰ N/m ²]	6.79	7.78	7.52	7.95	8.77	7.07	12.71	5.01
C_{13} [10 ¹⁰ N/m ²]	6.81	7.43	7.51	8.41	8.12	6.69	10.51	2.71
C_{33} [10 ¹⁰ N/m ²]	11.33	11.50	11.09	11.7	12.57	11.97	21.09	12.70
C_{44} [10 ¹⁰ N/m ²]	2.22	2.56	2.11	2.30	2.94	3.14	4.25	2.91
C_{66} [10 ¹⁰ N/m ²]	3.34	3.07	2.26	2.35	3.50	3.29	4.25	3.18

e_{31} [C/m ²]	-1.81	-5.20	-5.35	-6.50	-2.29	-4.63	-0.61	-0.098
e_{33} [C/m ²]	9.05	15.10	15.78	23.30	9.49	13.60	1.14	3.49
e_{15} [C/m ²]	9.78	12.70	12.29	17.00	10.59	10.34	-0.59	-0.81
ϵ_{11} [nF/m]	8.77	13.06	15.32	15.03	8.23	11.42	0.074	0.077
ϵ_{22} [nF/m]	8.77	13.06	15.32	15.03	8.23	11.42	0.074	0.077
ϵ_{33} [nF/m]	3.98	11.51	15.05	13.00	3.76	8.85	0.078	0.077

Tableau 4-6 : Caractéristiques matérielles des matériaux piézoélectriques utilisés.

Le graphe (4.14) représente l'allure de la déflexion pour les différents matériaux:

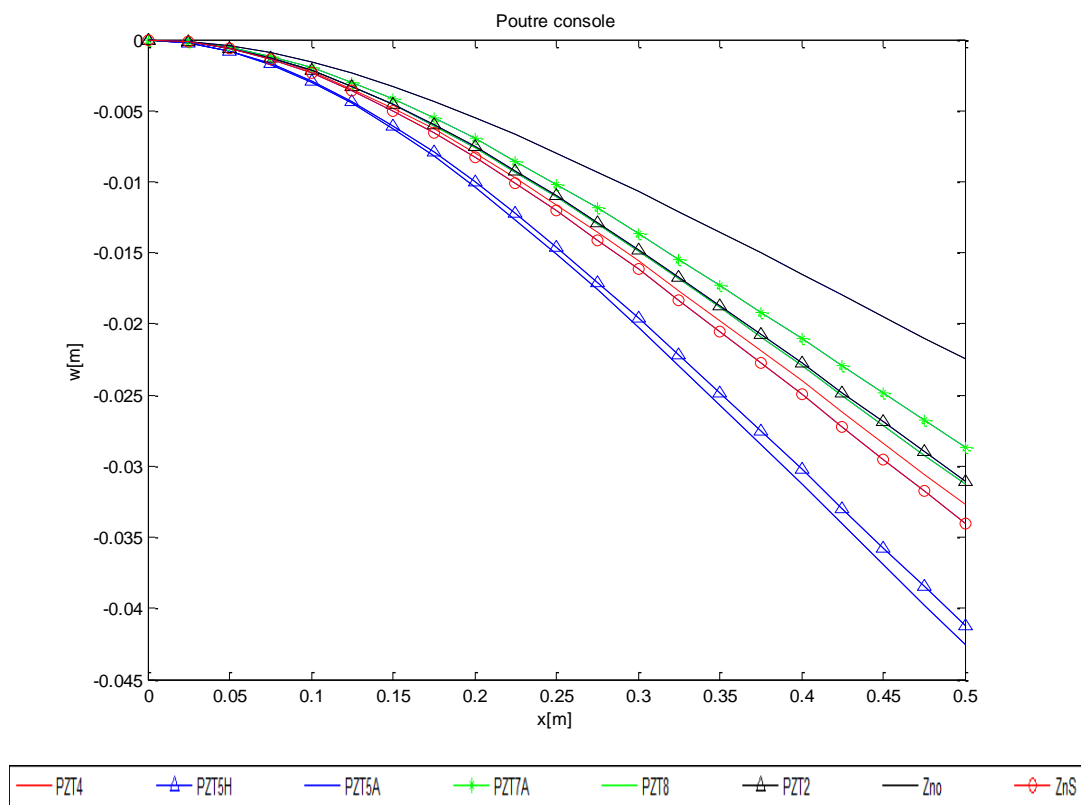


Fig 4-15 : Comparaison des flèches de la poutre console en mode actionneur pour différents matériaux.

Et aussi le déplacement axial u :

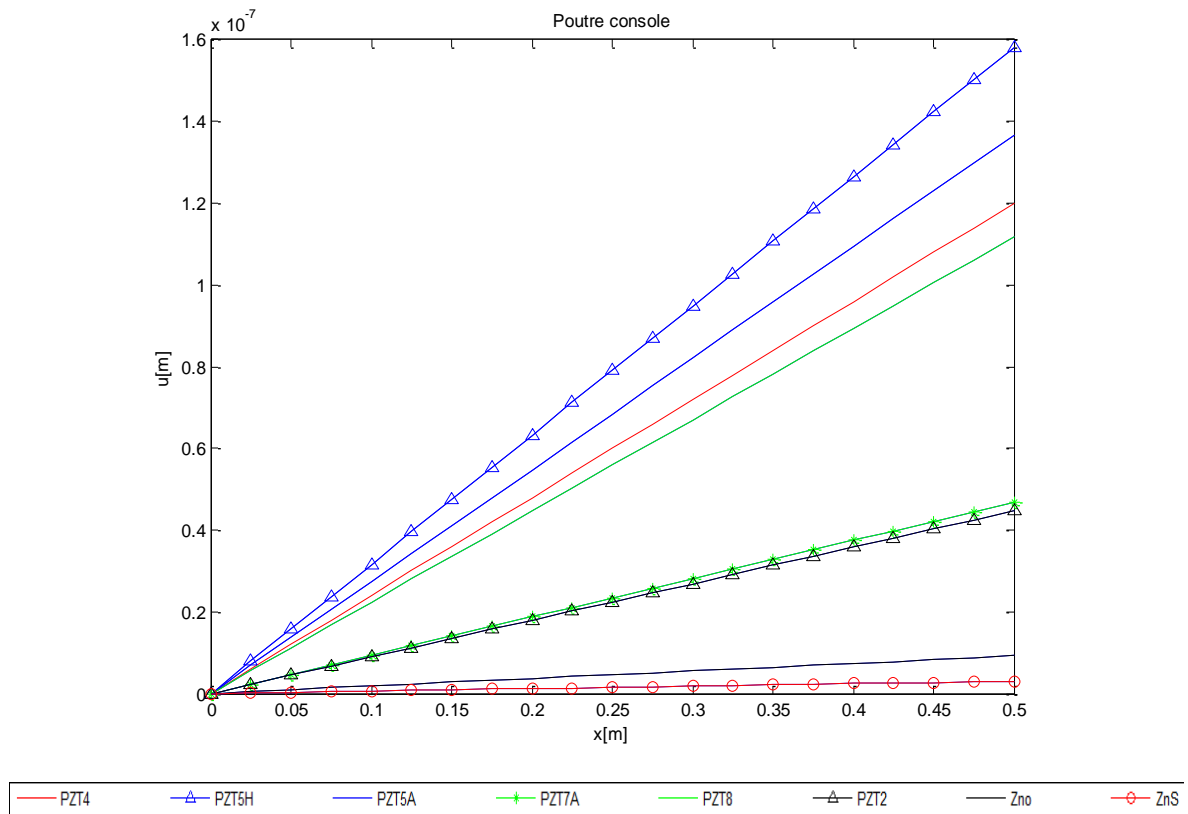


Fig 4-16 : Comparaison des déplacements axiaux de la poutre console en mode actionneur pour différents matériaux.

A partir des graphes (4.15) et (4.16), on remarque que l'allure de la flèche w , ainsi que la pente des déplacements axiaux u diffèrent d'un matériau piézoélectrique à un autre, car les caractéristiques mécaniques et surtout électriques sont différentes. De là on peut conclure que chaque matériau piézoélectrique est destiné à une certaine catégorie d'applications. A titre d'exemple, si l'application nécessite une grande flèche avec un déplacement axial plus ou moins grand, on utilise un PZT-5A ou PZT-5H au lieu d'utiliser une PZT-2, ainsi de suite...

IV-4) Influence des dimensions :

Dans cette partie on essaye de voir l'influence des dimensions de la poutre sur le comportement de cette dernière en statique et en dynamique, pour cela on considère la même poutre que l'application (IV-I), mais pour différentes longueurs et épaisseurs.

Influence de la longueur sur la flèche

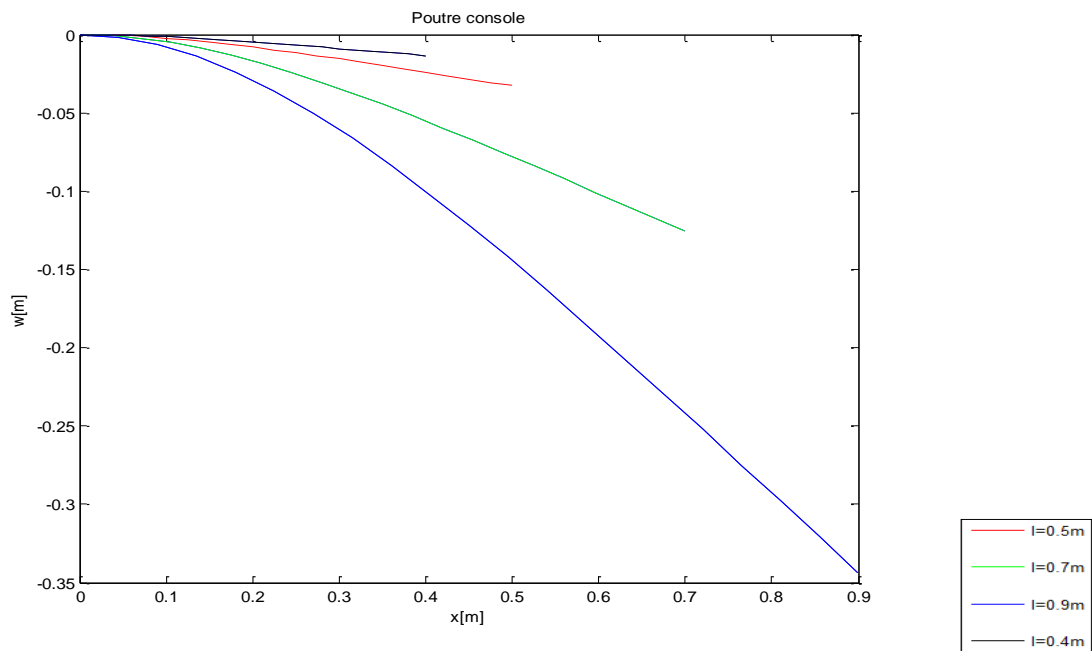


Fig 4-17: Influence de la longueur sur la flèche de la poutre piézoélectrique

Influence de l'épaisseur :

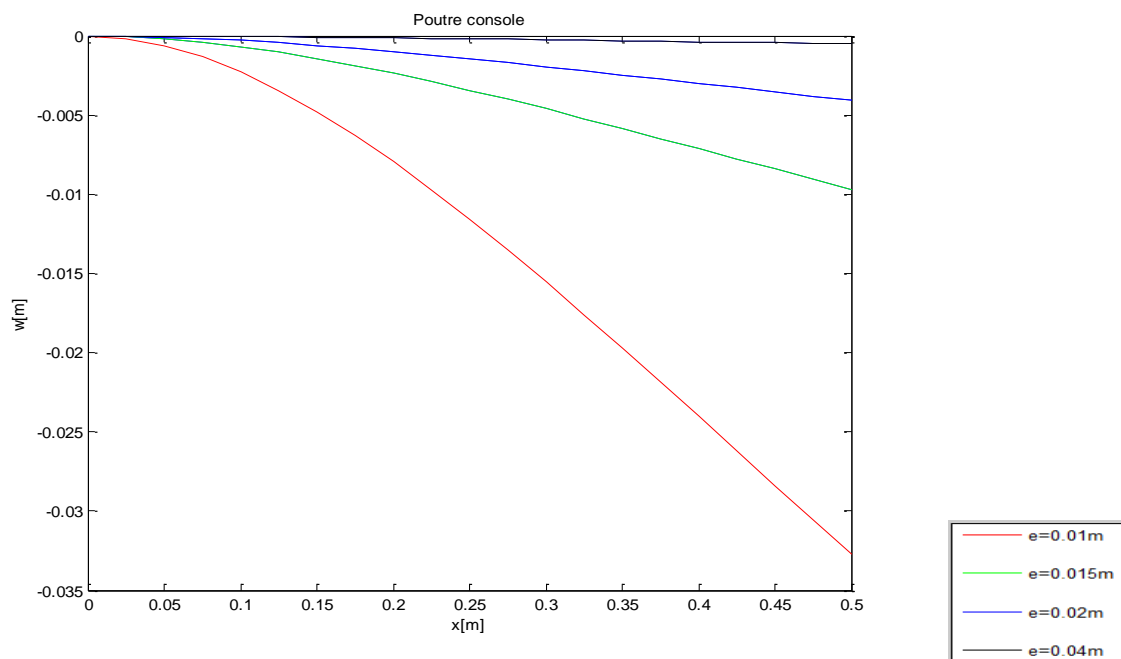


Fig 4-18 : Influence de l'épaisseur sur la flèche de la poutre piézoélectrique

Influence de l'épaisseur sur les vibrations verticales de la poutre :

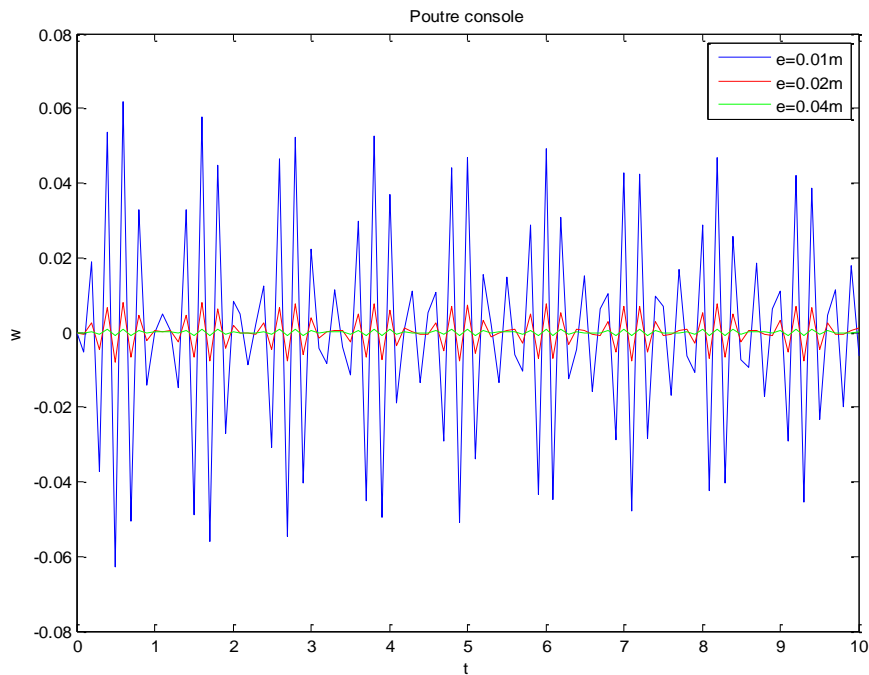


Fig 4-19 : Influence de l'épaisseur sur les vibrations verticales de la poutre

On voit bien que le choix des dimensions de la poutre est aussi important, vu leur impact sur les comportements statique et dynamique de la poutre. Par exemple, si on considère l'influence de l'épaisseur, on constate qu'il suffit d'augmenter l'épaisseur pour diminuer la flèche dans le cas statique et pour atténuer l'amplitude des vibrations verticales de la poutre dans le cas dynamique.

Conclusion :

Tout au long de ce travail, on s'est intéressé à l'étude de l'impact de l'application de l'effet piézoélectrique sur le comportement des poutres en flexion et à la modélisation de ces poutres d'une part. Et d'autre part on a simulé numériquement le comportement de ces poutres dans les deux cas élastique et piézoélectrique.

Une formulation par éléments finis pour des poutres piézoélectriques est présentée. Cette formulation est validée à travers une comparaison des résultats obtenus par cette dernière avec celles trouvées analytiquement.

Les équations de mouvement sont établies par une méthode énergétique variationnelle.

La résolution de ces équations est faite par la méthode de Newmark, qui a été vivement utilisée par divers auteurs vu sa simplicité, la précision des résultats qu'elle présente, ainsi que sa facilité à programmer.

Les résultats numériques présentés sont établis par un code de calcul élaboré sous MATLAB.

D'après cette étude on a pu constater que :

- L'application d'un effet piézoélectrique sur une poutre en flexion, en mode actionneur induit à l'apparition des déplacements axiaux.
- Le choix du matériau piézoélectrique constitue une étape primordiale, vu que chaque matériau a ses propres caractéristiques mécaniques et surtout piézoélectriques et il est destiné à une certaine catégorie d'application.
- Les dimensions de la pièce piézoélectrique sont aussi très importantes, que ce soit la longueur ou l'épaisseur, surtout cette dernière qui joue un rôle important dans l'atténuation des vibrations.

L'ensemble des résultats obtenus dans ce modeste travail consacré à l'étude des poutres piézoélectriques nous encourage à poursuivre l'analyse, en tenant compte de nouveaux paramètres qui n'ont pas été introduits comme par exemple la considération de l'effet d'une variation de la température ou la prise en compte de l'amortissement structural, la considération de nouvelles structures (les plaques et les coques), la généralisation de ce modèle pour les multicouches ou encore l'utilisation des modèles d'ordre élevé.